УДК 519.175.3 DOI 10.17223/2226308X/10/54

О ЧИСЛЕ ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЕВ В ПОМЕЧЕННОМ КАКТУСЕ

В. А. Воблый

Пусть $t(Ca_n(n_2, n_3, \ldots))$ — число остовных деревьев в помеченном кактусе с n вершинами, имеющем $n_2 \geqslant 0$ блоков-рёбер и $n_i \geqslant 0$ блоков-многоугольников с i вершинами при $i \geqslant 3$, где $n - 1 = n_2 + 2n_3 + \ldots$ При $n \geqslant 2$ получена явная формула $t(Ca_n(n_2, n_3, \ldots)) = \prod\limits_{i \geqslant 3} i^{n_i}$. Как следствие, выводится оценка сверху: $t(Ca_n(n_2, n_3, \ldots)) \leqslant \left(\frac{1}{k}(n + k - n_2 - 1)\right)^k \leqslant \left(\frac{1}{k}(n + k - 1)\right)^k \leqslant e^{n-1}$, где k — число циклов в кактусе.

Ключевые слова: *остовное дерево, кактус, перечисление.*

Рассматриваются неориентированные простые связные помеченные графы.

Определение 1. Точкой сочленения связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей рёбрами граф становится несвязным.

Определение 2. Блок — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения.

Определение 3 [1, с. 93]. Кактусом называется связный граф, в котором нет рёбер, лежащих более чем на одном простом цикле.

Все блоки кактуса — рёбра или простые циклы (многоугольники).

Число остовных деревьев графа является важной характеристикой его надёжности как сети передачи информации [2]. При этом надёжность сети увеличивается при максимизации числа остовных деревьев в соответствующем ей графе. Таким образом, полученный результат имеет потенциальные приложения к синтезу надёжных сетей передачи информации.

Лемма 1. Число остовных деревьев в связном графе равно произведению чисел остовных деревьев его блоков.

Доказательство. Применим индукцию по числу блоков. Пусть граф состоит из двух блоков, тогда он имеет только одну точку сочленения [3, с. 111]. Очевидно, эта точка сочленения является общей вершиной для всех остовных деревьев графа. Тогда по правилу произведения число остовных деревьев графа равно произведению чисел остовных деревьев двух его блоков.

Допустим теперь, что лемма верна для графа, состоящего из $k > 2$ блоков, и докажем, что она верна для графа, состоящего из $k + 1$ блоков. Известно, что в любом связном графе, состоящем из нескольких блоков, существует концевой блок, который имеет только одну точку сочленения [4, с. 92]. Очевидно, эта точка сочленения является общей вершиной для всех остовных деревьев графа. В части графа, полученной после отсоединения концевого блока, содержится k блоков и, по предположению индукции, число остовных деревьев этой части графа равно произведению чисел остовных деревьев составляющих её блоков. Тогда по правилу произведения число остовных деревьев всего графа равно произведению числа остовных деревьев отсоединённой части и числа остовных деревьев концевого блока. Это значит, что лемма верна для любого графа, состоящего из $k \geqslant 2$ блоков. ■

Отметим, что утверждение леммы приводится без доказательства в [5, с. 111].

Теорема 1. Пусть $t(Ca_n(n_2, n_3, \ldots))$ — число остовных деревьев в помеченном кактусе с $n \geqslant 2$ вершинами, имеющем $n_2 \geqslant 0$ блоков-рёбер и $n_i \geqslant 0$ блоков-многоугольников с i вершинами при $i \geqslant 3$. Тогда верна формула

$$t(Ca_n(n_2, n_3, \ldots)) = \prod_{i \geqslant 3} i^{n_i}\ , \text{где } n-1 = n_2 + 2n_3 + \ldots$$

Доказательство. Пусть $k = \sum\limits_{i \geqslant 3} n_i$ — число циклов (цикломатическое число) в рассматриваемом кактусе, а $m = n_2 + 3n_3 + \ldots$ — число его рёбер. Поскольку $k = m - n + 1$, имеем равенство $n - 1 = n_2 + 2n_3 + \ldots$ Так как все блоки кактуса — или рёбра (деревья), или простые циклы, а число остовных деревьев простого цикла с n вершинами равно n, то с помощью леммы 1 получаем утверждение теоремы 1. ■

Следствие. Для числа остовных деревьев в кактусе $Ca_n(n_2, n_3, \ldots)$ верны неравенства

$$t(Ca_n(n_2, n_3, \ldots)) \leqslant \left(\frac{1}{k}(n + k - n_2 - 1)\right)^k \leqslant \left(\frac{1}{k}(n + k - 1)\right)^k \leqslant e^{n-1}.$$

Доказательство. С помощью теоремы 1 и неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим имеем

$$t(Ca_n(n_2, n_3, \ldots)) = \prod_{i \geqslant 3} i^{n_i} \leqslant \left(\frac{1}{k}\sum_{i \geqslant 3} i n_i\right)^k = \left(\frac{1}{k}(n + k - n_2 - 1)\right)^k \leqslant \left(\frac{1}{k}(n + k - 1)\right)^k \leqslant e^{n-1}.$$

Доказательство закончено. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 324 с.
2. *Myrvold W.* Reliable network synthesis: some recent developments // Proc. 8th Int. Conf. Graph Theory, Combinatorics, Algorithms, Appl. 1999. V. 2. P. 650–660.
3. *Зыков Ф.* Основы теории графов. М.: Наука, ГРФМЛ, 1987. 382 с.
4. *Татт Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1988. 424 с.
5. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 301 с.

УДК 519.713.4 DOI 10.17223/2226308X/10/55

МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБРАТИМОГО АВТОМАТА С ИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЫХОДОВ

А. О. Жуковская, В. Н. Тренькаев

Предлагается метод построения простого условного эксперимента, идентифицирующего автомат с известной функцией выходов, являющийся одной из реализаций обратимого недетерминированного автомата R. Сначала строится граф преемников автомата R и определяются его разрешимые вершины. Показано, что когда вершина, соответствующая множеству состояний автомата R, разрешима, то можно провести простой условный установочный эксперимент по нахождению текущего состояния автомата-реализации. Далее проводится простой условный эксперимент по идентификации последнего при известном начальном состоянии.

Ключевые слова: *простой условный эксперимент по идентификации автомата, сильносвязный автомат, обратимый автомат.*