В.М. Зюзьков

СРАВНЕНИЯ С ЧИСЛАМИ ФИБОНАЧЧИ ПО ПРОСТОМУ МОДУЛЮ

Доказываются сравнения вида $F(expr1) \equiv \varepsilon F(expr2) \pmod{p}$, где p – простое число, ε равно 1 или -1 , в общем случае выражение $expr1$ есть произвольный многочлен от p и $expr2$ – более простое выражение, не содержащее p . Пример доказанной теоремы: пусть простое p имеет вид $5t \pm 1$, $k > 0$ – натуральное число и целые числа $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ – коэффициенты многочлена $A(x)$. Тогда имеем $F(A(p)) \equiv F(a_k + a_{k-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) \pmod{p}$. В частности, рассматривается случай, когда коэффициенты многочлена $expr1$ образуют период Пизано по модулю p . Для поиска сравнений, имеющих место, проводились эксперименты в системе *Mathematica*.

Ключевые слова: числа Фибоначчи, сравнения по простому модулю, период Пизано, система *Mathematica*.

Почти все результаты, доказанные в этой статье, первоначально были обнаружены в рамках экспериментальной математики [1] с помощью системы *Mathematica* с языком программирования *Wolfram* [1, 2]. Эксперименты помогли сформулировать цепочки достоверных догадок, доказать которые оказалось уже нетрудно. Кроме того, *Mathematica* применялась для получения примеров, иллюстрирующих изложение.

Через $F(n)$ будем обозначать числа Фибоначчи. Следуя [3], считаем $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, и для отрицательных индексов доопределяем числа Фибоначчи с помощью правила

$$F(-n) = (-1)^{n-1} F(n). \quad (1)$$

Это равенство остается в силе и когда n меняет свой знак. Теперь для любого целого n имеем $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$.

Мы начинаем с известных фундаментальных фактов ([4, с. 78–79] или [2, с. 232]). В дальнейшем до конца статьи через p обозначаются положительные простые числа.

Лемма 1.

- а) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то $F(p) \equiv 1 \pmod{p}$.
- б) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то $F(p) \equiv -1 \pmod{p}$.
- с) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то $F(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$.
- д) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то $F(p+1) \equiv 0 \pmod{p}$.

Отсюда, используя определение чисел Фибоначчи, сразу следует, что

- е) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то $F(p+1) \equiv 1 \pmod{p}$.
- ф) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то $F(p-1) \equiv 1 \pmod{p}$.

Теорема 1. Пусть простое p имеет вид $5t \pm 1$ и b – целое число. Тогда имеем

$$F(p+b) \equiv F(b+1) \pmod{p}. \quad (2)$$

Доказательство. Будем рассматривать два различных случая.

1. Случай $p+b \geq 0$. Будем использовать математическую индукцию по возрастанию b . Базис индукции составляют два сравнения для $b=0$: $F(p+0) \equiv F(0+1) \times$

$\times (\bmod p)$ – это лемма 1(a); и для $b = 1$: $F(p + 1) \equiv F(1 + 1) (\bmod p)$ – это лемма 1(e). Докажем индуктивный переход. Пусть выполнено $F(p + b) \equiv F(b + 1) (\bmod p)$ и $F(p + (b + 1)) \equiv F((b + 1) + 1) (\bmod p)$. Почленно сложим эти сравнения, что дает

$$F(p + b) + F(p + (b + 1)) \equiv F(b + 1) + F((b + 1) + 1) (\bmod p).$$

Суммы последовательных чисел Фибоначчи в последнем сравнении дают необходимое заключение

$$F(p + (b + 2)) \equiv F((b + 2) + 1) (\bmod p).$$

2. Случай $p + b \leq 0$. Теперь $b \leq 0$ и математическая индукция будет по убыванию b . Базис индукции составляют два сравнения для $b = 0$: $F(p + 0) \equiv F(0 + 1) (\bmod p)$ – это лемма 1(a); и для $b = -1$: $F(p - 1) \equiv F(-1 + 1) (\bmod p)$ – это лемма 1(c). Докажем индуктивный переход. Пусть выполнены сравнения $F(p + b) \equiv F(b + 1) (\bmod p)$ и $F(p + (b - 1)) \equiv F((b - 1) + 1) (\bmod p)$ и почленно вычтем эти сравнения, что дает

$$F(p + b) - F(p + (b - 1)) \equiv F(b + 1) - F((b - 1) + 1) (\bmod p).$$

Разности последовательных чисел Фибоначчи в последнем сравнении дают необходимое заключение

$$F(p + (b - 2)) \equiv F((b - 2) + 1) (\bmod p).$$

Таким образом, сравнение (2) доказано. ■

Следствие 1. Пусть простое p имеет вид $5t \pm 1$ и b – целое число. Тогда имеем

$$F(-p + b) \equiv F(b - 1) (\bmod p). \quad (3)$$

Доказательство. Имеем $F(-p + b) = (-1)^{-p+b-1} F(p - b)$ и, учитывая (1), (2) и нечетность p , получаем сравнение $F(-p + b) \equiv (-1)^b F(1 - b) (\bmod p)$. Снова применяя (1), получаем $(-1)^b F(1 - b) = (-1)^b (-1)^{1-b-1} F(b - 1) = F(b - 1)$, что дает (3). ■

Сейчас исследуем, какое сравнение по модулю p выполнено для $ap + b$, где a – произвольное целое число. Несколько вычислений с небольшими a , b и p приводят к предположению, что $F(ap + b) \equiv F(a + b) (\bmod p)$. Проделаем более серьезную экспериментальную проверку этого предположения.

Сначала создадим список простых чисел вида $p \equiv \pm 1 (\bmod 5)$ и не превосходящих простого числа с номером 200.

```
ps = Select[Prime[Range[200]], Mod[#, 5] == 1 || Mod[#, 5] == 4 &];
```

Можно посмотреть на начало и конец этого списка, пропуская 76 чисел:

```
Short[ps]
```

```
{11, 19, 29, 31, 41, 59, 61, 71, 79, <<76>>, 1061, 1069, 1091, 1109, 1129, 1151, 1171, 1181, 1201}
```

Далее тысячу раз будем генерировать пары a и b в диапазоне от -50 до 50 включительно. И для каждой пары будем перебирать все простые числа p из списка ps и выдавать булевское значение, говорящее о делимости $F(ap + b) - F(a + b)$ на p . Каждый раз берем конкатенацию этих значений. Все результаты тысячи конкатенаций собираем также в один список ss и делаем окончательную конкатенацию.

```
ss = {}; Do[a = RandomInteger[{-50, 50}]; b = RandomInteger[{-50, 50}];
AppendTo[ss, And@@(Divisible[Fibonacci[a # + b] - Fibonacci[a + b], #] &
/ @ ps)], 1000]; And @@ ss
True
```

Результат True говорит о том, что предположение оказалось верным для всей тысячи вариантов.

Теорема 2. Пусть простое p имеет вид $5t \pm 1$ и a, b – целые числа. Тогда имеем

$$F(ap + b) \equiv F(a + b) \pmod{p}. \quad (4)$$

Доказательство. Для $a = 0$ сравнение очевидно. Рассмотрим еще два случая.

1. $a > 0$. Доказательство будем проводить математической индукцией по возрастанию a . Базис индукции при $a = 1$ доказан в теореме 1. Для индуктивного шага предположим, что сравнение (4) выполнено для ap плюс любое целое число. Тогда $F((a + 1)p + b) = F(ap + (p + b)) \equiv F(a + (p + b)) \pmod{p}$. Далее имеем $F(a + (p + b)) = F(p + (a + b)) \equiv$ (по теореме 1) $F(a + 1 + b) \pmod{p}$. Таким образом, доказано сравнение (4) для $a + 1$.

2. $a < 0$. Доказательство будем проводить математической индукцией, уменьшая a . Базис индукции при $a = -1$ доказан в следствии 1. Для индуктивного шага предположим, что сравнение (4) имеет место для ap плюс любое целое число. Тогда $F((a - 1)p + b) = F(ap + (-p + b)) \equiv F(a + (-p + b)) \pmod{p}$. Далее получаем $F(a + (-p + b)) = F(-p + (a + b)) \equiv$ (по следствию 1) $F(a - 1 + b) \pmod{p}$. Таким образом, доказано сравнение (4) для $a - 1$. ■

Теорема 3. Пусть простое p имеет вид $5t \pm 1$, $k > 0$ – натуральное число и целые числа $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ – коэффициенты многочлена $A(x)$. Тогда имеем

$$F(A(p)) \equiv F(a_k + a_{k-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) \pmod{p}. \quad (5)$$

Доказательство. Сначала докажем, что для целых чисел $n \geq 1$, a и b выполнено

$$F(ap^n + b) \equiv F(a + b) \pmod{p}. \quad (6)$$

Будем проводить математическую индукцию по n . Базис индукции для $n = 1$ доказан в теореме 2. Пусть (6) выполнено для некоторого n . Докажем выполнение (6) для $n + 1$. Имеем равенство $F(ap^{n+1} + b) = F((ap^n)p + b)$ и снова в силу теоремы (2) получаем $F((ap^n)p + b) \equiv F(ap^n + b) \pmod{p}$. Используя индуктивное предположение, получаем требуемое сравнение $F(ap^{n+1} + b) \equiv F(a + b) \pmod{p}$.

Для доказательства утверждения (5) обозначим для любого натурального m , $k \geq m \geq 0$, через $B_m(x)$ многочлен с коэффициентами $a_m, a_{m-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$. Имеем $B_m(x) = a_m p^m + B_{m-1}(x)$, и тогда из (6) следует, что $F(B_m(p)) = F(a_m p^m + B_{m-1}(p)) \equiv F(B_{m-1}(p) + a_m) \pmod{p}$. Повторяя это преобразование до $m = 1$, получаем (5).

Следствие 2. Пусть N – натуральное число, которое в p -ичной системе счисления имеет цифры $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$. Тогда $F(N) \equiv F(a_k + a_{k-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) \times \pmod{p}$.

Перейдем к рассмотрению свойств, аналогичных свойствам, описанным в теоремах 1–3, для нечетных простых чисел вида $5t \pm 2$.

Формулировка следующей теоремы возникла после экспериментальной проверки для $b \in [-1000, 1000]$ и для всех простых чисел вида $5t \pm 2$ с порядковыми номерами, не превосходящими 1000.

Теорема 4. Пусть простое p имеет вид $5t \pm 2$ и b – целое число. Тогда имеем

$$F(p + b) \equiv -F(b - 1) \pmod{p}. \quad (7)$$

Доказательство. Это доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Рассмотрим два различных случая.

1. Случай $p + b \geq 0$. Будем использовать математическую индукцию по возрастанию b . Базис индукции составляют два сравнения для $b = 0$: $F(p + 0) \equiv -F(0 - 1) \pmod{p}$ – это лемма 1(b); и для $b = 1$: $F(p + 1) \equiv -F(1 - 1) \pmod{p}$ – это лемма 1(d). Докажем индуктивный переход. Пусть выполнены сравнения

$F(p + b) \equiv -F(b - 1) \pmod{p}$ и $F(p + (b + 1)) \equiv -F((b + 1) - 1) \pmod{p}$, что после почленного сложения получаем

$$F(p + b) + F(p + (b + 1)) \equiv -F(b - 1) - F((b + 1) - 1) \pmod{p}.$$

Суммы последовательных чисел Фибоначчи в последнем сравнении дают необходимое заключение $F(p + (b + 2)) \equiv -F((b + 2) - 1) \pmod{p}$.

2. Случай $p + b \leq 0$. Теперь $b \leq 0$ и математическая индукция будет по убыванию b . Базис индукции составляют сравнения: для $b = 0$ имеем $F(p + 0) \equiv -F(0 - 1) \times \pmod{p}$ – это лемма 1(b); и для $b = -1$ имеем $F(p - 1) \equiv -F(-1 - 1) \pmod{p}$ – это лемма 1(f). Докажем индуктивный переход. Пусть выполнены сравнения $F(p + b) \equiv -F(b - 1) \pmod{p}$ и $F(p + (b - 1)) \equiv -F((b - 1) - 1) \pmod{p}$ и почленное сложение этих сравнений дает

$$F(p + b) + F(p + (b - 1)) \equiv -F(b - 1) - F((b - 1) - 1) \pmod{p}.$$

Суммы последовательных чисел Фибоначчи в последнем сравнении дают необходимое заключение $F(p + (b + 1)) \equiv -F(b) \pmod{p}$. Таким образом, сравнение (7) доказано. ■

Следствие 3. Пусть нечетное простое p имеет вид $5t \pm 2$ и b – целые числа. Тогда имеем

$$F(-p + b) \equiv -F(b + 1) \pmod{p}. \quad (8)$$

Доказательство. Применяя (1), имеем $F(-p + b) = (-1)^{-p+b-1} F(p - b) = (-1)^b F(p - b)$, учитывая нечетность p . Поэтому сравнение (7) дает $F(-p + b) \equiv (-1)^{b+1} F(-b - 1) \times \pmod{p}$. Наконец, снова применяя (1), получаем $F(-p + b) \equiv -F(b + 1) \pmod{p}$. ■

Сейчас исследуем, какое сравнение по модулю p выполнено для $F(ap + b)$, где p – нечетное простое и имеет вид $5t \pm 2$, и a, b – целые числа. Эксперименты с различными числами a, b и p привели к предположению, что $F(ap + b) \equiv (-1)^a \times F(b - a) \pmod{p}$. Была проделана ниже описанная проверка этого предположения в системе *Mathematica*.

Создан список ps простых чисел вида $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$ и не превосходящих простого числа с номером 200.

```
ps = Select[Prime[Range[200]], Mod[#, 5] == 2 || Mod[#, 5] == 3 &];
```

Можно посмотреть на начало и конец этого списка, пропуская 86 чисел:

```
Short[ps]
```

```
{3, 7, 13, 17, 23, 37, 43, 47, 53, <<86>>, 1117, 1123, 1153, 1163, 1187, 1193, 1213, 1217, 1223}
```

Далее тысячу раз генерируются пары случайных чисел a и b в диапазоне от -50 до 50 включительно. И для каждой пары перебираются все простые числа p из списка ps и выдаётся булевское значение, говорящее о делимости $F(ap + b) - (-1)^a F(b - a)$ на p . Вычисляется конкатенация этих значений. Все результаты тысячи конкатенаций собираются также в один список ss и делается окончательная конкатенация.

```
ss = { }; Do[a = RandomInteger[{-50, 50}]; b = RandomInteger[{-50, 50}];  
AppendTo[ss, And@@(Divisible[Fibonacci[a # + b] - (-1)^a Fibonacci[b - a], #] &  
/@ ps)], 1000]; And @@ ss
```

```
True
```

Результат True говорит о том, что предположение оказалось верным для всей тысячи вариантов. Догадываясь, какой вид имеет искомое сравнение, нетрудно провести доказательство.

Теорема 5. Пусть нечетное простое p имеет вид $5t \pm 2$ и $a \neq 0$, b – целые числа. Тогда имеем

$$F(ap + b) \equiv (-1)^a F(b - a) \pmod{p}. \quad (9)$$

Доказательство. Если $a = 0$, то обе части в (9) совпадают. Сравнение (9) для случая $a > 0$ докажем методом математической индукции. Базис индукции при $a = 1$ выполнен по теореме 4. Пусть по индуктивному предположению сравнение (9) выполнено для $a = n$ и для любого b . Тогда $F((n + 1)p + b) = F(np + p + b) \equiv \equiv (-1)^n F(p + b - n) \pmod{p}$ и по теореме 4 следует, что $(-1)^n F(p + b - n) \equiv \equiv (-1)^n (-1) F(b - n - 1) \pmod{p}$. Правая часть последнего сравнения равна $(-1)^{n+1} F(b - (n + 1))$, что доказывает индуктивный шаг.

Теперь рассмотрим $a < 0$. С помощью (1) переходим к положительному множителю перед p : $F(ap + b) = (-1)^{ap+b-1} F(-ap - b) \equiv (-1)^{ap+b-1} (-1)^{-a} F(-b + a) \pmod{p}$. В правой части сравнения снова применяем (1), получаем $(-1)^{ap+b-1} (-1)^{-a} \times \times (-1)^{-b+a-1} F(b - a) = (-1)^{ap} F(b - a)$ и имеем $(-1)^{ap} = (-1)^a$ для нечетного p . На этом доказательство (9) заканчиваем. ■

Теорема 6. Пусть нечетное простое p имеет вид $5t \pm 2$, $k > 0$ – натуральное число и целые числа $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ – коэффициенты многочлена $A(x)$. Тогда имеем

$$F(A(p)) \equiv (-1)^R F(S) \pmod{p}, \text{ где } S = \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i, R = \sum_{i=0}^k i a_i. \quad (10)$$

Доказательство. Сначала докажем, что для целых чисел $m \geq 0$, $a \neq 0$ и b выполнено

$$F(ap^m + b) \equiv (-1)^{am} F(b + (-1)^m a) \pmod{p}. \quad (11)$$

Базис математической индукции при $m = 0$ очевидно выполнен. Пусть по индуктивному предположению (11) выполнено для $m = n$ для любого a и b . Тогда по теореме 5 имеем сравнение $F(ap^{n+1} + b) = F((ap^n)p + b) \equiv (-1)^a F(b - ap^n) \pmod{p}$, так как четности чисел ap^n и a совпадают. Далее, применяя индуктивное предположение, получаем сравнение $(-1)^a F(b - ap^n) \equiv (-1)^a (-1)^{-an} F(b + (-1)^n (-a)) \pmod{p}$. Но правая часть сравнения равна $(-1)^{a(n+1)} F(b - (-1)^{n+1} a)$, поскольку $1 - n$ и $n + 1$ имеют одинаковую четность. Что и доказывает индуктивный шаг.

Для доказательства утверждения (10) обозначим для любого натурального m , с условием $k \geq m \geq 0$, через $B_m(x)$ многочлен с коэффициентами $a_m, a_{m-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$. Имеем

$$B_m(x) = a_m p^m + B_{m-1}(x) \quad (12)$$

и, таким образом, из (11) следует, что

$$F(B_m(p)) = F(a_m p^m + B_{m-1}(p)) \equiv (-1)^{a_m m} F(B_{m-1}(p) + (-1)^m a_m) \pmod{p}.$$

Повторно применяя (12) и (11), получаем

$$F(B_m(p)) \equiv (-1)^{a_m m} (-1)^{a_{m-1}(m-1)} F(B_{m-2}(p) + (-1)^m a_m + (-1)^{m-1} a_{m-1}) \pmod{p}.$$

Этот процесс будем повторять, пока не дойдем до $m = 1$. Окончательно, получаем

$$F(B_m(p)) \equiv (-1)^{R_m} F(S_m) \pmod{p}, \text{ где } S_m = \sum_{i=0}^m (-1)^i a_i, R_m = \sum_{i=0}^m i a_i.$$

При замене m на k имеем (10). ■

Пример. Пусть $A(x) = 6x^4 + 16x^3 + 13x^2 - 7x - 275$.

Тогда $R = 6 \cdot 4 + 16 \cdot 3 + 13 \cdot 2 - 7 = 107$, $S = 6 - 16 + 13 + 7 - 275 = -265$.

Возьмем $p = 13$.

Вычислим значение многочлена $A(p)$:

$$A = 6x^4 + 16x^3 + 13x^2 - 7x - 275;$$

$$A /. x \rightarrow 13$$

208349

Оценим количество десятичных цифр в числе $F(208349)$.

$$\text{Length}[\text{IntegerDigits}[\text{Fibonacci}[208349]]]$$

43543

Значения левой и правой частей сравнения (10) совпали по модулю 13.

$$\{\text{Mod}[\text{Fibonacci}[208349], 13], \text{Mod}[-\text{Fibonacci}[-265], 13]\} \\ \{1, 1\}$$

Сравнения (5) и (10) приводят к следствиям, связанным с понятием периода Пизано. Последовательность чисел Фибоначчи $\{F(n)\}$ по модулю является периодической для любого модуля m и соответствующий период называется периодом Пизано и его длина обозначается как $\pi(m)$ [5]. Например, для $m = 5$ в последовательности $\{F(n)\} \bmod 5$ повторяющейся подпоследовательностью является период Пизано $\{0, 2, 2, 4, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2\}$ и $\pi(5) = 20$. По определению периода Пизано для любого целого n и любого модуля m имеет место сравнение

$$F(n) \equiv F(n \bmod \pi(m)) \pmod{m}, \quad (13)$$

где внутренний “mod” обозначает операцию нахождения остатка от целочисленного деления.

Следствие 4. Пусть простое p имеет вид $5t \pm 1$, натуральное $k > 0$ и целые числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$ образуют период Пизано длиной $k + 1$ для чисел Фибоначчи по модулю p . Положим $s = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k$ и $A(x)$ – многочлен степени k с коэффициентами a_i . Тогда имеет место сравнение

$$F(s) \equiv F(A(p) \bmod (k + 1)) \pmod{p}. \quad (14)$$

Доказательство сразу следует из сравнений (5) и (13) при $m = p$ и $n = A(p)$.

Следствие 5. Пусть нечетное простое p имеет вид $5t \pm 2$, $k > 0$ – натуральное число и целые числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$ образуют период Пизано длиной $k + 1$ для чисел Фибоначчи по модулю p . Положим $A(x)$ – многочлен степени k с коэффициентами a_i . Обозначим через S, R и ε выражения

$$S = \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i, R = \sum_{i=0}^k i a_i \text{ и } \varepsilon = (-1)^R.$$

Тогда имеем

$$\varepsilon F(S) \equiv F(A(p) \bmod (k + 1)) \pmod{p}. \quad (15)$$

Доказательство сразу следует из сравнений (10) и (13) при $m = p$ и $n = A(p)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зюзьков В.М. Эксперименты в теории чисел. Томск: Изд-во НТЛ, 2019. 348 с. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000658998>
2. Wolfram Mathematica. URL: <http://www.wolfram.com/mathematica>
3. Грэхем Р., Кнут Д., Поташник О. Конкретная математика. Основание информатики. 2-е изд., испр. М.: Мир; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 703 с.
4. Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers and the Golden Section: Theory and Applications, Ellis Horwood, Chichester, England, 1989. 190 p.
5. Weisstein Eric W. Wolfram MathWorld: Pisano Period. URL: <https://mathworld.wolfram.com/PisanoPeriod.html>

Статья поступила 06.07.2020

Zyuz'kov V.M. (2021) CONGRUENCES OF THE FIBONACCI NUMBERS MODULO A PRIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics] 69. pp. 15–21

DOI 10.17223/19988621/69/2

Keywords: Fibonacci numbers, congruences modulo a prime number, Pisano period, Mathematica system.

Congruences of the form $F(expr1) \equiv \varepsilon F(expr2) \pmod{p}$ by prime modulo p are proved, whenever $expr1$ is a polynomial with respect to p . The value of ε equals 1 or -1 and $expr2$ does not contain p . An example of such a theorem is as follows: given a polynomial $A(p)$ with integer coefficients $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ and with respect to p of form $5t \pm 2$; then, $F(A(p)) \equiv F(a_k + a_{k-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) \pmod{p}$. In particular, we consider the case when the coefficients of the polynomial $expr1$ form the Pisano period modulo p . To search for existing congruences, experiments were performed in the Wolfram Mathematica system.

AMS Mathematical Subject Classification: MSC 11B39, 11A07

Valentin M. ZYUZ'KOV (Senior Researcher, Associate Professor of chair of Computational Mathematics and Computer Modeling, Tomsk State University, Professor of chair of computer systems in control and design of the Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vmz@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Zyuz'kov V.M. (2019) *Eksperimenty v teorii chisel* [Experiments in the number theory]. Tomsk: Izd-vo NTL. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000658998>
2. Wolfram Mathematica. URL: <http://www.wolfram.com/mathematica>
3. Graham R., Knut D., Patashnik O. (2006) *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley.
4. Vajda S. (1989) *Fibonacci & Lucas Numbers and the Golden Section: Theory and Applications*. Chichester: Ellis Horwood.
5. Weisstein E.W. Wolfram MathWorld: Pisano Period. URL: <https://mathworld.wolfram.com/PisanoPeriod.html>.

Received: July 6, 2020