Секция 5

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.718 DOI 10.17223/2226308X/10/48

НАДЁЖНОСТЬ СХЕМ В БАЗИСЕ РОССЕРА — ТУРКЕТТА (В P_3) ПРИ НЕИСПРАВНОСТЯХ ТИПА 0 НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова

Рассматривается реализация функций трёхзначной логики схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе Россера — Туркетта. Предполагается, что базисные элементы подвержены неисправностям типа 0 на выходах, причём переходят в неисправные состояния независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon < 1/2$). Получены следующие результаты: 1) любую функцию трёхзначной логики можно реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически (при малых ε) не больше ε; 2) для любой функции, кроме константы 0 и переменной x_i ($i \in \mathbb{N}$), такая схема является асимптотически оптимальной по надёжности и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной ε при малых ε; 3) функции 0, x_i можно реализовать абсолютно надёжно.

Ключевые слова: *функции трёхзначной логики, схема из функциональных элементов, ненадёжность схемы, надёжность схемы, неисправности типа 0 на выходах элементов.*

Исторически сложилось так, что сначала при построении надёжных схем, состоящих из ненадёжных элементов и реализующих булевы функции, исследовались инверсные неисправности на выходах элементов. Позднее рассматривалась возможность реализации булевых функций схемами из ненадёжных элементов, подверженных однотипным константным неисправностям на выходах, в частности неисправностям типа 0 на выходах [1–3]. Решение задачи построения надёжных схем, реализующих функции трёхзначной логики, также сначала было получено при инверсных неисправностях на выходах элементов [4–8]. В этой работе решается задача построения асимптотически оптимальных по надёжности схем, реализующих функции трёхзначной логики и построенных из ненадёжных элементов, подверженных неисправностям типа 0 на выходах элементов.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $E_3 = \{0,1,2\}$, P_3 — множество всех функций трёхзначной логики, т. е. функций $f(x_1,\ldots,x_n) : E_3^n \to E_3$. Рассмотрим реализацию функций из множества P_3 схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе Россера — Туркетта $B = \{0,1,2,J_0(x_1),J_1(x_1),J_2(x_1),\min\{x_1,x_2\},\max\{x_1,x_2\}\}$. Обозначим $x_1\&x_2 = \min\{x_1,x_2\}$, $x_1 \vee x_2 = \max\{x_1,x_2\}$, $\tilde{x}^n = (x_1,\ldots,x_n)$. Определения вероятности ошибки на выходе схемы, ненадёжности и надёжности схемы, асимптотически оптимальной по надёжности схемы вводятся так же, как в работах [4–8].

Предполагается, что базисные элементы подвержены неисправностям типа 0 на выходах, причём переходят в неисправные состояния независимо друг от друга с ве-

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 17-01-00451.

роятностью ε ($\varepsilon < 1/2$). Эти неисправности характеризуются тем, что на нулевых входных наборах функциональный элемент выдаёт правильное значение 0 с вероятностью 1, на остальных наборах — значение 0 с вероятностью ε, а правильное значение с вероятностью $1-\varepsilon$.

Очевидно, что при неисправностях типа 0 на выходах элементов ненадёжность любого базисного элемента, кроме реализующего константу 0, равна ε, а надёжность — $1-\varepsilon$. Элемент, реализующий константу 0, функционирует абсолютно надёжно. Ясно также, что функции x_i, $i \in \mathbb{N}$, можно реализовать абсолютно надёжно, не используя функциональных элементов.

Обозначим базисный элемент с функцией & через $E_{\&}$, а базисный элемент с функцией $\vee$ — через $E_{\vee}$.

Пусть f — произвольная функция из P_3, S — любая схема, реализующая функцию f, $P(S)$ — ненадёжность схемы S. По схеме S построим схему, которая реализует ту же функцию f, но, возможно (при некоторых условиях на $P(S)$), более надёжно. Для этого возьмём два экземпляра схемы S и один элемент $E_{\&}$, соединим выходы схем S со входами элемента $E_{\&}$. Построенную схему назовём D. Затем возьмём два экземпляра схемы D и один элемент $E_{\vee}$. Соединим выходы схем D со входами элемента $E_{\vee}$. Построенную схему назовем $\psi(S)$.

В теореме 1 найдено рекуррентное соотношение для ненадёжностей схем S и $\psi(S)$.

Теорема 1. Схема $\psi(S)$ реализует функцию f с ненадёжностью

$$P(\psi(S)) \leqslant \varepsilon + (\varepsilon + 2P(S))^2.$$

С помощью теоремы 1 получим верхнюю оценку ненадёжности схем.

Теорема 2. Любую функцию $f \in P_3$ можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant \varepsilon + 12\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

Пусть $K(n)$ — множество функций трёхзначной логики, каждая из которых зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$ ($n \geqslant 1$), отлична от константы 0 и функций $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K(n)$. Очевидно, что $|K(n)| = 3^{3^n} - n - 1$, а значит, класс $K(n)$ содержит почти все функции из множества $P_3(n)$ $\Big($поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{3^n} - n - 1}{3^{3^n}} = 1\Big)$.

Справедлива теорема 3 о нижней оценке ненадёжности схем, каждая из которых реализует некоторую функцию из класса K.

Теорема 3. Пусть функция $f \in K$. Тогда для любой схемы S, реализующей f, верно неравенство $P(S) \geqslant \varepsilon$.

Таким образом, в базисе Россера — Туркетта (в P_3) при неисправностях типа 0 на выходах элементов: 1) любую функцию трёхзначной логики можно реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не больше ε; 2) для любой функции $f \in K$ такая схема является асимптотически оптимальной по надёжности и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$; 3) функцию $f \notin K$ можно реализовать абсолютно надёжно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алехина М. А.* О ненадежности схем из ненадежных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. 1993. Т. 5. №2. С. 59–74.

2. *Алехина М. А.* Синтез и сложность надежных схем из ненадежных элементов // Математические вопросы кибернетики. 2002. №11. С. 193–218.
3. *Алехина М. А.* О надежности схем в произвольном полном конечном базисе при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. 2012. Т. 24. №3. С. 17–24.
4. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Оценки ненадежности схем в базисе Россера — Туркетта // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2014. №1(29). С. 5–19.
5. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Ненадёжность схем в базисе Россера — Туркетта // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. №7. С. 109–110.
6. *Барсукова О. Ю.* Синтез надежных схем, реализующих функции двузначной и трёхзначной логик: дис. … канд. физ.-мат. наук. Пенза, 2014. 87 с.
7. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* О надежности схем, реализующих функции трехзначной логики // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21. №4(118). С. 12–24.
8. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Нижняя оценка ненадежности схем в базисе, состоящем из функции Вебба // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2015. №8. С. 102–103.

УДК 519.718 DOI 10.17223/2226308X/10/49

О НАДЁЖНОСТИ СХЕМ В НЕКОТОРЫХ ПОЛНЫХ БАЗИСАХ (В P_3) ПРИ ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова

Рассматривается реализация функций трёхзначной логики схемами из ненадёжных функциональных элементов в полных базисах B_1 и B_2, первый из которых является двойственным базису Россера — Туркетта, а второй — базису, состоящему из функции Вебба. Предполагается, что элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью p подвержены инверсным неисправностям на выходах. Получены следующие результаты: в базисе B_1 1) любую функцию из P_3 можно реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически (при малых p) не больше $6p$; 2) для почти любой функции такая схема является асимптотически оптимальной по надёжности и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной $6p$ при малых p; в базисе B_2 почти любую функцию трёхзначной логики можно реализовать надёжной схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически не больше $8p$ и асимптотически не меньше $6p$ при малых p.

Ключевые слова: *функции трёхзначной логики, ненадёжные функциональные элементы, надёжность и ненадёжность схемы, инверсные неисправности на выходах элементов.*

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $E_3 = \{0, 1, 2\}$, P_3 — множество всех функций трёхзначной логики, т. е. функций $f(x_1, \dots, x_n) : (E_3)^n \to E_3$. Рассмотрим реализацию функций из множества P_3 схемами из ненадёжных функциональных элементов в полном конечном базисе B. Так же, как в работах [1 – 5], введём необходимые понятия и определения.

Считаем, что схема из ненадёжных элементов реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ ($\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n$ при отсутствии неисправностей в схеме на её выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект №17-01-00451.