УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/70/9

М.Ю. Соколова, Д.В. Христич

**КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ
АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ¹**

Рассмотрен вариант соотношений нелинейной упругости для анизотропных материалов, по типу симметрии относящихся к кристаллам кубической сингонии. В предложенной модели учитывается физическая нелинейность в поведении таких материалов при конечных деформациях. Исходя из представления упругого потенциала как тензорного многочлена по деформациям, получены соотношения для напряжений, содержащие константы упругости второго и третьего порядков.

Ключевые слова: *анизотропия, гиперупругость, конечные деформации, кубические материалы, тензорные базисы, инварианты*

Будем рассматривать анизотропные материалы, обладающие симметрией упругих свойств, присущей кристаллам кубической сингонии [1 – 4]. Это означает, что упругие свойства таких материалов удовлетворяют условиям симметрии, присущей точечной группе объемно- или гранецентрированного куба. Группа симметрии кубических материалов характеризуется наличием трех поворотных осей четвертого порядка, четырех поворотных осей третьего порядка и шести осей симметрии второго порядка. Порождающими элементами группы симметрии кубических материалов являются три поворота на угол 90° вокруг поворотных осей четвертого порядка [3, 4].

По своим свойствам кубические материалы близки к изотропным материалам. Известно [2, 3], что под действием гидростатического давления сфера из анизотропного материала в общем случае становится эллипсоидом. В случаях изотропного и кубического материалов при воздействии гидростатического давления сферы остаются сферами, что не позволяет в таком опыте различить эти материалы.

Линейные упругие кубические материалы в рамках обобщенного закона Гука описаны в работах [2, 6–10]. В этих работах получены структурные представления тензоров упругости четвертого ранга, инвариантных относительно описанной группы симметрии. Тензоры упругости, записанные в произвольной (лабораторной) системе координат, имеют в общем случае 21 ненулевую компоненту, которые не являются независимыми. В работах [6–9] проведен анализ зависимости модулей упругости кубического материала и коэффициента Пуассона от направления растяжения образца. Для кубического материала может быть определена такая система координат, названная в статье [11] канонической, в которой тензор упругих свойств имеет три ненулевые независимые константы.

Нелинейные модели поведения кубических материалов могут учитывать либо геометрическую, либо физическую нелинейность. В наиболее сложных моделях

¹ Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-1803.2019.1) и РФФИ (проект № 18-31-20053).

необходимо учитывать геометрическую и физическую нелинейности одновременно. Построению моделей кубических материалов, учитывающих физическую нелинейность при конечных деформациях, посвящена работа [12]. В этой статье автор записывает нелинейные определяющие соотношения для кубического материала на основе девяти тензорных генераторов, построенных по тензору конечных деформаций Коши – Грина и полученных в работе [5].

Если при упругом деформировании в рассматриваемых материалах наблюдаются нелинейные эффекты даже в области малых деформаций, то требуется построить физически нелинейные определяющие соотношения. Решению этой задачи посвящены статьи [13, 14]. В этих работах для записи нелинейных определяющих соотношений используется разложение в ряд упругого потенциала с сохранением членов второй и третьей степеней относительно тензора малых деформаций. В статьях [13, 14] определена структура тензоров упругости шестого ранга, которые в канонической системе координат содержат шесть ненулевых независимых констант. Геометрически и физически нелинейная модель кубического материала предложена в [15].

В отличие от результатов, полученных в работах [13–15], авторы данной статьи используют разложение тензоров упругости четвертого и шестого рангов по собственным упругим состояниям кубического материала [13, 14]. Это позволяет записать упругий потенциал для кубического материала в виде функции инвариантов тензоров, которые являются проекциями тензора деформаций Коши – Грина в собственные подпространства кубического материала. Получающиеся при этом выражения для тензора напряжений отражают взаимное влияние процессов, происходящих в различных собственных подпространствах рассматриваемого материала, и позволяют для кубического материала описать эффекты второго порядка.

1. Общий подход к записи упругого потенциала деформаций в случае конечных деформаций кубического материала.

Строение тензоров упругости

Рассмотрим гиперупругий анизотропный материал, для которого можно записать упругий потенциал. В качестве такового используем удельную (отнесенную к объему) потенциальную энергию деформации. Дифференциал удельной потенциальной энергии деформаций может быть представлен в виде

$$dW = \mathbf{T} : d\boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathbf{T}$ – энергетический тензор напряжений, связанный с тензором напряжений Коши $\mathbf{S}$ соотношением

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\Phi}^{-T} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{-1}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \frac{dV}{dV_0} \mathbf{S},$$

$\boldsymbol{\Phi}$ – аффинор деформаций, $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Phi}^T - \mathbf{E})$ – тензор деформаций Коши – Грина,

$\mathbf{E}$ – единичный тензор, двоеточие означает свертывание тензоров [3, 16]. Из этого следует возможность определения напряжений при конкретизации вида удельной потенциальной энергии деформаций по формулам

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (1)$$

Такой подход к построению соотношений гиперупругости для изотропных и анизотропных материалов использовался в работах [16 – 18].

Представим тензорную функцию $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ в виде ряда по степеням тензора деформаций Коши – Грина

$$W = W_0 + \mathbf{A}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2!} \mathbf{N} :: \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{3!} \mathbf{L} ::: \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + \dots, \quad (2)$$

причем $W_0 = 0$, $\mathbf{A}_0 = 0$, если начальное состояние является ненапряженным. В выражении (2) использовано произведение $\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k \bar{e}_l$, где $\bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k \bar{e}_l = \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l$ – полиада, образованная векторами ортонормированного базиса $\bar{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, и произведение $\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k \bar{e}_l \bar{e}_m \bar{e}_n$, где $\bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k \bar{e}_l \bar{e}_m \bar{e}_n = \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l \otimes \bar{e}_m \otimes \bar{e}_n$.

Сохраним в представлении (2) только первые два ненулевых члена:

$$W = \frac{1}{2!} \mathbf{N} :: \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{3!} \mathbf{L} ::: \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3)$$

тогда из соотношений (1) и (3) следует выражение для напряжений

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \mathbf{L} :: \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4)$$

В выражениях (3) и (4) $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ – тензоры упругих констант четвертого и шестого рангов соответственно, которые удовлетворяют условиям внутренней симметрии

$$N_{ijkl} = N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}, \quad L_{ijklmn} = L_{jiklmn} = L_{ijlkmn} = L_{ijklnm} = L_{ijmnlk} = L_{kljlmn}. \quad (5)$$

Структура тензоров $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ для кубического материала известна [1 – 4, 16]. Тензор $\mathbf{N}$ содержит три независимые константы упругости второго порядка, а тензор $\mathbf{L}$ – шесть независимых констант упругости третьего порядка. Наименьшее число ненулевых компонент тензоры упругости имеют в системе канонических осей анизотропии материала [11, 17]. В произвольной (лабораторной) системе координат тензоры упругости кубического материала имеют произвольный вид. Главные оси анизотропии по В.В. Новожилову [11, 16] определяются как главные оси тензора напряжений при всестороннем сжатии, однако для кубического материала все главные значения тензора напряжений в этом случае равны, а главные векторы могут быть выбраны произвольно. Канонические оси анизотропии материала всегда совпадают с главными осями анизотропии, определенными по В.В. Новожилову. Однако в кубическом материале главные оси анизотропии, найденные из эксперимента, могут и не совпадать с каноническими осями. Тогда возникает необходимость определить взаимную ориентацию лабораторной системы координат с ортонормированным базисом $\bar{k}^i$ и системы канонических осей координат с базисом $\bar{a}_i$.

Поскольку реализация эксперимента по всестороннему сжатию образца затруднена, в работе [11] предложено заменить этот эксперимент на три опыта по сжатию кубического образца в трех взаимно перпендикулярных направлениях. В этих опытах обязательным является измерение всех компонент тензора деформаций в лабораторной системе координат. Эквивалентность таких экспериментов

является следствием линейности связи между деформациями и напряжениями в области малых деформаций. В этом случае речь идет об определении начального положения осей анизотропии материала.

Пусть опыты по сжатию кубических образцов проводятся в лабораторной системе координат с ортонормированным базисом $\vec{k}^i$. Взаимная ориентация векторных базисов $\vec{a}_i$ и $\vec{k}^i$ определяется ортогональным тензором поворота $\mathbf{Q}$. Для компонент тензора $\mathbf{Q} = q_{ij}\vec{k}^i\vec{k}^j$ выполняются тождества

$$\begin{aligned} q_{11}^2 + q_{21}^2 + q_{31}^2 &= 1, \quad q_{12}^2 + q_{22}^2 + q_{32}^2 = 1, \quad q_{13}^2 + q_{23}^2 + q_{33}^2 = 1, \\ q_{11}q_{12} + q_{21}q_{22} + q_{31}q_{32} &= 0, \quad q_{11}q_{13} + q_{21}q_{23} + q_{31}q_{33} = 0, \\ q_{13}q_{12} + q_{23}q_{22} + q_{33}q_{32} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В работе [11] показано, что для определения положения канонических осей анизотропии в кубическом материале достаточно двух экспериментов на сжатие кубических образцов. В первом эксперименте тензор напряжений определяется как $\mathbf{T}_1 = -t\vec{k}^1\vec{k}^1$. Пусть $\mathbf{C}$ – тензор упругих податливостей, обратный к тензору упругости $\mathbf{N}$. Измеряемые деформации выражаются через константы податливости и компоненты тензора $\mathbf{Q}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= -t[Q_1(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})) + C_{1122} + 2C_{1212}], \\ \bar{\varepsilon}_{12} &= -t[Q_7(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))], \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= -t[Q_4(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})) + C_{1122}], \\ \bar{\varepsilon}_{13} &= -t[Q_8(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))], \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= -t[Q_5(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})) + C_{1122}], \\ \bar{\varepsilon}_{23} &= -t[Q_9(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))], \end{aligned} \quad (7)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_{11}^4 + q_{12}^4 + q_{13}^4, \quad Q_4 = q_{11}^2 q_{21}^2 + q_{12}^2 q_{22}^2 + q_{13}^2 q_{23}^2, \\ Q_5 &= q_{11}^2 q_{31}^2 + q_{12}^2 q_{32}^2 + q_{13}^2 q_{33}^2, \quad Q_7 = q_{21} q_{11}^3 + q_{22} q_{12}^3 + q_{23} q_{13}^3, \\ Q_8 &= q_{31} q_{11}^3 + q_{32} q_{12}^3 + q_{33} q_{13}^3, \quad Q_9 = q_{21} q_{31} q_{11}^2 + q_{22} q_{32} q_{12}^2 + q_{23} q_{33} q_{13}^2. \end{aligned}$$

Во втором эксперименте тензор напряжений $\mathbf{T}_2 = -t\vec{k}^2\vec{k}^2$ и измеряемые компоненты тензора деформаций также выражаются через константы податливости и компоненты тензора $\mathbf{Q}$:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\varepsilon}}_{11} &= -t[Q_4(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})) + C_{1122} + 2C_{1212}], \\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{12} &= -t[Q_{10}(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))], \\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{22} &= -t[Q_2(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})) + C_{1122}], \\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{23} &= -t[Q_{11}(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))], \\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{33} &= -t[Q_6(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212})) + C_{1122}], \\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{13} &= -t[Q_{12}(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))], \end{aligned} \quad (8)$$

где обозначено

$$Q_2 = q_{21}^4 + q_{22}^4 + q_{23}^4, \quad Q_6 = q_{31}^2 q_{21}^2 + q_{32}^2 q_{22}^2 + q_{33}^2 q_{23}^2, \quad Q_{10} = q_{11} q_{21}^3 + q_{12} q_{22}^3 + q_{13} q_{23}^3,$$

$$Q_{11} = q_{31} q_{21}^3 + q_{32} q_{22}^3 + q_{33} q_{23}^3, \quad Q_9 = q_{11} q_{31} q_{21}^2 + q_{12} q_{32} q_{22}^2 + q_{13} q_{33} q_{23}^2.$$

Для отыскания девяти компонент тензора $\mathbf{Q}$ используем шесть соотношений (6) и четыре независимых соотношения из (7), (8):

$$-t[Q_7(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))] = \bar{\varepsilon}_{12},$$

$$-t[Q_8(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))] = \bar{\varepsilon}_{13},$$

$$-t[Q_9(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))] = \bar{\varepsilon}_{23},$$

$$-t[Q_{10}(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))] = \bar{\bar{\varepsilon}}_{12}.$$

Исключая из них множитель $(C_{1111} - (C_{1122} + 2C_{1212}))$, получим три уравнения относительно компонент тензора $\mathbf{Q}$:

$$q_{31} q_{11}^3 + q_{32} q_{12}^3 + q_{33} q_{13}^3 = \frac{\bar{\varepsilon}_{13}}{\bar{\varepsilon}_{12}} (q_{21} q_{11}^3 + q_{22} q_{12}^3 + q_{23} q_{13}^3),$$

$$q_{21} q_{31} q_{11}^2 + q_{22} q_{32} q_{12}^2 + q_{23} q_{33} q_{13}^2 = \frac{\bar{\varepsilon}_{23}}{\bar{\varepsilon}_{12}} (q_{21} q_{11}^3 + q_{22} q_{12}^3 + q_{23} q_{13}^3), \quad (9)$$

$$q_{11} q_{21}^3 + q_{12} q_{22}^3 + q_{13} q_{23}^3 = \frac{\bar{\bar{\varepsilon}}_{12}}{\bar{\varepsilon}_{12}} (q_{21} q_{11}^3 + q_{22} q_{12}^3 + q_{23} q_{13}^3).$$

Численное решение системы уравнений (6), (9) позволяет найти компоненты тензора $\mathbf{Q}$, то есть определить ориентацию канонической системы координат в кубическом материале относительно лабораторной системы координат по измеряемым в опытах деформациям.

Вычисления показали, что в случае кубических кристаллов канонические оси анизотропии совпадают с их кристаллографическими осями [100], [010] и [001] (обозначения из [1, 4]), а для композитных материалов или древесины их положение совпадает с преимущественными структурными направлениями.

Введем в рассмотрение тензорный базис, образованный диадами базисных векторов канонических осей симметрии кубического материала $\bar{a}_i$:

$$\mathbf{A}^1 = \bar{a}_1 \bar{a}_1, \quad \mathbf{A}^2 = \bar{a}_2 \bar{a}_2, \quad \mathbf{A}^3 = \bar{a}_3 \bar{a}_3, \quad \mathbf{A}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{a}_1 \bar{a}_2 + \bar{a}_2 \bar{a}_1),$$

$$\mathbf{A}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{a}_2 \bar{a}_3 + \bar{a}_3 \bar{a}_2), \quad \mathbf{A}^6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{a}_3 \bar{a}_1 + \bar{a}_1 \bar{a}_3). \quad (10)$$

Базис (10) нормируется соотношением: $\mathbf{A}^i : \mathbf{A}^j = \delta^{ij}$, где δ^{ij} – дельта Кронекера. Наряду с базисом (10) рассмотрим тензорный базис А.А. Ильюшина $\mathbf{I}^\alpha$ ($\alpha = 0, 1, \dots, 5$) с базисными тензорами [11, 16, 17]:

$$\mathbf{I}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{a}_1 \bar{a}_1 + \bar{a}_2 \bar{a}_2 + \bar{a}_3 \bar{a}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\bar{a}_3 \bar{a}_3 - \bar{a}_1 \bar{a}_1 - \bar{a}_2 \bar{a}_2), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{a}_1 \bar{a}_1 - \bar{a}_2 \bar{a}_2),$$

$$\mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{a}_1 \bar{a}_2 + \bar{a}_2 \bar{a}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{a}_2 \bar{a}_3 + \bar{a}_3 \bar{a}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{a}_3 \bar{a}_1 + \bar{a}_1 \bar{a}_3). \quad (11)$$

Тензорный базис (11) также нормирован: $\mathbf{I}^\alpha : \mathbf{I}^\beta = \delta^{\alpha\beta}$.

Тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \vec{a}_i \vec{a}_j$ как симметричный тензор второго ранга можно разложить по базисам (10) и (11). Эти разложения имеют вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{11} \mathbf{A}^1 + \varepsilon_{22} \mathbf{A}^2 + \varepsilon_{33} \mathbf{A}^3 + \sqrt{2} \varepsilon_{12} \mathbf{A}^4 + \sqrt{2} \varepsilon_{23} \mathbf{A}^5 + \sqrt{2} \varepsilon_{31} \mathbf{A}^6 \quad (12)$$

$$\text{и} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \mathbf{I}^0 + \varepsilon_1 \mathbf{I}^1 + \varepsilon_2 \mathbf{I}^2 + \varepsilon_3 \mathbf{I}^3 + \varepsilon_4 \mathbf{I}^4 + \varepsilon_5 \mathbf{I}^5, \quad (13)$$

где $\varepsilon_\alpha = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}^\alpha$.

Между коэффициентами разложений (12) и (13) имеется связь:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \\ \varepsilon_3 &= \sqrt{2} \varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_4 = \sqrt{2} \varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_5 = \sqrt{2} \varepsilon_{31}. \end{aligned}$$

Обратная связь имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_1, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_3, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_4, \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_5. \end{aligned}$$

По тензорам второго ранга (10) образуем тензоры четвертого и шестого рангов, обладающие внутренней симметрией (5):

$$\mathbf{A}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^\alpha \mathbf{A}^\beta + \mathbf{A}^\beta \mathbf{A}^\alpha),$$

$$\mathbf{A}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6} (\mathbf{A}^\alpha \mathbf{A}^\beta \mathbf{A}^\gamma + \mathbf{A}^\beta \mathbf{A}^\alpha \mathbf{A}^\gamma + \mathbf{A}^\gamma \mathbf{A}^\alpha \mathbf{A}^\beta + \mathbf{A}^\alpha \mathbf{A}^\gamma \mathbf{A}^\beta + \mathbf{A}^\beta \mathbf{A}^\gamma \mathbf{A}^\alpha + \mathbf{A}^\gamma \mathbf{A}^\beta \mathbf{A}^\alpha), \quad (14)$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 6$.

Из работ [1–4, 15, 16] известно разложение тензоров упругости $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ по базисам (14). Для кубического материала эти разложения имеют вид

$$\mathbf{N} = n_{11} (\mathbf{A}^{11} + \mathbf{A}^{22} + \mathbf{A}^{33}) + n_{12} (\mathbf{A}^{12} + \mathbf{A}^{23} + \mathbf{A}^{13}) + n_{44} (\mathbf{A}^{44} + \mathbf{A}^{55} + \mathbf{A}^{66}); \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= c_1 (\mathbf{A}^{111} + \mathbf{A}^{222} + \mathbf{A}^{333}) + c_2 (\mathbf{A}^{155} + \mathbf{A}^{266} + \mathbf{A}^{344}) + \\ &+ c_3 (\mathbf{A}^{112} + \mathbf{A}^{113} + \mathbf{A}^{122} + \mathbf{A}^{133} + \mathbf{A}^{223} + \mathbf{A}^{233}) + \\ &+ c_4 (\mathbf{A}^{144} + \mathbf{A}^{166} + \mathbf{A}^{255} + \mathbf{A}^{244} + \mathbf{A}^{355} + \mathbf{A}^{366}) + c_5 \mathbf{A}^{123} + c_6 \mathbf{A}^{456}, \end{aligned} \quad (16)$$

где n_{11}, n_{12}, n_{44} – ненулевые компоненты тензора упругости $\mathbf{N}$ – константы упругости второго порядка; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – константы упругости третьего порядка.

По тензорам (11) построим базисы, состоящие из тензоров четвертого ($\mathbf{I}^{\alpha\beta}$) и шестого ($\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma}$) рангов:

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\beta} + \mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\alpha}), \quad (17)$$

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6}(\mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\gamma} + \mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\gamma} + \mathbf{I}^{\gamma}\mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\beta} + \mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\gamma}\mathbf{I}^{\beta} + \mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\gamma}\mathbf{I}^{\alpha} + \mathbf{I}^{\gamma}\mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\alpha}), \quad (18)$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, 5$.

Базисы (17) и (18) нормируются соотношениями:

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} :: \mathbf{I}^{\gamma\epsilon} = \frac{1}{2}(\delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\epsilon} + \delta^{\alpha\epsilon}\delta^{\beta\gamma}),$$

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} :: \mathbf{I}^{\delta\epsilon\zeta} = \frac{1}{6}(\delta^{\alpha\zeta}\delta^{\beta\epsilon}\delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\epsilon}\delta^{\beta\zeta}\delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\zeta}\delta^{\gamma\epsilon} + \delta^{\alpha\zeta}\delta^{\beta\delta}\delta^{\gamma\epsilon} + \delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\epsilon}\delta^{\gamma\zeta} + \delta^{\alpha\epsilon}\delta^{\beta\delta}\delta^{\gamma\zeta}).$$

В работах [11, 17] получено разложение тензора упругости $\mathbf{N}$ по базису (5) в виде

$$\mathbf{N} = n^{(1)}\mathbf{I}^{00} + n^{(2)}(\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22}) + n^{(3)}(\mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}). \quad (19)$$

Коэффициенты в представлении (19) связаны с константами упругости второго порядка (15) соотношениями

$$n^{(1)} = n_{11} + 2n_{12}, \quad n^{(2)} = n_{11} - n_{12}, \quad n^{(3)} = n_{44}.$$

Тензор констант упругости третьего порядка $\mathbf{L}$ может быть разложен по базису (18), однако в своем разложении он должен содержать только такие комбинации тензоров $\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma}$, которые являются инвариантными относительно группы ортогональных преобразований кубической сингонии. Методом прямой проверки установлено, что для кубического материала имеется шесть инвариантных комбинаций тензоров (18):

$$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000}, \quad \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022}, \quad \mathbf{B}^{(3)} = \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}, \quad (20)$$

$$\mathbf{B}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{111} - 3\mathbf{I}^{122}), \quad \mathbf{B}^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155} - 2\mathbf{I}^{133}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244}), \quad \mathbf{B}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{I}^{345}.$$

Разложение тензора $\mathbf{L}$ по базису (20) имеет вид

$$\mathbf{L} = \sum_{s=1}^{s=6} b_s \mathbf{B}^{(s)}. \quad (21)$$

В выражении (21) коэффициенты b_s связаны с константами упругости третьего порядка кубического материала (16) соотношениями

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(c_1 + 6c_3 + 2c_5), \quad b_2 = \sqrt{3}(c_1 - c_5), \quad b_3 = 2\sqrt{3}(c_2 + 2c_4),$$

$$b_4 = c_1 - 3c_3 + 2c_5, \quad b_5 = 6(c_4 - c_2), \quad b_6 = 24c_6.$$

Разложения тензоров упругости (19) и (21) далее использованы для записи упругого потенциала для кубического материала и получения нелинейных определяющих соотношений.

2. Определяющие соотношения в собственных подпространствах кубического материала

Если в представлении для удельной потенциальной энергии деформаций (2) ограничиться только членом второго порядка, то соотношения (4) принимают вид обобщенного закона Гука:

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (22)$$

Учтем в соотношениях (22) представление (19) и получим

$$\mathbf{T} = n^{(1)} \mathbf{I}^{00} : \boldsymbol{\varepsilon} + n^{(2)} (\mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22}) : \boldsymbol{\varepsilon} + n^{(3)} (\mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}) : \boldsymbol{\varepsilon}$$

или

$$\mathbf{T} = n^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} + n^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} + n^{(3)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} . \quad (23)$$

Из соотношений (19) и (23) следует, что тензорный базис (17) является собственным для кубического материала. Понятие о собственных тензорах и собственных состояниях введено в работах Рыхлевского, Ковина и Махрабади [19, 20]. Собственные тензоры для кубического материала получены в работах [11, 12, 16, 21].

Тензоры деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$ являются собственными упругими состояниями кубического материала и принадлежат трем собственным подпространствам:

- одномерному (1D) – $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} = \varepsilon_0 \mathbf{I}^0$;

- двумерному (2D) – $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} = \varepsilon_1 \mathbf{I}^1 + \varepsilon_2 \mathbf{I}^2$; (24)

- трехмерному (3D) – $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \varepsilon_3 \mathbf{I}^3 + \varepsilon_4 \mathbf{I}^4 + \varepsilon_5 \mathbf{I}^5$.

Спроектируем тензор $\mathbf{T}$ в те же собственные подпространства:

$$\mathbf{T}_{(1)} = T_0 \mathbf{I}^0, \quad \mathbf{T}_{(2)} = T_1 \mathbf{I}^1 + T_2 \mathbf{I}^2, \quad \mathbf{T}_{(3)} = T_3 \mathbf{I}^3 + T_4 \mathbf{I}^4 + T_5 \mathbf{I}^5, \quad (25)$$

где $T_\alpha = \mathbf{T} : \mathbf{I}^\alpha$.

В соответствии с (23) закон Гука можно записать в виде

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{T}_{(k)} = \sum_{k=1}^3 n^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)} . \quad (26)$$

Из представления (26) следует, что в рамках линейной упругости тензоры напряжений $\mathbf{T}_{(\alpha)}$ и деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_{(\alpha)}$ в каждом собственном подпространстве соосны и пропорциональны.

Конкретизируем соотношения (4) для кубического материала. Для этого выясним свойства тензоров $\mathbf{B}^{(s)}$, входящих в разложение (21) тензора $\mathbf{L}$. Эти свойства проявляются при вычислении свертки тензоров $\mathbf{B}^{(s)}$ с собственными тензорами деформаций (24):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(\alpha)} : \mathbf{B}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(\beta)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(\beta)} : \mathbf{B}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(\alpha)} .$$

Из этих произведений ненулевыми являются следующие девять:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} : \mathbf{B}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} = 3J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}^2) \mathbf{I}^0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} : \mathbf{B}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} = \frac{1}{3\sqrt{3}} J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}) \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} : \mathbf{B}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} = J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}^2) \mathbf{I}^0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} : \mathbf{B}^{(3)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \frac{1}{3\sqrt{3}} J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}) \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} : \mathbf{B}^{(3)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) \mathbf{I}^0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} : \mathbf{B}^{(4)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} = \mathbf{Q}_{(2)2}, \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} : \mathbf{B}^{(5)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \frac{2}{3} \mathbf{P}_{(3)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} : \mathbf{B}^{(5)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \frac{2}{3} \mathbf{Q}_{(3)2}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} : \mathbf{B}^{(6)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \frac{1}{3} \mathbf{Q}_{(3)3}.$$

В соотношениях (27) обозначено $J_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A} : \mathbf{E}$ – первый инвариант тензора $\mathbf{A}$; $\mathbf{Q}_{(2)2}$ – проекция тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}^2$ во второе собственное подпространство:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \mathbf{I}^0 + \mathbf{Q}_{(2)2}, \quad \mathbf{Q}_{(2)2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \mathbf{I}^1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mathbf{I}^2; \quad (28)$$

$\mathbf{Q}_{(3)2}$ и $\mathbf{Q}_{(3)3}$ – проекции тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}^2$ во второе и третье собственные подпространства:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}^2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2) \mathbf{I}^0 + \mathbf{Q}_{(3)2} + \mathbf{Q}_{(3)3}, \\ \mathbf{Q}_{(3)2} &= \frac{-1}{2\sqrt{6}}(2\varepsilon_3^2 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \mathbf{I}^1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}(\varepsilon_4^2 - \varepsilon_5^2) \mathbf{I}^2, \\ \mathbf{Q}_{(3)3} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_4 \varepsilon_5 \mathbf{I}^3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_3 \varepsilon_5 \mathbf{I}^4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_3 \varepsilon_4 \mathbf{I}^5; \end{aligned} \quad (29)$$

тензор

$$\mathbf{P}_{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_1 \varepsilon_3 \mathbf{I}^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_2 \right) \varepsilon_4 \mathbf{I}^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_2 \right) \varepsilon_5 \mathbf{I}^5. \quad (30)$$

В данной модели выражение для удельной потенциальной энергии деформации имеет вид

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \left(3n^{(1)} J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}) + n^{(2)} J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) + n^{(3)} J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) \right) + \\ &+ \frac{1}{6\sqrt{3}} J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}) (9b_1 J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}) + b_2 J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) + b_3 J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)})) + \\ &+ \frac{1}{6} J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) (\sqrt{3}b_4 - 2b_5) + \frac{1}{36} J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) (b_6 - 12b_5) + \frac{1}{3} b_5 J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}), \end{aligned} \quad (31)$$

где введены обозначения для второго и третьего инвариантов тензора второго ранга: $J_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A} : \mathbf{A}$, $J_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$.

Запишем выражения для инвариантов тензоров, входящих в соотношения (27) и (31), через коэффициенты ε_α разложения (13). Инварианты тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$ запишутся как

$$\begin{aligned} J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_0, \quad J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}) = \frac{1}{3} \varepsilon_0^2, \quad J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \varepsilon_0^3, \\ J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) &= 0, \quad J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2, \quad J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) = \frac{1}{3\sqrt{6}} \varepsilon_1 (\varepsilon_1^2 - 3\varepsilon_2^2), \\ J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) &= 0, \quad J_2(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) = \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2, \quad J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5. \end{aligned} \quad (32)$$

Инварианты тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}^2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}^2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}^2$:

$$J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}^2) = \frac{1}{3}\varepsilon_0^2, \quad J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}^2) = \frac{1}{3}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2), \quad J_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}^2) = \frac{1}{3}(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2). \quad (33)$$

Смешанный инвариант тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$:

$$\begin{aligned} J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} : \mathbf{Q}_{(3)2} + J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) + J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} : \mathbf{P}_{(3)} + J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) + J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) = \\ &= \frac{\varepsilon_1}{3\sqrt{6}}(\varepsilon_1^2 - 3\varepsilon_2^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5 + \frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{6}}(\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 - 2\varepsilon_3^2) + \frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{2}}(\varepsilon_4^2 - \varepsilon_5^2). \end{aligned} \quad (34)$$

Присутствие смешанного инварианта (34) в выражении для удельной потенциальной энергии деформаций позволяет учитывать взаимное влияние процессов, происходящих в собственных подпространствах 2D и 3D. Отметим, что выражения для смешанного инварианта (34) упрощаются в случаях, когда деформации во втором или третьем собственном подпространствах отсутствуют, поскольку при этом $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} : \mathbf{Q}_{(3)2} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} : \mathbf{P}_{(3)} = 0$. Отметим, что

если $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \mathbf{0}$, то

$$J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) = J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}) = \frac{\varepsilon_1}{3\sqrt{6}}(\varepsilon_1^2 - 3\varepsilon_2^2);$$

если $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} = \mathbf{0}$, то

$$J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) = J_3(\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5.$$

Подставляя (19) и (21) в определяющие соотношения (4), получим следующую форму связи между напряжениями и деформациями:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{(1)} &= \left[(n^1 + b_1\varepsilon_0)\varepsilon_0 + \frac{1}{3}b_2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \frac{1}{3}b_3(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2) \right] \mathbf{I}^0, \\ \mathbf{T}_{(2)} &= \left(n^2 + \frac{1}{3}b_2\varepsilon_0 \right) \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} + b_4\mathbf{Q}_{(2)2} + 2b_5\mathbf{Q}_{(3)2}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\mathbf{T}_{(3)} = n^3\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} + \frac{2}{3}b_5\mathbf{P}_{(3)} + \frac{1}{3}b_6\mathbf{Q}_{(3)3}.$$

Соотношения (35) содержат деформации во второй степени и являются физически нелинейными соотношениями. В этом случае в неодномерных собственных подпространствах 2D и 3D тензоры напряжений и деформаций $\mathbf{T}_{(2)}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}$, $\mathbf{T}_{(3)}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$ перестают быть соосными. Во втором подпространстве отклонение от соосности тензоров $\mathbf{T}_{(2)}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}$ связано как с появлением составляющей напряжений вдоль тензора $\mathbf{Q}_{(2)2}$, так и составляющей вдоль $\mathbf{Q}_{(3)2}$. В третьем подпространстве отклонение от соосности тензоров $\mathbf{T}_{(3)}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$ связано с появлением составляющих напряжений вдоль тензоров $\mathbf{Q}_{(3)3}$ и $\mathbf{P}_{(3)}$, причем последний обращается в ноль, если $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} = \mathbf{0}$.

Анализ показывает, что полученные соотношения (35) не удовлетворяют обобщению частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы, сформулированному в работах [11, 16, 17], и учитывают взаимное влияние процессов, происходящих в различных собственных подпространствах.

3. Анализ нелинейных эффектов, описываемых моделью

Соотношения (35) описывают связь между конечными деформациями кубического материала и напряжениями. Для анализа нелинейных эффектов, описываемых соотношениями (35), будем считать деформации малыми. В этом случае собственные состояния кубического материала $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$ имеют простой физический смысл. Первое собственное состояние $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)}$ является чисто объемным деформированием. Второе состояние $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}$ соответствует формоизменению, происходящему в главных осях анизотропии материала и связанному только с изменением длин материальных волокон. Третье собственное состояние $\boldsymbol{\varepsilon}_{(3)}$ соответствует чистым сдвигам в координатных плоскостях.

Рассмотрим процесс деформирования, целиком расположенный в первом собственном подпространстве: $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} = \varepsilon_0 \mathbf{I}^0$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \mathbf{0}$. В соответствии с (35) в ответ на такие деформации в кубических материалах появляются напряжения $\mathbf{T}_{(1)} = (n^1 + b_1 \varepsilon_0) \varepsilon_0 \mathbf{I}^0$, которые являются гидростатическими, нелинейно зависящими от объемных деформаций ε_0 . Касательные напряжения в главных осях анизотропии не появляются.

Пусть процесс деформирования целиком расположен во втором собственном подпространстве $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} = \varepsilon_1 \mathbf{I}^1 + \varepsilon_2 \mathbf{I}^2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \mathbf{0}$. Такому процессу соответствует изменение длин волокон, расположенных вдоль главных осей анизотропии, без сдвигов. В это случае в соответствии с (35) возникающие напряжения имеют вид $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{(1)} + \mathbf{T}_{(2)}$, причем

$$\mathbf{T}_{(1)} = \frac{1}{3} b_2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \mathbf{I}^0, \quad \mathbf{T}_{(2)} = \left(n^2 + \frac{1}{3} b_2 \varepsilon_0 \right) \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} + b_4 \mathbf{Q}_{(2)2},$$

то есть соотношения описывают нелинейную зависимость напряжений от деформаций. В процессе формоизменения $\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)}$ появляются гидростатические напряжения. Как и в первом случае, касательные напряжения $\mathbf{T}_{(3)}$ в таком процессе не появляются.

Если процесс деформирования $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} = \varepsilon_3 \mathbf{I}^3 + \varepsilon_4 \mathbf{I}^4 + \varepsilon_5 \mathbf{I}^5$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} = \mathbf{0}$ заключается в чистых сдвигах хотя бы в одной из плоскостей, содержащих канонические оси анизотропии, то в соответствии с (35) возникают напряжения $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{(1)} + \mathbf{T}_{(2)} + \mathbf{T}_{(3)}$, причем

$$\mathbf{T}_{(1)} = \frac{1}{3} b_3 (\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2) \mathbf{I}^0, \quad \mathbf{T}_{(2)} = 2b_5 \mathbf{Q}_{(3)2}, \quad \mathbf{T}_{(3)} = n^3 \boldsymbol{\varepsilon}_{(3)} + \frac{1}{3} b_6 \mathbf{Q}_{(3)3},$$

то есть соотношения (35) описывают нелинейную зависимость касательных на-

пряжений $T_{(3)}$ от сдвиговых деформаций $\epsilon_{(3)}$ и прогнозируют возникновение нормальных напряжений, в том числе и гидростатических.

Заключение

Для кубического материала получено разложение тензоров упругости четвертого и шестого рангов по тензорным базисам в собственных подпространствах. Из условия существования упругого потенциала (удельной потенциальной энергии деформации) получены соотношения между напряжениями и конечными деформациями, содержащие деформации во второй степени. Выписаны выражения для напряжений в каждом из собственных подпространств кубического материала.

Предложенный вариант соотношений позволяет учесть взаимное влияние процессов в различных собственных подпространствах кубического материала. Если в предложенных соотношениях обнулить константы упругости третьего порядка, то они будут сведены к линейным соотношениям закона Гука для кубического материала. При сохранении в выражениях упругих констант третьего порядка показана непропорциональность тензоров напряжений и деформаций в каждом из собственных подпространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 639 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
3. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
4. Newnham R.E. Properties of Materials: Anisotropy, Symmetry, Structure. New York: Oxford University Press, 2005. 391 p.
5. Xiao H. A new representation theorem for elastic constitutive equations of cubic crystals // Journal of Elasticity. 1999. V. 53. P. 37–45. DOI: 10.1023/A:1007591025837.
6. Paszkiewicz T., Wolski S. Elastic properties of cubic crystals: Every's versus Blackman's diagram // Journal of Physics: Conference Series. 2008. V. 104. 012038. DOI: 10.1088/1742-6596/104/1/012038.
7. Knowles K.M. The biaxial moduli of cubic materials subjected to an equi-biaxial elastic strain // Journal of Elasticity. 2016. V. 124. P. 1–25. DOI: 10.1007/s10659-015-9558-x.
8. Knowles K.M., Howie P.R. The directional dependence of elastic stiffness and compliance shear coefficients and shear moduli in cubic materials // Journal of Elasticity. 2015. V. 120. P. 87–108. DOI: 10.1007/s10659-014-9506-1.
9. Norris A. Poisson's Ratio in Cubic Materials // Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2006. V. 462. No. 2075. P. 3385–3405. DOI: 10.1098/rspa.2006.1726.
10. Duffy T. Single-crystal elastic properties of minerals and related materials with cubic symmetry // American Mineralogist. 2018. V. 103. Iss. 6. P. 977–988. DOI: 10.2138/am-2018-6285.
11. Соколова М.Ю., Христич Д.В. Программа экспериментов по определению типа начальной упругой анизотропии материала // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 5. С. 205–213. DOI: 10.15372/PMTF20150519.
12. Wright T.W. Bootstrap elasticity III: minimal nonlinear constitutive representation for cubic materials // Journal of Elasticity. 2015. V. 120. No. 1. P. 109–119. DOI: 10.1007/s10659-014-9507-0.
13. Claiton J.D. Nonlinear Elastic and Inelastic Models for Shock Compression of Crystalline Solids. Springer, 2019. 452 p.
14. Kambouchev N., Fernandez J., Radovitzky R. A polyconvex model for materials with cubic symmetry // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2007. V. 15. No. 5. P. 451–468. DOI: 10.1088/0965-0393/15/5/006.

15. Kube C.N., Turner J.A. Estimates of Nonlinear Elastic Constants and Acoustic Nonlinearity Parameters for Textured Polycrystals // Journal of Elasticity. 2016. V. 122. No. 2. P. 157–177. DOI: 10.1007/s10659-015-9538-1.
16. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.
17. Соколова М.Ю., Христич Д.В. О симметрии термоупругих свойств квазикристаллов // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. Вып. 5. С. 728–734.
18. Козлов В.В., Маркин А.А. Апробация определяющих соотношений нелинейной теории упругости при осевом сдвиге полого цилиндра // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 102–114. DOI: 10.17223/19988621/63/9
19. Рыхлевский Я. О законе Гука // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.
20. Mehrabadi M.M., Cowin S.C. Eigentensors of linear anisotropic elastic materials // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1991. V. 44. Iss. 2. P. 331. DOI: 10.1093/qjmam/44.2.331.
21. Остросаблин Н.И. Об уравнениях линейной теории упругости // Прикладная механика и техническая физика. 1992. Вып. 3. С. 131–140.

Статья поступила 29.02.2020

Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2021) FINITE STRAINS OF NONLINEAR ELASTIC ANISOTROPIC MATERIALS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 70. pp. 103–116

DOI 10.17223/19988621/70/9

Keywords: anisotropy, hyperelasticity, finite strains, cubic materials, tensor bases, invariants.

Anisotropic materials with the symmetry of elastic properties inherent in crystals of cubic syngony are considered. Cubic materials are close to isotropic ones by their mechanical properties. For a cubic material, the elasticity tensor written in an arbitrary (laboratory) coordinate system, in the general case, has 21 non-zero components that are not independent. An experimental method is proposed for determining such a coordinate system, called canonical, in which a tensor of elastic properties includes only three nonzero independent constants.

The nonlinear model of the mechanical behavior of cubic materials is developed, taking into account geometric and physical nonlinearities. The specific potential strain energy for a hyperelastic cubic material is written as a function of the tensor invariants, which are projections of the Cauchy-Green strain tensor into eigensubspaces of the cubic material.

Expansions of elasticity tensors of the fourth and sixth ranks in tensor bases in eigensubspaces are determined for the cubic material. Relations between stresses and finite strains containing the second degree of deformations are obtained. The expressions for the stress tensor reflect the mutual influence of the processes occurring in various eigensubspaces of the material under consideration.

Financial support. The reported study was partially funded by the grant from the President of the Russian Federation according to the research project MD-1803.2019.1 and by the grant from RFBR according to the research project No. 18-31-20053.

Marina Yu. SOKOLOVA (Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Dmitriy V. KHRISTICH (Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

REFERENCES

1. Sirotnin Yu.I., Shaskol'skaya M.P. (1982) *Osnovy kristallofiziki* [Fundamentals of crystal physics]. Moscow: Mir.
2. Lekhnitskiy S.G. (1963) *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. San Francisco: Holden Day.
3. Chernykh K.F. (1999) *An Introduction to Modern Anisotropic Elasticity*. Begell House.
4. Newnham R.E. (2005) *Properties of Materials: Anisotropy, Symmetry, Structure*. New York: Oxford University Press.
5. Xiao H. (1999) A new representation theorem for elastic constitutive equations of cubic crystals. *Journal of Elasticity*. 53. pp. 37–45. DOI: 10.1023/A:1007591025837.
6. Paszkiewicz T., Wolski S. (2008) Elastic properties of cubic crystals: Every's versus Blackman's diagram. *Journal of Physics: Conference Series*. 104. Article 012038. DOI: 10.1088/1742-6596/104/1/012038.
7. Knowles K.M. (2016) The biaxial moduli of cubic materials subjected to an equi-biaxial elastic strain. *Journal of Elasticity*. 124. pp. 1–25. DOI: 10.1007/s10659-015-9558-x.
8. Knowles K.M., Howie P.R. (2015) The directional dependence of elastic stiffness and compliance shear coefficients and shear moduli in cubic materials. *Journal of Elasticity*. 120. pp. 87–108. DOI: 10.1007/s10659-014-9506-1.
9. Norris A. (2006) Poisson's Ratio in Cubic Materials. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 462(2075). pp. 3385–3405. DOI: 10.1098/rspa.2006.1726.
10. Duffy T. (2018) Single-crystal elastic properties of minerals and related materials with cubic symmetry. *American Mineralogist*. 103(6). pp. 977–988. DOI: 10.2138/am-2018-6285.
11. Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2015) Program of experiments to determine the type of initial elastic anisotropy of material. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 56(5). pp. 913–919. DOI: 10.1134/S0021894415050193.
12. Wright T.W. (2015) Bootstrap elasticity III: minimal nonlinear constitutive representation for cubic materials. *Journal of Elasticity*. 120(1). pp. 109–119. DOI: 10.1007/s10659-014-9507-0.
13. Claiton J.D. (2019) *Nonlinear Elastic and Inelastic Models for Shock Compression of Crystalline Solids*. Springer.
14. Kambouchev N., Fernandez J., Radovitzky R. (2007) A polyconvex model for materials with cubic symmetry. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. 15(5). pp. 451–468. DOI: 10.1088/0965-0393/15/5/006.
15. Kube C.N., Turner J.A. (2016) Estimates of nonlinear elastic constants and acoustic nonlinearity parameters for textured polycrystals. *Journal of Elasticity*. 122(2). pp. 157–177. DOI: 10.1007/s10659-015-9538-1.
16. Markin A.A., Sokolova M.Yu. (2015) *Thermomechanics of elastoplastic deformation*. Cambridge: Cambridge International Science Publishing.
17. Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2014) The symmetry of the thermoelastic properties of quasicrystals. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 78(5). pp. 524–528. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2015.03.012.
18. Kozlov V.V., Markin A.A. (2020) Aprobatsiya opredelyayushchikh sootnosheniy nelineynoy teorii uprugosti pri osevom sdvige pologo tsilindra [Testing of defining relations of nonlinear theory of elasticity in an axial strain of a hollow cylinder]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo univrsiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State university Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp. 102–114. DOI: 10.17223/19988621/63/9.
19. Rychlewski J. (1984) On Hooke's law. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 48(3). pp. 303–314. DOI: 10.1016/0021-8928(84)90137-0.
20. Mehrabadi M.M., Cowin S.C. (1991) Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 44(2). p. 331. DOI: 10.1093/qjmam/44.2.331.
21. Ostrosablin N.I. (1992) Equations of the linear theory of elasticity. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 33(3). pp. 438–446. DOI: 10.1007/BF00851743.

Received: February 29, 2020