УДК 517.19

DOI: 10.17223/19988605/54/10

Г.Ш. Цициашвили

ПОЧТИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ РЕЖИМ В ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Оценивается влияние малых случайных возмущений на функционирование детерминированной открытой системы массового обслуживания в режиме большой загрузки. Доказано, что в зависимости от значения некоторого параметра, определяющего малость случайной флуктуации от коэффициента загрузки, предельное распределение времени ожидания сходится к нулю или к бесконечности. Величина значения параметра, при котором происходит переход от нуля к бесконечности, определяется максимальной тяжестью хвостов распределений времени обслуживания и интервалом между приходом заявок.

Ключевые слова: система обслуживания $G|G|1|\infty$; почти детерминированный режим; время ожидания начала обслуживания; распределения с тяжелыми хвостами; режим большой загрузки.

Детерминированные модели массового обслуживания удобны для описания производственных процессов, проходящих по определенному графику. Процессы обслуживания в детерминированных системах, как правило, являются циклическими (см., напр.: [1]). Одним из наиболее интересных режимов функционирования почти детерминированных систем обслуживания является режим большой загрузки. Например, одноканальная система массового обслуживания со случайными возмущениями имеет в режиме большой загрузки, как правило, большую очередь, а детерминированная одноканальная система массового обслуживания в режиме большой загрузки очереди не имеет. Поэтому интересно оценить влияние малых случайных возмущений на детерминированные нагруженные режимы функционирования. Особый интерес здесь представляют системы обслуживания, у которых времена обслуживания и интервалы между приходом заявок имеют функции распределения с тяжелыми, в частности степенными, хвостами. В работе устанавливается переход от времен ожидания, стремящихся к бесконечности, к временам ожидания, стремящимся к нулю, в зависимости от показателя степени, определяющего размер случайной флуктуации.

Опишем работу одноканальной системы массового обслуживания $G|G|1|\infty$ последовательностью времен ожидания начала обслуживания:

$$w_{i+1} = \max(0, w_i + \eta_i - \tau_i). \quad (1)$$

Здесь τ_i – интервал между приходом i -й и $(i + 1)$ -й заявки, $M\tau_i = a$, а η_i – время обслуживания i -й заявки, $M\eta_i = b$. Предположим, что разность

$$\eta_i - \tau_i = -\varepsilon + \varepsilon^\alpha \Delta_i, \quad (2)$$

где $\Delta_0, \Delta_1, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $M\Delta_i = 0$.

В режиме большой загрузки, когда коэффициент загрузки $\rho = \frac{b}{a}$ близок к единице, положительный параметр $\varepsilon = (1 - \rho)a$ является малым: $\varepsilon \ll 1$. Величина $\alpha > 0$ характеризует скорость убывания случайных возмущений с увеличением загрузки.

В силу известных результатов для одноканальной системы массового обслуживания $G|G|1|\infty$ (см., напр.: [2. Гл. 1, §3]) марковская цепь w_i , $i \geq 0$, вида (1), (2) имеет при $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ стационарное распределение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(w_i > t) = P(W_\alpha(\varepsilon) > t), t \geq 0, \quad (3)$$

$$W_\alpha(\varepsilon) = \sup \left\{ 0, \sum_{j=0}^i (\eta_j - \tau_j), i \geq 0 \right\} = \sup \left\{ 0, \sum_{j=0}^i (-\varepsilon + \varepsilon^\alpha \Delta_j), i \geq 0 \right\}.$$

Основной задачей этой заметки является анализ слабой сходимости $\Rightarrow$ распределения случайной величины $W_\alpha(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Доказывается, что при увеличении α происходит смена предельного соотношения $W_\alpha \Rightarrow \infty, \alpha < \frac{1}{v}$, на предельное соотношение $W_\alpha \Rightarrow 0, \alpha > \frac{1}{v}$. Здесь v характеризует параметр степенного убывания более тяжелого из хвостов распределений времен обслуживания и интервалов между приходом заявок.

1. Предварительные сведения

Теорема 1. Пусть при некоторых положительных постоянных $\beta, c < \infty$ справедливо неравенство $M |\Delta_1|^{2+\beta} \leq c$. Тогда для любого $t \geq 0$ справедливо предельное соотношение [3. Гл. V, теоремы 3.1, 3.2] (см. также: [4–8])

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\varepsilon W_0 > t) = e^{-2t/d}. \quad (4)$$

В случае существования при некотором $\mu > 0$ конечного экспоненциального момента $M \exp(\mu \Delta_1)$ более детальное рассмотрение этого предельного соотношения проведено в [2. Гл. 4, теорема 19].

Теорема 2. Предположим, что при некоторых $1 < v < 2, h_v > 0$ выполняются соотношения $P(\eta_1 > y) \sim h_v y^{-v}, P(\tau_1 > y) = o(P(\eta_1 > y)), y \rightarrow \infty$. Тогда для любого $y \geq 0$ справедлива формула [3. Theorem 5.1, Formulas (5.12)–(5.15)]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\Delta_v(\varepsilon) W_0 / b > y) = R_{v-1}(y). \quad (5)$$

Здесь $R_{v-1}(y), y \geq 0$, – некоторое предельное распределение (Коваленко) (см., напр.: [4]), являющееся непрерывной функцией и удовлетворяющее соотношениям:

$$\int_0^\infty e^{-ry} dR_{v-1}(y) = \frac{1}{1+r^v}, r \geq 0,$$

$$1 - R_{v-1}(y) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{y^{n(v-1)}}{\Gamma(n(v-1)+1)} = \frac{\Gamma(v-1) \sin((v-1)\pi)}{\pi y^{v-1}} + O(y^{-2(v-1)}), y \rightarrow \infty.$$

В свою очередь, $\Delta_v(\varepsilon)$ при некотором $c > 0$ [3. Formulas (4.21)–(4.24)] удовлетворяет формуле $\Delta_v(\varepsilon) \sim c \varepsilon^{1/(v-1)}, \varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема 3. Предположим, что при некоторых $1 < v < 2, g_v > 0$ выполняются соотношения $P(\tau_1 > y) \sim g_v y^{-v}, P(\eta_1 > y) = o(P(\tau_1 > y)), y \rightarrow \infty$. Тогда для любого $y \geq 0$ выполняется соотношение [Ibid. Formula (7.5), Theorem 7.1]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P\{\Lambda_v(\varepsilon) W_0 / a > y\} = \exp(-y). \quad (6)$$

В свою очередь, множитель $\Lambda_v(\varepsilon)$ при некотором $d > 0$ [Ibid. Formula (7.5)] удовлетворяет формуле $\Lambda_v(\varepsilon) \sim d \varepsilon^{1/(v-1)}, \varepsilon \rightarrow 0$.

2. Формулировка и доказательство основных результатов

Пусть $\{a(x), 0 < x < 1\}$ – семейство неотрицательных случайных величин, таких что $P(a(x) < \infty) = 1, 0 < x < 1$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть хвосты распределения случайных величин $a(x)$ удовлетворяют соотношениям $P(a(x) > y) \rightarrow A(y)$, $x \rightarrow 0$, $y \geq 0$, где $A(y)$ – непрерывная и невозрастающая функция, $A(0) = 1$, $A(y) \rightarrow 0$, $y \rightarrow \infty$. Тогда справедливо предельное соотношение

$$P(b(x)a(x) > y) \rightarrow A(y), \quad x \rightarrow 0, \quad y > 0, \quad (7)$$

в котором $b(x) > 0$, $0 < x < x_1$, при некотором $x_1 \leq 1$, причем $b(x) \rightarrow 1$, $x \rightarrow 0$.

Доказательство. Действительно, для любого $0 < y < \infty$ справедливо соотношение $P(b(x)a(x) > y) = P(a(x) > yb^{-1}(x))$. Зафиксируем $0 < y < \infty$, $\gamma > 0$, и, пользуясь непрерывностью функции $A(y)$, определим $\delta_1(\gamma, y) > 0$, такое что

$$|y' - y| < \delta_1(\gamma, y) \Rightarrow |A(y') - A(y)| < \gamma.$$

По так определенному $\delta_1(\gamma, y)$ и условию $b(x) \rightarrow 1$, $x \rightarrow 0$, можно определить $\delta_2(\gamma, y) > 0$, такое что $0 < x < \delta_2(\gamma, y) \Rightarrow |yb^{-1}(x) - y| < \delta_1(\gamma, y)$, и значит выполняется соотношение

$$0 < x < \delta_2(\gamma, y) \Rightarrow |P(a(x) > yb^{-1}(x)) - A(y)| = |P(b(x)a(x) > y) - A(y)| < \gamma.$$

Формула (6) доказана.

Лемма 2. Пусть выполняются условия леммы 1, тогда для любого $y > 0$ справедливо предельное соотношение

$$P(c(x)b(x)a(x) > y) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0, \quad y > 0, \quad (8)$$

в котором $c(x) > 0$, $0 < x < x_2$, при некотором $x_2 \leq 1$, причем $c(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$.

Доказательство. Действительно, для любого $y, 0 < y < \infty$ справедливо соотношение $P(c(x)b(x)a(x) > y) = P(a(x) > yc^{-1}(x)b^{-1}(x))$. Зафиксируем $\gamma > 0$ и, пользуясь тем, что $A(y)$ является непрерывной функцией в точке 0, определим $\delta_3(\gamma) > 0$, такое что $y' < \delta_3(\gamma) \Rightarrow A(y') > 1 - \gamma$. Из определений классов функций $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ следует, что по заданным $y > 0, \gamma$ можно подобрать такое $\delta_4(\gamma, y)$, что $x < \delta_4(\gamma, y) \Rightarrow yb^{-1}(x)c^{-1}(x) < \delta_3(\gamma)$, и значит

$$x < \delta_4(\gamma, y) \Rightarrow P(a(x) > yb^{-1}(x)c^{-1}(x)) = P(c(x)b(x)a(x) > y) > 1 - \gamma.$$

Формула (7) доказана.

Лемма 3. Пусть выполняются условия лемм 1, 2, тогда для любого $y > 0$ справедливо предельное соотношение

$$P(d(x)b(x)a(x) > y) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0, \quad y > 0, \quad (9)$$

в котором $d(x) > 0$, $0 < x < x_3$, при некотором $x_3 \leq 1$, причем $d(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$.

Доказательство. Действительно, для любого $0 < y < \infty$ справедливо соотношение $P(c(x)b(x)a(x) > y) = P(a(x) > yc^{-1}(x)b^{-1}(x))$. Зафиксируем $\gamma > 0$ и, пользуясь тем, что $A(y) \rightarrow 0$, $y \rightarrow \infty$, определим $\delta_5(\gamma) > 0$, такое что $y' > \delta_5(\gamma) \Rightarrow A(y') < \gamma$. Из определений классов функций $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ следует, что по заданным $y > 0, \gamma$ можно подобрать такое $\delta_6(\gamma, y)$, что $x < \delta_6(\gamma, y) \Rightarrow yb^{-1}(x)c^{-1}(x) > \delta_5(\gamma)$, и значит

$$x < \delta_6(\gamma, y) \Rightarrow P(a(x) > yb^{-1}(x)d^{-1}(x)) = P(d(x)b(x)a(x) > y) < \gamma.$$

Формула (8) доказана.

Теорема 4. Пусть справедливы условия теоремы 1 и случайная величина η удовлетворяет соотношению $P(\eta > t) = e^{-2t/d}$. Тогда в одноканальной системе массового обслуживания $G|G|1|\infty$ выполняются следующие предельные соотношения:

$$W_\alpha(\varepsilon) \Rightarrow \begin{cases} +\infty, & 0 \leq \alpha < 1/2, \\ \eta, & \alpha = 1/2, \\ 0, & \alpha > 1/2. \end{cases} \quad (10)$$

Доказательство. Пусть справедливо условие

$$0 \leq \alpha < 1. \quad (11)$$

Тогда $W_\alpha(\varepsilon)$ можно представить в виде $W_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^{2\alpha-1} W'_\alpha(\varepsilon)$, где

$$W'_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^{1-\alpha} \sup \left\{ 0, \sum_{j=0}^i (-\varepsilon^{1-\alpha} + \Delta_j), i \geq 0 \right\}.$$

Из формул (2)–(4) нетрудно получить, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(W'_\alpha(\varepsilon) > t) = e^{-2t/d}, \quad t \geq 0. \quad (12)$$

Введем следующие обозначения: $W'_\alpha = a(\varepsilon)$, $A(y) = e^{-2y/d}$. Чтобы получить первое соотношение в формуле (10), достаточно воспользоваться леммой 2, полагая $c(\varepsilon) = \varepsilon^{2\alpha-1} \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Второе соотношение в формуле (10) следует из формулы (12). Последнее соотношение в формуле (10) вытекает из леммы 3 при $d(\varepsilon) = \varepsilon^{2\alpha-1} \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Пусть теперь $1 \leq \alpha$. В этом случае при $\varepsilon < 1$ справедливо с вероятностью единица неравенство:

$$W_\alpha(\varepsilon) = \sup \left\{ 0, \sum_{j=0}^i (-\varepsilon + \varepsilon^\alpha \Delta_j), i \geq 0 \right\} \leq \sup \left\{ 0, \sum_{j=0}^i (-\varepsilon^\alpha + \varepsilon^\alpha \Delta_j), i \geq 0 \right\} = \varepsilon^\alpha W,$$

$$W = \sup \left\{ 0, \sum_{j=0}^i (-1 + \Delta_j), i \geq 0 \right\}.$$

Методами работы [2] легко установить, что при выполнении введенных ранее ограничений на случайные величины $\Delta_0, \Delta_1, \dots$ случайная величина W является собственной случайной величиной. Поэтому с помощью соотношения $\varepsilon^\alpha \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ и леммы 3 получаем формулу

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(W_\alpha(\varepsilon) > y) = 0, \quad y > 0.$$

Теорема 4 полностью доказана.

Теорема 5. В одноканальной системе массового обслуживания $G|G|1|_\infty$ при выполнении условий теоремы 2 справедливы следующие предельные соотношения:

$$W_\alpha(\varepsilon) \Rightarrow +\infty, \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{v}, \quad W_\alpha(\varepsilon) \Rightarrow 0, \quad \frac{1}{v} < \alpha, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть справедливо условие (11). Тогда $W_\alpha(\varepsilon)$ можно представить в виде

$$W_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^{2\alpha-1} \bar{W}_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^{(\alpha v-1)/(v-1)} \tilde{W}_\alpha(\varepsilon), \quad \text{где}$$

$$\bar{W}_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^{1-\alpha} \sup \left\{ 0, \sum_{j=0}^i (-\varepsilon^{1-\alpha} + \Delta_j) \right\} = \varepsilon^{(1-\alpha)(1-1/(v-1))} \tilde{W}_\alpha(\varepsilon),$$

$$\tilde{W}_\alpha(\varepsilon) = A_v(\varepsilon) \Delta_v(\varepsilon^{1-\alpha}) \sup \left\{ 0, \sum_{j=0}^i (-\varepsilon^{1-\alpha} + \Delta_j) \right\}, \quad A_v(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{v-1}}}{\Delta_v(\varepsilon^{1-\alpha})} \rightarrow 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Из теоремы 2 следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P \left(\Delta_v(\varepsilon^{1-\alpha}) \sup \left\{ 0, \sum_{j=0}^i (-\varepsilon^{1-\alpha} + \Delta_j) \right\} \cdot \frac{1}{b} > y \right) = R_{v-1}(y), \quad y > 0.$$

Следовательно, используя лемму 1, получаем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\tilde{W}_\alpha(\varepsilon) > y) = R_{v-1}(y), \quad y > 0. \quad (13)$$

Предположим, что $0 \leq \alpha < \frac{1}{v}$. С помощью леммы 2, формулы (13) и соотношений

$$A(y) = R_{v-1}(y), \quad c(\varepsilon) = \varepsilon^{(\alpha v-1)/(v-1)} \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{получаем, что}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(W_\alpha(\varepsilon) > y) = 1, \quad y > 0, \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{v}. \quad (14)$$

Перейдем теперь к случаю, когда $\frac{1}{v} < \alpha < 1$. С помощью леммы 3, формулы (14) и соотношений $A(y) = R_{v-1}(y)$, $d(\varepsilon) = \varepsilon^{(\alpha v - 1)/(v-1)} \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(W_\alpha > y) = 0, y > 0. \quad (15)$$

Из формул (14), (15) следует соотношение (12) при условии (11).

Случай, когда $1 \leq \alpha$, исследуется точно так же, как и в теореме 4. Теорема 5 полностью доказана.

Теорема 6. В одноканальной системе массового обслуживания $G|G|1|_\infty$ при выполнении условий теоремы 3 справедливы предельные соотношения (12).

Доказательство теоремы 6 почти дословно повторяет доказательство теоремы 5. Единственным отличием от доказательства теоремы 5 является равенство $A(y) = \exp(-y)$.

Заключение

Таким образом, при выбранной в формуле (2) зависимости размера случайной флуктуации ε^α от малого параметра ε возможна сходимость стационарного времени ожидания W_α или к нулю, или к бесконечности. Причем граница раздела между этими двумя вариантами определяется параметром v , зависящим от более тяжелого из хвостов распределений времени обслуживания заявки и интервала между приходом заявок. Это означает, что при уменьшении стационарного времени ожидания важно уменьшать разброс от среднего у обеих этих случайных величин. Полученный результат позволяет говорить о наличии фазового перехода в системе массового обслуживания типа $G|G|1|_\infty$ в режиме большой загрузки.

Благодарность. Автор благодарит О. Боксма (Onno Boxma) и С.Г. Фосса за помощь с получением нужной информации по асимптотическому анализу системы $G|G|1|_\infty$ с тяжелыми хвостами распределений в режиме большой загрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьева Л.Г. Системы массового обслуживания с циклическими управляющими процессами // Кибернетика и системный анализ. 2005. Т. 41, № 1. С. 54–68.
2. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М. : Наука, 1972. 367 с.
3. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. М. : Высшая школа, 1982. 256 с.
4. Боровков А.А. Некоторые предельные теоремы теории массового обслуживания // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9, № 4. С. 608–625.
5. Прохоров Ю.В. Переходные явления в процессах массового обслуживания // Литовский математический сборник. 1963. Т. 3, № 1. С. 199–205.
6. Harrison J.M. The heavy traffic approximation for single server queues in series // J. Appl. Probab. 1973. V. 10, is. 3. P. 613–629.
7. Boxma O.J., Cohen J.W. Heavy-traffic analysis for the GI/G/1 queue with heavy-tailed distributions // Queueing Systems. 1999. V. 33. P. 177–204.
8. Gnedenko B.V., Korolev V.Yu. Random Summation. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996. 267 p.

Поступила в редакцию 14 сентября 2020 г.

Tsitsiashvili G.Sh. (2021) ALMOST DETERMINISTIC MODE IN THE $G|G|1|_\infty$ SYSTEM WITH HEAVY TAILS OF DISTRIBUTIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 54. pp. 80–85
DOI: 10.17223/19988605/54/10

The paper assesses the effect of small random perturbations on the functioning of an almost deterministic single-server queueing system with power tails of distributions in the high-load mode. It is proved, that depending on the value of the parameter, that determines the smallness of the random fluctuation, the limit distribution of the waiting time converges to zero or to infinity. The value of the parameter, at which the transition from zero to infinity cases occurs, is determined by the maximum weight of the tails of the service time distribution and the intervals between the arrivals of customers distribution.

Deterministic queuing models are useful for describing production processes that run on a specific schedule. Service processes in deterministic systems are usually cyclical (see, for example, [1]). One of the most interesting modes of operation of almost deterministic service systems is the high load mode. For example, a single-channel queuing system with random disturbances usually has a large queue in high-load mode. A deterministic single-channel queuing system in high-load mode does not have a queue. Therefore, it is interesting to evaluate the effect of small random perturbations on deterministic loaded modes of operation. Here queuing systems have particular interest, where service times and intervals between the arrival of customers have distribution functions with heavy, in particular, power tails. The paper establishes the transition from waiting times tending to infinity to waiting times tending to zero, depending on the exponent that determines the size of the random fluctuation.

We describe the operation of a single-server queuing system with a sequence of waiting times for the start of service:

$$w_{i+1} = \max(0, w_i + \eta_i - \tau_i). \quad (1)$$

Here τ_i is the interval between the arrival of the i -th and $(i + 1)$ -th customers, and $M\tau_i = a$, η_i is the service time of the i -th customer, $M\eta_i = b$. Let's assume that the difference

$$\eta_i - \tau_i = -\varepsilon + \varepsilon^\alpha \Delta_i, \quad (2)$$

where $\Delta_0, \Delta_1, \dots$, is a sequence of independent identically distributed random variables, $M\Delta_i = 0$.

In high load mode, when the load factor $\rho = \frac{b}{a}$ is close to one, the positive parameter $\varepsilon = (1 - \rho)a$ is small: $\varepsilon \ll 1$. The value $\alpha > 0$ characterizes the rate of decrease of random perturbations with increasing loading.

Due to known results for a single-server queuing system $G|G|1|\infty$ (see, for example, [2, Chapter 1, §3]) Markov chain w_i , $i \geq 0$ of the form (1), (2) has $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ a stationary distribution

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P(w_i > t) = P(W_\alpha > t), t \geq 0, \quad (3)$$

$$W_\alpha = \sup \left\{ 0, \sum_{j=0}^i (\eta_j - \tau_j), i \geq 0 \right\} = \sup \left\{ 0, \sum_{j=0}^i (-\varepsilon + \varepsilon^\alpha \Delta_j), i \geq 0 \right\}.$$

The main objective of this note is to analyze the weak convergence of the distribution of a random variable W_α at $\varepsilon \rightarrow 0$. It is proving that when increasing α , the change occurs the limit of the ratio $W_\alpha \Rightarrow \infty, \alpha < \frac{1}{v}$, to the limit ratio $W_\alpha \Rightarrow 0, \alpha > \frac{1}{v}$. Here v characterizes the power-decreasing parameter of the heavier tails of the distributions of service times and intervals between the arrival of customers. The last relation suggests that instead of the waiting time striving to infinity, when the load factor tends to one, it is possible, on the contrary, that the waiting time tends to zero. This determines the conditions under which the waiting time and queue in the queuing system are small in high-load mode.

Keywords: heavy tailed distributions; almost deterministic queuing system; high load regime.

TSITSIAHVILI Gurami Shalvovich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russian Federation).

E-mail: guram@iam.dvo.ru

REFERENCES

1. Afanasieva, L.G. (2005) Sistemy massovogo obsluzhivaniya s tsiklicheskim upravlyayushchimi protsessami [Queuing systems with cyclic control processes]. *Kibernetika i sistemnyy analiz – Cybernetics and System Analysis*. 41(1). pp. 54–68.
2. Borovkov, A.A. (1972) *Veroyatnostnye protsessy v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Probabilistic Processes in the Theory of Queuing]. Moscow: Nauka.
3. Ivchenko, G.I., Kashtanov, V.A. & Kovalenko, I.N. (1982) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Theory of Queuing]. Moscow: Vysshaya shkola.
4. Borovkov, A.A. (1964) Nekotorye predel'nye teoremy teorii massovogo obsluzhivaniya [Some limit theorems of the queuing theory]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Probability Theory and its Applications*. 9(4). pp. 608–625.
5. Prokhorov, Yu.V. (1963) Perekhodnye yavleniya v protsessakh massovogo obsluzhivaniya [Transitional phenomena in the queuing processes]. *Litovskiy matematicheskiy sbornik*. 3(1). pp. 199–205
6. Harrison, J.M. (1973) The heavy traffic approximation for single server queues in series. *Journal of Applied Probability*. 10(3). pp. 613–629. DOI: 10.2307/3212781
7. Boxma, O.J. & Cohen, J.W. (1999) Heavy-traffic analysis for the GI/G/1 queue with heavy-tailed distributions. *Queueing Systems*. 33. pp. 177–204. DOI: 10.1023/A:1019124112386
8. Gnedenko, B.V. & Korolev, V.Yu. (1996) *Random Summation*. Boca Raton, FL: CRC Press.