УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/54/8

Л.А. Нежелская, А.А. Першина

ПРОЦЕДУРА ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРА РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В РЕКУРРЕНТНОМ ОБОБЩЕННОМ АСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Рассматривается обобщенный рекуррентный асинхронный поток событий (обобщенный ММРР-поток), являющийся распространенной математической моделью информационных потоков сообщений, функционирующих в телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях связи, и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий. Функционирование потока рассматривается в условиях случайного непродлевающегося мертвого времени, распределенного по равномерному закону на отрезке $[0, T^*]$. Рассматривается особый случай, когда на параметры потока накладываются ограничения, при которых обобщенный асинхронный поток событий становится рекуррентным. Производится оценивание параметра T^* мертвого времени методом моментов. Приводятся результаты статистических экспериментов.

Ключевые слова: рекуррентный обобщенный асинхронный поток событий; непродлевающееся случайное мертвое время; оценка параметра; метод моментов.

В подавляющем большинстве работ по исследованию систем и сетей массового обслуживания (СМО, СеМО) в качестве входящих потоков событий (сообщений, запросов, заявок) рассматривались простейшие потоки. Однако в связи с бурным развитием (начиная с 80-х гг. прошлого века) телекоммуникационных систем и сетей, беспроводных и мобильных сетей связи модель простейшего потока перестала быть адекватной реальным информационным потокам событий. Таким образом, требования практики послужили стимулом к рассмотрению дважды стохастических потоков в качестве математической модели реальных потоков событий в телекоммуникационных системах и сетях. Интенсивность дважды стохастического потока событий является случайным процессом, а события в потоке наступают в случайные моменты времени. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: первый класс составляют потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [1, 2]; второй – потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Впервые результаты исследований потоков второго класса опубликованы практически в одно и то же время, в 1979 г., в работах [3, 4] и работе [5]. В [3, 4] указанные потоки получили название МС(Markov chain)-потоки. В [5] – MVP(Markov versatile processes)-потоки. В работе [6] отмеченные выше потоки называются также МАР(Markovian Arrival Process)-потоками событий. Основным свойством введенных потоков является их коррелированность.

Следует отметить, что МС-потоки событий являются наиболее характерной и подходящей моделью потоков в реальных телекоммуникационных сетях, в частности в широкополосных сетях беспроводной связи вдоль протяженных транспортных магистралей [7–11].

Большинством авторов исследования СМО и СеМО осуществляются в условиях, когда все события входящего дважды стохастического потока доступны наблюдению. В реальности же поступившее на регистрирующий прибор сообщение потока порождает период мертвого времени (период ненаблюдаемости потока), в течение которого другие события потока становятся ненаблюдаемыми для регистрирующего прибора (теряются) [12]. При этом все устройства регистрации делятся на две группы: первую группу составляют устройства с непродлевающимся мертвым временем, вторую – устройства с продлевающимся мертвым временем. Период ненаблюдаемости событий потока может продолжаться некоторое фиксированное время, а также может быть случайным. В этой связи можно

считать, что мертвое время выступает искажающим фактором при решении различного рода задач оценивания по измерениям моментов наступления наблюдаемых сообщений исходного дважды стохастического потока (часть сообщений исходного потока не наблюдается (теряется)). В настоящей работе в качестве искажающего фактора рассматривается непродлевающееся случайное мертвое время.

В мировой литературе в настоящее время имеется, по-видимому, единственная монография [13], где приведено систематизированное изложение теории очередей с коррелированными потоками применительно к телекоммуникационным сетям. Подчеркнем, что изложенная теория и ее применение в телекоммуникационных сетях рассмотрены без искажающих факторов, воздействующих на входящий дважды стохастический поток сообщений.

Математические модели дважды стохастических потоков событий с непродлевающимся детерминированным мертвым временем широко использовались и используются при решении задач оценивания состояний и параметров дважды стохастических потоков событий по измерениям моментов наступления событий наблюдаемых потоков [14–19].

Однако достаточно открытым остается вопрос изучения дважды стохастических потоков событий, когда мертвое время является случайной величиной. Здесь отметим работу [20], в которой решается задача оценки параметров асинхронного потока событий в условиях случайного мертвого времени, работу [21], в которой решается задача оценки параметра распределения непродлевающегося случайного мертвого времени в пуассоновском потоке, и работу [22], в которой находятся формулы для начальных моментов общего периода ненаблюдаемости в пуассоновском потоке событий при продлевающимся случайном мертвом времени.

В настоящей статье рассматривается рекуррентный обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий (рекуррентный обобщенный ММРР-поток), являющийся обобщением асинхронного потока событий [23], функционирующий в условиях непродлевающегося случайного мертвого времени. Случайное мертвое время распределено по равномерному закону. На параметры обобщенного асинхронного потока событий накладываются ограничения, приводящие его к рекуррентному потоку (особый случай). Данная статья является непосредственным развитием работы [24].

1. Постановка задачи

Рассматривается рекуррентный обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий, сопровождающий процесс которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени, не связанный с моментами наступления событий пуассоновского потока интенсивности λ_i , $i = 1, 2$ (свойство асинхронности потока). При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α_i , $i = 1, 2$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе инициируется с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$) дополнительное событие во втором состоянии. Наоборот, при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью q ($0 \leq q \leq 1$) дополнительное событие в первом состоянии. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый (принципиально ненаблюдаемый) марковский процесс. После каждого зарегистрированного события в момент времени t_k наступает период мертвого времени случайной длительности, так что другие события исходного потока, наступившие в течение этого периода мертвого времени (периода ненаблюдаемости), недоступны наблюдению (теряются) и не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время). Принимается, что случайная длительность мертвого времени распределена по равномерному закону с плотностью $p(T)=1/T^*$, $0 \leq T \leq T^*$. В результате формируется наблюдаемый поток событий, отличный от исходного (часть событий исходного потока теряется).

Рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока событий (переходными процессами на полуинтервале наблюдения $(t_0, t]$, где t_0 – начало наблюдений, t – окон-

чение наблюдений, пренебрегаем). Необходимо в момент времени t на основании выборки $t_1, t_2, \dots, t_n$ ($t_n < t$) наблюдаемых моментов наступления событий оценить методом моментов параметр T^* (ММ-оценка).

2. ММ-оценка параметра T^*

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k \geq 0$). Так как рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока, то плотность вероятности значений длительности k -го интервала есть $p_{T^*}(\tau_k) = p_{T^*}(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого $k \geq 1$. В силу этого момент времени t_k наступления события без ограничения общности можно положить равным нулю, или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$.

Пусть теперь длительность непродлевающегося мертвого времени – детерминированная величина T ($T \geq 0$); если $T = 0$, то мертвое время отсутствует. Пусть (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала, значения длительностей которых есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$ соответственно; их расположение на временной оси в силу стационарности потока произвольно. Тогда, полагая $k = 1$, будем рассматривать два соседних интервала (t_1, t_2) , (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока, $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события наблюдаемого потока. Соответствующая совместная плотность вероятности при этом есть $p(\tau_1, \tau_2 | T)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, $T \geq 0$; одномерная плотность вероятности есть $p(\tau | T)$, $\tau \geq 0$, $T \geq 0$; $(p(\tau | T) = p(\tau_1 | T), p(\tau | T) = p(\tau_2 | T)$, $\tau \geq 0$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, $T \geq 0$).

В [25] изучен особый случай соотношения параметров потока при $T = \text{const}$ ($T \geq 0$):

$$(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1 - p)(1 - q) = 0.$$

Этот особый случай возможен в трех вариантах: 1) $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$, $p = 1$; 2) $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$, $q = 1$, 3) $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$, $p = q = 1$. Рассмотрим первый вариант. В [25] при $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$, $p = 1$ приведены формулы для $p(\tau | T)$ и $p(\tau_1, \tau_2 | T)$:

$$p(\tau | T) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau < T, \\ \{\lambda_1 + \alpha_1 - \alpha_2(1 - q)[1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)]\pi_2(T)\} e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)}, \tau \geq T; \end{cases}$$

$$\pi_2(T) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0 | T)]e^{-(\lambda_1 + \alpha_2)T}, \quad \pi_2(0 | T) = \frac{p_{12} + \delta\pi_2[1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_2)T}]}{1 - \delta e^{-(\lambda_1 + \alpha_2)T}}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad p_{12} = \frac{\alpha_1}{\lambda_1 + \alpha_1},$$

$$\delta = (\lambda_1\lambda_2 - q\alpha_1\alpha_2)/(\lambda_1 + \alpha_1)^2; \quad (1)$$

$$p(\tau_1, \tau_2 | T) = 0; 0 \leq \tau_1 < T, \tau_2 \geq 0; \tau_1 \geq 0, 0 \leq \tau_2 < T;$$

$$p(\tau_1, \tau_2 | T) = p(\tau_1 | T)p(\tau_2 | T) - e^{-(\lambda_1 + \alpha_2)T}(1 - q)^2(\lambda_1\lambda_2 - q\alpha_1\alpha_2) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\alpha_1\alpha_2[\lambda_1 + \alpha_1 - (\lambda_1 - \alpha_2)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)T}]}{(\alpha_1 + \alpha_2)[(\lambda_1 + \alpha_1)^2 - (\lambda_1\lambda_2 - q\alpha_1\alpha_2)e^{-(\lambda_1 + \alpha_2)T}]} \right\}^2 [1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau_1 - T)] \times \\ \times [1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau_2 - T)] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau_1 + \tau_2 - 2T)}, \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T. \quad (2)$$

В (2) плотности вероятности $p(\tau_1 | T)$, $p(\tau_2 | T)$ определены соотношением (1), в котором вместо τ нужно подставить либо τ_1 , либо τ_2 .

Замечание 1. Из (2) следует, что в исследуемом особом случае соотношения параметров обобщенный асинхронный поток событий при непродлевающемся мертвом времени фиксированной длительности T (наблюдаемый поток) является коррелированным потоком.

Замечание 2. Если в (1), (2) положить $\delta = 0$, т.е. $q = \lambda_1\lambda_2/\alpha_1\alpha_2$, $0 \leq q < 1$, то наблюдаемый поток становится рекуррентным обобщенным асинхронным потоком событий при непродлевающемся мертвом времени фиксированной длительности T ; аналогичный результат имеет место, если положить $q = 1$.

Изучим случай рекуррентного наблюдаемого потока событий. Подставляя в (1) $\delta = 0$ ($\lambda_1\lambda_2 - q\alpha_1\alpha_2 = 0$), находим $p(\tau|T)$ в виде

$$p(\tau|T) = 0, 0 \leq \tau < T, \\ p(\tau|T) = \left\{ \lambda_1 + \alpha_1 - \frac{\alpha_1\alpha_2 - \lambda_1\lambda_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[1 - \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\lambda_1 + \alpha_1} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T} \right] \left[1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T) \right] \right\} e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)}, \tau \geq T. \quad (3)$$

Условие $\delta = 0$ ($\lambda_1\lambda_2 - q\alpha_1\alpha_2 = 0$) определяет условие рекуррентности потока при детерминированном мертвом времени. Это условие не изменится и при случайном мертвом времени. Тогда введенная выше плотность вероятности $p_{T^*}(\tau)$ примет вид (для упрощения записи индекс T^* опустим):

$$p(\tau) = \int_{(T)} p(T) p(\tau|T) dT = \begin{cases} p_1(\tau) = \int_0^{\tau} p(T) p(\tau|T) dT, 0 \leq \tau < T^*; \\ p_2(\tau) = \int_0^{T^*} p(T) p(\tau|T) dT, \tau \geq T^*. \end{cases} \quad (4)$$

Подставляя в (4) выражение (3), учитывая, что $p(T) = 1/T^*$, находим

$$p_1(\tau) = \frac{1}{T^*} \left\{ 1 - 2e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} + e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)\tau} \right\}, 0 \leq \tau < T^*; \quad (5)$$

$$p_2(\tau) = \frac{1}{T^*} e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} \left\{ -2 + e^{(\lambda_1 + \alpha_1)T^*} + e^{(\lambda_1 - \alpha_2)T^*} + \frac{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} (\tau - T^*) \times \right. \\ \left. \times \left[e^{(\lambda_1 - \alpha_2)T^*} - e^{(\lambda_1 + \alpha_1)T^*} \right] \right\}, \tau \geq T^*. \quad (6)$$

В точке $\tau = T^*$ имеем: 1) $p_1(T^*) = p_2(T^*)$, 2) $p_1'(T^*) \neq p_2'(T^*)$, т.е. плотность $p(\tau)$ в точке $\tau = T^*$ непрерывна, но имеет излом.

Для нахождения оценки $\hat{T}^*$ параметра T^* используем метод моментов [26, 27]. Теоретическое математическое ожидание случайной величины τ – длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока – определится в виде:

$$M(\tau|T^*) = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau = \int_0^{T^*} \tau p_1(\tau) d\tau + \int_{T^*}^{\infty} \tau p_2(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Подставляя в (7) выражения (5), (6), получаем

$$M(\tau|T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{1}{\lambda_1 + \alpha_1} \left[1 - \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right] + \frac{1}{T^*} \left[\frac{\lambda_1 - \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda_1 + \alpha_1)} \right]^2 \left[1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T^*} \right]. \quad (8)$$

Изучим поведение $M(\tau|T^*)$ как функции переменной T^* ($T^* \geq 0$).

Утверждение. Математическое ожидание $M(\tau|T^*)$ является возрастающей функцией переменной T^* ($T^* \geq 0$).

Доказательство. Производная функции (8) по переменной T^* имеет вид:

$$M'(\tau|T^*) = \frac{\left[(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda_1 + \alpha_1)T^* \right]^2 - 2(\lambda_1 - \alpha_2)^2 \left[1 - \left(1 + (\alpha_1 + \alpha_2)T^* \right) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T^*} \right]}{2 \left[(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda_1 + \alpha_1)T^* \right]^2}. \quad (9)$$

Из (9) при $T^* \rightarrow 0$ получаем

$$\lim_{T^* \rightarrow 0} M'(\tau|T^*) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\alpha_1 + \alpha_2)}{2(\lambda_1 + \alpha_1)^2} > 0. \quad (10)$$

Знак производной (9) определяется ее числителем:

$$\psi(T^*) = \left[(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda_1 + \alpha_1)T^* \right]^2 - 2(\lambda_1 - \alpha_2)^2 \left[1 - \left(1 + (\alpha_1 + \alpha_2)T^* \right) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T^*} \right]. \quad (11)$$

Имеем $\psi(T^* = 0) = 0$, $\psi(T^* \rightarrow \infty) = \infty$;

$$\begin{aligned}\psi'(T^*) &= 2T^*(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \left[(\lambda_1 + \alpha_1)^2 - (\lambda_1 - \alpha_2)^2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T^*} \right] \geq \\ &\geq 2T^*(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \left[(\lambda_1 + \alpha_1)^2 - (\lambda_1 - \alpha_2)^2 \right] = \\ &= 2T^*(\lambda_1 + \lambda_2)(\alpha_1 + \alpha_2)^3 \geq 0,\end{aligned}\quad (12)$$

здесь равенство нулю имеет место только при $T^* = 0$.

Таким образом, из (12) следует, что (11) есть возрастающая функция переменной T^* ($T^* > 0$): возрастает от 0 до ∞ . Тогда $\psi(T^*) > 0$ для $T^* > 0$. Отсюда следует, что $M'(\tau | T^*) > 0$ для $T^* > 0$. Присоединение сюда (10) доказывает сформулированное утверждение.

Уравнение моментов для нахождения оценки $\hat{T}^*$ параметра T^* выпишется в виде:

$$M(\tau | T^*) = C, \quad C = (1/n) \sum_{k=1}^n (t_{k+1} - t_k). \quad (13)$$

Статистика C , являющаяся оценкой математического ожидания $M(\tau | T^*)$ находится путем имитационного моделирования наблюдаемого потока. Решение уравнения моментов (13) определяет значение оценки $\hat{T}^*$ параметра T^* на основе полученной выборки моментов времени наступления событий $t_1, \dots, t_n, t_{n+1}$ наблюдаемого потока. Так как $M(\tau | T^*)$ есть возрастающая функция переменной T^* , то решение уравнения моментов (13) будет единственным, что обеспечивает в итоге состоятельность оценки $\hat{T}^*$ [28]. Решение уравнения моментов (13) возможно только численно.

Замечание 3. Уравнение моментов (13) может не иметь решения только в одном единственном случае, когда $C < (\alpha_1 + \alpha_2) / (\lambda_1 + \alpha_1)$ ($C < M(\tau | T^* = 0)$); тогда принимается $\hat{T}^* = 0$.

Вариант $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$, $q = 1$ симметричен рассмотренному: нужно только в формулах (1), (2) заменить q на p , что в конечном итоге приведет к формулам (3), (5), (6), (8).

Вариант $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$, $p = q = 1$, при котором $\lambda_1 - \alpha_2 = 0$, приводит к формуле для математического ожидания $M(\tau | T) = (T^*/2) + (1/(\lambda_1 + \alpha_1))$ и формуле для значения оценки параметра T^* $\hat{T}^* = 2[C - 1/(\lambda_1 + \alpha_1)]$.

3. Результаты статистических экспериментов

С целью установления качества получаемых методом моментов оценок параметра T^* поставлены статистические эксперименты.

Первый статистический эксперимент (установление стационарного режима). Отдельный j -й эксперимент ($j = 1, \dots, N$) заключается в следующем:

1) при заданных значениях параметра потока λ_i , $i = 1, 2$, $\alpha_1, \alpha_2 = \lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1$, $p = 1$, $q = \lambda_1 \lambda_2 / \alpha_1 \alpha_2$, T^* осуществляется в течение Tm единиц времени имитационное моделирование наблюдаемого потока; выходом имитационной модели в отдельном j -м эксперименте является последовательность значений $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$;

2) численно решается уравнение $M(\tau | T^*) = C$, т.е. находится оценка $\hat{T}_j^*$;

3) осуществляется повторение N раз шагов 1, 2.

Результатом алгоритма является выборка $(\hat{T}_1^*, \dots, \hat{T}_N^*)$, на основании которой вычисляются выборочное среднее и выборочная вариация оценки $\hat{T}^*$:

$$\hat{M}(\hat{T}^*) = (1/N) \sum_{j=1}^N \hat{T}_j^*, \quad \hat{V}(\hat{T}^*) = (1/N) \sum_{j=1}^N [\hat{T}_j^* - \hat{T}^*]^2,$$

T^* — известное из имитационной модели значение параметра. Имитационная модель наблюдаемого потока построена с использованием традиционных подходов к имитации входящих потоков событий

в СМО [29]. Численное решение уравнения моментов (13) осуществляется методом простой итерации [30].

При проведении первого статистического эксперимента выбраны следующие параметры имитационной модели: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$, $p = 1$, $q = 0,5$, $T^* = 1$. В табл. 1 приведены результаты эксперимента ($N = 100$).

Таблица 1

Первый статистический эксперимент при $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$, $p = 1$, $q = 0,5$, $T^* = 1$

Tm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	1,0078	1,0053	0,9988	1,0019	0,9997	0,9994	0,9988	0,9997	0,9988	1,0008
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,0028	0,0018	0,0013	0,0008	0,0008	0,0006	0,0006	0,0005	0,0004	0,0004

Второй статистический эксперимент (исследование влияния параметра T^* на качество оценок). Второй статистический эксперимент организован аналогично первому и поставлен при фиксированном времени моделирования $Tm = 500$ ед. времени, что соответствует, как следует из табл. 1, времени установления стационарного режима, и при тех же значениях параметров потока, что и первый статистический эксперимент, за исключением значений T^* . Сначала второй статистический эксперимент реализуется для $T^* = 1$, затем для $T^* = 2$, ..., затем для $T^* = 5$. Ниже приведены результаты второго статистического эксперимента ($N = 100$, $Tm = 500$).

Таблица 2

Результаты второго статистического эксперимента

T^*	1	2	3	4	5
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	1,0013	1,9956	3,0080	3,9969	4,9847
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,0009	0,0038	0,0104	0,0262	0,0564

Анализ численных результатов показывает, что в смысле введенного критерия $\hat{V}(\hat{T}^*)$ увеличение параметра T^* отрицательно сказывается на качестве оценок $\hat{T}^*$, что является вполне естественным: увеличение параметра T^* приводит к увеличению числа потерянных событий исходного потока.

Заключение

По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

- 1) аналитически показано, что уравнение моментов имеет единственное решение, что означает – оценки $\hat{T}^*$, получаемые методом моментов, являются состоятельными;
- 2) результаты имитационного моделирования показывают, что качество оценок в смысле введенного критерия (выборочная вариация оценки $\hat{T}^*$) вполне удовлетворительное; при этом смещение оценок $\hat{T}^*$ относительно истинного значения параметра T^* , как это видно из результатов второго статистического эксперимента, не превышает сотых значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, is. 3. P. 433–441.
2. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
5. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16, № 4. P. 764–779.

6. Lucantoni D.M. New results on single server with a bath Markovian arrival process // *Communications in Statistics Stochastic Models*. 1991. V. 7, № 1. P. 1–46.
7. Башарин Г.П., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В., Гудкова Н.А. Новый этап развития математической теории телеграфика // *Автоматика и телемеханика*. 2009. № 12. С. 16–28.
8. Basharin G.P., Gaidamaka Y.V., Samouylov K.E. Mathematical Theory of Teletraffic and Its Application to the Analysis of Multi-service Communication of Next Generation Networks // *Automatic Control and Computer Sciences*. 2013. V. 47, № 2. P. 62–69.
9. Вишневский В.М., Ляхов А.И. Оценка пропускной способности локальной беспроводной сети при высокой нагрузке и помехах // *Автоматика и телемеханика*. 2001. № 8. P. 81–96.
10. Vishnevsky V.M., Larionov A.A., Smolnikov R.V. Optimization of topological structure of broadband wireless networks along the long traffic routes // *Distributed Computer and Communications Networks: Control, Computation, Communications : proc. of the 18th Int. Scientific Conf. (DCCN–2015) (Moscow, 19–22 october 2015)*. Moscow : ICS RAS, 2015. P. 27–35.
11. Вишневский В.М., Ларионов А.А. Открытая сеть массового обслуживания с коррелированными входными потоками для оценки производительности широкополосных беспроводных сетей // *Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016) : материалы XV Междунар. конф. Катунь, 12–16 сентября 2016*. Томск : Изд-во ТГУ, 2016. Ч. 1. С. 36–50.
12. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
13. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
14. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
15. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
16. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2015. № 1 (30). С. 27–37.
17. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // *Communications in Computer and Information Sciences*. 2015. V. 564. P. 141–151.
18. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
19. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события // *Вестник Томского государственного университета*. 2004. № 284. С. 137–145.
20. Васильева Л.А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях присутствия мертвого времени // *Вестник Томского государственного университета*. 2002. № S1-1. С. 9–13.
21. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценивание параметра непродлевающегося мертвого времени случайной длительности в пуассоновском потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2017. № 40. С. 32–40.
22. Глухова Е.В., Терпугов А.Ф. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий при наличии продлевающегося мертвого времени // *Известия вузов. Физика*. 1995. Т. 38, № 3. С. 22–31.
23. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка параметров асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. № 2 (11). С. 44–65.
24. Нежелская Л.А., Першина А.А. Оценивание параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий в особом случае // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2020. № 51. С. 87–93.
25. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
26. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // *Вестник Томского государственного университета*. 2002. № S1-1. С. 24–29.
27. Шуленин В.П. Математическая статистика. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. 540 с.
28. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
29. Лифшиц А.Л., Мальц Э.А. Статистическое моделирование систем массового обслуживания. М.: Сов. радио, 1978. 248 с.
30. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Поступила в редакцию 24 ноября 2020 г.

Nezhel'skaya L.A., Pershina A.A. (2021) ESTIMATION PROCEDURE OF THE UNIFORM DISTRIBUTION PARAMETER OF UNEXTENDABLE DEAD TIME DURATION IN A GENERALIZED RECURRENT ASYNCHRONOUS FLOW OF EVENTS IN SPECIAL CASE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 54. pp. 65–73

DOI: 10.17223/19988605/54/8

A generalized recurrent asynchronous flow of events (a generalized MMPP flow) is considered, which is a common mathematical model of a flow of elementary particles, information flows of applications operating in telecommunication and information-computer communication networks, and belongs to the class of doubly stochastic flows of events. The functioning of the flow is considered under the conditions of a random unextendable dead time distributed according to the uniform law on the interval $[0, T^*]$. A special case is considered when restrictions are imposed on the flow parameters so flow become recurrent. The dead time parameter T^* is estimated using the moment method. The results of statistical experiments are presented.

The mathematical expectation of the duration τ of the interval between adjacent events of the observed flow is

$$M(\tau | T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{1}{\lambda_1 + \alpha_1} \left[1 - \frac{\lambda_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right] + \frac{1}{T^*} \left[\frac{\lambda_1 - \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda_1 + \alpha_1)} \right]^2 \left[1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T^*} \right].$$

The estimate $\hat{T}^*$ is found numerically from the equation of moments $M(\tau | T^*) = C$, $C = (1/n) \sum_{k=1}^n (t_{k+1} - t_k)$; the value C is found by simulating the observed flow. An analysis of the numerical results shows that, in the sense of the introduced criterion, an increase in the parameter T^* negatively affects the quality of the estimates, which is quite natural: an increase in the parameter T^* leads to an increase in the number of lost events in the initial stream.

Based on the results of the study, the following conclusions can be drawn: 1) it is analytically shown that the equation of moments has a unique solution; 2) the results of simulation modeling show that the quality of the assessments in the sense of the introduced criterion (selective variation of the assessment) is quite satisfactory; in this case, the bias of the estimates relative to the true value of the parameter T^* does not exceed hundredth values.

Keywords: recurrent generalized asynchronous flow of events; unextendable random dead time; parameter estimation; method of moments.

NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Applied Mathematics Department of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: ludne@mail.tsu.ru

PERSHINA Anna Alexandrovna (Post-graduate Student of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: diana1323@mail.ru

REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
2. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930.
3. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Pt. 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Pt.2]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
5. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779.
6. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
7. Basharin, G.P., Samouylov, K.E., Yarkina, N.V. & Gudkova N.A. (2009) A new stage in mathematical teletraffic theory. *Automation and Remote Control*. 70. pp. 1954–1964. DOI: 10.1134/S0005117909120030
8. Basharin, G.P., Gaidamaka, Y.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical Theory of Teletraffic and its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
9. Vishnevsky, V.M. & Lyakhov, A.I. (2001) Estimation of the throughput of a local wireless network under high load and interference. *Automation and Remote Control*. 8. pp. 81–96.

10. Vishnevsky, V.M., Larionov, A.A. & Smolnikov, R.V. (2015) Optimization of topological structure of broadband wireless networks along the long traffic routes. *Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications*. Proc. of the 18th International Conference (DCCN-2015). Moscow, October 19–22, 2015. Moscow: ICS RAS. pp. 27–35.
11. Vishnevsky, V.M. & Larionov, A.A. (2016) [Open queueing network with correlated input flows for estimating the performance of broadband wireless networks]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2016)* [Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM 2016)]. Proc. of the 15th International Conference. September 12–16, 2016. Tomsk. pp. 36–50.
12. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavsky, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
13. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows. Theory and application in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera.
14. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
15. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32–42.
16. Gortsev, A.M., Kalyagina, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27–37.
17. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated map event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Sciences*. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_12
18. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54–63.
19. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) The estimation of the dead time period and parameters of the asynchronous alternating event flow with extra event initiation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 137–145.
20. Vasilieva, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytii v usloviyakh prisutstviya mertvogo vremeni [The estimation of parameters of twice-stochastic flow of events in conditions of presence of dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. s1-1. pp. 9–13.
21. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (2017) Estimation of the parameter of unextendable dead time random duration in the Poisson flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 40. pp. 32–40. DOI: 10.17223/19988605/40/4
22. Gluhova, E.V. & Terpugov, A.F. (1995) Estimation of the intensity of the Poisson flow of events in the presence of prolonged dead time. *Russian Physics Journal*. 38(3). pp. 22–31.
23. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal estimation of states of the asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of the states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44–65.
24. Nezhelskaya, L.A. & Pershina, A.A. (2020) Estimation of the uniform distribution parameter of unextendable dead time duration in a generalized asynchronous flow of events in special case. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 51. pp. 87–93. DOI: 10.17223/19988605/51/10
25. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) Joint probability density of the durations of the intervals of the generalized asynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(21). pp. 14–25.
26. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Estimation of parameters of a synchronous doubly stochastic flow of events by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 24–29.
27. Shulenin, V.P. (2011) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical Statistics]. Tomsk: NTL.
28. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Gomel: Francisk Skorina Gomel State University.
29. Lifshits, A.L. & Maltz, E.A. (1978) *Statisticheskoe modelirovanie sistem massovogo obsluzhivaniya* [Statistical Modeling of System Queuing]. Moscow: Sovetskoe radio.
30. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.