У произвольной булевой функции может быть несколько пороговых приближений с разными, вообще говоря, мерами близости.

Определение 4. Статистическое пороговое приближение $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ назовём *оптимальным*, если мера его близости максимальная.

Как и в случае импликативного приближения, можно показать, что у конкретной булевой функции могут существовать различные оптимальные статистические пороговые приближения.

Особенности и параметры практического применения статистических пороговых приближений требуют изучения в непосредственной связи с конкретным методом решения результирующих систем линейных неравенств. В алгоритмах направленного перебора с минимизацией невязки $\mu(\mathbf{x})$ истинному решению будет отвечать уже не значение невязки, равное 0, а некоторое ненулевое μ_0, определяемое конкретным алгоритмом, видом $\mu(\mathbf{x})$ и значением δ.

Обнаруженная авторами практическая эффективность как импликативных, так и статистических пороговых приближений приводит к постановке целого ряда актуальных задач не только экспериментального характера, но и теоретических, связанных с выбором оптимальных параметров методов, оценкой объёма необходимого материала, определением емкостной и временной сложностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балакин Г. В., Никонов В. Г.* Методы сведения булевых уравнений к системам пороговых соотношений // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1994. Т. 1. №3. С. 389–401.
2. *Рыбников К. К.* Оценки сложности некоторых схем метода разделяющих плоскостей при решении систем булевых уравнений // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. Т. 2. №9. С. 442–443.
3. *Анашкина Н. В., Шурупов А. Н.* Применение алгоритмов локального поиска к решению систем псевдобулевых линейных неравенств // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2015. №8. С. 136–138.

УДК 519.7 DOI 10.17223/2226308X/10/65

ДВУХФАЗНЫЙ АЛГОРИТМ МАРШРУТИЗАЦИИ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЕТЯХ

А. А. Солдатенко

Рассмотрена задача Time-Dependent Shortest-Path (TDSP), которая является расширением известной задачи о кратчайшем пути в ориентированном графе, когда вес каждой дуги (x, y) этого графа — функция от времени отправления из вершины x. Предложено задачу TDSP решать с помощью двухфазного алгоритма ALT, который осуществляет целенаправленный поиск по ориентирам от стартовой вершины s до целевой вершины d. На первой фазе выполняется расстановка ориентиров в узлах сети и вычисляются потенциальные функции, на второй фазе находится точное значение (s, d)-пути с учётом вычисленных потенциальных функций. Предложены формулы вычисления потенциальных функций и способ задания неравенства треугольника, обеспечивающие корректность алгоритма ALT, и полиномиальная по времени адаптивная эвристика для расстановки ориентиров, которая использует историю обработки запросов при многократном решении задачи TDSP.

Ключевые слова: *нестационарные сети, оптимальная маршрутизация, алгоритм ALT, расстановка ориентиров.*

В современных телекоммуникационных сетях приходится иметь дело с расширением задачи о кратчайшем пути, когда время прибытия в конечную вершину y дуги $e = (x, y)$ ориентированного графа G зависит не только от веса дуги e, но и времени выхода из начальной вершины x этой дуги. Функции, заданные на дугах графа G подобным образом, называют функциями прибытия, а сам граф G — нестационарной сетью. Задача поиска кратчайшего пути в нестационарной сети носит название Time-Dependent Shortest-Path problem, или коротко TDSP [1]. Известно, что TDSP для нестационарной сети общего вида без каких-либо ограничений на топологию сети и функции прибытия является NP-трудной задачей [2]. Когда функции прибытия удовлетворяют условию FIFO (First-In First-Out), задача TDSP полиномиально разрешима [1]. В этом случае задача TDSP традиционно решается алгоритмом Дейкстры. Предлагается решать задачу TDSP двухфазным алгоритмом маршрутизации по ориентирам, известным в литературе как алгоритм ALT (A* with Landmarks & Triangle). При этом под ориентиром понимается выделенная вершина исходного графа.

Пусть задан ориентированный граф $G = (V, E)$ без кратных дуг и петель (далее просто граф), в котором для всякой дуги $e = (x, y) \in E$ определена весовая функция $w_{xy}(t) \geqslant 0$ следующим образом:

$$w_{xy}(t) = \frac{l_{xy}}{v_{xy}(t)}.$$

Здесь величина l_{xy} — расстояние между вершинами $x, y \in V$, а $v_{xy}(t)$ — скорость движения по дуге $(x, y) \in E$ при условии, что старт из x осуществлён в момент времени t. Считаем, что выполнены естественные для сетей условия: $v_{xy}(t) > 0$ и $l_{xy} \geqslant 0$.

Сопоставим дуге $(x, y) \in E$ функцию прибытия $F_{xy}(t) = t + w_{xy}(t)$, где t — время отправления из вершины x при движении в вершину y по дуге (x, y). Если для каждой дуги $(x, y) \in E$ и любых моментов времени $0 < t_1 \leqslant t_2$ выполняется неравенство $F_{xy}(t_1) \leqslant F_{xy}(t_2)$, то говорят, что функция прибытия является монотонной, или удовлетворяет условию FIFO. Для всякой дуги $e = (x, y) \in E$ всегда верны отношения $x \neq y$, $t > 0$, $w_{xy}(t) \geqslant 0$. Отсюда следует, что

$$F_{xy}(t) \geqslant t > 0. \tag{1}$$

Неравенство (1) отражает непосредственный ход времени: «отправляясь из вершины x в момент времени t, невозможно прибыть в вершину y раньше времени t вне зависимости от значений l_{xy} и $v_{xy}(t)$». Граф G с учётом всех указанных предположений будем называть нестационарной сетью с условием FIFO.

Последовательность вершин $P = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$, в которой $s = x_0$, $d = x_k$, $(x_{i-1}, x_i) \in E$ для $i = 1, 2, \ldots, k$, задаёт путь из вершины s в вершину d в графе G, старт которого осуществляется в момент времени t_s. Такой путь обозначается (P, t_s). Если в G существует (s, d)-путь P, то вершина d достижима из s по пути P, что записывается как $s \underset{P}{\rightsquigarrow} d$. Полагаем, что вес (s, d)-пути в сети G вычисляется традиционным для задач маршрутизации способом [3]

$$w(P, t_s) = t_s + \sum_{i=0}^{k-1} w_{x_i x_{i+1}}(t_i), \text{ где } t_0 = t_s, t_{i+1} = F_{x_i x_{i+1}}(t_i),$$

а вес кратчайшего (s, d, t_s)-пути определяется следующим образом:

$$\operatorname{dist}(s, d, t_s) = \min_P \{w(P, t_s) \colon s \underset{P}{\rightsquigarrow} d\}.$$

Тройку величин (s, d, t_s), где s и d — стартовая и целевая вершина соответственно, t_s — стартовое время, будем называть запросом на поиск в нестационарной сети $G = (V, E)$ кратчайшего (s, d, t_s)-пути, или кратко (s, d, t_s)-запросом. С использованием введённых понятий и обозначений задача TDSP формулируется следующим образом:

Time-Dependent Shortest-Path problem
Заданы: нестационарная сеть $G = (V, E)$ с условием FIFO, (s, d, t_s)-запрос.
Требуется: найти значение $\operatorname{dist}(s, d, t_s)$ и последовательность вершин, образующих кратчайший (s, d, t_s)-путь.

Задача TDSP всегда имеет решение, возможно, не единственное, если вершина d достижима из вершины s в графе G. Условие FIFO гарантирует справедливость неравенства (1), которое требуется для корректной работы алгоритма Дейкстры, а также его различных версий, включая алгоритмы A* и ALT [1]. В данной работе предполагается, что сеть является метрической, т. е. выполнено неравенство треугольника для весов дуг. Доказано, что неравенство треугольника, определённое через оптимистичные значения весов дуг, обеспечивает выполнимость свойств допустимости и преемственности потенциальных функций, необходимых для корректной работы алгоритма ALT.

Расстановка ориентиров в вершинах графа — фактор, существенно влияющий на значение потенциальных функций, а значит, и на быстродействие алгоритма A*, выполняющегося на второй фазе алгоритма ALT [2]. Задача оптимального выбора ориентиров в графе G заключается в определении числа ориентиров и мест их расстановки в вершинах этого графа. Данная задача носит комбинаторный характер и является труднорешаемой. Доказано, что даже в частном случае, когда число ориентиров фиксировано, эта задача NP-трудная [2]. Поэтому расстановку ориентиров обычно осуществляют с помощью эвристических алгоритмов. Экспериментально установлено разумное число ориентиров, которое обеспечивает эффективность алгоритма A* на больших графах, — от 9 до 16. С учётом данного факта задача выбора ориентиров сводится к более простой, но по-прежнему труднорешаемой задаче расстановки заданного числа K ориентиров в графе $G = (V, E)$ [2].

Предложена эвристика AdaHeuris по расстановке заданного числа ориентиров в вершинах графа, которая отличается от существующих и применяемых в ALT эвристик тем, что в ней текущий набор ориентиров корректируется на основе истории обработки запросов. Эвристика AdaHeuris позволяет значительно уменьшить время работы второй фазы алгоритма ALT и решать задачу TDSP для последовательности запросов, поступающих в режиме онлайн.

Показано, что разработанный алгоритм ALT находит точное решение задачи TDSP за время $O(|V|^2)$. Алгоритм проверен на реальных сетях, представленных в базе данных DIMACS http://www.dis.uniroma1.it/challenge9/. Результаты сравнения разработанного алгоритма с алгоритмом Дейкстры приведены в таблице, где C — коэффициент ускорения, определяемый как отношение времени работы сравниваемых между собой алгоритмов; T — среднее время выполнения одного запроса алгоритмом ALT. Достигнутые значения коэффициента ускорения оказались сопоставимы со значениями подобных коэффициентов, полученных в работе [4], в которой задача TDSP решается с помощью иерархического алгоритма. Иерархические алгоритмы — альтернативный подход ускорения алгоритма Дейкстры (по отношению к алгоритму ALT), в котором ускорение достигается за счёт разложения исходной сети на несколько уровней. Результаты экспериментов показали, что разработанный алгоритм ALT может быть использован для эффективного решения задачи TDSP на последовательности запросов, поступающих в режиме онлайн, наряду с другими подходами.

Результаты сравнения алгоритмов

Название графа	Параметры графа		C	T, с
	$\|V\|$	$\|E\|$		
$Rome99$	3353	8870	1,2	0,03622
AK	69082	156200	4,01	8,04443
VT	97975	215116	5,32	17,8026

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гимади Э. Х., Глебов Н. И.* Математические модели и методы принятия решений. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2008. 162 с.
2. *Goldberg A., Kaplan H., and Werneck R.* Better landmarks within reach // LNCS. 2007. V. 4525. P. 38–51.
3. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Книжный дом «Либроком», 2012. 390 с.
4. *Nejad M. M., Mashayekhy L., Chinnam R. B., and Phillips A.* Hierarchical time-dependent shortest path algorithms for vehicle routing under ITS // J. IIE Transactions. 2016. V. 48. No. 2. P. 158–169.