

Пусть  $K_2(n)$  — множество функций трёхзначной логики, каждая из которых зависит от переменных  $x_1, \dots, x_n$  ( $n \geq 3$ ), принимает все три значения 0, 1, 2 и не представима в виде  $\min\{x_k, h(\tilde{x}^n)\} + c$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $c \in \{0, 1, 2\}$ ,  $h(\tilde{x}^n)$  — произвольная функция трёхзначной логики). Пусть  $K_2 = \bigcup_{n=3}^{\infty} K_2(n)$ .

**Теорема 4.** Для произвольной функции  $f \in K_2$  любая схема  $S$  в базисе  $B_2$ , реализующая  $f$ , функционирует с ненадёжностью  $P(S) \geq 6\varepsilon - 10\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3$  при  $\varepsilon \in (0, 1/10^4]$ .

**Замечание 2.** Нетрудно проверить, что класс  $K_2(n)$  содержит почти все функции из  $P_3(n)$ .

Таким образом, из теорем 3 и 4 в базисе  $B_2$  получаем следующие результаты: почти любую функцию трёхзначной логики можно реализовать надёжной схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически не больше  $8\varepsilon$  и асимптотически не меньше  $6\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алехина М. А., Барсукова О. Ю. О надёжности схем, реализующих функции из  $P_3$  // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. № 1(21). С. 57–65.
2. Алехина М. А., Барсукова О. Ю. Оценки ненадёжности схем в базисе Россера — Туркетта // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2014. № 1(29). С. 5–19.
3. Алехина М. А., Барсукова О. Ю. Ненадёжность схем в базисе Россера — Туркетта // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. № 7. С. 109–110.
4. Барсукова О. Ю. Синтез надёжных схем, реализующих функции двузначной и трёхзначной логик: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пенза, 2014. 87 с.
5. Алехина М. А., Барсукова О. Ю. Нижняя оценка ненадёжности схем в базисе, состоящем из функции Вебба // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2015. № 8. С. 102–103.

УДК 519.718

DOI 10.17223/2226308X/10/50

### ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА НЕНАДЁЖНОСТИ СХЕМ (В $P_2$ ) ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ ЭЛЕМЕНТОВ<sup>1</sup>

М. А. Алехина, Ю. С. Гусынина, Т. А. Шорникова

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в полном конечном базисе. Предполагается, что каждый из элементов схемы подвержен произвольным неисправностям, а неисправности элементов статистически независимы. Показано, что любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой не более чем в 5,17 раз больше ненадёжности «худшего» (самого ненадёжного) из базисных элементов.

**Ключевые слова:** ненадёжные функциональные элементы, надёжность схемы, ненадёжность схемы, неисправности элементов.

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_2$  — множество всех булевых функций, т. е. функций  $f(x_1, \dots, x_n) : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ . Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в полном конечном базисе  $B = \{e_1, \dots, e_q\} \subseteq P_2$  ( $q \in \mathbb{N}$ ).

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 17-01-00451.

Обозначим через  $E_i$  базисный элемент с функцией  $e_i$  ( $i \in \{1, \dots, q\}$ ). Предполагается, что неисправности элементов произвольные [1, с. 480] и статистически независимые, т. е. элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга.

Пусть  $f(\tilde{x}^n)$  ( $\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$ ) — произвольная функция, а  $S$  — любая схема, реализующая её в базисе  $B$ . Ненадёжность  $P(S)$  схемы  $S$  определяется как максимальная из вероятностей ошибок на выходе схемы  $S$  [2]. Надёжность схемы равна  $1 - P(S)$ .

При построении схемы (неветвящейся программы) высокой надёжности, реализующей  $f(\tilde{x}^n)$ , в заданном базисе  $B$  при заданных неисправностях элементов приходится использовать итерационный метод, применяя его к некоторой исходной схеме (неветвящейся программе), реализующей  $f(\tilde{x}^n)$  (см., например, [3–6]). При этом нужно знать верхнюю оценку ненадёжности исходной схемы, которая зависит от базиса и типа неисправностей.

Конечно, можно было бы использовать тривиальную верхнюю оценку ненадёжности исходной схемы (неветвящейся программы), которая равна произведению числа функциональных элементов схемы на максимальную ненадёжность базисного элемента. Но чтобы число итераций при построении схемы (неветвящейся программы) высокой надёжности было, по возможности, небольшим (поскольку с каждым шагом итерации увеличивается сложность схемы (неветвящейся программы)), а вероятность неисправности была сверху ограничена константой, желательно в качестве исходной схемы брать схему с достаточно «хорошей» надёжностью.

До настоящего времени в произвольном полном конечном базисе подобные оценки ненадёжности схем были известны лишь при инверсных неисправностях на выходах элементов [7, 8] и при однотипных константных неисправностях на выходах элементов [9].

Нетривиальная универсальная (пригодная для любого полного конечного базиса и любых неисправностей элементов) оценка ненадёжности исходной схемы (неветвящейся программы) приведена в теореме 1.

**Теорема 1.** Пусть  $B$  — произвольный полный конечный базис,  $P(B) = \max\{P(E_1), \dots, P(E_q)\}$ . Тогда любую булеву функцию  $f$  можно реализовать схемой  $S$  в базисе  $B$ , ненадёжность которой  $P(S) \leq 5P(B) + 162P^2(B)$  при  $P(B) \leq 1/960$ .

**Следствие 1.** Пусть  $B$  — произвольный полный конечный базис,  $P(B) = \max\{P(E_1), \dots, P(E_q)\}$ . Тогда любую булеву функцию  $f$  можно реализовать схемой  $S$  в базисе  $B$ , ненадёжность которой  $P(S) \leq 5,17P(B)$  при  $P(B) \leq 1/960$ .

Таким образом, произвольную булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше  $5,17P(B)$ , а надёжность — не меньше  $1 - 5,17P(B)$ , где  $P(B)$  — ненадёжность «худшего» из базисных элементов.

Покажем, как, используя теорему 1 и следствие из неё, можно в произвольном полном конечном базисе получить верхнюю оценку ненадёжности схем, например, при инверсных неисправностях на входах элементов.

**Пример.** Пусть элементы полного базиса  $B = \{e_1, \dots, e_q\}$  ( $q \in N$ ) с вероятностью  $\varepsilon$  подвержены инверсным неисправностям на входах, причём каждый из входов любого элемента  $E_j$  (с функцией  $e_j$ ,  $j \in \{1, \dots, q\}$ ) схемы переходит в неисправное состояние независимо от других входов этого элемента и входов других элементов схемы. Пусть  $m \geq 2$  — такое наименьшее натуральное число, при котором  $B \subseteq P_2(m)$ , т. е. каждая из базисных функций  $e_j$  зависит не более чем от  $m$  переменных. Тогда  $P(B) \leq m\varepsilon$ . По следствию 1 произвольную булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше  $5,17m\varepsilon$  при всех  $\varepsilon \leq 1/(960m)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Избранные труды С. В. Яблонского / отв. ред. В. Б. Алексеев, В. И. Дмитриев. М.: МАКС Пресс, 2004. 584 с.
2. *Алехина М. А.* Синтез, надежность и сложность схем из ненадежных функциональных элементов: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Пенза, 2004. 169 с.
3. *Алехина М. А., Васин А. В.* Достаточные условия реализации булевых функций асимптотически оптимальными схемами с ненадежностью  $2\varepsilon$  // Известия высших учебных заведений. Математика. 2010. № 5. С. 79–82.
4. *Алехина М. А., Грабовская С. М.* О надежности неветвящихся программ в произвольном полном конечном базисе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 2. С. 13–22.
5. *Алехина М. А.* Ненадежность схем при константных неисправностях на входах и выходах элементов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2015. № 8. С. 100–102.
6. *Алехина М. А., Логвина О. А.* Ненадежность схем при слипаниях входов элементов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2016. № 9. С. 98–100.
7. *Аксенов С. И.* О надежности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. 2005. № 6(21). С. 42–55.
8. *Алехина М. А., Васин А. В.* О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных // Ученые записки Казанского государственного университета. Сер. Физико-математические науки. 2009. Т. 151. Кн. 2. С. 25–36.
9. *Алехина М. А.* О надежности схем в произвольном полном конечном базисе при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. 2012. Т. 24. № 3. С. 17–24.