В данном примере порядок деноминации равен только 6, но практические эксперименты показывают значительный рост порядка деноминации при увеличении количества аргументов функции. Это обусловливает необходимость проверки принадлежности полученного в результате деноминации и округления решения к многограннику решений рассматриваемой системы неравенств. Поскольку в примере найдено решение системы (3), принадлежащее многограннику её решений, можно сделать вывод, что функция f принадлежит к классу пороговых; если бы метод эллипсоидов показал несовместность системы (3), то можно было бы утверждать, что функция не является пороговой.

Таким образом, сделаем вывод о возможности применения метода эллипсоидов для распознавания пороговых булевых функций. Детальное изучение процесса его работы и сравнительный анализ с итеративными алгоритмами, в том числе в k-значной области, представляет актуальное направление для дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хачиян Л. Г.* Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // ЖВМиМФ. 1980. Вып. 20. № 1. С. 51–68.
2. *Зуев А. Ю.* Пороговые функции и пороговые представления булевых функций // Математические вопросы кибернетики. 1994. № 5. С. 5–61.
3. *Никонов В. Г.* Пороговые представления булевых функций // Обозрение прикл. и промышл. математики. 1994. Вып. 1. № 3. С. 458–545.
4. *Кудрявцев Л. Г.* Теория тестового распознавания // Дискретная математика. 2006. Вып. 18. № 3. С. 3–34.
5. *Бурделев А. В., Никонов В. Г., Лапиков И. И.* Распознавание параметров узла защиты информации, реализованного пороговой k-значной функцией // Труды СПИИРАН. 2016. Вып. 46. С. 108–127 .
6. *Дертоузос П.* Пороговая логика. М.: Мир, 1967. 344 с.
7. *Лапиков И. И., Никонов В. Г.* Адаптивный алгоритм решения систем неравенств с k-значными неизвестными // Труды Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского. 2016. Вып. 1. С. 88–94.

УДК 512.55 DOI 10.17223/2226308X/10/64

ПРИМЕНЕНИЕ ПОРОГОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В МЕТОДЕ РАЗДЕЛЯЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

В. Г. Никонов, А. Н. Шурупов

В методе разделяющих плоскостей предлагается перейти от системы линейных неравенств, эквивалентной нелинейному булеву уравнению, к системе линейных неравенств, являющейся следствием исходного уравнения. Вводится понятие импликативного k-приближения в пороговом базисе, которое характеризуется, с одной стороны, числом k линейных неравенств, а с другой стороны, дефицитом — мерой близости импликативного приближения к исходной системе неравенств. Предельный случай — 1-приближение, как и остальные, не является однозначным. Отказ от свойства импликативности позволяет ввести понятие статистического порогового приближения для булевой функции. Введённые понятия могут быть использованы для сокращения числа линейных неравенств в системе, порождённой исходным нелинейным уравнением, с сохранением возможности её решения.

Ключевые слова: *метод разделяющих плоскостей, нелинейные булевы уравнения, пороговые функции, пороговые приближения.*

Один из приёмов решения систем нелинейных булевых уравнений

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \gamma_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

основан на сведении их к равносильным системам линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m. \end{cases} \tag{2}$$

Данный приём получил название метода разделяющих плоскостей [1, 2] ввиду того, что с геометрической точки зрения каждому линейному неравенству соответствует секущая гиперплоскость в $(n-1)$-мерном пространстве. К числу параметров, характеризующих сложность этого метода, относится число неравенств m в системе (2) и их информативность, понимаемая как число отсекаемых неравенством вершин [1, 3].

Несмотря на достаточно глубокое изучение, в методе разделяющих плоскостей можно выделить широкий круг актуальных задач с точки зрения как построения результирующих систем линейных неравенств (2), так и их последующего решения.

В работе рассматривается возможность использования в методе разделяющих плоскостей так называемых приближений исходных нелинейных уравнений системы (1) вида

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) = \gamma_j \tag{3}$$

неравенствами

$$a^j_{i1}x_1 + \ldots + a^j_{in}x_n \leqslant b^j_i, \quad i = 1, \ldots, k_j, \tag{4}$$

таких, что система (4) не обязательно равносильна уравнению (3). При этом предлагается исключить малоинформативные неравенства в предположении, что за счёт избыточности исходной системы (1) неотсечённые системой (4) вершины будут отсечены другими неравенствами высокой информативности в результирующей системе.

Так как система нелинейных уравнений вида (1) равносильна одному нелинейному уравнению при отсутствии ограничений на функции, используемые в левых частях, то в дальнейшем будем рассматривать приближения в пороговом базисе для одного нелинейного уравнения.

Определение 1. Пусть k — фиксированное натуральное число. Для булева уравнения

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \gamma \tag{5}$$

систему неравенств

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{6}$$

назовём *импликативным k-приближением в пороговом базисе*, если все решения (5) являются решениями (6). Если система (6) состоит из одного неравенства ($k = 1$), то такое приближение назовём *импликативным пороговым.*

Пусть A_f — множество решений (5), A_Φ — множество решений (6), тогда $A_f \subseteq A_\Phi$.

Определение 2. *Дефицитом* импликативного приближения назовём

$$d = |A_\Phi| - |A_f|.$$

При фиксированном числе неравенств k в (6) можно говорить об оптимальном импликативном k-приближении, для которого дефицит d наименьший. Отметим, что если k не меньше порогового индекса t_γ функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, то всегда существует оптимальное приближение с нулевым дефицитом. Так как количество неравенств в системе прямо влияет на трудоёмкость решения, то особый интерес представляет оптимальное импликативное пороговое приближение и значение соответствующего дефицита.

Замечание 1. Для конкретного булева уравнения оптимальное пороговое приближение определяется неоднозначно.

В качестве примера рассмотрим сбалансированную булеву функцию $f(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3$ и уравнение

$$f(x_1,x_2,x_3)=1. \tag{7}$$

На рис. 1 и 2 единичные вершины функции (7) отмечены чёрными точками. Функция не является пороговой, поэтому можно ставить вопрос о поиске импликативного порогового приближения для уравнения (7).

Одно из таких приближений задаётся неравенством

$$x_1+x_2+2x_3 \leqslant 2, \tag{8}$$

отсекающим три нулевые вершины (011), (101), (111) с дефицитом $d=1$ (рис. 1). Однако можно указать ещё одно импликативное пороговое приближение

$$-2x_1+x_2-x_3 \leqslant 1, \tag{9}$$

отсекающее вершины (101), (111), (100) и также имеющее дефицит $d=1$ (рис. 2). Очевидно, что неравенства (8) и (9) задают оптимальные импликативные пороговые приближения, и они различны.

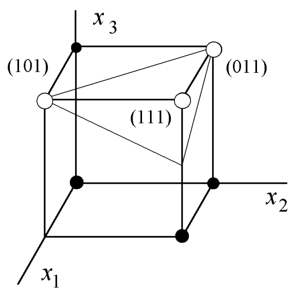

Рис. 1. Приближение (8)

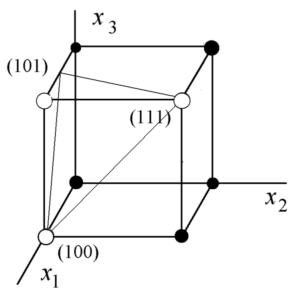

Рис. 2. Приближение (9)

Эксперименты показали возможность эффективного применения импликативных приближений для некоторых классов систем, и этот вопрос требует дальнейшего изучения в непосредственной связи с конкретным алгоритмом решения систем линейных неравенств.

Определение 3. *Статистическим пороговым приближением* булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ назовём пороговую булеву функцию $\tau(x_1,\ldots,x_n)$, такую, что вероятность их совпадения равна

$$\mathsf{P}[f(x_1,\ldots,x_n)=\tau(x_1,\ldots,x_n)] = \frac{1}{2}+\delta, \quad \delta>0, \tag{10}$$

где δ — мера близости приближения.

У произвольной булевой функции может быть несколько пороговых приближений с разными, вообще говоря, мерами близости.

Определение 4. Статистическое пороговое приближение $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ назовём *оптимальным*, если мера его близости максимальная.

Как и в случае импликативного приближения, можно показать, что у конкретной булевой функции могут существовать различные оптимальные статистические пороговые приближения.

Особенности и параметры практического применения статистических пороговых приближений требуют изучения в непосредственной связи с конкретным методом решения результирующих систем линейных неравенств. В алгоритмах направленного перебора с минимизацией невязки $\mu(\mathbf{x})$ истинному решению будет отвечать уже не значение невязки, равное 0, а некоторое ненулевое μ_0, определяемое конкретным алгоритмом, видом $\mu(\mathbf{x})$ и значением δ.

Обнаруженная авторами практическая эффективность как импликативных, так и статистических пороговых приближений приводит к постановке целого ряда актуальных задач не только экспериментального характера, но и теоретических, связанных с выбором оптимальных параметров методов, оценкой объёма необходимого материала, определением емкостной и временной сложностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балакин Г. В., Никонов В. Г.* Методы сведения булевых уравнений к системам пороговых соотношений // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1994. Т. 1. № 3. С. 389–401.
2. *Рыбников К. К.* Оценки сложности некоторых схем метода разделяющих плоскостей при решении систем булевых уравнений // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. Т. 2. № 9. С. 442–443.
3. *Анашкина Н. В., Шурупов А. Н.* Применение алгоритмов локального поиска к решению систем псевдобулевых линейных неравенств // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2015. № 8. С. 136–138.

УДК 519.7 DOI 10.17223/2226308X/10/65

ДВУХФАЗНЫЙ АЛГОРИТМ МАРШРУТИЗАЦИИ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЕТЯХ

А. А. Солдатенко

Рассмотрена задача Time-Dependent Shortest-Path (TDSP), которая является расширением известной задачи о кратчайшем пути в ориентированном графе, когда вес каждой дуги (x, y) этого графа — функция от времени отправления из вершины x. Предложено задачу TDSP решать с помощью двухфазного алгоритма ALT, который осуществляет целенаправленный поиск по ориентирам от стартовой вершины s до целевой вершины d. На первой фазе выполняется расстановка ориентиров в узлах сети и вычисляются потенциальные функции, на второй фазе находится точное значение (s, d)-пути с учётом вычисленных потенциальных функций. Предложены формулы вычисления потенциальных функций и способ задания неравенства треугольника, обеспечивающие корректность алгоритма ALT, и полиномиальная по времени адаптивная эвристика для расстановки ориентиров, которая использует историю обработки запросов при многократном решении задачи TDSP.