УДК 531.38
DOI 10.17223/19988621/69/8

Вин Ко Ко, А.Н. Темнов

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ КОЛЕБАНИЙ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЁМЕ

Исследованы нелинейные колебания двухслойной жидкости, полностью заполняющей ограниченный объём. Используя две основные несимметричные гармоники, возбуждаемые в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, исследованы дифференциальные уравнения нелинейных колебаний поверхности раздела двухслойной жидкости. В результате построены области неустойчивости вынужденных колебаний двухслойной жидкости в цилиндрическом баке, а также области параметрического возбуждения для различных соотношений плотностей жидкостей. Для построения областей неустойчивостей при приближенном решении нелинейных дифференциальных уравнений использован метод Бубнова – Галеркина.

Ключевые слова: цилиндрический бак, двухслойная жидкость, нелинейные колебания, область неустойчивости, гидродинамические коэффициенты.

Нелинейная теория движения ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью, а также с поверхностью раздела двух жидкостей, представляющая собой особый раздел механики, используется при решении ряда практических задач. Обеспечение устойчивого полета современных и перспективных летательных аппаратов ракетно-космической техники и достижение точности управления ими невозможно без тщательного описания динамических процессов, происходящих в сложной механической системе.

Литературу по волновым движениям жидкостей, состоящих из слоев разных плотностей и имеющих отношение к настоящей работе, условно можно представить двумя направлениями.

К первому отнесем работы, связанные с исследованием волновых движений жидкостей разных плотностей, занимающих открытую область пространства. Здесь прежде всего необходимо отметить основополагающие работы Сретенского Л.Н. [1], Ландау Л.Д. [2], в которых изложены основные сведения и методы исследования колебаний двух жидкостей. Из иностранных работ отметим фундаментальные статьи по колебаниям двухслойной жидкости Thorpe S.A., Camassa R., M. La Rocca [3–5].

Среди современных работ, связанных с рассматриваемой тематикой нелинейных колебаний двухслойной жидкости, следует отнести работы [6, 7], в которых проведено экспериментальное исследование профиля двумерно гравитационных волн и показано, что для таких волн имеют место вторичные циркуляционные течения, пронизывающие всю жидкость. В работе Порубова А.В. [8] установлено, что двумерные нелинейные внутренние волны двухслойной жидкости могут быть описаны при помощи двумерного обобщенного уравнения Гарднера. Басинским К.Ю. в работе [9] рассмотрена нелинейная задача о распространении волны на свободной поверхности вязкой жидкости в плоском случае. Закономер-

ности реализации гравитационного нелинейного волнового движения в двухслойной жидкости с конечной глубиной верхнего слоя исследованы в работе [10].

К второму направлению отнесем работы, в которых изучаются волновые движения жидкостей в ограниченном объеме неподвижного или подвижного твердого тела. Из последних работ отметим работы Калининченко В.А., [11, 12], в которых рассмотрен эффект влияния верхнего слоя вязкой жидкости на колебания двухслойной жидкости в прямоугольном сосуде. В статье Мерзлякова А.В., Крюковой Е.А. [13] рассмотрена плоская задача о колебаниях в прямоугольном баке двухслойной жидкости, разделенной жёсткой горизонтальной проницаемой перегородкой, а в работах [14, 15] – подобная задача в круглом цилиндрическом баке с упругой перегородкой.

В работе Науменко В.В., Стрельниковой Е.А. [16] показано, что использование потенциала двойного слоя позволяет учесть эффект краевого вихревого шнура и дает полное соответствие математической модели реальному процессу в задаче о свободных колебаниях полой оболочки в идеальной несжимаемой жидкости.

В работах [17–21] рассмотрены малые колебания двух- и трёх-слоистых жидкостей в полостях различной формы для случаев подвижного и неподвижного твердого тела. При проведении экспериментов с жидкостями, полностью заполняющими круглый цилиндрический бак, вблизи основного резонанса было замечено вращательное движение слоёв жидкостей, подобное движению свободной поверхности однородной жидкости.

Особенности линейных и нелинейных колебаний однородной жидкости, частично заполняющей полость подвижного и неподвижного твердого тела, рассмотрены в [22–25].

Целью данной статьи является исследование нелинейных колебаний поверхности раздела двухслойной жидкости и получение теоретической интерпретации наблюдаемого эффекта.

1. Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричный сосуд произвольной формы, полностью заполненный двумя жидкостями. Введем систему координат $Oxyz$, с началом в точке O на невозмущённой поверхности раздела жидкостей (рис. 1). Жидкости плотности ρ_1 и ρ_2 предполагаются идеальными и несжимаемыми. Обозначим через h_1 и h_2 глубины каждого слоя жидкости при отсутствии вращательного движения поверхности раздела. Систему координат $Oxyz$ расположим так, чтобы в невозмущённом положении механической системы тело – жидкости ось Ox была перпендикулярна невозмущённой поверхности раздела жидкостей Γ_0 .

Смоченные поверхности полости обозначим через $S^{(i)} (i=1,2)$, а возмущённую поверхность раздела жидкостей – через Γ (см. рис. 1).

Уравнение возмущённой поверхности раздела можно представить в виде, решённом относительно координаты x :

$$\zeta = x - f(y, z, t) = 0. \quad (1)$$

В предположении отсутствия вихревого движения в каждой жидкости сформулируем задачу о нелинейных колебаниях поверхности раздела жидкостей, полностью заполняющих полость подвижного твердого тела, совершающего поступательное движение по закону: $U(t) = S \cos \omega t$ (см. рис. 4).

Рис. 1. Система координат и основные обозначения для тела с двухслойной жидкостью

Fig. 1. Coordinate system and basic designations for a body with a two-layer fluid

С учетом допущений постановка задачи состоит из уравнения Лапласа, условий непротекания на смачиваемых поверхностях, а также кинематического и динамического условий на возмущенной поверхности раздела и имеет вид

$$\nabla^2 \Phi^{(1)} = 0, \text{ в } \tau_1, \quad \nabla^2 \Phi^{(2)} = 0, \text{ в } \tau_2; \quad (2)$$

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{dv} = 0, \text{ на } S_1, \quad \frac{d\Phi^{(2)}}{dv} = 0, \text{ на } S_2, \quad \frac{d\Phi^{(1)}}{dv} = \frac{d\Phi^{(2)}}{dv} \text{ на } \Gamma; \quad (3)$$

$$\left(\rho_2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} [\rho_2 (\nabla \Phi^{(2)})^2 - \rho_1 (\nabla \Phi^{(1)})^2] + (\rho_2 - \rho_1) \vec{U} \cdot \vec{r} = (\rho_1 - \rho_2) \vec{g} \cdot \vec{r} \text{ на } \Gamma. \quad (4)$$

$\vec{r}|_{\Gamma} = \vec{r}|_{\Gamma_0} + \vec{i}_x f$, $\vec{v}$ – внешняя нормаль к соответствующей границе области, занимаемой жидкостью.

При решении подставленной задачи будем предполагать, что квадрат отклонений f^2 возмущенной поверхности раздела от невозмущенной имеет порядок малости ε . При вычислениях будем удерживать линейные, квадратичные, кубические члены f, f^2, f^3 , пренебрегая величиной ε^2 .

Рассмотрим сначала случай свободных движений жидкостей в неподвижной полости. С этой целью представим потенциалы скоростей каждой жидкости в виде следующей суммы:

$$\Phi^{(k)}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) B_i^{(k)}(x, y, z), \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

где $\Phi^{(k)}$ – потенциалы скоростей верхней и нижней жидкостей, $B_i^{(k)}$ – функции координат верхней и нижней жидкостей, α_i – обобщенные координаты волновых

движений жидкостей на поверхностях раздела i -й гармоники. Здесь и в дальнейшем суммирование по i производится по натуральному ряду чисел от единицы до бесконечности. Верхние индексы параметров (1) и (2) относятся соответственно к верхней и нижней жидкостям.

Предположим далее, что известна некоторая ортогональная на области Γ_0 система функций $f_i(y, z)$, составляющих вместе с постоянной величиной полную систему функций. Отклонение поверхности раздела жидкостей разложим по системе функций f_i :

$$f = \sum_{i=1} \alpha_i(t) f_i(y, z). \quad (6)$$

Подставив (5) в уравнения Лапласа (2) и в кинематические граничные условия (3), получим краевые задачи

$$\nabla^2 B_i^{(k)} = 0, \text{ в } \tau_k, \left. \frac{dB_i^{(k)}}{d\nu} \right|_{S_k} = 0, (k=1,2), \left. \frac{dB_i^{(1)}}{d\nu} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{dB_i^{(2)}}{d\nu} \right|_{\Gamma} = f_i / N. \quad (7)$$

Представим функции $B_i^{(k)}$ в виде разложения по параметрам α_i до второго порядка включительно

$$B_i^{(k)} = B_{i0}^{(k)} + \sum_j \alpha_j B_{ij}^{(k)} + \sum_j \sum_k \alpha_j \alpha_k B_{ijk}^{(k)} + \dots, \quad (8)$$

где функции $B_{i0}^{(k)}, B_{ij}^{(k)}, B_{ijk}^{(k)}$ зависят только от пространственных координат и не зависят от времени.

Используя разложения вектора нормали и производных по нормали на возмущенной поверхности раздела жидкостей в ряд Тейлора и выражая все функции, входящие в кинематические условия через их значения на невозмущенной поверхности раздела, исходную нелинейную задачу сведем к последовательному решению линейных краевых задач. С этой целью подставим разложения (6), (8) в (7) и, приравнявая выражения при одинаковых степенях параметров α_i , после некоторых преобразований получим следующие краевые задачи для введенных выше функций:

$$\nabla^2 B_{i0}^{(k)} = 0, \text{ в } \tau_k, \frac{dB_{i0}^{(k)}}{d\nu} = 0, \text{ на } S_k, \frac{dB_{i0}^{(1)}}{d\nu} = \frac{dB_{i0}^{(2)}}{d\nu} = f_i \text{ на } \Gamma_0; \quad (9)$$

$$\nabla^2 B_{ij}^{(k)} = 0, \text{ в } \tau_k, \frac{dB_{ij}^{(k)}}{d\nu} = 0, \text{ на } S_k; \quad (10)$$

$$\frac{dB_{ij}^{(1)}}{d\nu} = \frac{dB_{ij}^{(2)}}{d\nu} = \nabla' \cdot (f_j \nabla' B_{i0}^{(1)}) = \nabla' \cdot (f_j \nabla' B_{i0}^{(2)}) \text{ на } \Gamma_0; \quad (11)$$

$$\nabla^2 B_{ijk}^{(k)} = 0, \text{ в } \tau_k, \frac{dB_{ijk}^{(k)}}{d\nu} = 0, \text{ на } S_k; \quad (12)$$

$$\frac{dB_{ijk}^{(1)}}{d\nu} = \frac{dB_{ijk}^{(2)}}{d\nu} = \frac{1}{2} \nabla' \cdot (f_j \nabla' B_{ik}^{(k)} + f_k \nabla' B_{ij}^{(k)}) + \frac{1}{2} \nabla' \cdot (f_j f_k \nabla' \frac{\partial B_{i0}^{(k)}}{\partial x}) \text{ на } \Gamma_0. \quad (13)$$

Далее воспользуемся динамическим граничным условием (4). Умножим уравнение (4) на функцию f_i и проинтегрируем по невозмущенной поверхности Γ_0 . В результате получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для обобщенных координат α_i по индексу i :

$$\begin{aligned} & (\mu_i^{(2)} - \mu_i^{(1)}) \frac{d^2 \alpha_i}{dt^2} + g(N_i^{(2)2} - N_i^{(1)2}) \alpha_i + \sum_j \sum_k (\mu_{jik}^{(2)} - \mu_{jik}^{(1)}) \alpha_k \frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} + \\ & + \sum_j \sum_k (N_{jik}^{(2)} - N_{jik}^{(1)}) \frac{d \alpha_j}{dt} \frac{d \alpha_k}{dt} + \sum_j \sum_k \sum_l (\mu_{jikl}^{(2)} - \mu_{jikl}^{(1)}) \alpha_k \alpha_l \frac{d^2 \alpha_j}{dt^2} + \\ & + \sum_j \sum_k \sum_l (N_{jikl}^{(2)} - N_{jikl}^{(1)}) \alpha_l \frac{d \alpha_j}{dt} \frac{d \alpha_k}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (14)$$

где
$$\mu_i^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} B_i^{(k)} f_i^{(k)} d\Gamma_0, \quad N_i^{(k)2} = \rho_k \int_{\Gamma_0} (f_i^{(k)})^2 d\Gamma_0; \quad (15)$$

$$\mu_{jik}^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} (B_{ik}^{(k)} + f_k^{(2)} \frac{\partial B_{i0}^{(k)}}{\partial x_k}) f_j^{(k)} d\Gamma_0; \quad (16)$$

$$\mu_{jikl}^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} [B_{j0}^{(k)} \frac{\partial B_{ikl}^{(k)}}{\partial x_k} + (\frac{\partial B_{ik}^{(k)}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} f_k^{(2)} \frac{\partial^2 B_{i0}^{(k)}}{\partial x_k^2}) f_i^{(k)} f_j^{(k)}] d\Gamma_0; \quad (17)$$

$$N_{jik}^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} (B_{jk}^{(k)} + \frac{1}{2} \nabla B_{j0}^{(k)} \cdot \nabla B_{k0}^{(k)}) f_i^{(k)} d\Gamma_0; \quad (18)$$

$$N_{jikl}^{(k)} = \rho_k \left\{ \int_{\Gamma_0} [2B_{ikl}^{(k)} + f_l^{(k)} \frac{\partial B_{jk}^{(k)}}{\partial x_2} + \nabla B_{jk}^{(k)} \cdot \nabla B_{kl}^{(k)} + \nabla B_{k0}^{(k)} \cdot \nabla B_{jl}^{(k)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} f_l^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla B_{j0}^{(k)} \cdot \nabla B_{k0}^{(k)}) f_i^{(k)}] d\Gamma_0 \right\}. \quad (19)$$

2. Определение гидродинамических коэффициентов уравнений движения для случая цилиндрической полости в неподвижном твёрдом теле

Рассмотрим сначала неподвижное твердое тело (т.е. $U(t) = 0$) с цилиндрической полостью, целиком заполненной жидкостями. Пусть полость имеет форму кругового цилиндра радиуса $r = r_0$ (см. рис. 2). Введем цилиндрическую систему координат x, r, η , связанную с декартовой x, y, z следующими формулами: $x = x$, $y = r \cos \eta$, $z = r \sin \eta$.

Для исследования поставленной задачи выделим две основные несимметричные гармоники, возбуждаемые в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и определяемые обобщенными координатами и формами $\alpha_i = \alpha_i$ ($i = 1, 2$): $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $f_1 = f_\alpha$, $f_2 = f_\beta$.

Рис. 2. Обозначения и системы координат для случая прямого кругового неподвижного цилиндра с двухслойной жидкостью

Fig. 2. Designations and coordinate systems for the case of a straight circular fixed cylinder with a two-layer fluid

Рис. 3. Формы поверхностей раздела при возбуждении основных и вспомогательных гармоник α, β

Fig. 3. The shapes of interfaces in the course of generation of the fundamental and auxiliary harmonics α, β

В цилиндрической системе координат форму основного тона колебаний поверхности раздела жидкостей представим в виде, аналогичном представлению свободной поверхности жидкости при нелинейных колебаниях [23] (рис. 3).

$$f_{\alpha}^{(k)}(y, z) = \varphi(r)^{(k)} \sin \eta, \quad f_{\beta}^{(k)}(y, z) = \varphi(r)^{(k)} \cos \eta, \quad (k = 1, 2). \quad (20)$$

Представим искомые функции в виде

$$B_{\alpha 0}^{(k)} = \psi^{(k)}(x, r) \sin \eta; \quad B_{\beta 0}^{(k)} = \psi^{(k)}(x, r) \cos \eta; \quad (21)$$

$$B_{\alpha \alpha}^{(k)} = \Psi_0^{(k)} - \Psi_2^{(k)} \cos 2\eta; \quad B_{\alpha \beta}^{(k)} = B_{\beta \alpha}^{(k)} = \Psi_2^{(k)} \sin 2\eta; \quad B_{\beta \beta}^{(k)} = \Psi_0^{(k)} + \Psi_2^{(k)} \cos 2\eta. \quad (22)$$

Краевая задача (9) совпадает с аналогичной задачей для малых колебаний жидкостей, поэтому воспользуемся результатами работ [17, 23] и запишем функцию в виде $\psi^{(k)}(x, r) = X_{nm}^{(k)}(x)Y_{nm}(r)$, $k = 1, 2$,

$$X_{nm}^{(1)}(x) = -\frac{\text{ch}(k_{nm}(x - h_1))}{k_{nm} \text{sh}(k_{nm}h_1)}; \quad X_{nm}^{(2)}(x) = \frac{\text{ch}(k_{nm}(x + h_2))}{k_{nm} \text{sh}(k_{nm}h_2)}; \quad Y_{nm}(r) = \frac{J_m(k_{nm}r)}{J_m(k_{nm}r_0)}, \quad (23)$$

$k_{nm} = \xi_{nm} / r_0$, ξ_{nm} является n -м корнем производной от функции Бесселя m -го порядка. Здесь индексы n, m принимают значения 1.1; 1.0; 1.2.

Имея решения краевых задач (9), нетрудно вычислить гидродинамические коэффициенты линейных уравнений движения тела с жидкостями (15), соответст-

вующие случаю малых перемещений частиц жидкостей:

$$N_{11}^{(1)2} = \rho_1 \delta_{11}, \quad N_{11}^{(2)2} = \rho_2 \delta_{11}, \quad \mu_0^{(1)} = \rho_1 \frac{\delta_{11}}{\ell_{11}^{(1)}}, \quad \mu_0^{(2)} = \rho_2 \frac{\delta_{11}}{\ell_{11}^{(2)}}, \quad \delta_{11} = \pi \frac{r_0^2 (\xi_{11}^2 - 1)}{2 \xi_{11}^2},$$

$$\ell_{11}^{(1)} = -k_{11} \operatorname{th}(k_{11} h_1), \quad \ell_{11}^{(2)} = k_{11} \operatorname{th}(k_{11} h_2). \quad (24)$$

Решения краевых задач (10) – (13), учитывающих нелинейные эффекты, будем искать в виде соответствующих разложений в ряд Фурье по функциям Бесселя нулевого и второго порядков, т.е.

$$\Psi_m^{(k)}(x, r) = \sum_n c_{nm}^{(k)} X_{nm}^{(k)}(x) Y_{nm}(r), \quad m = 0, 2. \quad (25)$$

Коэффициенты этих разложений определяются следующими интегралами:

$$c_{n0}^{(k)} = \frac{1}{2 \ell_{11}^{(k)} N_{n0}^{(k)2}} \int_0^{r_0} [Y_{11}'^2 + \left(\frac{1}{r^2} - k_{11}^2\right) Y_{11}^2] Y_{n0} r dr; \quad N_{n0}^{(k)2} = \frac{r_0^2}{2}; \quad (26)$$

$$c_{n2}^{(k)} = \frac{1}{2 \ell_{11}^{(k)} N_{n0}^{(k)2}} \int_0^{r_0} [Y_{11}'^2 - \left(\frac{1}{r^2} + k_{11}^2\right) Y_{11}^2] Y_{n2} r dr; \quad N_{n2}^{(k)2} = \frac{r_0^2 (\xi_{n2}^2 - 4)}{2 \xi_{n2}^2}. \quad (27)$$

Собирая значения функций (26) – (27), вычислим значения параметров $\mu_1^{(k)}$ и $\mu_2^{(k)}$, определяющих нелинейность волновых движений жидкости, учет которых позволяет описать явление вращения поверхности раздела жидкостей:

$$\mu_1^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4 \ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \left\{ [6 Y_{11}'^2 + \left(\frac{2}{r^2} - 3 k_{11}^2\right) Y_{11}^2] Y_{11} + \sum_n \frac{4 c_{n0}^{(k)}}{\ell_{n0}^{(k)}} (Y_{n0}' Y_{11}' - k_{n0}^2 Y_{n0} Y_{11}) + \right. \\ \left. + \sum_n \frac{2 c_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} [Y_{n2}' Y_{11}' + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2\right) Y_{n2} Y_{11}] \right\} Y_{11} r dr; \quad (28)$$

$$\mu_2^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4 \ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \left\{ [2 Y_{11}'^2 - \left(\frac{2}{r^2} + k_{11}^2\right) Y_{11}^2] Y_{11} + \sum_n \frac{2 c_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} [Y_{n2}' Y_{11}' + \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2\right) Y_{n2} Y_{11}] \right\} Y_{11} r dr. \quad (29)$$

Перепишем уравнения для обобщенных координат волновых движений жидкостей на поверхности раздела в виде

$$\ddot{\alpha} + \sigma^2 \alpha + d_1 (\alpha^2 \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 \alpha + \alpha \beta \ddot{\beta} + \alpha \dot{\beta}^2) + d_2 (\beta^2 \ddot{\alpha} + 2 \beta \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\alpha} - 2 \alpha \dot{\beta}^2) = 0; \quad (30)$$

$$\ddot{\beta} + \sigma^2 \beta + d_1 (\beta^2 \ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \beta + \alpha \beta \ddot{\alpha} + \beta \dot{\alpha}^2) + d_2 (\beta^2 \ddot{\beta} + 2 \alpha \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\alpha} - 2 \beta \dot{\alpha}^2) = 0, \quad (31)$$

где

$$\sigma^2 = \frac{g(N_{11}^{(2)2} - N_{11}^{(1)2})}{\mu_0^*}, \quad d_1 = \frac{(\mu_1^{(2)} - \mu_1^{(1)})}{\mu_0^*}, \quad d_2 = \frac{(\mu_2^{(2)} - \mu_2^{(1)})}{\mu_0^*}, \quad \mu_0^* = (\mu_0^{(2)} - \mu_0^{(1)}).$$

3. Исследование устойчивости вынужденных и параметрических колебаний жидкостей в простейшем случае

Пусть полость совершает заданные движения в направлении оси Oz по закону $U(t) = S \cos \omega t$, где $U(t)$ – смещение заданного движения сосуда (см. рис. 4), S и ω – амплитуда и частота возмущения.

Рис. 4. Цилиндрический сосуд, совершающий поступательное движение
Fig. 4. Cylindrical tank in translational motion

Соответствующая этому случаю система нелинейных уравнений приобретает вид

$$L_1(\alpha, \beta) = \ddot{\alpha} + \sigma^2 \alpha + d_1(\alpha^2 \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 \dot{\alpha} + \alpha \beta \ddot{\beta} + \alpha \dot{\beta}^2) + \\ + d_2(\beta^2 \ddot{\alpha} + 2\beta \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\alpha} - 2\alpha \dot{\beta}^2) - \omega^2 P \cos \omega t = 0; \quad (32)$$

$$L_2(\alpha, \beta) = \ddot{\beta} + \sigma^2 \beta + d_1(\beta^2 \ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 \dot{\beta} + \alpha \beta \ddot{\alpha} + \beta \dot{\alpha}^2) + \\ + d_2(\beta^2 \ddot{\beta} + 2\alpha \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\alpha} - 2\beta \dot{\alpha}^2) = 0, \quad (33)$$

где $P = \frac{S\lambda}{\mu_0}$, $\lambda = \lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}$, $\lambda^{(k)} = \rho_k \pi \int_0^{r_0} r^2 Y_{11} dr = \frac{\rho_k \pi r_0^3}{\xi_{11}^2}$, $k = 1, 2$.

Эта система приближенно описывает вынужденные и параметрические возбуждаемые колебания поверхности раздела жидкостей. В том случае, когда параметрические колебания в системе не возникают ($\beta \equiv 0$), вынужденные колебания описываются нелинейным дифференциальным уравнением

$$L_1(\alpha) = \ddot{\alpha} + \sigma^2 \alpha + d_1(\alpha^2 \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 \dot{\alpha}) = \omega^2 P \cos \omega t. \quad (34)$$

Приближенное решение этого уравнения найдем методом Бубнова – Галеркина, представив решения в виде

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos k\omega t + \bar{\alpha}_k \sin k\omega t), \quad (35)$$

где α_k и $\bar{\alpha}_k$ – неизвестные постоянные.

Удержав в (35) только основные гармоники

$$\alpha(t) = A \cos \omega t + \bar{A} \sin \omega t, \quad (36)$$

получим уравнение

$$(\bar{\sigma}^2 - 1)A - m_1 A^3 = P, \quad \bar{A} \equiv 0, \quad (37)$$

где $m_1 = d_1 / 2$, $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 / \omega^2$.

Уравнение (37) используется для определения амплитуд вынужденных колебаний двухслойной жидкости в зависимости от параметра P и ω . Положив в (37) $P = 0$, для определения зависимости амплитуд свободных колебаний жидкостей от частоты получим формулу

$$(\bar{\sigma}^2 - 1) - m_1 A^2 = 0. \quad (38)$$

В дальнейшем при определении установившихся режимов движения жидкостей и границ областей их устойчивости используются основные слагаемые в разложениях типа (35).

Остановимся на вопросе об устойчивости периодического решения (36). Ответ на него состоит в том, чтобы найти те значения параметров S и ω , при которых установившийся режим

$$\alpha(t) = A \cos \omega t, \quad \beta \equiv 0, \quad (39)$$

описываемый системой нелинейных уравнений (32) – (33), физически реализуем. С этой целью наряду с движением (39), которое было принято за невозмущенное, рассмотрим также близкие к нему движения

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(t) + \xi(t), \quad \beta(t) = \bar{\beta}(t) + \eta(t), \quad (40)$$

которые будем называть также возмущёнными, а величины $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – возмущениями.

В соответствии с общей теорией устойчивости составим уравнения в вариациях, соответствующие заданной системе нелинейных уравнений (32), (33). Подставляя выражение (39) в систему уравнений (32), (33) и учитывая, что $\bar{\alpha}(t)$ является частным решением (34), получаем уравнения возмущенного движения в виде

$$(d_1 \bar{\alpha}^2 + 1) \ddot{\xi} + 2d_1 \bar{\alpha} \dot{\bar{\alpha}} \dot{\xi} + (\sigma^2 + 2d_1 \bar{\alpha} \ddot{\bar{\alpha}} + d_1 \bar{\alpha}^2) \xi + F_1(\xi, \beta, \dot{\xi}, \dot{\beta}, \ddot{\xi}, \ddot{\beta}) = 0; \quad (41)$$

$$(1 + d_2) \ddot{\eta} + 2d_2 \bar{\alpha} \dot{\bar{\alpha}} \dot{\eta} + (\sigma^2 + c \bar{\alpha} \ddot{\bar{\alpha}} + k_3 \bar{\alpha}^2) \eta + F_2(\xi, \beta, \dot{\xi}, \dot{\beta}, \ddot{\xi}, \ddot{\beta}) = 0, \quad (42)$$

где F_1 и F_2 – функции, содержащие возмущения и их производные в степенях выше первой. Оставляя в (41) и (42) только линейные члены, с учетом (39) приходим к уравнениям в вариациях:

$$L_3(\xi) = (p + q \cos \theta t) \ddot{\xi} - \varepsilon_1 \dot{\xi} \sin \theta t + (\gamma - \delta \cos \theta t) \xi = 0; \quad (43)$$

$$L_4(\eta) = (\bar{p} + \bar{q} \cos \theta t) \ddot{\eta} - \varepsilon \dot{\eta} \sin \theta t + (\bar{\gamma} - \bar{\delta} \cos \theta t) \eta = 0, \quad (44)$$

носящих названия уравнений первого приближения. Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 q &= (d_1 A^2)/2, \quad p = 1 + q, \quad \varepsilon_1 = d_1 \omega A^2, \quad \gamma = (\bar{\sigma}^2 - (d_1 A^2)/2)\omega^2, \\
 \delta &= (3d_1 \omega^2 A^2)/2, \quad \bar{p} = 1 + \bar{q}, \quad \bar{q} = (d_2 A^2)/2, \quad \bar{\gamma} = (\bar{\sigma}^2 - (d_2 A^2)/2)\omega^2, \\
 \bar{\delta} &= \omega^2 A^2 (2d_1 - 3d_2), \quad \varepsilon = d_2 \omega A^2, \quad \theta = 2\omega.
 \end{aligned} \tag{45}$$

Перейдем к построению областей неустойчивости решений уравнений (43), (44). Рассмотрим сначала уравнение (43) относительно функции $\xi(t)$, характеризующее возмущение периодического решения $\bar{a}(t) = A \cos \omega t$. Амплитуда A этого решения определяется уравнением (37). Необходимо установить, какая пара значений A и ω , удовлетворяющих уравнению (37), приводит к устойчивым решениям и какая пара к неустойчивым. Имея в виду построение основной области неустойчивости решения уравнения (43), представим его в виде

$$\xi(t) = a_1 \cos \frac{\theta t}{2} + b_1 \sin \frac{\theta t}{2}. \tag{46}$$

Из уравнения Бубнова – Галеркина

$$\int_0^{\frac{4\pi}{\theta}} L_3(\alpha) \cos \frac{\theta t}{2} dt = 0, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{\theta}} L_3(\alpha) \sin \frac{\theta t}{2} dt = 0, \tag{47}$$

для определения границ области неустойчивости получим следующие отношения:

$$(\bar{\sigma}^2 - 1) - 3m_1 A^2 = 0; \tag{48}$$

$$(\bar{\sigma}^2 - 1) - m_1 A^2 = 0. \tag{49}$$

Уравнение (49) совпадает с уравнением скелетной линии (38). На рис. 5 эта линия соответствует кривой ABC. Уравнению (48) соответствует кривая АМО. Сопоставляя уравнение (48) с уравнением амплитудно-частотных характеристик (37), нетрудно заметить, что устойчивая ветвь резонансной кривой RNM отделяется от неустойчивой точкой М, в которой амплитудные кривые имеют вертикальную касательную. На устойчивой части ветви амплитудно-частотной характеристики, находящейся слева от линии ABC, производная должна быть обязательно положительной. В точке М она стремится к бесконечности, а на неустойчивой левой ветви она отрицательна. В области I, ограниченной кривыми АМО и ABC, решение $\bar{a}(t) = A \cos \omega t$ неустойчиво. С физической точки зрения условие устойчивости периодического решения с периодом возмущающей силы означает, что амплитуда вынужденных колебаний с возрастанием внешней силы P увеличивается.

Рассмотрим далее уравнение (44) в вариациях относительно возмущения $\eta(t)$ тривиального решения $\beta(t) \equiv 0$. Исследование решений уравнения (44) должно дать ответ на вопрос об устойчивости этого тривиального решения. В соответствии с изложенным выше области неустойчивости уравнения (44) отвечают областям параметрически возбуждаемых колебаний ($\beta \neq 0$), т.е. областям динамической неустойчивости режима движения (39). Для построения основной области неустойчивости положим

$$\eta(t) = a_0 \cos \frac{\theta t}{2} + b_0 \sin \frac{\theta t}{2}. \tag{50}$$

Поставив выражения (50) в уравнения Бубнова – Галеркина

$$\int_0^{\frac{4\pi}{\theta}} L_4(\eta) \sin \frac{\theta t}{2} dt = 0, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{\theta}} L_4(\eta) \cos \frac{\theta t}{2} dt = 0, \quad (51)$$

для определения границ областей динамической устойчивости получим следующие уравнения:

$$\bar{\sigma}^2 = m_2 A^2 + 1; \quad (52)$$

$$\bar{\sigma}^2 = m_1 A^2 + 1, \quad (53)$$

где $m_2 = (4d_2 - d_1)$. На рис. 5 уравнению (52) соответствует кривая линия ADE, а уравнению (53) – кривая линия ABC. Следовательно, области неустойчивости решений уравнений (43), (44) непрерывно переходят одна в другую.

Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных колебаний жидкостей в цилиндрическом баке при возбуждении основных гармоник α для случая $\bar{p}_1=0$ при $\bar{S} = 0.005$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 2$

Fig. 5. Frequency-response characteristics and instability regions of forced oscillations of fluids in a cylindrical tank in the course of generation of the fundamental harmonics α for the case of $\bar{p}_1=0$ at $\bar{S} = 0.005$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 2$

В области II рис. 5 и 6, ограниченной кривыми ABC и ADE, решение $\beta(t) \equiv 0$ неустойчиво. Вторая устойчивая ветвь амплитудно-частотной характеристики KLD примыкает к области II справа и отделяется от нее точкой D. В области динамической неустойчивой II установившийся режим, если он существует, описывается нелинейной системой уравнений (32), (33).

Рис. 6. Амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных колебаний жидкостей в цилиндрическом баке при возбуждении основных гармоник α (а) для $\bar{\rho}_1 = 0.5$, (б) для $\bar{\rho}_1 = 0.8$ при $\bar{S} = 0.005$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 2$

Fig. 6. Frequency-response characteristics and instability regions of forced oscillations of fluids in a cylindrical tank in the course of generation of the fundamental harmonics α for the case of $\bar{\rho}_1 = (a) 0.5$ and (b) 0.8 at $\bar{S} = 0.005$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 2$

Рассмотрим теперь вопрос о построении установившихся режимов движения жидкостей, происходящих в основной области динамической неустойчивости II.

Предположим, что в области основного резонанса приближенное решение системы нелинейных уравнений (32) – (33) можно представить в виде

$$\alpha(t) = A \cos \omega t + \bar{A} \sin \omega t, \quad \beta(t) = \bar{B} \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (54)$$

Применив к решению этой системы метод Бубнова – Галеркина, для постоянных $A, \bar{A}, B$ и $\bar{B}$ получаем следующие алгебраические соотношения:

$$(\bar{\sigma}^2 - 1)A - m_1 A^3 - m_2 AB^2 = P; \quad (55)$$

$$(\bar{\sigma}^2 - 1) - m_1 B^2 - m_2 A^2 = 0; \quad (\bar{A} = 0, \bar{B} = 0). \quad (56)$$

Исключая B из (56) и подставляя результат в (55), находим уравнение для определения амплитудно-частотных характеристик в области II

$$(\bar{\sigma}^2 - 1)A - m_4 A^3 = m_5 P; \quad \text{где } m_4 = 2d_2, \quad m_5 = m_1 / (m_1 - m_2). \quad (57)$$

Решение (57) отвечает наблюдаемому в эксперименте режиму вращения поверхности раздела жидкостей. Соответствующие ему резонансные кривые представлены на рис. 5 и 6 линиями FGQ.

Из всех полученных соотношений на рис. 5 построены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и области неустойчивости вынужденных колебаний жидкостей при отсутствии верхней жидкости $\bar{\rho}_1 = 0$, которая полностью совпадала с результатом задачи для одной жидкости [22].

На рис. 6 представлены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и области неустойчивости вынужденных колебаний двух жидкостей при различных соотношениях плотностей.

Области I и II являются областями неустойчивости вынужденных колебаний жидкостей, происходящих в плоскости действия возмущающей силы. В области II эта неустойчивость обусловлена неустойчивостью тривиального решения $\beta(t) \equiv 0$, т.е. возможно параметрическое возбуждение обобщенной координаты β . Линия FGQ соответствует вращательному движению поверхности раздела жидкостей, наблюдаемому в эксперименте.

Заключение

Теоретически исследованы нелинейные эффекты, возникающие в результате взаимодействия жидкостей с жестким сосудом, совершающим гармонические колебания. Наиболее интересным с практической стороны является случай колебаний жидкостей в окрестности самой низкой частоты собственных колебаний поверхности раздела. Здесь наблюдается ряд характерных существенно нелинейных особенностей движения жидкостей, среди которых можно указать на зависимость частоты колебаний от амплитуды, ограниченность амплитуд колебаний, подвижность узловых линий поверхности раздела и возникновение своеобразного вращения слоев жидкостей в некотором диапазоне частот возмущающей силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 735 с.
3. Thorpe S.A. On standing internal gravity waves of finite amplitude // J. Fluid Mech. 1968. V. 32. No. 3. P. 489–528.
4. Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.-Y., Thomson C.F.C. Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids // Journal of Ocean Engineering and Marine Energy. 2018. V. 4. P. 243–257.
5. La Rocca M., Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // Physics of Fluids. 2005. No. 17. P. 062101.
6. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. Экспериментальное исследование вторичных стационарных течений в поверхностных волнах Фарадея // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 1. С. 141–148.
7. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. Экспериментальное исследование волн Фарадея максимальной высоты // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 6. С. 103–110.
8. Порубов А.В. О локализации двумерных нелинейных внутренних волн в двухслойной жидкости // Журнал технической физики. 2005. Т. 75(7). С. 48–51.
9. Басинский К.Ю. Нелинейные волны на поверхности слоя вязкой жидкости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15. № 3. С. 322–329.
10. Григорьев А.И., Федоров М.С., Ширяева С.О. Волновое движение в поле силы тяжести на свободной поверхности и на границе стратификации слоисто-неоднородной жидкости. Нелинейный анализ // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 5. С. 130–140.
11. Kalinichenko V.A. Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid // Fluid Dynamics. 2019. V. 54. No. 6. P. 761–773.
12. Kalinichenko V.A. Effect of an upper layer of viscous liquid on breaking surface gravity waves // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1301. P. 012017.
13. Мерзляков А.В., Крюкова Е.А. Свободные колебания идеальной жидкости в прямоугольном сосуде с горизонтальной проницаемой перегородкой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 60. С. 107–118. DOI: 10.17223/19988621/60/8.
14. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Инженерный журнал: наука и инновация. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 12(24).
15. Гончаров Д.А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения // Наука и образование, МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 11.
16. Науменко В.В., Стрельникова Е.А. Потенциал двойного слоя в задаче о свободных колебаниях пологой оболочки в идеальной несжимаемой жидкости // Исслед. по теор. пластин и оболочек. 1990. № 22. С. 122–133.
17. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде и их механические аналоги // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2015. № 3. С. 57–69.
18. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Экспериментальное и теоретическое исследование колебаний твердого тела со слоистой жидкостью // Инженерный журнал: наука и инновации, МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2018. № 04. С. 1–13.
19. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Теоретическое и экспериментальное исследования колебаний твёрдого полужилиндра, имеющего полость, заполненную слоистой жидкостью // Инженерный журнал: наука и инновации, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. 2019. № 05.

20. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Колебания вязкой трехслойной жидкости в неподвижном баке // Инженерный журнал: наука и инновации, МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2019. № 07.
21. Win Ko Ko, Temnov A.N. Experimental and theoretical studies of oscillations of stratified fluid // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 468 (2018) 012031.
22. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкостью; отв. ред. В.А. Троценко; Ин-т математики АН УССР. Киев: Наук. Думка, 1990. 296 с. ISBN 5-12-001308-2.
23. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
24. Микишев. Г.Н Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1987. 248 с.
25. Микишев. Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.

Статья поступила 25.12.2019

Win Ko Ko, Temnov A.N. (2021) A THEORETICAL STUDY OF OSCILLATIONS OF TWO IMMISCIBLE FLUIDS IN A LIMITED TANK. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 97–113

DOI 10.17223/19988621/69/8

Keywords: cylindrical tank, two-layer fluid, nonlinear oscillations, instability region, hydrodynamic coefficients.

In the paper, the nonlinear oscillations of a two-layer fluid that completely fills a limited tank are theoretically studied. To determine any smooth function on the deflected interface, the Taylor series expansions are considered using the values of the function and its normal derivatives on the undisturbed interface of the fluids. Using two fundamental asymmetric harmonics, which are generated in two mutually perpendicular planes, the differential equations of nonlinear oscillations of the two-layer fluid interface are investigated. As a result, the frequency-response characteristics are presented and the instability regions of the forced oscillations of the two-layer fluid in the cylindrical tank are plotted, as well as the parametric resonance regions for different densities of the upper and lower fluids. The Bubnov-Galerkin method is used to plot instability regions for the approximate solution to nonlinear differential equations.

At the final stage of the work, the nonlinear effects resulting from the interaction of fluids with a rigid tank that executes harmonic oscillations at the interface of the fluids are theoretically studied.

Ko Ko WIN (Candidate of Physics and Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: win.c.latt@gmail.com

Aleksandr N. TEMNOV (Candidate of Physics and Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: ant45@mail.ru

REFERENCES

1. Sretenskiy L.N. (1977) *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [Theory of wave motions in a fluid]. Moscow: Nauka.
2. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1987) *Course of Theoretical Physics. Volume 6: Fluid Mechanics*. Oxford: Pergamon Press.
3. Thorpe S.A. (1968) On standing internal gravity waves of finite amplitude. *Journal of Fluid Mechanics*. 32(3). pp. 489–528.

4. Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.Y., Thomson C.F.C. (2018) Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*. 4. pp. 243–257. DOI: 10.1007/s40722-018-0119-9.
5. La Rocca M., Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A. (2005) Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface. *Physics of Fluids*. 17(062101). DOI: 10.1063/1.1922887.
6. Kalinichenko V.A., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya. (2008) Experimental investigation of secondary steady flows in Faraday surface waves. *Fluid Dynamics*. 43(1). pp. 125–131. DOI: 10.1134/s10697-008-1014-1.
7. Kalinichenko V.A., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya. (2007) Experimental investigation of Faraday waves of maximum height. *Fluid Dynamics*. 42. pp. 959–965. DOI: 10.1134/S0015462807060117.
8. Porubov A.V. (2005) O lokalizatsii dvumernykh nelineynykh vnutrennikh voln v dvukhsloynoy zhidkosti [On localization of two-dimensional nonlinear internal waves in a two-layer fluid]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*. 75(7). pp. 48–51.
9. Basinskiy K.Yu. (2015) Nelineynye volny na poverkhnosti sloya vyazkoy zhidkosti [Nonlinear waves on the surface layer of a viscous liquid]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 15(3). pp. 322–329.
10. Grigoryev A.I., Fedorov M.S., Shiryayeva S.O. (2010) Wave motion in a gravity field on the free surface and stratification interface of a fluid with stratified inhomogeneity. Nonlinear analysis. *Fluid Dynamics*. 45. pp. 793–802. DOI: 10.1134/S0015462810050121.
11. Kalinichenko V.A. (2019) Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid. *Fluid Dynamics*. 54(6). pp. 761–773. DOI: 10.1134/S0015462819060065.
12. Kalinichenko V.A. (2019) Effect of an upper layer of viscous liquid on breaking surface gravity waves. *Journal of Physics: Conference Series*. 1301(012017). DOI: 10.1088/1742-6596/1301/1/012017.
13. Merzlyakov A.V., Kryukova E.A. (2019) Svobodnye kolebaniya ideal'noy zhidkosti v pryamougol'nom sosude s gorizontol'noy pronitsaemoy peregorodkoy [Free oscillations of an ideal fluid in a rectangular vessel with a horizontal permeable membrane]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 60. pp. 107–118. DOI: 10.17223/19988621/60/8.
14. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. (2013) Svobodnye osesimmetrichnye kolebaniya dvukhsloynoy zhidkosti s uprugim razdelitelem mezhdru sloyami pri nalichii sil poverkhnostnogo natyazheniya [Free axisymmetric oscillations of two-layered liquid with the elastic separator between layers in the presence of surface tension forces]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsiya – Engineering Journal: Science and Innovation*. 12(24).
15. Goncharov D.A. (2013) Dinamika dvukhsloynoy zhidkosti, razdelennoy uprugoy peregorodkoy s uchedom sil poverkhnostnogo natyazheniya [Dynamics of two-layer liquid, divided by an elastic baffle considering surface tension forces]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana – Science and Education: Scientific Periodical of the Bauman MSTU*. 11.
16. Naumenko V.V., Strel'nikova E.A. (1990) Potentsial dvoynogo sloya v zadache o svobodnykh kolebaniyakh plogoy obolochki v ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti [The potential of a double layer in the problem of free vibrations of a flat shell in an ideal incompressible fluid]. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek*. 22. pp. 122–133.
17. Win Ko Ko, Temnov A.N. (2016) Kolebaniya diskretno-stratifikirovannykh zhidkostey v tsilindricheskom sosude i ikh mekhanicheskie analogi [Oscillations of immiscible liquids in a stationary cylindrical vessel and their mechanical analogs]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya «Estestvennye nauki» – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*. 3(66). pp. 57–69. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-57-69.

18. Win Ko Ko, Temnov A.N. (2018) Eksperimental'noe i teoreticheskoe issledovanie kolebaniy tverdogo tela so sloistoy zhidkost'yu [Experimental and theoretical study of vibrations of a rigid body with a layered liquid]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 4. pp. 1–13.
19. Win Ko Ko, Temnov A.N. (2019) Teoreticheskoe i eksperimental'noe issledovaniya kolebaniy tverdogo polutsilindra, imeyushchego polost', zapolnennuyu sloistoy zhidkost'yu [Theoretical and experimental studies of vibrations of the solid half-cylinder having a cavity filled with a layered fluid]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 5.
20. Win Ko Ko, Temnov A.N. (2019) Kolebaniya vyazkoy trekhslonnoy zhidkosti v nepodvizhnom bace [Oscillations of a three-layer viscous fluid in a stationary tank]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 7.
21. Win Ko Ko, Temnov A.N. (2018) Experimental and theoretical studies of oscillations of stratified fluid. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 468(012031). DOI: 10.1088/1757-899X/468/1/012031/meta.
22. Lukovskiy I.A. (1990) *Vvedenie v nelineynuyu dinamiku tverdogo tela s polostyami, soderzhashchimi zhidkost'* [Introduction to nonlinear dynamics of a solid with cavities filled with a fluid]. Kyiv: Naukova Dumka.
23. Narimanov G.S., Dokuchaev L.V., Lukovskiy I.A. (1977) *Nelineynaya dinamika letatel'nogo apparata s zhidkost'yu* [Nonlinear dynamics of an aircraft with a fluid]. Moscow: Mashinostroenie.
24. Mikishev G.N. (1987) *Eksperimental'nye metody v dinamike kosmicheskikh apparatov* [Experimental methods in spacecraft dynamics]. Moscow: Mashinostroenie.
25. Mikishev G.N., Rabinovich B.I. (1968) *Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkost'yu* [Dynamics of a solid body with cavities partially filled with a fluid]. Moscow: Mashinostroenie.

Received: December 25, 2019