

ПОИСК ВЕРШИННЫХ (s, t) -СЕЧЕНИЙ ГРАФА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕНИЕМ ПО ДИАМЕТРУ КОМПОНЕНТ СВЯЗНОСТИ¹

В.А. Мелентьев

Институт физики полупроводников СО РАН, г. Новосибирск

E-mail: melva@isp.nsc.ru

В рамках задачи поиска d -ограниченной связности графа вычислительной системы (ВС) предложен подход к решению проблемы поиска множества минимальных d -ограниченных (s, t) -сечений, базирующийся на скобочной форме представления проекций и образов графа.

Ключевые слова: структурная отказоустойчивость вычислительной системы, диаметр компоненты связности.

Отказоустойчивость системы базируется на ее структурной конъюнктуре, заключающейся в наличии достаточного для сохранения работоспособности числа вершин в графе ВС и в обеспечении заданного критерия их связности. В качестве последнего здесь определено значение максимально допускаемого в системе эксцентриситета вершин, или диаметра компоненты связности графа ВС при ее деградации вследствие происходящих в системе отказов. Задача оценки структурной отказоустойчивости ВС с критическими значениями числа n вершин и диаметра d впервые поставлена в [1]. Как указано в [2], суть этой задачи состоит в выявлении наименьшего числа l^* вершин, удаление которых переводит диаметр компоненты связности в закритическую область $d(G') > d$, или при сохранении диаметра в докритической области $d(G') \leq d$ уменьшает число вершин в компоненте более чем на l^* . В обоих случаях $N' < N - l^*$, и значение $l^* = \kappa_d(G)$ является d -ограниченной связностью графа G . Если при этом $l^* > l_{\max}$, т.е. $\forall l \leq l_{\max}, N' = N - l$, то отказоустойчивость системы достигается уже при $N = n + l_{\max}$ элементарных машин, т.е. при нулевой вершинной избыточности $\mathfrak{R}_V = N - (n + l_{\max})$. Здесь l_{\max} – максимально допускаемое в системе значение кратности отказов, при которой существенные для ее работоспособности критерии качества находятся в заданных пределах. Структурная отказоустойчивость системы в этом случае достигается только за счет избыточной связности ее графа. Если же $l^* \leq l_{\max}$, т.е. $\forall l \geq l^* \leq l_{\max}, n \leq N'(l) < N - l$, то система также отказоустойчива, но достигается это свойство не только за счет коммуникационной избыточности, недостаточной для $\mathfrak{R}_V = 0$: система должна быть дополнена некоторым избыточным числом ЭМ, т.е. должно быть $N > n + l_{\max}$ и $\mathfrak{R}_V > 0$.

Итак, одной из первых задач, возникающих при анализе структурной отказоустойчивости системы, является задача поиска d -ограниченной связности ее графа – $l^* = \kappa_d(G)$. Решение этой задачи базируется на поиске множества минимальных (s, t) -сечений графа $G(V, E)$, представляющих собой $\forall s \in V, \forall t \in V \setminus \mathcal{N}[s]$ минимальное множество вершин $V^* \in V_{-s, t}$, удаление которых приводит к появлению d -компоненты связности $G'_d \in G(V \setminus V^*, E \setminus E^*_{V^*})$ такой, что $s \notin G'_d \Rightarrow t \in G'_d$ и $s \in G'_d \Rightarrow t \notin G'_d$, причем $d(s, t) > d$. Здесь $\mathcal{N}[s] = \mathcal{N}(s) \cup s$ – замкнутая окрестность вершины s , а $\mathcal{N}(s)$ – ее окрестность. Поиск минимального d -ограниченного вершинного (s, t) -сечения графа $G(V, E)$ основан на использовании аппарата скобочных образов графа, предложенного автором в [3], и операций над образами, описанных в [4]. В работе предложен и продемонстрирован на примерах подход к реализации такого поиска.

Поиск вершинного (s, t) -сечения графа ВС

Проблема поиска (s, t) -сечений достаточно широко представлена в теории графов. В основе алгоритмизации поиска лежит, как правило, теорема Форда – Фалкерсона [5], в соответствии с которой максимальный поток между вершинами t и s равен величине минимального сечения между этими вершинами. Вероятно, для решения задачи, в постановку которой нами введено ограничение на длину простого пути между s и t , можно приспособить одну из известных модификаций алгоритма поиска максимального потока, но в данной работе мы используем введенный автором в [6] и достаточно хорошо показавший себя в [7, 8] аппарат скобочных образов.

Итак, структура изначально работоспособной ВС задана неориентированным невзвешенным связным графом $G(V, E)$, в котором множеству V вершин поставлено в однозначное соответствие множество ЭМ, а множеству E ребер также однозначно поставлены в соответствие линии связи между ЭМ. Граф $G(V, E)$

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-08-01301а).

представим его проекцией $P_k(v^0 \in V)$; вершина v^0 здесь является ракурсной, а индекс k определяет число уровней проекции.

Напомним, что в соответствии с [6] образ графа $G(V, E)$ определен вектором $P(G) = \{P(v_i) | v_i \in V\}$, представляющим собой множество его проекций $P(v_i)$ в множестве ракурсов $\{v_i \in V\}$. Проекцию $P(v_i)$ графа $G(V, E)$ с ракурсной вершиной $v_i \in V$ называем v_i -й проекцией, либо v_i -м ракурсом этого графа. Полная проекция $P(v_i)$ графа $G(V, E)$ содержит всю необходимую для его построения информацию. Описание проекции представлено в виде конечного множества уровней. Ракурсная вершина (здесь $v^0 \equiv s$) помещена на нулевом уровне, смежные ей вершины заключены внутри скобок 1-го уровня и т.д. Таким образом, 1-й уровень проекции образа графа включает в себя окрестность начальной вершины – $\mathcal{N}(v^0)$. Правило включения множества потомков произвольной j -й вершины i -го уровня в $(i+1)$ -й уровень проекции графа определено выражением $\dots v_j^i (\{\mathcal{N}(v_j^i) \setminus C(v_j^i)\})$, а совокупность S^{i+1} вершин любого $(i+1)$ -го уровня проекции определяется выражением $S^{i+1} = (\{\mathcal{N}(v_1^i) \setminus C(v_1^i)\}, \{\mathcal{N}(v_2^i) \setminus C(v_2^i)\}, \dots, \{\mathcal{N}(v_{|S^i|}^i) \setminus C(v_{|S^i|}^i)\})$ [6]. Здесь v_j^i – произвольная j -я вершина из совокупности вершин i -го уровня проекции; $j = \overline{1, |S^i|}$, а $|S^i|$ – число элементов совокупности S^i ; $\mathcal{N}(v_j^i)$ – окрестность вершины v_j^i ; $C(v_j^i)$ – множество вершин в составе простой цепи между начальной ($v^0 \equiv s$) и j -й (v_j^i) вершиной i -го уровня, включающее v^0 и v_j^i .

Далее будут использованы следующие обозначения: $M_d(s, t) = \{M_d^i(s, t)\}$ – множество d -ограниченных (s, t) -маршрутов (простых путей между s и t), при этом по умолчанию концевые вершины в множествах вершин, составляющих эти маршруты, опущены, а индекс i идентифицирует маршрут в множестве $M_d(s, t)$: $i = \overline{1, |M_d(s, t)|}$; $V_d(s, t) = \{v_j\} = \bigcup_{i=1}^{|M_d(s, t)|} V_d^i(s, t)$ – множество вершин из $M_d(s, t)$, $V_d^i(s, t)$ – множество вершин из $M_d^i(s, t)$; $S_d(s, t) = \{S_d^i(s, t)\}$ – множество минимальных и равномошных d -ограниченных (s, t) -сечений графа, $S_d^i(s, t)$ – множество вершин, составляющих i -е сечение из $S_d(s, t)$; m_j – кратность вершины $v_j \in V_d(s, t)$, равная числу содержащих эту вершину маршрутов из $M_d(s, t)$.

Отметим некоторые используемые при поиске положения, справедливые при $d(s, t) \leq d$ и не требующие доказательства из-за их очевидности.

1. Множество вершинных (s, t) -сечений пусто при $d(s, t) = 1$ (вершины s и t смежны): $d(s, t) = 1 \Rightarrow S_d(s, t) = \emptyset$. Учитывая это, из множества вершин, которые составляют пары с вершиной s и для которых допустимо искать сечение, можно изначально исключить $\mathcal{N}[s]$ -замкнутую окрестность вершины s .

2. $\forall S^i(s, t) \in S(s, t) \{ \mathcal{N}(s) \cap \mathcal{N}(t) \in S^i(s, t) \}$. Здесь индекс ограничения по диаметру d опущен, так как утверждение справедливо вне зависимости от ограничивающего связанность диаметра. Заметим, что $\mathcal{N}(s) \cap \mathcal{N}(t) \neq \emptyset$ только при $d(s, t) = 2$. В этом случае множество вершин, составляющих любое из множеств всех (s, t) -сечений графа, обязательно включает в себя вершины пересечения окрестностей $\mathcal{N}(s)$ и $\mathcal{N}(t)$. Это позволяет производить поиск d -ограниченных (s, t) -сечений графа, изначально включив вершины пересечения в составы искомых сечений и исключив из $M_d(s, t)$ все маршруты, содержащие эти вершины, соответствующим образом скорректировав при этом множество $V_d(s, t)$ и кратности m_j составляющих его вершин $v_j \in V_d(s, t)$.

3. Если сумма кратностей вершин подмножества из множества $V_d(s, t)$ не превышает числа маршрутов

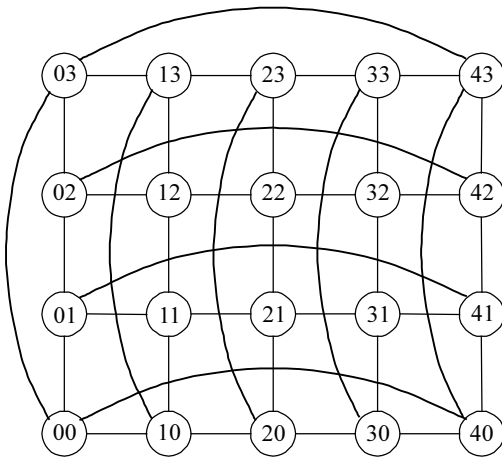


Рис. 1. ВС с тороидальной структурой

$|M_d(s, t)|$, то таких вершин недостаточно для d -ограниченного (s, t) -рассечения графа. Это утверждение дает основания для первоначального в процессе поиска выбора удаляемой из графа вершины: 1) связность $\kappa_d(G)$ не может быть меньше наименьшего числа вершин из $V_d(s, t)$, сумма кратностей которых превосходит число маршрутов в множестве $M_d(s, t)$; 2) кратность очередной выбираемой в процессе поиска из $V_d(s, t)$ вершины не может быть менее округляемого вверх отношения $\lceil M_d^i(s, t) / \kappa_d(G) \rceil$.

На рис. 1 представлена тороидальная структура ВС, на примере которой будет продемонстрирован предлагаемый здесь подход к поиску минимальных (s, t) -сечений. Эта структура достаточно распространена в практике создания ВС из-за удобства в адресной организации и простоты алгоритмов маршрутизации. Помимо этого, в подобных этой структурах можно ограничиться исследованием коммуникационных свойств лишь $(N-1)$ -й пары вершин из C_N^2 возможных.

В [6] доказано, что число k уровней проекции, необходимое для полного описания графа, равно эксцентриситету $e(v^0)$ ракурсной вершины v^0 , если множество вершин, равноудаленных от нее на величину максимального эксцентриситета, не является связанным, и $k = e(v^0) + 1$, если хотя бы одна пара вершин из этого множества смежна. Заметим, что значение эксцентриситета $e(v^0)$ не требует вычислений, предваряющих процесс построения проекции, а получается в нем автоматически как номер уровня, которым множество вершин, включенных в предшествующие уровни, дополняется до V . В нашем примере для полноты описания было бы достаточно 4-х уровней ($d(G) = 4$), но так как принятое нами выше ограничение на диаметр компоненты связности $d = 5$, то проекцию графа из вершины 00 представим 5-ю уровнями:

$$P_5(00) =$$

00(01(02(03(13(10, 12, 23), 43(33, 40, 42)), 12(11(10, 21), 13(03, 10, 23), 22(21, 23, 32)), 42(32(22, 31, 33), 41(31, 40), 43(03, 33, 40))), 11(10(13(03, 12, 23), 20(21, 23, 30)), 12(02(03, 42), 13(03, 10, 23), 22(21, 23, 32)), 21(20(10, 23, 30), 22(12, 23, 32), 31(30, 32, 41))), 41(31(21(11, 20, 22), 30(20, 33, 40), 32(22, 33, 42)), 40(30(20, 31, 33), 43(03, 33, 42)), 42(02(03, 12), 32(22, 31, 33), 43(03, 33, 40))),

03(02(01(11(10, 12, 21), 41(31, 40, 42)), 12(11(01, 10, 21), 13(10, 23), 22(21, 23, 32)), 42(32(22, 31, 33), 41(01, 31, 40), 43(33, 40))), 13(10(11(01, 12, 21), 20(21, 23, 30)), 12(02(01, 42), 11(01, 10, 21), 22(21, 23, 32)), 23(20(10, 21, 30), 22(12, 21, 32), 33(30, 32, 43))), 43(33(23(13, 20, 22), 30(20, 31, 40), 32(22, 31, 42)), 40(30(20, 31, 33), 41(01, 31, 42)), 42(02(01, 12), 32(22, 31, 33), 41(01, 31, 40))),

10(11(01(02(03, 12, 42), 41(31, 40, 42)), 12(02(01, 03, 42), 13(03, 23), 22(21, 23, 32)), 21(20(23, 30), 22(12, 23, 32), 31(30, 32, 41))), 13(03(02(01, 12, 42), 43(33, 40, 42)), 12(02(01, 03, 42), 11(01, 21), 22(21, 23, 32)), 23(20(21, 30), 22(12, 21, 32), 33(30, 32, 43))), 20(21(11(01, 12), 22(12, 23, 32), 31(30, 32, 41)), 23(13(03, 12), 22(12, 21, 32), 33(30, 32, 43)), 30(31(21, 32, 41), 33(23, 32, 43), 40(41, 43))),

40(30(20(10(11, 13), 21(11, 22, 31), 23(13, 22, 33)), 31(21(11, 20, 22), 32(22, 33, 42), 41(01, 42)), 33(23(13, 20, 22), 32(22, 31, 42), 43(03, 42))), 41(01(02(03, 12, 42), 11(10, 12, 21))), 31(21(11, 20, 22), 30(20, 33), 32(22, 33, 42)), 42(02(01, 03, 12), 32(22, 31, 33), 43(03, 33))), 43(03(02(01, 12, 42), 13(10, 12, 23)), 33(23(13, 20, 22), 30(20, 31), 32(22, 31, 42)), 42(02(01, 03, 12), 32(22, 31, 33), 41(01, 31))),

Отсутствие здесь возможностей цветовой разметки уровней проекции затрудняет ее структурное восприятие, поэтому 4 части, каждая из которых содержит в себе одну из вершин окрестности начальной вершины, выделены интервально, а разбиение этих частей на строки выделяет вершины 2-го уровня проекции с их потомками.

Множество вершин, составляющих пары с вершиной 00, для которых допустимо искать сечение, не может включать в себя замкнутую окрестность вершины 00 и представляет собой $V \setminus \mathcal{N}[00] = \{20, 30, 11, 21, 31, 41, 02, 12, 22, 32, 42, 13, 23, 33, 43\}$. Продемонстрируем процесс поиска минимального сечения для пары, составленной из вершины 00 и одной из вершин этого множества, к примеру, $(00, 32)$ -сечения. Из того, что множество возможных сечений в графе включает в себя N окрестностей каждой из вершин графа и в соответствии с расширенным в [2] неравенством Уитни, $\kappa_d(G) \leq \kappa(G) \leq 4$.

Трансформируя проекцию $P_5(00)$ графа удалением из нее всех концевых вершин, кроме 32-й, получим проекцию $P_5(00, 32)$, содержащую множество простых путей к этой вершине из вершины 00, длина которых не превышает 5; число таких путей в нашем графе равно 31:

00(01(02(03(12(42(22(32₅)), 42(43₂)), 11(31(22(42(32₅)), 21(42(32₅)), 31(32₅)), 41(31(43₂)), 42(43₂))), 03(02(42(43₂)), 13(31(22(42(32₅)), 23(42(32₅)), 33(32₅)), 43(33(43₂)), 42(43₂))), 10(21(31(22(42(32₅)), 21(42(32₅)), 31(32₅)), 13(31(22(42(32₅)), 23(42(32₅)), 33(32₅)), 20(21(42(32₅)), 31(32₅)), 23(42(32₅)), 33(32₅)), 30(31(32₅)), 33(32₅))), 40(23(31(43₂)), 33(43₂)), 41(31(43₂)), 42(43₂)), 43(33(43₂)), 42(43₂))).

Здесь для удобства визуального восприятия концевая вершина выделена затенением, а открывающиеся/закрывающиеся скобки снабжены индексом соответствия их содержимого номеру уровня (длине маршрута до любой вершины уровня). Перечислим полученные пути в явном виде, оставив в множестве $M_5(00, 32)$ – индекс здесь соответствует предельной длине маршрутов, лишь транзитные вершины:

{01-02-12-22, 01-02-42, 01-11-12-22, 01-11-21-22, 01-11-21-31, 01-41-31, 01-41-42, 03-02-42, 03-13-12-22, 03-13-23-22, 03-13-23-33, 03-43-33, 03-43-42, 10-11-12-22, 10-11-21-22, 10-11-21-31, 10-13-12-22, 10-13-23-22, 10-13-23-33, 10-20-21-22, 10-20-21-31, 10-20-23-22, 10-20-23-33, 10-20-30-31, 10-20-30-33, 40-30-31, 40-30-33, 40-41-31, 40-41-42, 40-43-33, 40-43-42}.

Сформируем множество $V_5(00, 32) = \{v_j(m_j)\}$ транзитных вершин $v_j \in M_5(00, 32)$, входящих в состав $M_5(00, 32)$, и выявим кратности m_j их использования – $v_j(m_j)$:

$V_5(00, 32) = \{01(7), 02(3), 03(6), 10(12), 11(6), 12(5), 13(6), 20(6), 21(6), 22(11), 23(6), 30(4), 31(7), 33(7), 40(6), 41(4), 42(6), 43(4)\}$.

Как указано выше, для получения сечения из трех вершин необходимо, как минимум, чтобы сумма кратностей удаляемых вершин была не менее числа маршрутов. Поскольку таковых в нашем случае нет ($12 + 11 + 7 < 31$) и минимальный набор вершин, сумма кратностей которых превышает число маршрутов, состоит из 4 вершин, то мощность минимального сечения не может быть менее 4. Удалив используемую в 12 маршрутах вершину 10 и соответствующие ей маршруты, модифицируем кратности использования вершин в оставшихся 19 путях:

{01-02-12-22, 01-02-42, 01-11-12-22, 01-11-21-22, 01-11-21-31, 01-41-31, 01-41-42, 03-02-42, 03-13-12-22, 03-13-23-22, 03-13-23-33, 03-43-33, 03-43-42, 40-30-31, 40-30-33, 40-41-31, 40-41-42, 40-43-33, 40-43-42}

01(7), 02(3), 03(6), 11(3), 12(3), 13(3), 20(0), 21(2), 22(5), 23(2), 30(2), 31(4), 33(4), 40(6), 41(4), 42(6), 43(4).

Для рассечения оставшихся 19 маршрутов тремя вершинами кратность использования следующей удаляемой из этих маршрутов вершины должна быть не менее 7. Такой вершиной является вершина 01, после удаления которой число оставшихся маршрутов уменьшится до 12. Модифицируем множество оставшихся маршрутов и кратности используемых в них вершин; вершины с кратностью менее $\lfloor 19/3 \rfloor = 6$ исключаем из рассмотрения:

{03-02-42, 03-13-12-22, 03-13-23-22, 03-13-23-33, 03-43-33, 03-43-42, 40-30-31, 40-30-33, 40-41-31, 40-41-42, 40-43-33, 40-43-42}

03(6), 40(6), 42(4).

Удаление вершин 03 и 40 завершает процедуру поиска для выбора вершины 10 в качестве 1-й удаляемой. В результате поиска найдено сечение с мощностью, равной 4: {10, 12, 03, 40}. Вернувшись к выбору 1-й удаляемой вершины, начнем теперь с удаления вершины 22 с кратностью, равной 11. Описание всех оставшихся при этом маршрутов из вершины 00 в вершину 32 получим аналогично вышеописанному:

{01-02-42, 01-11-21-31, 01-41-31, 01-41-42, 03-02-42, 03-13-23-33, 03-43-33, 03-43-42, 10-11-21-31, 10-13-23-33, 10-20-21-31, 10-20-23-33, 10-20-30-31, 10-20-30-33, 40-30-31, 40-30-33, 40-41-31, 40-41-42, 40-43-33, 40-43-42}

01(4), 02(2), 03(4), 10(6), 11(2), 12(0), 13(2), 20(4), 21(3), 22(0), 23(3), 30(4), 31(7), 33(7), 40(6), 41(4), 42(6), 43(4).

Очевидно, что для получения сечения с мощностью, равной 4, кратности следующих двух удаляемых вершин из оставшихся 20 маршрутов должны быть не меньшими 7, а кратность последней из удаляемых при этом не может быть менее 6. Первому из этих условий удовлетворяют только вершины 31(7), 33(7), – удалим их:

{01-02-42, 01-41-42, 03-02-42, 03-43-42, 40-41-42, 40-43-42}

10(0), 40(2), 42(6).

Осталась единственная вершина 42 с кратностью, не меньшей числа оставшихся маршрутов. Удалив ее, получим искомое сечение: {22, 31, 33, 42}. Как видим, множество минимальных (00, 32)-сечений включает 2 сечения мощности 4, совпадающие с окрестностями разделяемых ими вершин. Чтобы показать, что совпа-

дение множества (s, t) -сечений только с окрестностями вершин s и t является здесь случайным, приведем множество $(00, 11)$ -сечений: $S_5(00, 11) = \{(01, 10, 03, 40), (01, 10, 12, 40), (01, 10, 03, 21), (01, 10, 12, 21)\} = \{(01 \wedge 10 \wedge ((03 \vee 12) \wedge (40 \vee 21)))\}$. На рис. 2 приведены подграфы исходного графа, полученные в результате этих сечений; вершины $s = 00$ и $t = 11$ помечены на рисунке концентрическими окружностями.

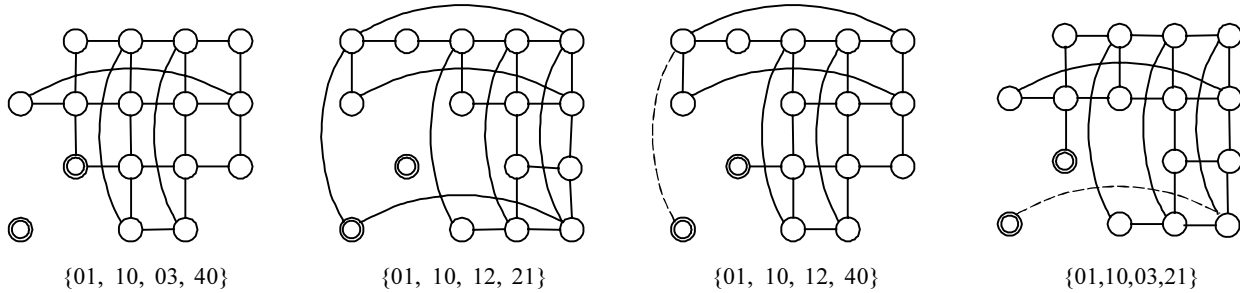


Рис. 2. d -ограниченные $(00, 11)$ -сечения графа при $d = 5$

Проверив полученные в результате сечений компоненты связностей на их соответствие ограничению по диаметру $d \leq 5$, выделим в них d -ограниченные компоненты связностей. Как было указано выше, для этого достаточно получить минимальные полные проекции [6] образовавшихся подграфов, в процессе построения которых и будут получены диаметры описанного каждой проекцией подграфа и их размеры. Нетрудно убедиться, что проекции $P_5'(11)$ и $P_5''(10)$ d -ограниченных компонент связности для сечений $(01, 10, 03, 40)$ и $(01, 10, 12, 21)$ совпадают с соответствующими компонентами $P'(11)$ и $P'(10)$, так как эти сечения изолируют только одну из концевых вершин. Размеры таких компонент $|V_5'| = V' = |\mathcal{N}[x]| = 15$, где $x = s \vee t$.

Ниже приведены проекции $P_6'(11)$ и $P_6''(11)$ компонент, образующихся в результате рассечения графа подмножествами вершин $\{01, 10, 12, 40\}$ и $\{01, 10, 03, 21\}$ соответственно:

$$P_6'(11) = 11(121(220(323(413(503(600_6)_5), 22(532_5), 33(530, 32, 43_5)_4), 30(431(532, 41_5), 33(523, 32, 43_5)_4)_3), 22(323(413(503(600_6)_5), 20(530_5), 33(530, 32, 43_5)_4), 32(431(530, 41_5), 33(523, 30, 43_5), 42(502, 41, 43_5)_4)_3), 31(330(420(523_5), 33(523, 32, 43_5)_4), 32(422(523_5), 33(523, 30, 43_5), 42(502, 41, 43_5)_4), 41(442(502, 32, 43_5)_4)_2),$$

$$P_6''(11) = 11(12(202(342(432(522, 31, 33_5), 41(531, 40(600_6)_5), 43(533, 40(600_6)_5)_4)_3), 13(323(420(530_5), 22(532_5), 33(530, 32, 43_5)_4)_3), 22(323(413, 20(530_5), 33(530, 32, 43_5)_4), 32(431(530, 41_5), 33(523, 30, 43_5), 42(502, 41, 43_5)_4)_2)_1).$$

Данные проекции являются полными, так как 6-й уровень (выделенный в проекциях затенением) включает в себя последнюю из не определенных нижерасположенными уровнями вершин. Диаметры этих компонент одинаковы и равны 6, а число вершин в них $N' = 16$, изолированных вершин нет. Хотя подмножества удаленных вершин не являются здесь $(00, 11)$ -сечениями в общеупотребительной терминологии, тем не менее удаление этих подмножеств приводит к утрате связности некоторых вершин не только из-за их физической изолированности, но и из-за заданного ограничения достижимости, что соответствует введенному нами определению d -ограниченного (s, t) -сечения. Из рис. 2 видно, что хотя компонента связности включает в себя вершину 00, в состав проекций 5-ограниченных компонент связности графа, получаемых из $P_6'(11)$ и $P_6''(11)$ удалением 6-го уровня, эта вершина не входит. Ребра, увеличивающие диаметр компоненты связности до $d(G')$, показаны здесь штриховыми линиями.

Описанный выше подход позволяет выявлять не только минимальные d -ограниченные (s, t) -сечения, но и сечения большей мощности. При этом одновременно с задачей поиска множества сечений заданной мощности решается задача выявления компонент связности, их размеров и диаметров. Последовательное применение такого поиска на множестве пар вершин в графе позволяет выявить в множестве сечений заданной мощности эквивалентные с тем, чтобы использовать эту информацию в построении функций структурной отказоустойчивости и структурной живучести системы.

Заключение

Отказоустойчивость системы базируется на ее структурной конъюнктуре, заключающейся в наличии достаточного числа вершин в графе ВС и в обеспечении заданного критерия их связности. В качестве последнего определено значение максимально допускаемого в системе эксцентриситета вершин, или диаметра компоненты связности графа ВС при ее деградации. Поставлена и решена задача выявления наименьшего числа l^* вершин, удаление которых переводит диаметр компоненты связности в закритическую область, или при сохранении диаметра в докритической области уменьшает число вершин в компоненте более чем на l^* .

Сформулированы используемые при поиске положения и предложен подход к решению проблемы, основанный на использовании формальных описаний структур ВС в виде скобочных образов и проекций соот-

ветствующих графов. Подход позволяет выявлять не только минимальные d -ограниченные (s, t) -сечения, но и сечения большей мощности. Одновременно с задачей поиска множества сечений заданной мощности решается задача выявления компонент связности, их размеров и диаметров. Последовательное применение такого поиска на множестве пар вершин в графе позволяет выявить в множестве сечений заданной мощности эквивалентные для построения функций структурной отказоустойчивости и структурной живучести системы. Параллельная алгоритмизация предложенного подхода сразу для множества (s, t) -сечений выглядит при этом вполне естественной; вполне допустимы и варианты поиска d -ограниченных сечений между подмножествами вершин в графе с использованием, к примеру, известного приема стягивания ребер внутри каждого из подмножеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелентьев В.А. Толерантность графов и структурная отказоустойчивость вычислительных систем // Вестник ТГУ. Приложение. 2004. № 9(I). С.144 – 150.
2. Мелентьев В.А. Функция структурной отказоустойчивости и d -ограниченная компонента связности графа вычислительной системы // Наст. сборник. С. 102 – 106.
3. Мелентьев В.А. Формальный подход к исследованию структур вычислительных систем // Вестник ТГУ. Приложение. 2005. № 14. С. 167 – 172.
4. Мелентьев В.А. Операции над проекциями графов и актуализация описаний отказоустойчивых систем // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 17. С. 208 – 213.
5. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
6. Мелентьев В.А. Формальные основы скобочных образов в теории графов // Труды II Междунар. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» РАСО'2004. 2004. С. 694 – 706.
7. Мелентьев В.А. Изоморфизм графов и их образов в исследованиях отказоустойчивости систем // Вестник ТГУ. Приложение. 2005. № 14. С. 182 – 190.
8. Мелентьев В.А. Образ графа и поиск гамильтоновых путей // Вестник ТГУ. Приложение. 2005. № 14. С. 172 – 181.