2008 Теоретические основы прикладной дискретной математики № 2(2)

DOI 10.17223/20710410/2/3

УДК 512.816+512.548.7

О КВАЗИГРУППАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ИЗ ФИЗИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ РАНГА (2, 2)

Р.М. Мурадов, В.А. Кыров

Горно-Алтайский государственный университет

E-mail: kfizika@gasu.ru

В данной работе квазигруппа, задающая физическую структуру ранга (2, 2), изотопией переводится к квазигруппе с правой единицей и с тождественной операцией взятия правого обратного элемента.

Ключевые слова: *квазигруппа, физическая структура ранга* (2, 2).

Напомним [1], что квазигруппа – это множество $(G, \bullet)$ с однозначной разрешимостью уравнений $A \bullet X = B$, $X \bullet A = C$ ($\forall A, B, C \in G$), относительно $C \in G$. Если существует элемент $E \in G$: $X \bullet E = X$, $\forall X \in G$, то он называется правой единицей. Если уравнение $X \bullet Y = E$ однозначно разрешимо относительно Y, то элемент Y называется правым обратным к элементу X. Ниже изучаются квазигруппы с правой единицей и с тождественной операцией взятия правого обратного элемента. В конце приводятся примеры таких квазигрупп. Квазигрупповая терминология приводится по монографии [1].

1. Квазигруппа с правой единицей и с тождественной операцией взятия правого обратного элемента

Пусть $(C, \bullet)$ – квазигруппа, φ – левая обратная операция, а ψ – правая обратная операция.

Теорема 1. Квазигруппа $(C, \bullet)$ изотопна квазигруппе $(C, \circ)$ с правой единицей E и тождественной операцией взятия правого обратного элемента.

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $E \in C$. Разрешая в квазигруппе $(C, \bullet)$ уравнение $Z = X \bullet E$ относительно X, получаем $X = \varphi(Z, E) = \varphi_E(Z)$, тогда приходим к квазигруппе $(C, *)$, изотопной исходной с бинарной операцией $Z = X * Y = \varphi_E(X \bullet Y)$. В новой квазигруппе уравнение $E = X * Y = \varphi_E(X \bullet Y)$ разрешим справа: $Y = \psi(X, \varphi^{-1}{}_E(E)) = \psi_E(X)$. Построим еще одну квазигруппу $(C, \circ)$ с бинарной операцией $Z = X \circ Y = X * \psi_E(Y)$, изотопную квазигруппе $(C, *)$. Очевидно, построенная таким способом квазигруппа $(C, \circ)$ изотопна квазигруппе $(C, \bullet)$. Бинарные операции связаны с помощью изотопии $T'' = (1, \psi_E, \varphi_E)$, т.е. $X \circ Y = \varphi_E(X \bullet \psi_E(Y))$. Докажем, что E – правая единица в квазигруппе $(C, \circ)$. Для этого воспользуемся леммой

Лемма. $\psi_E(E) = E$.

Доказательство. Из определения отображений φ_E и ψ_E следует, что $\psi_E(E) = \psi(E, \varphi^{-1}{}_E(E)) = u$. По определению правой обратной операции имеем $E = \varphi_E(E \bullet u)$. Из определения левой обратной операции тогда получаем $E \bullet u = E \bullet E$. По определению квазигруппы $(C, \bullet)$ тогда имеем $u = E$. ■

Из леммы тогда получаем: $X \circ E = \varphi_E(X \bullet \psi_E(E)) = \varphi_E(X \bullet E) = X$. Докажем теперь, что правый обратный к элементу квазигруппы $(C, \circ)$ совпадает с ним самим. Рассмотрим для этого уравнение $E = X \circ Y$ и разрешим его относительно второго аргумента. Действительно, $E = X \circ Y = \varphi(X \bullet \psi(Y, \varphi^{-1}{}_E(E)), E)$, значит, $X \bullet \psi(Y, \varphi^{-1}{}_E(E)) = E \bullet E$, следовательно, $\psi(Y, \varphi^{-1}{}_E(E)) = \psi(X, E \bullet E)$. Из доказанной выше леммы вытекает равенство $\varphi^{-1}{}_E(E) = E \bullet E$. Значит, $Y = X$, т.е. правый обратный к элементу квазигруппы $(C, \circ)$ совпадает с ним самим. ■

Ниже будут приведены примеры на применение доказанной теоремы.

2. Физическая структура ранга (2,2)

Во второй половине XX века построена теория физических структур. Эта теория появилась из анализа фундаментальных законов физики. Так, в частности, всем известный второй закон Ньютона дает пример физической структуры ранга (2, 2). Позже была установлена связь этой теории с алгеброй, в частности с теорией квазигрупп. Дадим точную формулировку физической структуры ранга (2, 2) [2]. Рассмотрим три множества M, N, B и отображение f: $M \times N \to B$. Пусть выполняются следующие аксиомы:

А1. $\forall\ i \in \Omega_M$, $\forall\ b \in B$, $\exists\,!\ \alpha \in N$: $f(i\alpha) = b$, где $\Omega_M \subset M$.

А2. $\forall\ \alpha \in \Omega_N$, $\forall\ b \in \Omega_B$, $\exists\,!\ i \in M$: $f(i\alpha) = b$, где $\Omega_N \subset N$.

А3. $\forall\ \langle i_0, i_1 \rangle \in M \times \Omega_M$, $\forall\ \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle \in N \times \Omega_N$, существует связь

$$f_{00} = g(f_{01}, f_{11}, f_{10}),$$

где $f_{mn} = f(i_m \alpha_n)$, $m, n = 0, 1$.

Если задано метрическое отображение f: $M \times N \to B$ и выполняются аксиомы А1 – А3, то говорят, что задана физическая структура ранга (2, 2).

Построим два вспомогательных отображения: F_j: $N \to \Omega_B$, $j \in \Omega_M$, с явным видом $F_j(\alpha) = f(j\alpha)$ и F_γ: $M \to B$, $\gamma \in \Omega_N$: $F_\gamma(i) = f(i\gamma)$. Из аксиом А1 и А2 следует биективность построенных отображений, т.е. $N \sim \Omega_B$, $M \sim B$.

Из аксиом А1, А2 следует, что на множествах M, N, B определена частичная трехбазисная квазигруппа с операцией f. Согласно аксиоме А3, это специальная трехбазисная квазигруппа, которую будем называть *феноменологически симметричной* и обозначать (M, N, B, f). Точное определение можно найти в [4].

Введем обозначения $x = f(i\gamma)$, $y = f(j\alpha)$. Тогда метрическое отображение можно переписать в виде

$$f(i\alpha) = f(F^{-1}{}_\gamma(x), F^{-1}{}_j(y)) = \overline{f}(x,y).$$

Для построенного отображения $\overline{f}: B\times\Omega_B \to B$ все приведенные выше аксиомы выполняются, т.е. оно также задает физическую структуру ранга (2, 2). Другими словами, определена частичная феноменологически симметричная квазигруппа $(B, \overline{f})$.

Теорема 2. Для частичной феноменологически симметричной квазигруппы $(B, \overline{f})$ выполняется тождество, обобщающее ассоциативность

$$X(YZ) = (XY)Z,$$

где $X, Y \in B$, $Z \in \Omega_B$. Ограничение первого аргумента отображения $\overline{f}: B\times\Omega_B \to B$ на Ω_B дает групповую операцию в Ω_B, т. е. Ω_B является группой. Отображение $\overline{f}: B\times\Omega_B \to B$ задает тогда группу преобразований множества B с параметрической группой Ω_B.

Доказательство можно найти в работе [2]. ■

Как известно, каждая группа изотопна квазигруппе из некоторого класса. Далее к такой квазигруппе будет применена теорема 1. Эти квазигруппы возьмем из классификации физической структуры ранга (2, 2) для $B = C \subset R^4$.

3. 4-метрическая физическая структура ранга (2, 2)

На примере 4-метрической физической структуры ранга (2, 2), т. е. когда $C = B \subset R^4$, построим квазигруппы с правой единицей и тождественной операцией взятия правого обратного элемента. Явный вид квазигрупп дается по классификации 4-метрической физической структуры ранга (2, 2), которую приведем по работе [3]. Следует отметить, что до конца удалось довести исследование не всех квазигрупп.

Теорема 3. С точностью до изотопии бинарные операции квазигрупп, изотопных группам, т. е. в подмножестве $C \subset R^4$ задающие 4-метрическую физическую структуру ранга (2, 2), принимают вид

$$f^1 = (x+\xi)^2 \exp[\varepsilon(w+\theta)],\ f^2 = (y+\eta)^2 \exp[k(w+\theta)],\ f^3 = (z+\zeta)^2 \exp[l(w+\theta)],\ f^4 = w-\theta; \tag{1}$$

$$f^1 = [(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2]\exp\left[-2k \operatorname{arctg}\frac{y+\eta}{x+\xi}\right],\ f^2 = 2\operatorname{arctg}\frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \theta,$$

$$f^3 = (z+\zeta)^2 \exp[l(w+\theta)],\ f^4 = w-\theta; \tag{2}$$

$$f^1 = (x+\xi)^2 \exp\left[-2k\frac{y+\eta}{x+\xi}\right],\ f^2 = 2\frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \theta,\ f^3 = (z+\zeta)^2 \exp[\varepsilon(w+\theta)],\ f^4 = w-\theta; \tag{3}$$

$$f^1 = x+\xi,\ f^2 = 2\frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \theta,\ f^3 = z+\zeta - \frac{(y+\eta)^2}{2(x+\xi)},\ f^4 = w-\theta, \tag{4}$$

$$f^1 = x+\xi,\ f^2 = 2\frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \theta,\ f^3 = (x+\xi)\ln(z+\zeta+y+\eta+x+\xi) - y - \eta,\ f^4 = w-\theta; \tag{5}$$

$$f^1 = (x+\xi)^2 \exp\left[-2k\frac{y+\eta}{x+\xi}\right],\ f^2 = 2\frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \theta,\ f^3 = k(y+\eta) - x - \xi - k^2(z+\zeta),\ f^4 = w-\theta; \tag{6}$$

$$f^1 = (x+\xi)^2 \exp\left[-2k\frac{y+\eta}{x+\xi}\right],\ f^2 = 2\frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \theta,\ f^3 = 2\frac{z+\zeta}{x+\xi} - k\left(\frac{y+\eta}{x+\xi}\right)^2,\ f^4 = w-\theta; \tag{7}$$

$$f^1 = [x-\xi-\zeta(y-\eta)]e^{c\theta}, f^2 = (y-\eta)e^{\theta}, f^3 = (z-\zeta)e^{(c-1)\theta}, f^4 = w-\theta; \tag{8}$$

$$f^1 = (x+\xi)e^z,\ f^2 = (x+\xi)e^\zeta,\ f^3 = (y+\eta)e^w,\ f^4 = (y+\eta)e^\theta; \tag{9}$$

$$f^1 = [(x+\xi)^2 + (y+\eta)]^2 \exp(z+\zeta),\ f^2 = 2\operatorname{arctg}\frac{y+\eta}{x+\xi} + w + \theta,\ f^3 = z-\zeta,\ f^4 = w-\theta; \tag{10}$$

$$f^1 = (x+\xi)y\eta\,,\ f^2 = z + \frac{1}{(x+\xi)y^2}\,,\ f^3 = \zeta + \frac{1}{(x+\xi)\eta^2}\,,\ f^4 = w+\theta\,, \tag{11}$$

где k, l, c, q – произвольные постоянные, $\varepsilon = 0{,}1$.

Результатом применения теоремы 1 к теореме 3 является

Теорема 4. Квазигруппы (1) – (10) из теоремы 3 изотопны квазигруппам с правой единицей $E = (0, 0, 0, 0)$ и тождественной операцией взятия правого обратного элемента, а квазигруппа (11) – квазигруппе с правой единицей $E = (0, 1, 0, 0)$:

$$f^1 = (x-\xi)e^{\varepsilon\theta}\,,\ f^2 = (y-\eta)e^{k\theta}\,,\ f^3 = (z-\zeta)e^{l\theta}\,,\ f^4 = w-\theta\,; \tag{1'}$$

$$f^1 = [(x-\xi)\cos\theta - (y-\eta)\sin\theta]e^{k\theta}, f^2 = [(x-\xi)\sin\theta + (y-\eta)\cos\theta]e^{k\theta}, f^3 = (z-\zeta)e^{l\theta}, f^4 = w-\theta; \tag{2'}$$

$$f^1 = (x-\xi)e^{k\theta}\,,\ f^2 = [(x-\xi)\theta + y-\eta]e^{k\theta}\,,\ f^3 = (z-\zeta)e^{\theta}\,,\ f^4 = w-\theta\,; \tag{3'}$$

$$f^1 = x-\xi\,,\ f^2 = (x-\xi)\theta + y-\eta\,,\ f^2 = \frac{(x-\xi)\theta^2}{2} + (y-\eta)\theta + z-\zeta\,,\ f^4 = w-\theta\,; \tag{4'}$$

$$f^1 = x-\xi, f^2 = (x-\xi)\theta + y-\eta, f^3 = (x-\xi)(e^{\theta}-\theta-1) + (y-\eta)(e^{\theta}-1) + z-\zeta, f^4 = w-\theta; \tag{5'}$$

$$\left.\begin{aligned} &f^1 = (x-\xi)e^{k\theta}, f^2 = [(x-\xi)\theta + y-\eta]e^{k\theta},\\ &f^3 = \frac{(x-\xi)(e^{k\theta}(k\theta-1)-1) + (y-\eta)(k(e^{k\theta}-1))}{k^2} + z-\zeta, f^4 = w-\theta;\end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

$$f^1 = (x-\xi)e^{k\theta}, f^2 = [(x-\xi)\theta + y-\eta]e^{k\theta}, f^3 = \left(\frac{(x-\xi)k\theta^2}{2} + (y-\eta)k\theta + z-\zeta\right)e^{k\theta}, f^4 = w-\theta; \tag{7'}$$

$$f^1 = [x-\xi-\zeta(y-\eta)]e^{c\theta}, f^2 = (y-\eta)e^{\theta}, f^3 = (z-\zeta)e^{(c-1)\theta}, f^4 = w-\theta; \tag{8'}$$

$$f^1 = (x-\xi)e^{\zeta}\,,\ f^2 = (y-\eta)e^{\theta}\,,\ f^3 = z-\zeta\,,\ f^4 = w-\theta\,; \tag{9'}$$

$$f^1 = [(x-\xi)\cos\theta - (y-\eta)\sin\theta]e^{\zeta}, f^2 = [(x-\xi)\sin\theta + (y-\eta)\cos\theta]e^{\zeta}, f^3 = z-\zeta, f^4 = w-\theta; \tag{10'}$$

$$f^1 = \frac{(x-\xi)\eta^2}{1-(x-\xi)\eta^2\zeta}, f^2 = \frac{[1-(x-\xi)\eta^2\zeta]y}{\eta}, f^3 = \frac{y^2z - \eta^2\zeta - (x-\xi)y^2\eta^2 z\zeta}{[1-(x-\xi)\eta^2\zeta]y^2}, f^4 = w-\theta. \tag{11'}$$

Доказательство теоремы проиллюстрируем на примере квазигруппы (9). Остальные случаи аналогичны. Для аналитических построений используем доказательство теоремы 1. Квазигрупповая операция в $(C, \bullet)$ обозначается $Z = X\bullet Y$, где $X = (x, y, z, w) \in C$, $Y = (\xi, \eta, \zeta, \theta) \in C$. Как сказано в формулировке теоремы, $E = (0, 0, 0, 0)$. По теореме 1 бинарная операция изотопной квазигруппы $(C, *)$ имеет вид

$$X*Y = \{\,(x+\xi)e^{\zeta}, (y+\eta)e^{\theta}, \ln e^{z-\zeta}, \ln e^{w-\theta}\,\}.$$

Отображение ψ_E в явном виде задается уравнениями $\xi = -x,\ \eta = -y,\ \zeta = z,\ \theta = w$. Осуществляя подстановку $\xi = -\xi,\ \eta = -\eta,\ \zeta = \zeta,\ \theta = \theta$ в предыдущих уравнениях, приходим к бинарной операции (9’) квазигруппы $(C, \circ)$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоусов В.Д.* Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.
2. *Симонов А.А.* Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур // Приложение к книге Кулакова Ю.И. «Теория физических структур». М., 2004.
3. *Кыров В.А.* Классификация четырехмерных физических структур ранга (2, 2) // Приложение к книге Михайличенко Г.Г., Мурадова Р.М. «Физические структуры как геометрии двух множеств». Горно-Алтайск, 2008.
4. *Кыров В.А.* Трехбазисные квазигруппы с обобщенным тождеством Уорда // Прикладная дискретная математика. 2008. № 1.