МАТЕМАТИКА

УДК 514.76
DOI 10.17223/19988621/70/1

MSC 53c15

С.В. Галаев

 **∇^N -ЭЙНШТЕЙНОВЫ ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ
МЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ**

На почти контактном метрическом многообразии M рассматривается N -связность ∇^N , определяемая парой (∇, N) , где ∇ – внутренняя метрическая связность, $N: TM \rightarrow TM$ – эндоморфизм касательного расслоения многообразия M , такой, что $N\bar{\xi} = \bar{0}$, $N(D) \subset D$. Рассматривается случай кососимметрической N -связности ∇^N . Кручение кососимметрической N -связности, представленное трехвалентным ковариантным тензором, кососимметрично. Такая связность определена однозначно и отвечает эндоморфизму $N = 2\psi$, где эндоморфизм ψ задается равенством $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$ и получает в работе название второго структурного эндоморфизма почти контактного метрического многообразия. Вводится понятие ∇^N -Эйнштейнова почти контактного метрического многообразия. Для случая $N = 2\psi$ находят условия, при которых почти контактные метрические многообразия являются ∇^N -Эйнштейновыми многообразиями.

Ключевые слова: почти контактное метрическое многообразие, внутренняя связность, полуметрическая связность с кососимметрическим кручением, ∇^N -Эйнштейново многообразие.

1. Введение

Систематическое изложение теории многообразий Эйнштейна с кососимметричным кручением приводится в работе [1]. Интерес к таким многообразиям определяется применением связностей с кручением в модифицированной теории относительности Эйнштейна – Картана (см., также, [2]). Многообразие Сасаки является одним из примеров многообразий Эйнштейна с кососимметричным кручением [1]. В работе [3] доказывается, что на многообразии Сасаки существует единственная связность с кососимметрическим кручением, совместимая со структурой Сасаки. Эта связность получила название характеристической связности. Ранее автором настоящей статьи было показано, что на многообразии с почти контактной метрической структурой существует, и при этом единственная, N -связность ∇^N с кососимметрическим кручением [4]. В настоящей работе такая связность получила название канонической связности. Доказывается, что в случае многообразия Сасаки характеристическая связность совпадает с канонической связностью.

В настоящей работе рассматриваются почти контактные метрические многообразия, оснащенные N -связностью ∇^N . Нас будет интересовать следующий во-

прос: «Какие почти контактные метрические многообразия являются ∇^N -Эйнштейновыми многообразиями с кососимметрическим кручением?»).

Не всякая связность с кососимметричным кручением является N -связностью. В то же время под определение N -связности попадают часто используемые в геометрии почти контактных метрических многообразий связности с кручением. N -связность ∇^N определяется на почти контактном метрическом многообразии, наделенном внутренней связностью ∇ и эндоморфизмом $N: TM \rightarrow TM$ касательного расслоения многообразия M , таким, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$, как единственная связность на многообразии M , удовлетворяющая следующим условиям [5]:

- 1) $\nabla_X^N Y \in \Gamma(D)$;
- 2) $\nabla_X^N \vec{\xi} = \vec{0}$;
- 3) $\nabla_{\vec{\xi}}^N Y = [\vec{\xi}, Y] + NY$;
- 4) $\nabla_Y^N Z = \nabla_Y Z$, $X \in \Gamma(TM)$, $Y, Z \in \Gamma(D)$.

Если ∇ – метрическая связность, то связность ∇^N характеризуется следующими условиями [5]:

- 1) $S(X, Y) = 2\omega(X, Y)\vec{\xi} + \eta(X)NY - \eta(Y)NX$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$;
- 2) $\nabla_X^N g(Y, Z) = 0$, $X, Y, Z \in \Gamma(D)$;
- 3) $\nabla_X^N \vec{\xi} = \vec{0}$, $X \in \Gamma(TM)$;
- 4) $\nabla_X^N \eta = 0$, $X \in \Gamma(TM)$.

Задавая соответствующим способом эндоморфизм N , можно получить известные ранее классы N -связностей. Ниже приводятся далеко не все примеры N -связностей, естественным образом возникающих на многообразиях с почти контактной метрической структурой (или, более обще, на субримановых многообразиях контактного типа).

Примеры N -связностей

1. Связность Бежанку ∇^B с нулевым эндоморфизмом $N = 0$. Связность Бежанку ∇^B связана со связностью Леви-Чивита ∇^g помощью формулы [6]

$$\nabla_X^B Y = \tilde{\nabla}_X Y - \eta(X)\nabla_Y^g \vec{\xi} + (\omega + c)(X, Y)\vec{\xi}.$$

2. Связность Танака – Вебстера ∇^{TW} определяется как единственная связность, удовлетворяющая следующим условиям [6]:

- 1) $\nabla^{TW} \eta = 0$;
- 2) $\nabla^{TW} \vec{\xi} = 0$;
- 3) $\nabla^{TW} g = 0$;
- 4) $S(X, Y) = 2\omega(X, Y)\vec{\xi}$, $X, Y \in \Gamma(D)$;
- 5) $S(\vec{\xi}, \phi X) = -\phi S(\vec{\xi}, X)$, $X \in \Gamma(TM)$.

Связность ∇^{TW} совпадает с N -связностью в случае, когда $N = C$.

3. Связность Схоутена – ван Кампена ∇^{SK} определяется равенством

$$\nabla_X^{SK} Y = (\nabla_X^g Y^h)^h + (\nabla_X^g Y^v)^v$$

и является N -связностью для случая, когда $N = C - \phi$ [7].

4. В работе [8] доказывается существование и единственность связности $\bar{\nabla}$, удовлетворяющей условиям:

- 1) $\bar{\nabla}_Z : \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$;
- 2) $\bar{\nabla}\bar{\xi} = 0$;
- 3) $\bar{\nabla}\eta = 0$;
- 4) $S(X, Y) = \omega(X, Y)\bar{\xi}$;
- 5) $S(\bar{\xi}, X) = NX$, где N – симметрический оператор, $X, Y \in \Gamma(D)$, $Z \in \Gamma(TM)$.

5. Полученный В.В. Вагнером тензор кривизны неголономного многообразия коразмерности 1 совпадает с тензором кривизны N -связности с эндоморфизмом $N: TM \rightarrow TM$ специального строения [9, 10].

Из приведенных выше примеров видно, что класс N -связностей, используемых в геометрии почти контактных метрических многообразий, достаточно широк. Представление о связностях с кручением, не принадлежащих классу N -связностей, можно получить, например, ознакомившись с работой [2]. Об использовании N -связностей для построения продолженных структур можно узнать из работ [5, 11–14].

Известно, что почти контактное метрическое многообразие является многообразием Эйнштейна относительно связности с кручением только в том случае, когда эта связность риччи-плоская [1]. Для случая N -связности указанный результат в настоящей работе уточняется. А именно, приводятся необходимые ограничения на второй структурный эндоморфизм такой связности.

Во втором разделе мы сообщаем основные свойства N -связности с кососимметрическим кручением. Частично результаты этого раздела отражены в работе [4].

В третьем разделе приводятся примеры ∇^N -Эйнштейновых почти контактных метрических многообразий с кососимметрическим кручением.

2. Определение и основные свойства N -связности с кососимметрическим кручением

Рассмотрим почти контактное метрическое многообразие M нечетной размерности $n = 2m + 1$. Пусть $(M, \bar{\xi}, \eta, \phi, g, D)$ – заданная на многообразии M почти контактная метрическая структура, где ϕ – тензор типа $(1,1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\bar{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой, g – (псевдо) риманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

- 1) $\phi^2 = -I + \eta \otimes \bar{\xi}$;
- 2) $\eta(\bar{\xi}) = 1$;
- 3) $g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$;
- 4) $d\eta(\bar{\xi}, X) = 0$,

где $X, Y \in \Gamma(TM)$. Здесь $\Gamma(TM)$ – модуль гладких векторных полей на M .

Гладкое распределение $D = \ker \eta$ называется распределением почти контактной структуры.

В качестве следствия условий 1) – 4) получаем

$$5) \varphi \tilde{\xi} = \vec{0};$$

$$6) \eta \circ \varphi = 0;$$

$$7) \eta(X) = g(X, \tilde{\xi}), \quad X \in \Gamma(TM).$$

Кососимметрический тензор $\Omega(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ называется фундаментальной формой структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^\perp = \text{span}(\tilde{\xi})$, ортогональное распределению D , называется оснащением распределения D . Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$.

Многообразие Сасаки – контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительному условию $N_\varphi + 2d\eta \otimes \tilde{\xi} = 0$, где $N_\varphi(X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$ – тензор Нейенхейса эндоморфизма φ . Выполнение условия $N_\varphi + 2d\eta \otimes \tilde{\xi} = 0$ означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством.

Более подробно подход автора к исследованию почти контактных метрических многообразий изложен в работе [5]. В основе этого подхода лежит активное использование внутренней, или, в другой терминологии, трансверсальной геометрии изучаемых пространств. Идея использования внутренней геометрии и внутренних инвариантов восходит к исследованиям Вагнера [9, 10].

Наряду с инвариантным методом в работе используется метод координат. А именно, карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \tilde{\xi}$ [7]. Пусть $P: TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D : $D^\perp = \text{span}(\bar{e}_a)$. Неголономному полю базисов $(\bar{e}_a) = (\bar{e}_a, \partial_n)$ соответствует поле кобазисов $(dx^a, \eta = \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Имеет место равенство $[\bar{e}_a, \bar{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$. Условие $d\eta(\tilde{\xi}, X) = 0$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

Для адаптированных карт $K(x^\alpha)$ и $K'(x^{\alpha'})$ выполняются следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{\alpha'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{\alpha'})$.

Тензорное поле t -типа (p, q) , заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), или трансверсальным, если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\tilde{\xi}$ или η . Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид $t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \bar{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}$.

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t_b^a = A_a^a A_b^{b'} t_{b'}^{a'},$$

где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t_b^a$ являются компонентами допустимого тензорного поля того же типа. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t_b^a$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Внутренней линейной связностью ∇ [5] на многообразии с почти контактной метрической структурой называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1 \bar{x} + f_2 \bar{y}} = f_1 \nabla_{\bar{x}} + f_2 \nabla_{\bar{y}}$;
- 2) $\nabla_{\bar{x}} f \bar{y} = (\bar{x}f) \bar{y} + f \nabla_{\bar{x}} \bar{y}$;
- 3) $\nabla_{\bar{x}} (\bar{y} + \bar{z}) = \nabla_{\bar{x}} \bar{y} + \nabla_{\bar{x}} \bar{z}$,

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\bar{e}_a} \bar{e}_b = \Gamma_{ab}^c \bar{e}_c$. Из равенства $\bar{e}_a = A_a^{a'} \bar{e}_{a'}$, где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности: $\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^{c'} \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^{c'} \bar{e}_a A_b^{b'}$.

Отсюда, в частности, следует, что производные $\partial_n \Gamma_{ac}^d$ являются компонентами допустимого тензорного поля.

Известно [5], что на многообразии M существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением, такая, что $\nabla_X g(Y, Z) = 0$, $X, Y, Z \in \Gamma(D)$. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - P[X, Y]$, где $P: TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$.

Пусть ∇^g – связность Леви-Чивита и $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ – ее коэффициенты. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1 [5]. Коэффициенты связности Леви-Чивита почти контактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0,$$

где $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{cd} (\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{ba})$, $\psi_a^b = g^{bc} \omega_{ac}$,

$$C_{ab} = \frac{1}{2} \partial_n g_{ab}, \quad C_b^a = g^{bc} C_{ac}.$$

Предложение 2 [5]. Пусть $N: TM \rightarrow TM$ – эндоморфизм касательного расслоения почти контактного метрического многообразия M , такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. Тогда на многообразии M существует единственная линейная связность ∇^N с кручением $S(X, Y)$, однозначно определяемая следующими условиями:

- 1) $S(X, Y) = 2\omega(X, Y)\vec{\xi} + \eta(X)NY - \eta(Y)NX$, $X, Y \in \Gamma(TM)$;
- 2) $\nabla_X^N Y = \nabla_X Y$, $X, Y \in \Gamma(D)$;
- 3) $\nabla_X^N \vec{\xi} = \vec{0}$, $X \in \Gamma(TM)$.

Определим в адаптированных координатах отличные от нуля коэффициенты связности ∇_X^N , положив $G_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $G_{na}^b = N_a^b$. Непосредственно проверяется, что определяемая тем самым связность удовлетворяет условиям предложения 2.

Из предложения 2 следует, что $\nabla_X^N g(Y, Z) = 0$, $X, Y, Z \in \Gamma(D)$. Последнее замечание подтверждает целесообразность назвать связность ∇^N полуметрической.

Положим $\tilde{S}(X, Y, Z) = g(S(X, Y), Z)$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. В адаптированных координатах возможно ненулевые компоненты тензора $\tilde{S}(X, Y, Z)$ будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \partial_n) &= 2\omega_{ab}; \\ \tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) &= -g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b); \\ \tilde{S}(\partial_n, \vec{e}_a, \vec{e}_b) &= g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b).\end{aligned}$$

Как видно из полученных равенств, тензор $\tilde{S}(X, Y, Z)$ кососимметричен тогда и только тогда, когда $2\omega_{ab} = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$ или $2\omega_{ab} = g_{bc}N_a^c$. Отсюда получаем $N_a^c = 2g^{cb}\omega_{ab}$. Таким образом, в силу равенства $\psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac}$ окончательно получаем $N_a^c = 2\psi_a^c$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. Линейная связность ∇^N , заданная на почти контактном метрическом многообразии, кососимметрична тогда и только тогда, когда $N = 2\psi$, где эндоморфизм $\psi: TM \rightarrow TM$ определяется из равенства $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$.

В инвариантном виде тензор кручения $\tilde{S}$ задается следующим образом: $\tilde{S} = \eta \wedge d\eta$.

В дальнейшем будем полагать, что для связности ∇^N со структурным эндоморфизмом $N = 2\psi$ будет использоваться обозначение ∇^ψ .

Теорема 2. Линейная связность ∇^ψ , заданная на почти контактном метрическом многообразии, метрическая тогда и только тогда, когда $L_{\vec{\xi}}g = 0$.

Доказательство. Из предложения 2 следует, что $\nabla_c^\psi g_{ab} = 0$. Вычислим $\nabla_n^\psi g_{ab}$. Имеем

$$\begin{aligned}\nabla_n^\psi g_{ab} &= \partial_n g_{ab} - 2\psi_a^c g_{cb} + 2\psi_b^c g_{ac} = \partial_n g_{ab} + 2g^{cd}\omega_{da}g_{cb} + 2g^{cd}\omega_{db}g_{ac} = \\ &= \partial_n g_{ab} + 2\omega_{ab} + 2\omega_{ba} = \partial_n g_{ab}.\end{aligned}$$

Пусть $K(X, Y)Z$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, тензор кривизны связности ∇^Ψ . Вычислим ненулевые компоненты тензора $K(X, Y)Z$. Имеем

$$K_{abc}^d = R_{abc}^d + 4\omega_{ab}\psi_c^d, \quad K_{anc}^d = \nabla_a\psi_c^d + \partial_n\Gamma_{ac}^d.$$

Здесь $R_{abc}^d = 2\bar{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e]}^d\Gamma_{b]c}^e$ – компоненты тензора кривизны Схоутена [5], определяемого равенством

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{P[X, Y]}Z - P[Q[X, Y], Z], \quad Q = I - P.$$

Инвариантное представление тензора $K(X, Y)Z$ имеет вид

$$K(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \eta(Y)(\nabla_X\psi)Z - \eta(X)(\nabla_Y\psi)Z + 4\omega(X, Y)\psi Z, \\ X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

После необходимых вычислений в адаптированных координатах убеждаемся в справедливости следующих теорем.

Теорема 3. N -связность с кососимметрическим кручением, заданная на субримановом многообразии контактного типа, является плоской тогда и только тогда, когда $R(X, Y)Z = -4\omega(X, Y)\psi Z$, $\nabla\psi = 0$, $X, Y, Z \in \Gamma(D)$.

Теорема 4. Кручение кососимметрической линейной связности ∇^Ψ , заданной на субримановом многообразии M , параллельно тогда и только тогда, когда $\nabla\omega = 0$, где ∇ – внутренняя метрическая связность.

Пусть почти контактное метрическое многообразие M является многообразием Сасаки. В этом случае имеет место равенство $\nabla\omega = 0$. Что позволяет в качестве следствия теоремы 4 сформулировать теорему 5.

Теорема 5. Кручение кососимметрической линейной связности ∇^Ψ ($N = -2\phi$), заданной на сасакиевом многообразии M , параллельно.

Таким образом, на каждом почти контактном метрическом многообразии существует единственная N -связность с кососимметрическим кручением. Будем называть эту связность канонической связностью.

3. Примеры ∇^N -Эйнштейновых почти контактных метрических многообразий

В работе [3] было установлено, что на многообразии Сасаки существует единственная связность с кососимметрическим кручением, совместимая с почти контактной метрической структурой. Такая связность была названа характеристической связностью. Обозначим характеристическую связность символом $\dot{\nabla}$. Мы покажем, что в случае многообразия Сасаки характеристическая связность совпадает с канонической связностью: $\dot{\nabla} = \nabla^\Psi$. Действительно, ∇^Ψ является канонической связностью и, тем самым, является единственной среди N -связностей, обладающих кососимметрическим кручением. С другой стороны, как следует из теоремы 2, каноническая связность совместима с почти контактной метрической структурой многообразия Сасаки. Таким образом, доказано следующее предложение.

Предложение 3. Для многообразия Сасаки каноническая связность является единственной связностью с кососимметрическим кручением.

Вернемся к компонентам тензора кривизны $K(X, Y)Z$ канонической связности:

$$K_{abc}^d = R_{abc}^d + 4\omega_{ab}\psi_c^d, \quad K_{anc}^d = \nabla_a\psi_c^d - \partial_n\Gamma_{ac}^d.$$

Пусть $k(X, Y)$, $r(X, Y)$ – тензоры Риччи и Риччи – Схоутена [5] соответственно. В адаптированных координатах получаем

$$k_{ab} = r_{ab} + 4\omega_{da}\psi_b^d, \quad k_{an} = k_{nn} = 0, \quad k_{na} = \partial_n\Gamma_{ad}^n - \nabla_d\psi_a^d.$$

Пусть M – ∇^N -Эйнштейново почти контактное метрическое многообразие: $k(X, Y) = ag(X, Y)$. Из равенства $k_{nn} = 0$ следует, что $a = 0$. Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 6. Почти контактное метрическое многообразие ∇^N -Эйнштейново тогда и только тогда, когда оно риччи-плоское.

Пример 1. Пусть M – неголомомное многообразие Кенмоцу. Покажем, что многообразие M не является ∇^N -Эйнштейновым многообразием. Действительно, пусть $k_{ab} = r_{ab} + 4\omega_{da}\psi_b^d = 0$. Или пусть $r_{ab} = 4\omega_{da}\psi_b^d$. Однако последнее равенство выполняться не может. В работе [15] было показано, что $\partial_n r_{ab} = 0$, в то время как $\partial_n\psi_b^d \neq 0$.

Пример 2. Пусть M – многообразие Сасаки. В работе [13] доказывается утверждение, что на сасакиевом многообразии существует единственная связность ∇ с кососимметричным кручением, совместимая со структурой многообразия: $\nabla\eta = \nabla\varphi = \nabla g = 0$.

Условие $r_{ab} = 4\omega_{da}\psi_b^d$ для многообразия Сасаки переписывается в виде $r_{ab} = 4\omega_{da}\psi_b^d$. Из свойств многообразия Сасаки следует, что последнее равенство эквивалентно равенству $r_{ab} = -4g_{ab}$. Таким образом, многообразие Сасаки является ∇^N -Эйнштейновым многообразием относительно канонической связности тогда и только тогда, когда выполняется равенство $r_{ab} = -4g_{ab}$.

4. Заключение

Из результатов, полученных в работе [3], следует, что на почти контактном метрическом многообразии существуют связности с кососимметрическим кручением, не являющиеся N -связностями. А именно, в цитируемой работе доказывается, что для некоторого класса почти контактных метрических многообразий существует связность с кососимметрическим кручением, сохраняющая почти контактную метрическую структуру. При этом эта связность определена однозначно, если ее кручение $\tilde{S}$ имеет следующее строение:

$$\tilde{S} = \eta \wedge d\eta + d^\varphi\Omega + \tilde{N}_\varphi - \eta \wedge (\tilde{\xi} \lrcorner N_\varphi),$$

где $d^\varphi\Omega(X, Y, Z) = -d\Omega(\varphi X, \varphi Y, \varphi Z)$, $\tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2d\eta \otimes \tilde{\xi}$.

В работе [1] основное внимание уделяется метрическим связностям с кососимметрическим кручением. В то же время, в одной из версий теории Эйнштейна – Картана требование метричности используемой связности снимается [2, 16, 17]. Последнее замечание подчеркивает актуальность исследования ∇^N -Эйнштейновых многообразий, связности которых в общем случае не обладают свойством метричности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Agricola I., Ferreira A.C.* Einstein manifolds with skew torsion // *Quart. J. Math.* 2014. V. 65. P. 717–741.
2. *Гордеева И.А., Паньженский В.И., Степанов С.Е.* Многообразия Римана – Картана // *Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я)*. 2009. Т. 123. С. 110–141.
3. *Friedrich T., Ivanov S.* Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory // *Asian J. Math.* 2002. V. 6. P. 303–336.
4. *Галаев С.В.* Плоские кососимметрические связности на многообразиях Сасаки // *Труды семинара по геометрии и математическому моделированию*. 2019. № 5. С. 20–23.
5. *Галаев С.В.* О распределениях со специальной квази-сасакиевой структурой // *Вестник Волгоградского государственного университета. Сер. 1. Мат. Физ.* 2017. № 2 (39). С. 6–17.
6. *Bejancu A.* Kähler contact distributions // *Journal of Geometry and Physics*. 2010. V. 60. P. 1958–1967.
7. *Schouten J., Kampen E.* Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde // *Math. Ann.* 1930. V. 103. P. 752–783.
8. *Falbel E., Gorodski C.* On contact sub-riemannian symmetric spaces // *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. Serie 4*. 1995. V. 28. No. 5. P. 571–589.
9. *Вагнер В.В.* Геометрия $(n-1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.
10. *Вагнер В.В.* Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 301–327.
11. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // *Дифференциальная геометрия многообразий фигур*. 2017. № 48. С. 32–41.
12. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые N -продолженной связностью // *Математические заметки СВФУ*. 2015. Т. 22. № 1. С. 25–34.
13. *Галаев С.В.* Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика*. 2017. Т. 17. Вып. 2. С. 138–147.
14. *Galaev S.V.* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2018. V. 39. No. 1. P. 71–76.
15. *Букушева А.В.* О тензоре Схоутена – Вагнера неголономного многообразия Кенмоцу // *Труды семинара по геометрии и математическому моделированию*. 2019. № 5. С. 15–19.
16. *Крым В.Р.* Уравнение Якоби для горизонтальных геодезических на неголономном распределении и тензор кривизны Схоутена // *Дифференциальные уравнения и процессы управления*. 2018. № 3. С. 64–94. <http://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2018.3/article.1.3.html>
17. *Hamond R.T.* Torsion gravity // *Rep. Prog. Phys.* 2002. V. 65. P. 599–649.

Статья поступила 09.10.2020

Galaev S.V. (2021) ∇^N -EINSTEIN ALMOST CONTACT METRIC MANIFOLDS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 5–15

DOI 10.17223/19988621/70/1

Keywords: Almost contact metric manifold; interior connection; semimetric connection with skew-symmetric torsion; ∇^N -Einstein manifold.

On an almost contact metric manifold M , an N -connection ∇^N defined by the pair (∇, N) , where ∇ is the interior metric connection and $N: TM \rightarrow TM$ is an endomorphism of the tangent

bundle of the manifold M such that $N\tilde{\xi} = \tilde{0}$, $N(D) \subset D$, is considered. Special attention is paid to the case of a skew-symmetric N -connection ∇^N , which means that the torsion of an N -connection considered as a trivalent covariant tensor is skew-symmetric. Such a connection is uniquely defined and corresponds to the endomorphism $N = 2\psi$, where the endomorphism ψ is defined by the equality $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$ and is called in this work the second structure endomorphism of an almost contact metric manifold. The notion of a ∇^N -Einstein almost contact metric manifold is introduced. For the case $N = 2\psi$, conditions under which almost contact manifolds are ∇^N -Einstein manifolds are found.

AMS Mathematics Subject Classification: MSC 53c15

Sergei V. GALAEV (Candidate of Physics and Mathematics, National Research Saratov State University named after G.N. Chernyshevsky, Saratov, Russian Federation). E-mail: sgalaev@mail.ru

REFERENCES

1. Agricola I., Ferreira A.C. (2014) Einstein manifolds with skew torsion. *Quarterly Journal of Mathematics*. 65. pp. 717–741.
2. Gordeeva I.A., Panzhenskiy V.I., Stepanov S.E. (2009) Mnogoobraziya Rimana – Kartana [Riemann–Cartan manifolds]. *Itogi nauki i tekhniki*. 123. pp. 110–141.
3. Friedrich T., Ivanov S. (2002) Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory. *Asian Journal of Mathematics*. 6. pp. 303–336.
4. Galaev S.V. (2019) Ploskiye kososimmetricheskiye svyaznosti na mnogoobraziyakh Sasaki [Flat skew-symmetric connections on Sasaki manifolds]. *Trudy seminar po geometrii i matematicheskomu modelirovaniyu*. 5. pp. 20–23.
5. Galaev S.V. (2017) O raspredeleniyakh so spetsial'noy kvazi-sasakiyevoy strukturoy [On distributions with special quasi-Sasakian structure]. *Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics*. 2(39). pp. 6–17.
6. Bejancu A. (2010) Kähler contact distributions. *Journal of Geometry and Physics*. 60(12). pp. 1958–1967.
7. Schouten J., Kampen E. (1930) Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. *Mathematische Annalen*. 103. pp. 752–783.
8. Falbel E., Gorodski C. (1995) On contact sub-riemannian symmetric spaces. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 4*. 28(5). pp. 571–589.
9. Vagner V.V. (1941) Geometriya $(n-1)$ -mernogo negolonomnogo mnogoobraziya v n -mernom prostranstve [Geometry of an $(n-1)$ -dimensional nonholonomic manifold in an n -dimensional space]. *Trudy seminar po vektornomu i tenzornomu analizu*. Moscow: Moscow Univ. Press. 5. pp. 173–255.
10. Vagner V.V. (1941) Geometricheskaya interpretatsiya dvizheniya negolonomnykh dinamicheskikh sistem [Geometric interpretation of the motion of nonholonomic dynamical systems] *Trudy seminar po vektornomu i tenzornomu analizu*. Moscow: Moscow Univ. Press. 5. pp. 301–327.
11. Bukusheva A.V., Galaev S.V. (2017) Geometriya pochti kontaktnykh giperkelerovykh mnogoobraziy [Geometry of almost contact hyperkähler manifolds]. *Differentsial'naya geometriya mnogoobrazij figur*. 48. pp. 32–41.
12. Galaev S.V. (2015) Pochti kontaktnyye metricheskiye struktury, opredelyayemye N -prodolzhennoy svyaznost'yu [Almost contact metric structures defined by an N -prolonged connection]. *Yakutian Mathematical Journal*. 22(1). pp. 25–34.
13. Galaev S.V. (2017) Prodolzhenyye struktury na koraspredeleniyakh kontaktnykh metricheskikh mnogoobraziy [Extended structures on codistributions of contact metric manifolds]. *Izvestiya Saratovskogo Universiteta Novaya Seriya – Matematika Mekhanika Informatika*. 17(2). pp. 138–147. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-138-147.

14. Galaev S.V. (2018) Admissible hyper-complex pseudo-Hermitian structures. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 39(1). pp. 71–76. DOI: 10.1134/S1995080218010122
15. Bukusheva A.V. (2019) O tenzore Skhoutena – Vagnera negolonomnogo mnogoobraziiya Kenmotsu [On the Schouten–Wagner tensor of a nonholonomic Kenmotsu manifold]. *Trudy seminara po geometrii i matematicheskomu modelirovaniyu*. 5. pp. 15–19.
16. Krym V.R. (2018) Uravnenie Yakobi dlya gorizonta'nykh geodezicheskikh na negolonomnom raspredelenii i tenzor krivizny Skhoutena [Jacobi equation for horizontal geodesics on a nonholonomic distribution and Schouten curvature tensor]. *Differentsial'nye uravneniya i processy upravleniya*. 3. pp. 64–94. <http://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2018.3/article.1.3.html>
17. Hamond R.T. (2002) Torsion gravity. *Reports on Progress in Physics*. 65. pp. 599–649.

Received: October 9, 2020