Секция 6

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ, АВТОМАТОВ И ГРАФОВ

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/10/51

К ВОПРОСУ О ПРИМИТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ГРАФАХ С ЭКСПОНЕНТОМ РАВНЫМ 2

М. Б. Абросимов, С. В. Костин

Рассматриваются примитивные однородные графы с экспонентом равным 2. Уточняется известный результат о том, что число рёбер неориентированного n-вершинного графа с экспонентом 2 должно быть не меньше $(3n-3)/2$ для нечётного n и $(3n-2)/2$ для чётного n. Для однородных графов с экспонентом 2 при $n>4$ минимальное число рёбер есть $2n$.

Ключевые слова: *примитивный граф, примитивная матрица, экспонент, однородный граф.*

Неотрицательная квадратная матрица A называется *примитивной*, если существует натуральное k, такое, что A^k положительна. Минимальное такое значение k называется *экспонентом* матрицы A [1]. Понятие примитивности легко переносится на графы.

Вершина v достижима из вершины u за $k \geqslant 1$ шагов, если существует последовательность рёбер (маршрут) $\{u,w_1\},\{w_1,w_2\},\ldots,\{w_{k-1},v\}$. Если A — матрица смежности графа G, то достижимость вершины v из вершины u за k шагов означает, что на пересечении строки и столбца, соответствующих вершинам u и v соответственно, в матрице A^k стоит 1.

Граф G называется *примитивным*, если существует натуральное k, такое, что между любой парой вершин графа G существует маршрут длины k (иначе говоря, в матрице A^k все элементы равны 1). Минимальное такое значение k называется *экспонентом* графа G и обозначается $\exp(G)$. Ряд работ посвящён исследованию экспонентов однородных примитивных матриц [2, 3]. С точки зрения графов, рассматриваемые в этих работах матрицы соответствуют орграфам. В данной работе рассматриваются экспоненты неориентированных однородных графов. В [4] исследуется вопрос о минимальном числе дуг (рёбер) у орграфов (графов) с экспонентом равным 2. В частности, для неориентированных графов с экспонентом 2 минимальное число рёбер есть $(3n-3)/2$ для нечётного n и $(3n-2)/2$ для чётного n. Этот результат удалось уточнить для однородных графов.

Однородным или *регулярным* n-вершинным графом порядка p называется простой неориентированный n-вершинный граф, все вершины которого имеют степень p. Множество n-вершинных однородных графов порядка p будем обозначать $R_{n,p}$.

Очевидно, что любой примитивный граф является связным. Цикл длины 3 будем называть треугольником. Через $g(G)$ обозначим обхват графа G, то есть наименьшую из длин циклов графа G. Так как в неориентированных графах нет петель, то примитивных графов с экспонентом равным 1 не существует, то есть $\exp(G)>1$. Нас будут интересовать однородные графы с $\exp(G) = 2$. Очевидно, что диаметр таких графов $d(G) \leqslant 2$, однако это условие не является достаточным.

Теорема 1. Граф G является примитивным с $\exp(G) = 2$ тогда и только тогда, когда $d(G) \leqslant 2$ и каждое ребро графа G входит в треугольник.

Второе условие теоремы отдельно также не является достаточным. На рис. 1 представлен 10-вершинный регулярный граф порядка 4. Можно заметить, что каждое ребро этого графа входит в треугольник, граф является примитивным, однако его экспонент равен 3.

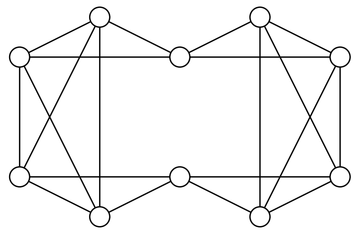

Рис. 1. 10-Вершинный регулярный граф порядка 4 с $\exp(G) = 3$

Если рассматривать произвольные графы, то можно найти пример с меньшим числом вершин. На рис. 2 представлен 7-вершинный граф с $\exp(G) = 3$, каждое ребро которого входит в треугольник.

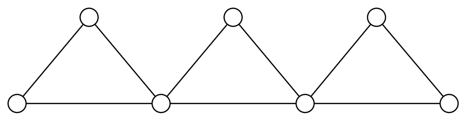

Рис. 2. 7-Вершинный граф с $\exp(G) = 3$

Следствие 1. Пусть G — примитивный граф с $\exp(G) = 2$. Тогда его обхват $g(G) = 3$.

Легко заметить, что любой полный граф K_n при $n > 2$ является примитивным и $\exp(K_n) = 2$. Так как каждое ребро примитивного графа G с $\exp(G) = 2$ входит в треугольник, то степень всех вершин графа G не ниже 2. Оказывается, оценку минимальной степени вершин графов с экспонентом, равным 2, можно повысить. В [4] получен следующий результат: для неориентированных графов с экспонентом 2 минимальное число рёбер есть $(3n-3)/2$ для нечётного n и $(3n-2)/2$ для чётного n. С одной стороны, из этого сразу следует

Теорема 2. Среди регулярных графов $R_{n,2}$ только граф K_3 имеет экспонент 2.

С другой стороны, кубические графы содержат $3n/2$ рёбер и удовлетворяют условию из работы [4]. Однако получен следующий результат.

Теорема 3. Примитивных n-вершинных кубических графов с экспонентом 2 при $n > 4$ не существует.

Теорема 4. Если $p > n/2$, то любой n-вершинный регулярный граф порядка p является примитивным с экспонентом 2.

В [2] доказывается, что однородные ориентированные графы порядка p (степени исхода и захода каждой вершины равны p) с экспонентом 2 могут быть при следующих значениях n:

$$p + 1 \leqslant n \leqslant 2p - 1.$$

Если рассматривать каждое ребро неориентированного графа как пару встречных дуг, то однородный неориентированный граф порядка p можно рассматривать как однородный ориентированный граф порядка $2p$. Тогда оценка для неориентированных графов принимает вид

$$p + 1 \leqslant n \leqslant 4p - 1.$$

Нижняя оценка достигается для полных графов K_n.

Был проведён вычислительный эксперимент с использованием кластера высокопроизводительных вычислений ПРЦ НИТ СГУ по подсчёту регулярных графов с экспонентом, равным 2, и числом вершин до 16. Результаты для 4-, 5- и 6-регулярных графов представлены в таблице. Для генерации регулярных графов использовалась программы GENREG [5] и DSR Generator [6]. Вычисления показывают, что верхняя оценка может быть улучшена.

Количество n-вершинных p-регулярных графов с экспонентом равным 2

n	$p=4$	$p=5$	$p=6$
4	0	0	0
5	1	0	0
6	1	1	0
7	2	0	1
8	2	3	1
9	3	0	4
10	0	24	21
11	1	0	266
12	0	210	5457
13	0	0	135775
14	0	116	2806846
15	0	0	40242765
16	0	2	337592332

На рис. 3 приведено изображение 11-вершинного 4-регулярного графа с экспонентом 2 [7].

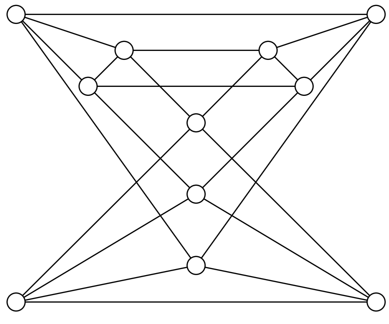

Рис. 3. 11-Вершинный регулярный граф порядка 4 с $\exp(G) = 2$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wielandt H.* Unzerlegbare nicht negative Matrizen // Math. Zeitschr. 1950. V. 52. P. 642–648.
2. *Jin M., Lee S. G., and Seol H. G.* Exponents of r-regular primitive matrices // Inform. Center Math. Sciences. 2003. V. 6. No. 2. P. 51–57.
3. *Bueno M. I. and Furtado S.* On the exponent of r-regular primitive matrices // ELA. Electronic J. Linear Algebra. 2008. V. 17. P. 28–47.
4. *Kim B., Song B., and Hwang W.* Nonnegative primitive matrices with exponent 2 // Linear Algebra and its Applications. 2005. No. 407. P. 162–168.
5. *Meringer M.* Fast generation of regular graphs and construction of cages // J. Graph Theory. 1999. No. 30. P. 137–146.
6. *Сухов С. А.* DSR Generator. Свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016610073. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 11 января 2016 г.
7. *Костин С. В.* Об использовании задач по теории графов для интеллектуального развития учащихся // Математика в образовании: сб. статей. Вып. 10 / под ред. И. С. Емельяновой. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та. 2014. С. 68–74.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/10/52

О ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ОЦЕНКАХ ЧИСЛА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДУГ МИНИМАЛЬНОГО РЁБЕРНОГО 1-РАСШИРЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ЦЕПИ

М. Б. Абросимов, О. В. Моденова

Исследуются верхняя и нижняя оценки числа дополнительных дуг $ec(P_n)$ минимального рёберного 1-расширения ориентации цепи. Если P_n имеет концы разного типа и отлична от гамильтоновой и от ориентации, состоящей из чередующихся источников и стоков, то $\lceil n/6 \rceil + 1 \leqslant ec(P_n) \leqslant n + 1$. Если P_n имеет концы одинакового типа, то $\lceil n/4 \rceil + 1 \leqslant ec(P_n) \leqslant n + 1$.

Ключевые слова: *минимальное рёберное 1-расширение, ориентация цепи, отказоустойчивость.*

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* (МВ-kР) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G, то есть G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;
2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Понятие минимального вершинного k-расширения появилось в [1] как модель для исследования отказоустойчивости элементов дискретных систем. Позднее в работе [2] была введена модель для исследования отказов связей между элементами.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным рёберным k-расширением* (МР-kР) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является рёберным k-расширением графа G, то есть G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер (дуг);
2) граф G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

В [1] доказано, что МВ-1Р n-вершинной цепи является $(n + 1)$-вершинный цикл, в [2] доказано, что МР-1Р n-вершинной цепи является n-вершинный цикл. Легко пока-