2. *Алехина М. А.* Синтез и сложность надежных схем из ненадежных элементов // Математические вопросы кибернетики. 2002. № 11. С. 193–218.
3. *Алехина М. А.* О надежности схем в произвольном полном конечном базисе при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. 2012. Т. 24. № 3. С. 17–24.
4. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Оценки ненадежности схем в базисе Россера — Туркетта // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2014. № 1(29). С. 5–19.
5. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Ненадёжность схем в базисе Россера — Туркетта // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. № 7. С. 109–110.
6. *Барсукова О. Ю.* Синтез надежных схем, реализующих функции двузначной и трёхзначной логик: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пенза, 2014. 87 с.
7. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* О надежности схем, реализующих функции трехзначной логики // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21. № 4(118). С. 12–24.
8. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Нижняя оценка ненадежности схем в базисе, состоящем из функции Вебба // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2015. № 8. С. 102–103.

УДК 519.718 DOI 10.17223/2226308X/10/49

О НАДЁЖНОСТИ СХЕМ В НЕКОТОРЫХ ПОЛНЫХ БАЗИСАХ (В P_3) ПРИ ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова

Рассматривается реализация функций трёхзначной логики схемами из ненадёжных функциональных элементов в полных базисах B_1 и B_2, первый из которых является двойственным базису Россера — Туркетта, а второй — базису, состоящему из функции Вебба. Предполагается, что элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью p подвержены инверсным неисправностям на выходах. Получены следующие результаты: в базисе B_1 1) любую функцию из P_3 можно реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически (при малых p) не больше $6p$; 2) для почти любой функции такая схема является асимптотически оптимальной по надёжности и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной $6p$ при малых p; в базисе B_2 почти любую функцию трёхзначной логики можно реализовать надёжной схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически не больше $8p$ и асимптотически не меньше $6p$ при малых p.

Ключевые слова: *функции трёхзначной логики, ненадёжные функциональные элементы, надёжность и ненадёжность схемы, инверсные неисправности на выходах элементов.*

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $E_3 = \{0, 1, 2\}$, P_3 — множество всех функций трёхзначной логики, т. е. функций $f(x_1, \ldots, x_n) : (E_3)^n \to E_3$. Рассмотрим реализацию функций из множества P_3 схемами из ненадёжных функциональных элементов в полном конечном базисе B. Так же, как в работах [1–5], введём необходимые понятия и определения.

Считаем, что схема из ненадёжных элементов реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ ($\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n$ при отсутствии неисправностей в схеме на её выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 17-01-00451.

Пусть схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, $\tilde{a}^n$ — произвольный входной набор схемы S, $f(\tilde{a}^n) = \tau$. Обозначим через $P_i(S, \tilde{a}^n)$ вероятность появления значения i ($i \in E_3$) на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$, а через $P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S, \tilde{a}^n)$ — вероятность появления ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$. Ясно, что $P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S, \tilde{a}^n) = P_{\tau+1}(S, \tilde{a}^n) + P_{\tau+2}(S, \tilde{a}^n)$. (В выражениях $\tau + 1$, $\tau + 2$ сложение осуществляется по mod 3.)

Ненадёжностью схемы S, реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$, будем называть число $P(S)$, равное наибольшей из вероятностей появления ошибки на выходе схемы S. *Надёжность* схемы S равна $1 - P(S)$.

Предполагается, что элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε ($0 < \varepsilon < 1/4$) подвержены инверсным неисправностям на выходах, т. е. каждый базисный элемент с функцией $\varphi(\tilde{x}^m)$ ($m \in \mathbb{N}$) на любом входном наборе $\tilde{a}^m$, таком, что $\varphi(\tilde{a}^m) = \tau$, с вероятностью ε выдаёт любое из значений $\alpha \neq \tau$ и с вероятностью $1-2\varepsilon$ — значение τ. Очевидно, что ненадёжность любого базисного элемента равна 2ε, а надёжность — $1 - 2\varepsilon$.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадёжных элементов, реализующим функцию $f(\tilde{x}^n)$. Схему A, реализующую f, назовём асимптотически оптимальной по надёжности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$.

Справедливы теоремы об оценках ненадёжности схем и классе функций, для схем которых нижняя оценка ненадёжности верна.

1. Базис $B_1 = \{0, 1, 2, J_0^*(x_1), J_1^*(x_1), J_2^*(x_1), \min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\}\}$.

Обозначим $x_1 \& x_2 = \min\{x_1, x_2\}$, $x_1 \vee x_2 = \max\{x_1, x_2\}$, а также

$$J_0^*(x_1) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 = 2, \\ 2, \text{ если } x_1 \neq 2; \end{cases} \qquad J_1^*(x_1) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 = 1, \\ 2, \text{ если } x_1 \neq 1; \end{cases} \qquad J_2^*(x_1) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 = 0, \\ 2, \text{ если } x_1 \neq 0. \end{cases}$$

Теорема 1. Любую функцию $f \in P_3$ можно реализовать такой схемой S в базисе B_1, что $P(S) \leqslant 6\varepsilon + 126\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/1000]$.

Обозначим через $K_1(n)$ множество таких трёхзначных функций, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$ ($n \geqslant 3$), что каждая из этих функций принимает все три значения $0, 1, 2$ и не представима ни в виде $x_k \vee h(\tilde{x}^n)$, ни в виде $x_k \,\&\, h(\tilde{x}^n)$ ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $h(\tilde{x}^n)$ — произвольная функция трёхзначной логики). Пусть $K_1 = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} K_1(n)$.

Теорема 2. Для произвольной функции $f \in K_1$ любая схема S в базисе B_1, реализующая f, функционирует с ненадёжностью $P(S) \geqslant 6\varepsilon - 16\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/1000]$.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что класс $K_1(n)$ содержит почти все функции из $P_3(n)$.

Таким образом, из теорем 1 и 2 в базисе B_1 получаем следующие результаты: 1) любую функцию из P_3 можно реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не больше 6ε; 2) для почти любой функции такая схема является асимптотически оптимальной по надёжности и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной 6ε при $\varepsilon \to 0$.

2. Базис $B_2 = \{x_1 \& x_2 + 2\}$.

Теорема 3. Любую функцию $f \in P_3$ можно реализовать такой схемой S в базисе B_2, что $P(S) \leqslant 8\varepsilon + 268\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/10^4]$.

Пусть $K_2(n)$ — множество функций трёхзначной логики, каждая из которых зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$ ($n \geqslant 3$), принимает все три значения $0, 1, 2$ и не представима в виде $\min\{x_k, h(\tilde{x}^n)\} + c$ ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $c \in \{0, 1, 2\}$, $h(\tilde{x}^n)$ — произвольная функция трёхзначной логики). Пусть $K_2 = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} K_2(n)$.

Теорема 4. Для произвольной функции $f \in K_2$ любая схема S в базисе B_2, реализующая f, функционирует с ненадёжностью $P(S) \geqslant 6\varepsilon - 10\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/10^4]$.

Замечание 2. Нетрудно проверить, что класс $K_2(n)$ содержит почти все функции из $P_3(n)$.

Таким образом, из теорем 3 и 4 в базисе B_2 получаем следующие результаты: почти любую функцию трёхзначной логики можно реализовать надёжной схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически не больше 8ε и асимптотически не меньше 6ε при $\varepsilon \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* О надежности схем, реализующих функции из P_3 // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. № 1(21). С. 57–65.
2. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Оценки ненадежности схем в базисе Россера — Туркетта // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2014. № 1(29). С. 5–19.
3. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Ненадёжность схем в базисе Россера — Туркетта // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. № 7. С. 109–110.
4. *Барсукова О. Ю.* Синтез надежных схем, реализующих функции двузначной и трехзначной логик: дис. … канд. физ.-мат. наук. Пенза, 2014. 87 с.
5. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Нижняя оценка ненадёжности схем в базисе, состоящем из функции Вебба // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2015. № 8. С. 102–103.

УДК 519.718 DOI 10.17223/2226308X/10/50

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА НЕНАДЁЖНОСТИ СХЕМ (В P_2) ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

М. А. Алехина, Ю. С. Гусынина, Т. А. Шорникова

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в полном конечном базисе. Предполагается, что каждый из элементов схемы подвержен произвольным неисправностям, а неисправности элементов статистически независимы. Показано, что любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой не более чем в 5,17 раз больше ненадёжности «худшего» (самого ненадёжного) из базисных элементов.

Ключевые слова: *ненадёжные функциональные элементы, надёжность схемы, ненадёжность схемы, неисправности элементов.*

Пусть $n \in \mathbb{N}$, P_2 — множество всех булевых функций, т. е. функций $f(x_1, \ldots, x_n) : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в полном конечном базисе $B = \{e_1, \ldots, e_q\} \subseteq P_2$ ($q \in \mathbb{N}$).

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 17-01-00451.