Теорема 5. Число дополнительных дуг МР-1Р ориентации цепи P_n, имеющей концы одинакового типа, удовлетворяет следующим условиям:

$$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1 \leqslant ec(P_n) \leqslant n + 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
2. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
3. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
4. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. Т. 88. Вып. 5. С. 643–650.
5. *Абросимов М. Б., Моденова О. В.* Характеризация орграфов с малым числом дополнительных дуг минимального вершинного 1-расширения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2013. Т. 13. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 2. Ч. 2. С. 3–9.
6. *Абросимов М. Б., Моденова О. В.* Характеризация орграфов с тремя дополнительными дугами в минимальном вершинном 1-расширении // Прикладная дискретная математика. 2013. № 3. С. 68–75.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/10/53

О ГЕНЕРАЦИИ НЕИЗОМОРФНЫХ ВЕРШИННЫХ k-РАСКРАСОК

М. Б. Абросимов, П. В. Разумовский

Исследуется генерация всех неизоморфных вершинных и рёберных k-раскрасок заданного графа. Предлагается алгоритм решения задачи построения неизоморфных вершинных k-раскрасок методом Рида — Фараджева без проверки на изоморфизм. Задача построения рёберных k-раскрасок сводится к задаче построения вершинных k-раскрасок.

Ключевые слова: *граф, раскраска, изоморфизм, вершинная раскраска, рёберная раскраска.*

Введение

Определение 1. Пусть $G = (V, \alpha)$ — граф, $k \in \mathbb{N}$. Функция вида $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ называется *вершинной k-раскраской* графа G, $f(v)$, $v \in V$, — цветом вершины v. При этом граф G называется *графом с цветными вершинами*, или *цветным графом*. Для таких графов вводится обозначение $G = (V, \alpha, f)$.

Аналогичным образом определяется рёберная k-раскраска, а граф называется *графом с цветными рёбрами*.

Определение 2. Вершинная k-раскраска называется *правильной*, а граф называется *k-раскрашиваемым*, если вершины графа можно раскрасить в k цветов так, что смежные вершины будут раскрашены в разные цвета. Аналогичным образом определяется правильная *рёберная k-раскраска*. В этом случае граф называется *k-рёберно раскрашиваемым*.

Обычно, когда встречаются задачи, связанные с раскраской графов, имеется в виду именно правильная раскраска графа. Однако встречаются и задачи, в которых вершины графа имеют несколько различных типов (цветов), причем смежные вершины могут быть одного типа [1]. Многие определения легко переносятся на цветные графы.

Определение 3 [2]. Пусть S — множество, а $F = \{S_1, \ldots, S_p\}$ — семейство его различных непустых подмножеств, объединение которых дает S. *Граф пересечений* $\Omega(F)$ семейства F определяется множеством $V(\Omega(F)) = F$ и условием «S_i и S_j смежны тогда и только тогда, когда $i \neq j \wedge S_i \cap S_j \neq \varnothing$».

Определение 4 [2]. Рассмотрим множество X всех рёбер графа G как семейство двухвершинных подмножеств множества вершин $V(G)$. *Рёберным графом* $L(G)$ графа G называется граф пересечений $\Omega(X)$. Таким образом, вершинами графа $L(G)$ являются рёбра графа G и две вершины графа $L(G)$ смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие им рёбра графа.

Определение 5. *Изоморфизмом цветных графов* $G_1 = (V_1, \alpha_1, f_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2, f_2)$ называется изоморфизм графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$, который сохраняет цвета. То есть это такая биекция $\phi : V_1 \to V_2$, что выполняются два условия:
1. $(u, v) \in \alpha_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2$ для любой пары вершин $u, v \in V_1$;
2. $f_1(v) = f_2(\phi(v))$ для любой вершины $v \in V_1$.

Изоморфизм цветных графов также называется *цветным изоморфизмом*. Аналогично вводится понятие изоморфизма графов с цветными рёбрами.

Определение 6. *Автоморфизм* (*цветной*) *графа* — изоморфизм (цветной) графа на себя. Множество всех (цветных) автоморфизмов, включая тождественный, образует *группу автоморфизмов графа*. Две вершины называются *подобными*, если существует автоморфизм, который отображает одну вершину на другую. Множество подобных вершин называется *орбитой*.

1. Задача генерации неизоморфных k-раскрасок

На практике часто возникает задача генерации всех вершинных раскрасок заданного графа. Эффективного решения эта задача не имеет. В данной работе задача генерации вершинных раскрасок решена методом Рида — Фараджева. Этот метод позволяет избавиться от проверки графов на изоморфизм — вместо этого производится проверка каноничности раскраски.

Задачу построения рёберных раскрасок графа G можно свести к задаче генерации вершинных раскрасок путем построения рёберного графа $L(G)$.

Если графы G_1 и G_2 изоморфны, то графы $L(G_1)$ и $L(G_2)$ тоже изоморфны. Х. Уитни [2] установил, что обратное справедливо почти всегда, и указал при этом единственную пару различных графов K_3 и $K_{1,3}$, имеющих один и тот же рёберный граф. Построив граф $L(G)$ и рассмотрев частные случаи, описанные Уитни, можно построить неизоморфные рёберные раскраски.

2. Вершинные k-раскраски графа

В алгоритме 1 построения всех неизоморфных вершинных k-раскрасок графа в качестве вспомогательного инструмента для построения разбиений, вычисления канонической нумерации и орбит используется программный пакет nauty [3], реализованный МакКеем [4].

Алгоритм 1. Построение всех неизоморфных вершинных k-раскрасок графа

Вход: граф $G = (V, E)$ и количество цветов $k : 1 \leqslant k \leqslant |V|$

1: При помощи программы nauty строится каноническая нумерация [4] lab графа, вычисляются орбиты orb_0.

2: Создаётся вектор раскраски col, в него добавляется цвет 1 для первой вершины; $colsize := 1$ — размер col; $mc := 1$ — максимальный по значению цвет, находящийся в col; $colcnt := 0$ — количество найденных раскрасок.

3: Перебираются все цвета от 1 до $mc + 1$, очередной цвет присваивается cur.

4: Для cur перебираются элементы $i = 1, \ldots, colsize$ раскраски col.
Пусть $col[i] > cur$ и $orb_r[i] = orb_r\,[colsize + 1]$, где orb_r — орбиты, полученные разбиением вершин раскраской $r = (c_1, \ldots, c_{i-1})$ — первые $(i-1)$ цвета col. Тогда данная раскраска объявляется изоморфной, отсекается, и cur присваивается следующий цвет.

5: cur добавляется в col.

6: Вычисляется множество орбит orb_{col}, полученных разбиением вершин графа раскраской col.

7: **Если** $cur > mc$ и $mc \neq k$, **то**
$mc := cur$.

8: **Если** $colsize < |V|$, **то**

9: $colsize := colsize + 1$ и переход на шаг 3,

10: **иначе**

11: **Если** $colsize = |V|$ и $mc = k$, **то**
производится дополнительная проверка раскраски: для каждой вершины i проверяется выполнение условия

$$\forall j \in \{1, \ldots, i-1\} \ \left(col_j > col_i \wedge orb_{col_{j-1}}(j) \neq orb_{col_{j-1}}(i)\right).$$

12: **Если** условие выполняется, **то**

13: раскраска считается изоморфной и не включается в ответ. Иначе необходимо вывести новую раскраску с учётом lab, увеличить $colcnt$ на единицу и завершить перебор для данной раскраски.

Выход: $colcnt$

В шаге 11 производится дополнительная проверка раскраски с учётом изоморфизма цветов. Если изоморфизм раскрасок рассматривается как изоморфизм с точностью до цветов, то этот шаг алгоритма необходимо опустить.

Полученные раскраски удовлетворяют условию лексикографической минимальности. Проверка на изоморфизм в алгоритме не используется, осуществляется только проверка каноничности кода полученной раскраски.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
2. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 296 с.
3. `http://users.cecs.anu.edu.au/bdm/nauty/` — Nauty and Traces: Graph Canonical Labeling and Automorphism Group Computation. 2016.
4. *McKay B. D. and Piperno A.* Practical graph isomorphism // J. Symbolic Computation. 2013. V. 2. No. 60. P. 94–112.