численной минимизации (3). В качестве дальнейшего предмета исследования является открытым вопрос построения, по возможности, явного решения задачи (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бентли Дж.* Жемчужины программирования. СПб.: Питер, 2002. 272 с.
2. *Столяр С. Е.* Массивы. СПб.: ЦПО «Информатизация образования», 2002. 39 с.
3. *Kernighan B. and Plauger P. J.* Software Tools in Pascal. Boston: Addison-Wesley, 1981.
4. *Холл М.* Теория групп. М.: ИЛ, 1962. 460 с.

УДК 519.682 DOI 10.17223/2226308X/10/58

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ДЛЯ ФОРМАЛЬНЫХ ГРАММАТИК

О. И. Егорушкин, И. В. Колбасина, К. В. Сафонов

В работе продолжается исследование систем некоммутативных полиномиальных уравнений, которые интерпретируются как грамматики формальных языков. Такие системы решаются в виде формальных степенных рядов (ФСР), выражающих нетерминальные символы через терминальные символы алфавита и рассматриваемых как формальные языки. Всякому ФСР поставлен в соответствие его коммутативный образ, который получается в предположении, что все символы обозначают коммутативные переменные, принимающие значения из поля комплексных чисел. В продолжение исследований совместности систем некоммутативных полиномиальных уравнений, которая напрямую не связана с совместностью её коммутативного образа, получено достаточное условие совместности в виде аналога теоремы о неявном отображении для формальных грамматик: если для коммутативного образа системы выполнено условие теоремы о неявном отображении, то не только она, но и исходная система некоммутативных уравнений имеет единственное решение в виде ФСР.

Ключевые слова: *системы полиномиальных уравнений, некоммутативные переменные, формальный степенной ряд, коммутативный образ, якобиан.*

Продолжая исследование, начатое в работах [1, 2], рассмотрим систему полиномиальных уравнений

$$P_j(z,x) = 0, \quad P_j(0,0) = 0, \quad j = 1,\dots,k, \tag{1}$$

которая решается относительно символов $z = (z_1,\dots,z_n)$ в виде ФСР, зависящих от символов $x = (x_1,\dots,x_m)$.

Такие системы имеют приложения в теории формальных языков, поскольку являются грамматиками, порождающими важные классы формальных языков: контекстно-свободных, языков непосредственно составляющих, языков в нормальной форме Грейбах и др. [3, 4].

В теории формальных языков символы $x_1,\dots,x_m$ называются терминальными и образуют словарь (алфавит) данного языка, а символы $z_1,\dots,z_n$ называются нетерминальными и необходимы для задания грамматических правил. Над всеми символами определены некоммутативная операция умножения (конкатенации), коммутативная операция формальной суммы, а также коммутативная операция умножения на комплексные числа, поэтому можно рассматривать символьные многочлены и ФСР с числовыми (комплексными) коэффициентами. Наконец, мономы от терминальных символов интерпретируются как предложения языка, а каждый ФСР, который является решением системы (1), рассматривается как порождённый грамматикой формальный язык, т. е. формальная сумма всех «правильных» предложений этого языка [3, 4].

Исследовать решения символьных систем (1) достаточно трудно, поскольку некоммутативность умножения и отсутствие деления препятствуют исключению неизвестных, и поэтому в работах [1, 2] наряду с некоммутативной системой (1) рассмотрен её коммутативный образ, который получается в предположении, что все переменные, входящие в систему, принимают значения из поля комплексных чисел.

Так, предположим, следуя [1], что все мономы от $x_1, \ldots, x_m$ занумерованы в лексикографическом порядке по возрастанию степеней в последовательность $u_0, u_1, \ldots$, играющую роль базиса, тогда каждый ряд s можно единственным образом записать в виде разложения по этому базису с числовыми коэффициентами $\langle s, u_i\rangle$ при мономах u_i:

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} \langle s, u_i\rangle u_i. \tag{2}$$

Теперь поставим в соответствие ФСР (2) его коммутативный образ $\mathrm{ci}(s)$ — степенной ряд, который получается из s в предположении, что символы $x_1, \ldots, x_m$ (равно как и $z_1, \ldots, z_n$) обозначают коммутативные переменные, принимающие значения из поля комплексных чисел [5].

В работе [1] рассмотрен коммутативный образ системы уравнений (1)

$$\mathrm{ci}(P_j(z, x)) = 0, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{3}$$

и отмечено, что из совместности некоммутативной системы (1) следует совместность коммутативной системы (3), однако обратное утверждение неверно. Как результат, вопрос о достаточном условии совместности системы уравнений (1), важный для приложений, оставался открытым.

Ниже дадим решение этого вопроса, получая достаточное условие совместности (и единственности решения) исходной некоммутативной системы (1) в терминах совместности коммутативной системы (3), которая легче поддаётся исследованию.

Для этого рассмотрим систему уравнений (1) в случае, когда $k = n$. Пусть

$$J(z, x) = \det((\mathrm{ci}(P_i(z, x)))'_{z_j})$$

— якобиан системы уравнений (3) относительно переменных $z_1, \ldots, z_n$.

Дискретным (символьным) аналогом теоремы о неявном отображении является следующая теорема.

Теорема 1. Если для некоммутативной символьной системы уравнений (1) выполнено неравенство $J(0, 0) \neq 0$, то она имеет единственное решение в виде ФСР.

Замечание 1. Неравенство $J(0, 0) \neq 0$ является условием теоремы о неявном отображении для коммутативной системы уравнений (3) с переменными в $z_1, \ldots, z_n$ и влечёт существование и единственность её голоморфного решения; тем не менее оказывается, что это неравенство влечёт также существование и единственность решения исходной некоммутативной символьной системы уравнений (1).

Поскольку ФСР, которые являются компонентами решения системы (1), интерпретируются как формальные языки, порождённые грамматикой (1), то теорема 1 позволяет установить случаи, когда грамматика действительно определяет формальный язык.

Заметим также, что решением системы (3) являются алгебраические функции, которые могут быть исследованы аналитическими методами [6–8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егорушкин О. И., Колбасина И. В., Сафонов К. В.* О совместности систем символьных полиномиальных уравнений и их приложении // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2016. № 9. С. 119–121.
2. *Egorushkin O. I., Kolbasina I. V., and Safonov K. V.* On solvability of systems of symbolic polynomial equations // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2016. Т. 9. Вып. 2. С. 166–172.
3. *Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л.* Алгебра. Языки. Программирование. Киев: Наукова думка, 1973.
4. *Salomaa A. and Soitolla M.* Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series. N.Y.: Springer Verlag, 1978.
5. *Семёнов А. Л.* Алгоритмические проблемы для степенных рядов и контекстно-свободных грамматик // Доклады АН СССР. 1973. № 212. С. 50–52.
6. *Сафонов К. В., Егорушкин О. И.* О синтаксическом анализе и проблеме В. М. Глушкова распознавания контекстно-свободных языков Хомского // Вестник Томского государственного университета. 2006. Приложение № 17. С. 63–67.
7. *Сафонов К. В.* Об условиях алгебраичности и рациональности суммы степенного ряда // Матем. заметки. 1987. Т. 41. Вып. 3. С. 325–332.
8. *Safonov K. V.* On power series of algebraic and rational functions in C^n // J. Math. Analysis Appl. 2000. V. 243. P. 261–277.

УДК 519.714 DOI 10.17223/2226308X/10/59

ЗАВЕРШЕНИЕ ЭСКИЗОВ ПРЕДИКАТНЫХ ПРОГРАММ МЕТОДОМ СИНТЕЗА ЧЕРЕЗ КОНТРПРИМЕРЫ[1]

М. С. Чушкин

Программа на языке P представляет собой набор определений предикатов. Для языка P разработана операционная семантика. На базе операционной семантики определена формула тотальной корректности предиката относительно его спецификации. Для незаконченной программы на языке P ставится задача её завершения до корректной относительно спецификации. Метод синтеза выражений на основе контрпримеров успешно адаптирован для этой задачи.

Ключевые слова: *предикатное программирование, формальная операционная семантика, программный синтез, синтез на основе контрпримеров, дедуктивная верификация.*

1. Система предикатного программирования

Программа на языке P_0 определяется следующей конструкцией:

$$<\textit{имя предиката}> (<\textit{аргументы}>:<\textit{результаты}>)\{<\textit{оператор}>\},$$

аргументы и результаты — непересекающиеся наборы имён переменных. Набор аргументов может быть пустым.

Операторами языка P_0 являются: $B(x : z); C(z : y)$ — последовательный оператор; $B(x : y) || C(x : z)$ — параллельный оператор и if (e) $B(x : y)$ else $C(x : y)$ — условный оператор. Здесь B и C — операторы, e — логическое выражение [1].

Операционной семантикой программы $H(x : y)$ назовём формулу $R(H)(x, y)$, смысл которой на естественном языке звучит следующим образом: «для значения на-

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 16-01-00498.