ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/54/4

А.М. Горцев, А.В. Веткина

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРА РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ

Рассматривается полусинхронный поток событий, являющийся распространенной математической моделью информационных потоков сообщений, функционирующих в телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях, и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий. Функционирование потока рассматривается в условиях случайного непродлевающегося мертвого времени, распределенного по равномерному закону на отрезке $[0, T^*]$. Производится оценивание параметра T^* мертвого времени методом моментов. Приводятся результаты статистических экспериментов.

Ключевые слова: полусинхронный поток событий; непродлевающееся мертвое время; оценка параметра; метод моментов.

Широкое применение в исследовании реальных физических, технических, экономических и других объектов и систем получили математические модели систем и сетей массового обслуживания (СМО, СеМО). Основными элементами СМО и СеМО при этом являются случайные входящие потоки событий. В подавляющем большинстве работ по исследованию СМО и СеМО до 80-х гг. прошлого века в качестве входящих потоков событий рассматривались пуассоновские потоки событий. Однако в связи с интенсивным развитием вычислительной техники, спутниковых, компьютерных, беспроводных и мобильных сетей связи модель простейшего потока перестала быть адекватной реальным информационным потокам сообщений. Поэтому в это же время была предпринята успешная попытка создания адекватных математических моделей информационных потоков в телекоммуникационных системах – так называемых дважды стохастических потоков. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: первый класс составляют потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть непрерывный случайный процесс [1, 2]; второй – потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным (произвольным) числом состояний. Первые результаты исследований потоков второго класса были опубликованы практически одновременно в 1979 г. в работах [3–5]. В [3, 4] указанные потоки получили название МС(Markov chain)-потоки, в [5] – MVP(Markov versatile processes)-потоки. В статье [6] описанные выше потоки названы также МАР(Markovian Arrival Process)-потоками событий. Подчеркнем, что МС(MАР)-потоки событий являются наиболее характерной и подходящей моделью коррелированных потоков в реальных телекоммуникационных сетях, в частности в широкополосных сетях беспроводной связи вдоль протяженных транспортных магистралей [7–9].

Зарубежными и отечественными авторами при описании подобных входящих потоков событий в СМО и СеМО используются термины: дважды стохастические потоки событий, МАР-потоки, МС-потоки и др. В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход интенсивности из состояния в состояние, МС-потоки можно разделить на три типа: синхронные потоки (потоки, у которых состояние интенсивности меняется в случайные моменты времени, являющиеся момента-

ми наступления событий) [10]; асинхронные потоки (потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий) [11]; полусинхронные потоки (потоки, у которых одна часть состояний интенсивности меняется в моменты наступления событий потока, другая часть – в произвольные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий потока) [12].

В большинстве публикаций авторы рассматривают математические модели потоков, когда события потоков доступны наблюдению. Однако на практике возникают ситуации, когда наступившее событие влечет за собой ненаблюдаемость последующих событий. Причиной ненаблюдаемости, как правило, выступает мертвое время регистрирующих приборов [13], в течение которого другие события, наступившие в этот период, теряются. Регистрирующие приборы при этом делятся на два вида: с непродлевающимся мертвым временем и продлевающимся [13]. Длительность мертвого времени может быть как детерминированной величиной, так и случайной. Задачи по оценке параметров потока событий в условиях наличия непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности рассматривались в ряде работ, в частности в работе [14].

Однако достаточно открытым остается вопрос изучения потоков событий, когда мертвое время является случайной величиной с тем или иным законом распределения. В частности, в [15] решена задача оценки параметра распределения непродлевающегося мертвого времени случайной длительности в пуассоновском потоке событий, в [16] – в асинхронном потоке событий. В настоящей работе рассматривается дважды стохастический полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях непродлевающегося случайного мертвого времени, приводятся результаты статистических экспериментов, реализованных на имитационной модели изучаемого потока.

1. Математическая модель наблюдаемого потока

Рассматривается полусинхронный дважды стохастический поток событий (далее – поток), сопровождающий процесс (интенсивность) которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями S_1 и S_2 . Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока) S_1 , если $\lambda(t) = \lambda_1$, и наоборот, имеет место второе состояние процесса (потока) S_2 , если $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Если имеет место первое состояние процесса S_1 , то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_1$, поступает пуассоновский поток событий [17] с интенсивностью λ_1 . Если имеет место второе состояние процесса S_2 , то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_2$, поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_2 . Переход из состояния S_1 процесса $\lambda(t)$ в состояние S_2 возможен только в момент наступления события, при этом этот переход осуществляется с вероятностью p (с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в состоянии S_1). Переход из состояния S_2 процесса $\lambda(t)$ в состояние S_1 может осуществляться в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии есть случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону: $F(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$, $t \geq 0$, где α_2 – интенсивность смены состояния S_2 на S_1 . Так как переход из второго состояния в первое не привязан к моменту наступления события во втором состоянии, то поток называется полусинхронным дважды стохастическим потоком событий. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс ($\lambda(t)$ – принципиально ненаблюдаемый процесс; наблюдаемыми являются только моменты наступления событий потока).

После каждого зарегистрированного события в момент времени t_k наступает период мертвого времени случайной длительности, который порождается этим событием, так что другие события исходного потока, наступившие в течение этого периода мертвого времени, недоступны наблюдению и не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время). Принимается, что случайная длительность мертвого времени распределена по равномерному закону с плотностью вероятности $p(T) = 1/T^*$, где T – значение длительности мертвого времени, $0 \leq T \leq T^*$.

Возможный вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где S_1 и S_2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; временная ось $(0, t)$ – ось моментов наступления наблюдаемых событий в моменты времени $t_1, t_2, \dots$; временная ось $(0, t^{(1)})$ – ось наступления событий в моменты времени $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots$ в первом (S_1) состоянии процесса $\lambda(t)$, на которой также указаны значения длительностей $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \dots$ мертвых времен, порождаемых наблюдаемыми событиями потока; аналогично для временной оси $(0, t^{(2)})$. Белыми кружками обозначены наблюдаемые события, черными – ненаблюдаемые, штриховкой – периоды продолжительности мертвого времени; траектория процесса $\lambda(t)$ привязана к временной оси $(0, t^{(1)})$.

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий
Fig. 1. Formation of the observed event flow

Рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока.

Цели данной работы:

- 1) на основании выборки $t_1, t_2, \dots, t_n$ моментов наступления событий наблюдаемого потока оценить параметр равномерного распределения длительности непродлевающегося мертвого времени T^* ;
- 2) исследовать качество оценки $\hat{T}^*$ на имитационной модели полусинхронного потока событий.

2. Уравнение моментов для оценивания параметра T^*

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k \geq 0$). В силу того, что рассматривается стационарный режим функционирования потока, плотность вероятности значений длительности k -го интервала есть $p(\tau_k) = p(\tau), \tau \geq 0$, для любого k , т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$.

Для оценки неизвестного параметра T^* используется метод моментов [18]. Для этого находится теоретический момент – математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке $M(\tau|T^*)$, затем оценка T^* вычисляется численно из уравнения моментов.

Для нахождения теоретического момента имеем формулу $M(\tau|T^*) = \int_0^\infty \tau p(\tau) d\tau$. Здесь плотность вероятности $p(\tau) = \int_{(T)} p(\tau, T) dT = \int_{(T)} p(T) p(\tau|T) dT$, где (T) – область изменения значений случайной величины T .

В работе [19] приведена плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке, функционирующем в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности T :

$$p(\tau|T) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))ze^{-z(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

где $\gamma(T) = \frac{\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 - \lambda_1 p)}{(\lambda_1 p + \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)} \left[1 - \frac{p(\lambda_1 - \lambda_2)}{(1-p)\lambda_2 - (\alpha_2 + \lambda_2)e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)T}} \right]$, $z = \alpha_2 + \lambda_2$, $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$.

Так как область значений случайной величины мертвого времени представляет собой объединение двух областей, когда $0 \leq \tau < T^*$ и когда $\tau \geq T^*$, то выражение для плотности $p(\tau)$ примет следующий вид:

$$p(\tau) = \begin{cases} p_1(\tau) = \int_0^\tau p(T)p(\tau|T)dT, & 0 \leq \tau < T^*, \\ p_2(\tau) = \int_0^{T^*} p(T)p(\tau|T)dT, & \tau \geq T^*. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя выражение (1) в (2) и учитывая, что $p(T) = 1/T^*$, находим

$$p_1(\tau) = \frac{1}{T^*} \left\{ 1 - a_1 e^{-\lambda_1 \tau} - a_2 e^{-z\tau} - a_3 \left[\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)\tau}} f_1(x) dx - z e^{-z\tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)\tau}} f_2(x) dx \right] \right\}, 0 \leq \tau < T^*, \quad (3)$$

$$p_2(\tau) = \frac{1}{T^*} \left\{ a_1 e^{-\lambda_1 \tau} (e^{\lambda_1 T^*} - 1) + a_2 e^{-z\tau} (e^{zT^*} - 1) - a_3 \left[\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)T^*}} f_1(x) dx - z e^{-z\tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)T^*}} f_2(x) dx \right] \right\}, \quad (4)$$

$$\tau \geq T^*,$$

где $a_1 = \frac{\alpha_2(\lambda_1(1-p) - z)}{(\lambda_1 p + \alpha_2)(\lambda_1 - z)}$, $a_2 = \frac{\lambda_1 p(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 p + \alpha_2)(\lambda_1 - z)}$, $a_3 = \frac{a_1 p(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 p + \alpha_2}$, $f_1(x) = \frac{x^{\frac{(1-p)\lambda_1 - \alpha_2}{\lambda_1 p + \alpha_2}}}{(1-p)\lambda_2 - zx}$,

$$f_2(x) = \frac{x^{\frac{\lambda_1 p - \lambda_2}{\lambda_1 p + \alpha_2}}}{(1-p)\lambda_2 - zx}.$$

Отметим, что в граничной точке $\tau = T^*$ имеет место равенство двух плотностей $p_1(T^*) = p_2(T^*)$ и неравенство их производных $p_1'(T^*) \neq p_2'(T^*)$, т.е. функция $p(\tau)$, задаваемая формулой (2), есть непрерывная функция и в точке $\tau = T^*$ имеет излом.

По определению математического ожидания случайной величины τ – длительности интервала между двумя соседними событиями наблюдаемого потока, с учетом формулы (2) получаем

$$M(\tau|T^*) = \int_0^{T^*} \tau p_1(\tau) d\tau + \int_{T^*}^{\infty} \tau p_2(\tau) d\tau. \text{ Подставляя сюда (3), (4), находим}$$

$$M(\tau|T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{z} - \frac{a_3}{T^*} \left[\lambda_1 \int_0^{T^*} \tau e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)\tau}} f_1(x) dx d\tau - z \int_0^{T^*} \tau e^{-z\tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)\tau}} f_2(x) dx d\tau + \right. \\ \left. + e^{-\lambda_1 T^*} \left(T^* + \frac{1}{\lambda_1} \right) \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)T^*}} f_1(x) dx - e^{-zT^*} \left(T^* + \frac{1}{z} \right) \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)T^*}} f_2(x) dx \right]. \quad (5)$$

Отметим, что интегралы, входящие в (5), в элементарных функциях не выражаются.

Аналитически можно показать, что $M'(\tau|T^*) > 0$ при $T^* > 0$; $\lim_{T^* \rightarrow 0} M'(\tau|T^*) > 0$. Это означает,

что функция $M(\tau|T^*)$ является возрастающей функцией T^* .

Метод моментов для оценивания параметра T^* заключается в приравнении теоретических и эмпирических моментов. В качестве теоретического момента будем использовать аналитическую формулу для математического ожидания (5), в качестве эмпирического момента – результат работы

имитационной модели – статистическое математическое ожидание, определяемое формулой

$$C_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k, \tau_k = t_{k+1} - t_k.$$

Приравнивая эти моменты, получаем уравнение для вычисления искомой оценки $\hat{T}^*$ (уравнение моментов), которое решается численно [20].

Отметим, что данное уравнение $M(\tau | T^*) = C_1$ имеет единственное решение, так как математическое ожидание $M(\tau | T^*)$ – возрастающая функция на всей своей области определения, а C_1 – постоянная величина, характеризующая конкретную реализацию опыта. Уравнение моментов может не иметь решения только в одном единственном случае, когда $C_1 < M(\tau | T^* = 0) = \lim_{T^* \rightarrow 0} M(\tau | T^*)$; тогда принимается $\hat{T}^* = 0$.

Аналитическое исследование качества получаемой оценки $\hat{T}^*$ не представляется возможным из-за сложности выражения (5) для $M(\tau | T^*)$. Поэтому исследование качества оценки $\hat{T}^*$ проведено численно с использованием имитационной модели изучаемого потока, построенной с применением классического подхода [21] к имитационному моделированию СМО.

3. Численные результаты

С целью установления стационарного режима и определения свойств найденной оценки проведены статистические эксперименты. Для параметров потока $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \alpha_2 = 0,2, p = 0,6$ и параметров точности $\varepsilon = 0,0001, \Delta T^* = 0,001$ получено 100 реализаций ($N = 100$) имитационной модели потока и, соответственно, получено 100 решений уравнения моментов, для двух значений параметра $T^* = 1, 3$ и для каждого значения времени моделирования $T_m = 50, 100, \dots, 1500$. Далее на основании полученных данных вычислялись выборочное среднее искомой оценки $M(\hat{T}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{T}_i^*$ и ее выборочная

вариация $Var(\hat{T}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{T}_i^* - T^*)^2$, где T^* – известное из имитационной модели значение параметра.

В табл. 1 приведены результаты для $M(\hat{T}^*)$. В первой строке таблицы указано время моделирования T_m (время наблюдения за потоком) ($T_m = 50, 100, \dots, 1450$ ед. времени); во второй и третьей строках указано выборочное среднее $M(\hat{T}^*)$ для $T^* = 1$ и $T^* = 3$ соответственно.

Таблица 1

Численные результаты эксперимента для $M(\hat{T}^*)$

T_m		50	100	150	200	250	300	350	400	450
$M(\hat{T}^*)$	$T^* = 1$	0,99	0,943	0,935	0,934	0,951	0,926	0,918	0,948	0,927
	$T^* = 3$	3,084	2,994	2,969	2,911	2,887	2,962	2,956	2,939	2,936
T_m	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
$M(\hat{T}^*)$	0,925	0,931	0,946	0,92	0,938	0,923	0,942	0,931	0,926	0,928
	2,958	2,93	2,934	2,95	2,934	2,942	2,93	2,935	2,94	2,935
T_m	1 000	1 050	1 100	1 150	1 200	1 250	1 300	1 350	1 400	1 450
$M(\hat{T}^*)$	0,928	0,933	0,932	0,934	0,927	0,934	0,927	0,936	0,931	0,932
	2,947	2,937	2,947	2,939	2,941	2,934	2,935	2,944	2,94	2,936

Для наглядности на рис. 2 и 3 приведены графики зависимости $M(\hat{T}^*)$ от значения времени моделирования T_m для $T^* = 1$ и $T^* = 3$, построенные по данным табл. 1.

Рис. 2. График зависимости $M(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 1$

Fig. 2. Plot of $M(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 1$

Рис. 3. График зависимости $M(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 3$

Fig. 3. Plot of $M(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 3$

Из анализа результатов табл. 1 и графиков зависимости $M(\hat{T}^*)$ от значения T_m следует:

1) стационарный режим функционирования потока устанавливается при $T_m \geq 850$ ед. времени, т.к. $M(\hat{T}^*)$ стремится к постоянному значению;

2) оценка $\hat{T}^*$ является смещенной оценкой; получена абсолютная погрешность вычислений, равная 0,07 и 0,06 для $T^* = 1$ и $T^* = 3$ соответственно, т.е. имеется порядок погрешности, равный двум; причиной смещения оценки $\hat{T}^*$ ($\hat{T}^* < T^*$) относительно истинного T^* (известного из имитационной модели) является то, что значения случайного мертвого времени T сосредоточены около теоретического среднего ($T^*/2$).

В табл. 2 приведены результаты для $Var(\hat{T}^*)$. Структура табл. 2 аналогична структуре табл. 1.

Таблица 2

Численные результаты эксперимента для $Var(\hat{T}^*)$

T_m		50	100	150	200	250	300	350	400	450
$Var(\hat{T}^*)$	$T^* = 1$	0,089	0,029	0,043	0,022	0,018	0,017	0,015	0,019	0,013
	$T^* = 3$	0,272	0,166	0,118	0,089	0,059	0,054	0,043	0,038	0,035
T_m	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
$Var(\hat{T}^*)$	0,011	0,011	0,01	$9,438 \cdot 10^{-3}$	$9,975 \cdot 10^{-3}$	$8,64 \cdot 10^{-3}$	0,01	0,01	$9,174 \cdot 10^{-3}$	$8,67 \cdot 10^{-3}$
	0,027	0,019	0,031	0,028	0,02	0,02	0,022	0,024	0,015	0,016
T_m	1 000	1 050	1 100	1 150	1 200	1 250	1 300	1 350	1 400	1 450
$Var(\hat{T}^*)$	$8,959 \cdot 10^{-3}$	$8,622 \cdot 10^{-3}$	$8,386 \cdot 10^{-3}$	$7,831 \cdot 10^{-3}$	$8,352 \cdot 10^{-3}$	$8,388 \cdot 10^{-3}$	$7,655 \cdot 10^{-3}$	$7,598 \cdot 10^{-3}$	$7,493 \cdot 10^{-3}$	$7,706 \cdot 10^{-3}$
	0,022	0,015	0,015	0,023	0,013	0,016	0,016	0,013	0,016	0,012

На рис. 4 и 5 приведены графики зависимости выборочной вариации $Var(\hat{T}^*)$ от времени моделирования T_m для $T^* = 1$ и $T^* = 3$, построенные по данным табл. 2.

Рис. 4. График зависимости $Var(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 1$

Fig. 4. Plot of $Var(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 1$

Рис. 5. График зависимости $Var(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 3$

Fig. 5. Plot of $Var(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 3$

Результаты эксперимента также указывают на смещенность построенной оценки, так как выборочная вариация, т.е. разброс значений случайной величины $\hat{T}^*$, не равен и не стремится к 0; однако вариация стремится к числу, близкому к нулю, т.е. методика оценивания качественна, и полученную оценку можно принимать за истинную с достаточно малой погрешностью. Также заметим, что выборочная вариация устанавливается возле своего стационарного значения при времени моделирования $T_m \geq 650$ ед. времени. Таким образом, можно считать, что при $T_m \geq 650$ достигается нужная для практики точность.

Подчеркнем, что выборочная вариация при $T^* = 3$ больше, чем при $T^* = 1$. Последнее является естественным, так как при больших T^* происходит большая потеря событий исходного потока, что влечет за собой ухудшение качества оценивания при одинаковых T_m .

Заключение

В данной работе рассмотрен полусинхронный дважды стохастический поток событий с непродлевающимся случайным мертвым временем.

Аналитически получены формулы (3), (4), определяющие плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке при случайном мертвом времени, доказана непрерывность данной плотности; выведена формула (5) для математического ожидания длительности интервала между соседними событиями, и доказано возрастание данной функции.

Методом моментов найдена оценка параметра равномерного распределения длительности случайного мертвого времени, полученная оценка исследована на качество. Приведенные результаты численных расчетов указывают на приемлемое качество оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, № 3. P. 433–441.
2. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, № 4. P. 923–930.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
5. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16, № 4. P. 764–779.
6. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7, № 1. P. 1–46.
7. Basharin G.P., Gaidamaka Y.V., Samouylov K.E. Mathematical Theory of Teletraffic and Its Application to the Analysis of Multi-service Communication of Next Generation Networks // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47, № 2. P. 62–69.
8. Вишневский В.М., Ларионов А.А. Открытая сеть массового обслуживания с коррелированными входными потоками для оценки производительности широкополосных беспроводных сетей // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016) : материалы XV Междунар. конф., Катунь, 12–16 сентября 2016 г. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2016. Ч. 1. С. 36–50.
9. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.Н. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
10. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1-1. С. 24–29.
11. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 44–65.
12. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.
13. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.

14. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 137–145.
15. Горцев А.М., Загородняя М.Е. Оценивание параметра непродлевающегося мертвого времени случайной длительности в пуассоновском потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 40. С. 32–40.
16. Васильева Л.А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях присутствия мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1-1. С. 9–13.
17. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматгиз, 1963. 236 с.
18. Шуленин В.П. Математическая статистика. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. 540 с.
19. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающем мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
20. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
21. Лифшиц А.Л., Мальц Э.А. Статистическое моделирование систем массового обслуживания. М. : Сов. радио, 1978. 248 с.

Поступила в редакцию 25 октября 2020 г.

Gortsev A.M., Vetkina A.V. (2021) ESTIMATION OF THE PARAMETER OF THE UNIFORM DISTRIBUTION OF THE DURATION OF UNEXTENDABLE DEAD TIME IN THE SEMI-SYNCHRONOUS EVENTS FLOW. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 54. pp. 28–37

DOI: 10.17223/19988605/54/4

This paper describes semi-synchronous events flow that is a common mathematical model of information flows of messages operating in telecommunication and information-computing networks, and that belongs to the class of doubly stochastic event flows. Operation of the flow is considered with random unextendable dead time that has uniform distribution on the interval $[0, T^*]$. Parameter T^* of the dead time is estimated using the method of moments. Results of statistical experiments are presented.

Mathematical expectation of the duration of τ – the interval between adjacent events of the observed flow – is given by the formula

$$M(\tau | T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{z} - \frac{a_3}{T^*} \left[\lambda_1 \int_0^{T^*} \tau e^{-\lambda_1 \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) \tau}} f_1(x) dx d\tau - z \int_0^{T^*} \tau e^{-z \tau} \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) \tau}} f_2(x) dx d\tau + \right. \\ \left. + e^{-\lambda_1 T^*} \left(T^* + \frac{1}{\lambda_1} \right) \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) T^*}} f_1(x) dx - e^{-z T^*} \left(T^* + \frac{1}{z} \right) \int_1^{e^{(\lambda_1 p + \alpha_2) T^*}} f_2(x) dx \right],$$

where $a_1 = \frac{\alpha_2(\lambda_1(1-p)-z)}{(\lambda_1 p + \alpha_2)(\lambda_1 - z)}$, $a_2 = \frac{\lambda_1 p(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 p + \alpha_2)(\lambda_1 - z)}$, $a_3 = \frac{a_1 p(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 p + \alpha_2}$, $f_1(x) = \frac{x^{\frac{(1-p)\lambda_1 - \alpha_2}{\lambda_1 p + \alpha_2}}}{(1-p)\lambda_2 - zx}$, $f_2(x) = \frac{x^{\frac{\lambda_1 p - \lambda_2}{\lambda_1 p + \alpha_2}}}{(1-p)\lambda_2 - zx}$.

The estimate $\hat{T}^*$ is found numerically from the equation of moments $M(\tau | T^*) = C_1$, $C_1 = (1/n) \sum_{k=1}^n (t_{k+1} - t_k)$, where $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ are moments of occurrence of events in the observed flow. The value C_1 is found using simulation modeling of the observed flow. Analysis of the numerical results shows that in the sense of the introduced criterion $Var(\hat{T}^*)$ (sample variance of the estimate $\hat{T}^*$), an increase in the parameter T^* has a negative effect on the quality of estimates $\hat{T}^*$ that is quite natural: increasing the parameter T^* leads to an increase in the number of lost events of the initial flow.

According to the results of the research, there are the following conclusions: 1) it is shown analytically that the equation of moments has a unique solution; 2) the results of simulation modelling show that the quality of the estimates in the sense of the introduced criterion (sample variance of the estimate $\hat{T}^*$) is quite satisfactory, and the bias of estimates $\hat{T}^*$ relative to the true value of parameter T^* does not exceed hundredths of values.

Keywords: semi-synchronous events flow; unextendable random dead time; estimation of the parameter; method of moments.

GORTSEV Alexander Mikhailovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: a-gortsev@mail.ru

VETKINA Anna Vasil'evna (Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: anyavetkina@stud.tsu.ru

REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
2. Kingman, Y.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930.
3. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication network]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
5. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
6. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
7. Basharin, G.P., Gaidamaka, Y.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical Theory of Teletraffic and Its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
8. Vishnevsky, V.M. & Larionov, A.A. (2016) [Open queueing network with correlated input flows for estimating the performance of broadband wireless networks]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM–2016)* [Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM 2016)]. Proc. of the 15th International Conference. September 12–16, 2016. Tomsk. pp. 36–50.
9. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows. Theory and application in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera
10. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Estimation of the parameters of a synchronous doubly stochastic event flow by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 24–29.
11. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal estimation of states of the asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of the states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44–65.
12. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time at a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27–37.
13. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavsky, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskoy eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
14. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) Dead time and parameter estimation of asynchronous alternating flow with additive event initiation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 137–145.
15. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (2017) Estimation of the parameter of unextendable dead time random duration in the Poisson flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 40. pp. 32–40. DOI: 10.17223/19988605/40/4
16. Vasilieva, L.A. (2002) Otsenivaniye parametrov dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobyitiy v usloviyakh prisutstviya mertvogo vremeni [The abstract of clause estimation of parameters twice-stochastic flow of events in conditions of presence of dead time]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 9–13.
17. Khinchin, A.Ya. (1963) *Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Works on the Mathematical Theory of Queuing]. Moscow: Fizmatgiz
18. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Tomsk: NTL.
19. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19–29.
20. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Gomel: Francisk Skorina Gomel State University.
21. Lifshits, A.L. & Malts, E.A. (1978) *Statisticheskoe modelirovanie sistem massovogo obsluzhivaniya* [Statistical Modeling of Queuing Systems] Moscow: Sovradio.