МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.718

ОЦЕНКИ НЕНАДЁЖНОСТИ СХЕМ В БАЗИСЕ РОССЕРА — ТУРКЕТТА (В P_3) ПРИ НЕИСПРАВНОСТЯХ ТИПА 0 НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

М. А. Алехина*, О. Ю. Барсукова**

**Пензенский государственный технологический университет, г. Пенза, Россия*
***Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия*

Рассматривается реализация функций трёхзначной логики схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе Россера — Туркетта. Предполагается, что базисные элементы подвержены неисправностям типа 0 на выходах, причём переходят в неисправные состояния независимо друг от друга с вероятностью ε ($0 < \varepsilon < 1/2$). Получены следующие результаты: 1) любую функцию трёхзначной логики можно реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически (при малых ε) не больше ε; 2) для любой функции, кроме константы 0 и переменной x_i ($i \in \mathbb{N}$), такая схема является асимптотически оптимальной по надёжности и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной ε при малых ε; 3) функции 0, x_i можно реализовать абсолютно надёжно.

Ключевые слова: *функции трёхзначной логики, схема из функциональных элементов, ненадёжность схемы, надёжность схемы, неисправности типа 0 на выходах элементов.*

DOI 10.17223/20710410/37/5

ESTIMATIONS OF UNRELIABILITY OF CIRCUITS IN ROSSER — TURKETT BASIS (IN P_3) WITH FAULTS OF TYPE 0 AT THE OUTPUTS OF GATES

M. A. Alekhina*, O. Yu. Barsukova**

**Penza State Technological University, Penza, Russia*
***Penza State University, Penza, Russia*

E-mail: alekhina.marina19@yandex.ru, kuzya_7@mail.ru

This work belongs to one of the most important branches of mathematical cybernetics such as the theory of the reliability of control systems. The synthesis problem for reliable control systems is one of the main problems in discrete mathematics and mathematical cybernetics. The topicality of the research in this field is due to the importance of numerous applications arising in various sections of science and technology. We consider the realization of ternary logic functions by circuits consisting

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 17-01-00451.

of unreliable functional elements in Rosser — Turkett basis. We assume that all the circuit elements are exposed to faults of type 0 at their outputs and pass to fault states independently with the probability ε ($\varepsilon < 1/2$). We have obtained the following results: 1) any function of ternary logic can be realized by a circuit with unreliability that is asymptotically not more than ε for small ε; 2) for any function except the constant 0 and the variable x_i ($i \in \mathbb{N}$), such a circuit has the asymptotically optimal reliability and operates with the unreliability asymptotically equal to ε for small ε; 3) the functions 0 and x_i can be realized absolutely reliably.

Keywords: *ternary logic functions, circuit from functional gates, unreliability of a circuit, reliability of a circuit, faults of type* 0.

Введение

Работа относится к одному из важнейших разделов математической кибернетики — теории синтеза, надёжности и сложности управляющих систем. Актуальность исследований в этой области обусловлена важностью многочисленных приложений, возникающих в различных разделах науки и техники.

К числу основных модельных объектов математической теории синтеза, сложности и надёжности управляющих систем относятся схемы из ненадёжных функциональных элементов, реализующие функции k-значной логики ($k \geqslant 2$). Проблема построения оптимальных по критериям надёжности и сложности схем из ненадёжных элементов является одной из наиболее важных и в то же время трудных в теории синтеза управляющих систем. Разработка специальных методов синтеза схем из ненадёжных функциональных элементов связана, главным образом, с выбранной математической моделью неисправностей. Одна из основных моделей определяется константными неисправностями на выходах или на входах элементов. В работе рассматривается задача построения асимптотически оптимальных по надёжности схем в предположении, что функциональные элементы подвержены неисправностям типа 0 на выходах элементов.

Исторически сложилось так, что сначала исследовались инверсные неисправности функциональных элементов, реализующих булевы функции. Первые существенные математические результаты, касающиеся синтеза надёжных схем из ненадёжных элементов, получил Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что элементы подвержены инверсным неисправностям, когда функциональный элемент E с приписанной ему булевой ($k = 2$) функцией $e(\tilde{x})$ в неисправном состоянии, в которое переходит с вероятностью ε ($0 < \varepsilon < 1/6$), реализует функцию $\overline{e}(\tilde{x})$. С помощью итерационного метода Дж. фон Неймана произвольную булеву функцию можно реализовать схемой, вероятность ошибки на выходе которой при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c \cdot \varepsilon$ (c — некоторая положительная, зависящая лишь от базиса, константа), т. е. ненадёжность схемы сравнима с ненадёжностью одного элемента (такие схемы в теории надёжности управляющих систем принято называть надёжными). С ростом числа итераций сложность схемы при использовании метода Дж. фон Неймана увеличивается экспоненциально.

Любой метод синтеза схем из ненадёжных элементов характеризуется двумя важными параметрами: вероятностью ошибки на выходе схемы (ненадёжностью) и сложностью схемы. Именно оптимизации сложности схем, реализующих булевы функции, уделялось главное внимание в работах Р. Л. Добрушина, С. И. Ортюкова [2, 3], Д. Улига [4] и некоторых других авторов. Задача построения асимптотически оптимальных по надёжности схем из ненадёжных элементов, подверженных тем или иным неисправностям, ни Дж. фон Нейманом, ни другими исследователями до появления работ М. А. Алехиной не рассматривалась.

Н. Пиппенджер [5] в классическом базисе $\{x_1\&x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x}_1\}$ построил надёжные схемы без существенного увеличения сложности в предположении, что все элементы схемы ненадёжны — подвержены инверсным неисправностям на выходах.

С. В. Яблонский [6] рассматривал задачу синтеза надёжных схем в базисе $\{x_1\&x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1, g(x_1, x_2, x_3)\}$. Он предполагал, что элемент, реализующий функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, абсолютно надёжный, а конъюнктор, дизъюнктор и инвертор — ненадёжные, подвержены произвольным неисправностям, ненадёжность каждого из них не больше ε. Доказано, что для любого ε существует алгоритм, который для каждой булевой функции строит асимптотически оптимальную по сложности схему, ненадёжность которой не больше ε.

В. В. Тарасов [7] решал задачу построения схем сколь угодно высокой надёжности (ненадёжность схемы стремится к 0). Для базисов из ненадёжных функциональных элементов с двумя входами и одним выходом найдены необходимые и достаточные условия, при которых любую булеву функцию можно реализовать схемой сколь угодно высокой надёжности.

Позднее в работах М. А. Алехиной, В. В. Чугуновой, А. В. Васина, С. М. Грабовской и некоторых других авторов решалась задача реализации булевых функций асимптотически оптимальными по надёжности схемами (неветвящимися программами) при различных неисправностях элементов.

Однако сложность решаемых задач, а следовательно, и технических устройств постоянно возрастает. Многозначная логика ($k \geqslant 3$) предоставляет более широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях, она позволяет уменьшить вычислительную сложность, размеры и число соединений в различных арифметико-логических устройствах, повысить плотность размещения элементов на схемах, найти альтернативные методы решения задач. Уже сейчас многозначная логика с успехом применяется при решении многих задач и во множестве технических разработок. Среди них различные арифметические устройства, системы искусственного интеллекта и обработки данных, обработка сложных цифровых сигналов и т. д.

В [8] описан функционально полный в P_3 базис, в котором на компромиссной основе согласованы математические и технические (МДП-техники) требования и интересы, а также рассмотрены некоторые аспекты синтеза электронных схем в этом базисе. В [9] построен функционально полный в P_4 базис, реализуемый в МОП-структурах. В [10 – 12] описаны свойства k-значных функций ($k \geqslant 3$), схемы которых можно использовать для повышения надёжности исходных схем, и изложены соответствующие методы синтеза.

Задача построения надёжных (в ряде базисов — асимптотически оптимальных по надёжности) схем при $k \geqslant 3$ решена в [10, 13 – 18] при инверсных неисправностях на выходах элементов. Константные неисправности на выходах элементов ранее не исследовались.

Цель этой работы — при $k = 3$ построить асимптотически оптимальные по надёжности схемы в базисе Россера — Туркетта при неисправностях типа 0 на выходах элементов.

1. Необходимые понятия и определения

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $E_3 = \{0, 1, 2\}$, P_3 — множество всех функций трёхзначной логики, т. е. функций $f(x_1, \ldots, x_n) : (E_3)^n \to E_3$. Рассмотрим реализацию функций из множества P_3 схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисе Россера — Туркетта $\{0, 1, 2, J_0(x_1), J_1(x_1), J_2(x_1), \min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\}\}$ ($\min\{x_1, x_2\}$ будем также обозначать через &, а $\max\{x_1, x_2\}$ — через $\vee$ [19, с. 46]).

Считаем, что схема из ненадёжных элементов реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ ($\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$), если при поступлении на её входы набора $\tilde{a}^n$ при отсутствии неисправностей в схеме на выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$.

Предполагаем, что элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε ($0 < \varepsilon < 1/2$) подвержены неисправностям типа 0 на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что на нулевых входных наборах функциональный элемент выдаёт правильное значение 0 с вероятностью 1, а на остальных наборах — значение 0 с вероятностью ε, а правильное значение — с вероятностью $1 - \varepsilon$.

Пусть схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, $\tilde{a}^n$ — произвольный входной набор схемы S, $f(\tilde{a}^n) = \tau$. Обозначим через $P_i(S, \tilde{a}^n)$ вероятность появления значения $i \in E_3$ на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$, а через $P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S, \tilde{a}^n)$ — вероятность появления ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$. Ясно, что $P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(S, \tilde{a}^n) = P_{\tau+1}(S, \tilde{a}^n) + P_{\tau+2}(S, \tilde{a}^n)$; в выражениях $\tau + 1$ и $\tau + 2$ сложение осуществляется по mod 3. Например, если $f(\tilde{a}^n) = 0$, то вероятность появления ошибки на этом наборе $P_{f(\tilde{a}^n)\neq 0}(S, \tilde{a}^n) = P_1(S, \tilde{a}^n) + P_2(S, \tilde{a}^n)$.

Ненадёжностью схемы S, реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$, будем называть число $P(S)$, равное наибольшей из вероятностей появления ошибки на выходе схемы S. *Надёжность* схемы S равна $1 - P(S)$.

Очевидно, что при неисправностях типа 0 на выходах элементов ненадёжность любого базисного элемента, кроме реализующего константу 0, равна ε, а надёжность — $1 - \varepsilon$. Элемент, реализующий константу 0, функционирует абсолютно надёжно. Ясно также, что функции x_i, $i \in \mathbb{N}$, можно реализовать абсолютно надёжно, не используя функциональных элементов.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где инфимум берётся по всем схемам S из ненадёжных элементов, реализующим функцию $f(\tilde{x}^n)$. Схему A, реализующую f, назовём *асимптотически оптимальной по надёжности*, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$.

2. Рекуррентное соотношение

Для построения схемы, повышающей надёжность исходных схем, будем использовать базисные элементы $E_\&$ с функцией & и $E_\vee$ с функцией $\vee$. Функционирование элемента $E_\&$ представлено в табл. 1.

Таблица 1

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$P_0(E_\&, \tilde{x}^2)$	$P_1(E_\&, \tilde{x}^2)$	$P_2(E_\&, \tilde{x}^2)$
0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	2	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	ε	$1-\varepsilon$	0
1	2	1	ε	$1-\varepsilon$	0
2	0	0	1	0	0
2	1	1	ε	$1-\varepsilon$	0
2	2	2	ε	0	$1-\varepsilon$

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная функция из P_3, зависящая от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и S — любая схема, реализующая $f(\tilde{x}^n)$. Возьмём два экземпляра схемы S и соединим их выходы со входами элемента E с функцией $e \in \{\&, \vee\}$. Построенную схему обозначим через D (рис. 1).

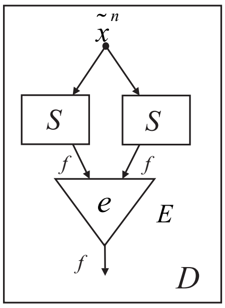

Рис. 1. Схема D

Лемма 1. Пусть $e = \&$. Тогда вероятности появления неверных значений на выходе схемы D при входном наборе $\tilde{a}^n$ удовлетворяют следующим неравенствам:

1) если $f(\tilde{a}^n) = 0$, то

$$P_1(D, \tilde{a}^n) \leqslant P_1^2(S, \tilde{a}^n) + 2P_1(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n), \quad P_2(D, \tilde{a}^n) \leqslant P_2^2(S, \tilde{a}^n);$$

2) если $f(\tilde{a}^n) = 1$, то

$$P_0(D, \tilde{a}^n) \leqslant \varepsilon + 2P_0(S, \tilde{a}^n), \quad P_2(D, \tilde{a}^n) \leqslant P_2^2(S, \tilde{a}^n);$$

3) если $f(\tilde{a}^n) = 2$, то

$$P_0(D, \tilde{a}^n) \leqslant \varepsilon + 2P_0(S, \tilde{a}^n), \quad P_1(D, \tilde{a}^n) \leqslant 2P_1(S, \tilde{a}^n).$$

Доказательство.

1) Пусть $f(\tilde{a}^n) = 0$. Тогда правильное значение на выходе схемы D равно 0. Вычислим вероятности появления 1 и 2 на выходе схемы D, используя формулу полной вероятности:

$$P_1(D, \tilde{a}^n) = P_0^2(S, \tilde{a}^n) \cdot 0 + 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_1(S, \tilde{a}^n) \cdot 0 + 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n) \cdot 0 + \\ + P_1^2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + 2P_1(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + P_2^2(S, \tilde{a}^n) \cdot 0,$$

т. е. получаем

$$P_1(D, \tilde{a}^n) = P_1^2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + 2P_1(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) \leqslant P_1^2(S, \tilde{a}^n) + 2P_1(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n),$$

$$P_2(D, \tilde{a}^n) = P_0^2(S, \tilde{a}^n) \cdot 0 + 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_1(S, \tilde{a}^n) \cdot 0 + 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n) \cdot 0 + \\ + P_1^2(S, \tilde{a}^n) \cdot 0 + 2P_1(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n) \cdot 0 + P_2^2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon),$$

т. е. $P_2(D, \tilde{a}^n) = P_2^2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) \leqslant P_2^2(S, \tilde{a}^n)$.

2) Пусть $f(\tilde{a}^n) = 1$, тогда правильное значение на выходе схемы D равно 1. Вычислим вероятности появления 0 и 2 на выходе схемы D:

$$P_0(D, \tilde{a}^n) = P_0^2(S, \tilde{a}^n) \cdot 1 + 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_1(S, \tilde{a}^n) \cdot 1 + 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n) \cdot 1 + \\ + P_1^2(S, \tilde{a}^n)\varepsilon + 2P_1(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n)\varepsilon + P_2^2(S, \tilde{a}^n)\varepsilon.$$

Принимая во внимание, что $P_1(S,\tilde{a}^n) = 1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_2(S,\tilde{a}^n)$, получим

$$P_0(D,\tilde{a}^n) = P_0^2(S,\tilde{a}^n) + 2P_0(S,\tilde{a}^n)(1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_2(S,\tilde{a}^n)) + 2P_0(S,\tilde{a}^n)P_2(S,\tilde{a}^n) +$$
$$+(1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_2(S,\tilde{a}^n))^2\varepsilon + 2(1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_2(S,\tilde{a}^n))P_2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon + P_2^2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon =$$
$$= 2P_0(S,\tilde{a}^n) - P_0^2(S,\tilde{a}^n) + \varepsilon - 2\varepsilon P_0(S,\tilde{a}^n) + P_0^2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon \leqslant \varepsilon + 2P_0(S,\tilde{a}^n),$$

$$P_2(D,\tilde{a}^n) = P_0^2(S,\tilde{a}^n)\cdot 0 + 2P_0(S,\tilde{a}^n)P_1(S,\tilde{a}^n)\cdot 0 + 2P_0(S,\tilde{a}^n)P_2(S,\tilde{a}^n)\cdot 0 + P_1^2(S,\tilde{a}^n)\cdot 0 +$$
$$+2P_1(S,\tilde{a}^n)P_2(S,\tilde{a}^n)\cdot 0 + P_2^2(S,\tilde{a}^n)(1-\varepsilon),$$

т. е. получаем $P_2(D,\tilde{a}^n) = P_2^2(S,\tilde{a}^n)(1-\varepsilon) \leqslant P_2^2(S,\tilde{a}^n)$.

3) Пусть $f(\tilde{a}^n) = 2$, тогда правильное значение на выходе схемы D равно 2. Вычислим вероятности появления 0 и 1 на выходе схемы D:

$$P_0(D,\tilde{a}^n) = P_0^2(S,\tilde{a}^n)\cdot 1 + 2P_0(S,\tilde{a}^n)P_1(S,\tilde{a}^n)\cdot 1 + 2P_0(S,\tilde{a}^n)P_2(S,\tilde{a}^n)\cdot 1 + P_1^2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon +$$
$$+2P_1(S,\tilde{a}^n)P_2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon + P_2^2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon.$$

Учитывая, что $P_2(S,\tilde{a}^n) = 1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_1(S,\tilde{a}^n)$, получаем

$$P_0(D,\tilde{a}^n) = P_0^2(S,\tilde{a}^n) + 2P_0(S,\tilde{a}^n)P_1(S,\tilde{a}^n) + 2P_0(S,\tilde{a}^n)(1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_1(S,\tilde{a}^n)) +$$
$$+P_1^2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon + 2P_1(S,\tilde{a}^n)(1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_1(S,\tilde{a}^n))\varepsilon + (1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_1(S,\tilde{a}^n))^2\varepsilon =$$
$$= \varepsilon + 2P_0(S,\tilde{a}^n) + \varepsilon P_0^2(S,\tilde{a}^n) - P_0^2(S,\tilde{a}^n) - 2\varepsilon P_0(S,\tilde{a}^n) \leqslant \varepsilon + 2P_0(S,\tilde{a}^n).$$

В силу равенств $P_1(D,\tilde{a}^n) = P_1^2(S,\tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + 2P_1(S,\tilde{a}^n)P_2(S,\tilde{a}^n)(1-\varepsilon)$ и $P_2(S,\tilde{a}^n) = 1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_1(S,\tilde{a}^n)$ получаем

$$P_1(D,\tilde{a}^n) = P_1^2(S,\tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + 2P_1(S,\tilde{a}^n)(1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_1(S,\tilde{a}^n))(1-\varepsilon) =$$
$$= 2P_1(S,\tilde{a}^n) + {P_1}^2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon - {P_1}^2(S,\tilde{a}^n) + 2P_1(S,\tilde{a}^n)P_0(S,\tilde{a}^n)\varepsilon - 2P_1(S,\tilde{a}^n)P_0(S,\tilde{a}^n) -$$
$$-2P_1(S,\tilde{a}^n)\varepsilon \leqslant 2P_1(S,\tilde{a}^n).$$

Лемма 1 доказана. ■

Функционирование базисного элемента $E_\vee$ представлено в табл. 2.

Таблица 2

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$P_0(E_\vee,\tilde{x}^2)$	$P_1(E_\vee,\tilde{x}^2)$	$P_2(E_\vee,\tilde{x}^2)$
0	0	0	1	0	0
0	1	1	ε	$1-\varepsilon$	0
0	2	2	ε	0	$1-\varepsilon$
1	0	1	ε	$1-\varepsilon$	0
1	1	1	ε	$1-\varepsilon$	0
1	2	2	ε	0	$1-\varepsilon$
2	0	2	ε	0	$1-\varepsilon$
2	1	2	ε	0	$1-\varepsilon$
2	2	2	ε	0	$1-\varepsilon$

Лемма 2. Пусть $e = \vee$. Тогда вероятности появления неверных значений на выходе схемы D (см. рис. 1) при входном наборе $\tilde{a}^n$ удовлетворяют следующим неравенствам:

1) если $f(\tilde{a}^n) = 0$, то

$$P_1(D, \tilde{a}^n) \leqslant 2P_1(S, \tilde{a}^n), \quad P_2(D, \tilde{a}^n) \leqslant 2P_2(S, \tilde{a}^n);$$

2) если $f(\tilde{a}^n) = 1$, то

$$P_0(D, \tilde{a}^n) \leqslant \varepsilon + P_0^2(S, \tilde{a}^n), \quad P_2(D, \tilde{a}^n) \leqslant 2P_2(S, \tilde{a}^n);$$

3) если $f(\tilde{a}^n) = 2$, то

$$P_0(D, \tilde{a}^n) \leqslant \varepsilon + P_0^2(S, \tilde{a}^n), \quad P_1(D, \tilde{a}^n) \leqslant P_1^2(S, \tilde{a}^n) + 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_1(S, \tilde{a}^n).$$

Доказательство.

1) Пусть $f(\tilde{a}^n) = 0$. Тогда правильное значение на выходе схемы D равно 0. Вычислим вероятности появления 1 и 2 на выходе схемы D, используя формулу полной вероятности:

$$P_1(D, \tilde{a}^n) = 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_1(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + P_1^2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon).$$

Поскольку $P_0(S, \tilde{a}^n) = 1 - P_1(S, \tilde{a}^n) - P_2(S, \tilde{a}^n)$, получаем

$$\begin{gathered} P_1(D, \tilde{a}^n) = 2(1 - P_1(S, \tilde{a}^n) - P_2(S, \tilde{a}^n))P_1(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + P_1^2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) = \\ = 2P_1(S, \tilde{a}^n) - 2\varepsilon P_1(S, \tilde{a}^n) - P_1^2(S, \tilde{a}^n) + P_1^2(S, \tilde{a}^n)\varepsilon - 2P_1(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n) + \\ + 2\varepsilon P_1(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n) \leqslant 2P_1(S, \tilde{a}^n), \end{gathered}$$

$$P_2(D, \tilde{a}^n) = 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + 2P_1(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + P_2^2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon).$$

Учитывая, что $P_0(S, \tilde{a}^n) = 1 - P_1(S, \tilde{a}^n) - P_2(S, \tilde{a}^n)$, получаем

$$\begin{gathered} P_2(D, \tilde{a}^n) = 2(1 - P_1(S, \tilde{a}^n) - P_2(S, \tilde{a}^n))P_2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + 2P_1(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + \\ + P_2^2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) = 2P_2(S, \tilde{a}^n) - 2P_2(S, \tilde{a}^n)\varepsilon - P_2^2(S, \tilde{a}^n) + P_2^2(S, \tilde{a}^n)\varepsilon \leqslant 2P_2(S, \tilde{a}^n). \end{gathered}$$

2) Пусть $f(\tilde{a}^n) = 1$, тогда правильное значение на выходе схемы D равно 1. Вычислим вероятности появления 0 и 2 на выходе схемы D:

$$\begin{gathered} P_0(D, \tilde{a}^n) = P_0^2(S, \tilde{a}^n) + 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_1(S, \tilde{a}^n)\varepsilon + 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n)\varepsilon + P_1^2(S, \tilde{a}^n)\varepsilon + \\ + 2P_1(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n)\varepsilon + P_2^2(S, \tilde{a}^n)\varepsilon. \end{gathered}$$

Принимая во внимание, что $P_1(S, \tilde{a}^n) = 1 - P_0(S, \tilde{a}^n) - P_2(S, \tilde{a}^n)$, получаем

$$\begin{gathered} P_0(D, \tilde{a}^n) = P_0^2(S, \tilde{a}^n) + 2P_0(S, \tilde{a}^n)(1 - P_0(S, \tilde{a}^n) - P_2(S, \tilde{a}^n))\varepsilon + 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n)\varepsilon + \\ + (1 - P_0(S, \tilde{a}^n) - P_2(S, \tilde{a}^n))^2\varepsilon + 2(1 - P_0(S, \tilde{a}^n) - P_2(S, \tilde{a}^n))P_2(S, \tilde{a}^n)\varepsilon + P_2^2(S, \tilde{a}^n)\varepsilon = \\ = P_0^2(S, \tilde{a}^n) - \varepsilon {P_0}^2(S, \tilde{a}^n) + \varepsilon \leqslant \varepsilon + P_0^2(S, \tilde{a}^n), \end{gathered}$$

$$P_2(D, \tilde{a}^n) = 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + 2P_1(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + P_2^2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon).$$

Поскольку $P_1(S, \tilde{a}^n) = 1 - P_0(S, \tilde{a}^n) - P_2(S, \tilde{a}^n)$, получаем

$$\begin{gathered} P_2(D, \tilde{a}^n) = 2P_0(S, \tilde{a}^n)P_2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + 2(1 - P_0(S, \tilde{a}^n) - P_2(S, \tilde{a}^n))P_2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + \\ + P_2^2(S, \tilde{a}^n)(1-\varepsilon) = 2P_2(S, \tilde{a}^n) - P_2^2(S, \tilde{a}^n) + \varepsilon P_2^2(S, \tilde{a}^n) - 2\varepsilon P_2(S, \tilde{a}^n) \leqslant 2P_2(S, \tilde{a}^n). \end{gathered}$$

3) Пусть $f(\tilde{a}^n) = 2$, тогда правильное значение на выходе схемы D равно 2. Вычислим вероятности появления 0 и 1 на выходе схемы D:

$$P_0(D,\tilde{a}^n) = P_0^2(S,\tilde{a}^n) + 2P_0(S,\tilde{a}^n)P_1(S,\tilde{a}^n)\varepsilon + 2P_0(S,\tilde{a}^n)P_2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon + P_1^2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon + \\ + 2P_1(S,\tilde{a}^n)P_2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon + P_2^2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon.$$

Учитывая, что $P_2(S,\tilde{a}^n) = 1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_1(S,\tilde{a}^n)$, получаем

$$P_0(D,\tilde{a}^n) = P_0^2(S,\tilde{a}^n) + 2P_0(S,\tilde{a}^n)P_1(S,\tilde{a}^n)\varepsilon + 2P_0(S,\tilde{a}^n)(1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_1(S,\tilde{a}^n))\varepsilon + \\ + P_1^2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon + 2P_1(S,\tilde{a}^n)(1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_1(S,\tilde{a}^n))\varepsilon + (1 - P_0(S,\tilde{a}^n) - P_1(S,\tilde{a}^n))^2\varepsilon = \\ = \varepsilon + P_0^2(S,\tilde{a}^n) - P_0^2(S,\tilde{a}^n)\varepsilon \leqslant \varepsilon + P_0^2(S,\tilde{a}^n),$$

$$P_1(D,\tilde{a}^n) = 2P_0(S,\tilde{a}^n)P_1(S,\tilde{a}^n)(1-\varepsilon) + P_1^2(S,\tilde{a}^n)(1-\varepsilon) \leqslant 2P_0(S,\tilde{a}^n)P_1(S,\tilde{a}^n) + P_1^2(S,\tilde{a}^n).$$

Лемма 2 доказана. ■

Пусть f — произвольная функция из P_3, а S — любая схема, реализующая её. Покажем, каким образом по схеме S построить новую схему, которая реализует ту же функцию f, но, возможно (при некоторых условиях на $P(S)$), более надёжно. Для этого возьмём четыре экземпляра схемы S, два элемента $E_\&$, один элемент $E_\vee$ и построим схему $\psi(S)$, как показано на рис. 2.

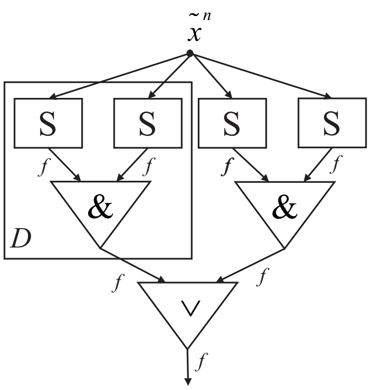

Рис. 2. Схема $\psi(S)$

В теореме 1 найдено рекуррентное соотношение для ненадёжностей схем S и $\psi(S)$.

Теорема 1. Пусть f — произвольная функция из P_3, S — любая схема, реализующая f, а $P(S)$ — ненадёжность схемы S. Тогда схема $\psi(S)$ (рис. 2) реализует функцию f с ненадёжностью

$$P(\psi(S)) \leqslant \varepsilon + (\varepsilon + 2P(S))^2. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция. Без ограничения общности можно считать, что f зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Найдём вероятности ошибок на выходе схемы $\psi(S)$ при всех возможных входных наборах $\tilde{a}^n$ схемы S.

1) Пусть входной набор $\tilde{a}^n$ схемы S такой, что $f(\tilde{a}^n) = 0$. Правильное значение на выходе схемы $\psi(S)$ равно 0. Используя результаты леммы 2, найдём вероятности появления 1 и 2 на выходе схемы $\psi(S)$:

$$P_1(\psi,\tilde{a}^n) \leqslant 2P_1(D,\tilde{a}^n), \quad P_2(\psi,\tilde{a}^n) \leqslant 2P_2(D,\tilde{a}^n).$$

Таким образом,

$$P_{f(\tilde{a}^n)\neq 0}(\psi(S),\tilde{a}^n) = P_1(\psi(S),\tilde{a}^n) + P_2(\psi(S),\tilde{a}^n) \leqslant 2(P_1(D,\tilde{a}^n) + P_2(D,\tilde{a}^n)).$$

Подставив значения для $P_1(D,\tilde{a}^n)$ и $P_2(D,\tilde{a}^n)$ из леммы 1 в случае, когда $f(\tilde{a}^n)=0$, и учитывая, что $P_1(S,\tilde{a}^n)+P_2(S,\tilde{a}^n)\leqslant P(S)$, получим

$$P_{f(\tilde{a}^n)\neq 0}(\psi(S),\tilde{a}^n) \leqslant 2(P_1^2(S,\tilde{a}^n) + 2P_1(S,\tilde{a}^n)P_2(S,\tilde{a}^n) + P_2^2(S,\tilde{a}^n)) = \\ = 2(P_1(S,\tilde{a}^n)+P_2(S,\tilde{a}^n))^2 \leqslant 2P^2(S).$$

2) Пусть входной набор $\tilde{a}^n$ схемы S такой, что $f(\tilde{a}^n)=1$. Правильное значение на выходе схемы $\psi(S)$ равно 1. Используя результаты леммы 2, найдём вероятности появления 0 и 2 на выходе схемы $\psi(S)$:

$$P_0(\psi(S),\tilde{a}^n) \leqslant \varepsilon + P_0^2(D,\tilde{a}^n), \quad P_2(\psi(S),\tilde{a}^n) \leqslant 2P_2(D,\tilde{a}^n).$$

Подставив значения для $P_0(D,\tilde{a}^n)$ и $P_2(D,\tilde{a}^n)$ из леммы 1 в случае, когда $f(\tilde{a}^n)=1$, получим $P_0(\psi(S),\tilde{a}^n)\leqslant\varepsilon+(\varepsilon+2P_0(S,\tilde{a}^n))^2$, $P_2(\psi(S),\tilde{a}^n)\leqslant 2P_2^2(S,\tilde{a}^n)$. Найдём вероятность ошибки на выходе схемы $\psi(S)$:

$$P_{f(\tilde{a}^n)\neq 1}(\psi(S),\tilde{a}^n) = \varepsilon + (\varepsilon + 2P_0(S,\tilde{a}^n))^2 + 2P_2^2(S,\tilde{a}^n) \leqslant \varepsilon + 2P_2^2(S,\tilde{a}^n) + 4P_0^2(S,\tilde{a}^n) + \\ + 4\varepsilon P_0(S,\tilde{a}^n) + \varepsilon^2 \leqslant \varepsilon + 4P^2(S) + 4\varepsilon P(S) + \varepsilon^2 \leqslant \varepsilon + (\varepsilon + 2P(S))^2$$

(поскольку верно неравенство $P_0(S,\tilde{a}^n)+P_2(S,\tilde{a}^n)\leqslant P(S)$).

3) Пусть входной набор $\tilde{a}^n$ схемы S такой, что $f(\tilde{a}^n)=2$. Правильное значение на выходе схемы $\psi(S)$ равно 2. Используя результаты леммы 2, найдём вероятности появления 0 и 2 на выходе схемы $\psi(S)$:

$$P_0(\psi(S),\tilde{a}^n) \leqslant \varepsilon + P_0^2(D,\tilde{a}^n), \quad P_1(\psi(S),\tilde{a}^n) \leqslant P_1^2(D,\tilde{a}^n) + 2P_0(D,\tilde{a}^n)P_1(D,\tilde{a}^n).$$

Тогда вероятность ошибки на выходе схемы $\psi(S)$

$$P_{f(\tilde{a}^n)\neq 2}(\psi(S),\tilde{a}^n) = P_0(\psi(S),\tilde{a}^n) + P_1(\psi(S),\tilde{a}^n) \leqslant \varepsilon + [P_0(D,\tilde{a}^n) + P_1(D,\tilde{a}^n)]^2.$$

Подставив значения для $P_0(D,\tilde{a}^n)$ и $P_1(D,\tilde{a}^n)$ из леммы 1 в случае, когда $f(\tilde{a}^n)=2$, и учитывая, что $P_0(S,\tilde{a}^n)+P_1(S,\tilde{a}^n)\leqslant P(S)$, получим

$$P_{f(\tilde{a}^n)\neq 2}(\psi(S),\tilde{a}^n) \leqslant \varepsilon + (\varepsilon + 2(P_0(S,\tilde{a}^n) + P_1(S,\tilde{a}^n)))^2 \leqslant \varepsilon + (\varepsilon + 2P(S))^2.$$

Поскольку $P(S) = \max\limits_{\tilde{a}^n, f(\tilde{a}^n)=\tau}\{P_{f(\tilde{a}^n)\neq\tau}(\psi(S),\tilde{a}^n)\}$, имеем

$$P(\psi(S)) \leqslant \max\{2P^2(S), \varepsilon + (\varepsilon + 2P(S))^2\} \leqslant \varepsilon + (\varepsilon + 2P(S))^2.$$

Теорема 1 доказана. ■

Используя теорему 1, докажем верхнюю оценку ненадёжности схемы, построенной из элементов, подверженных неисправностям типа 0 на выходах.

3. Верхняя оценка ненадёжности схем

Теорема 2. Любую функцию $f \in P_3$ можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant 3\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

Доказательство. Индукция по n — числу переменных функции $f(\tilde{x}^n)$.

1. Докажем утверждение для $n = 1$, т. е. для всех возможных функций $f(x)$, зависящих от одной переменной x. Разложим функцию $f(x)$ по переменной x [19, с. 47]:

$$f(x) = J_0(x) \& f(0) \vee J_1(x) \& f(1) \vee J_2(x) \& f(2).$$

Чтобы промоделировать эту формулу схемой (обозначим её S'), достаточно 11 элементов. Поэтому ненадёжность $P(S')$ схемы S' удовлетворяет неравенству $P(S') \leqslant 11\varepsilon$.

По схеме S' построим схему $\psi(S')$, как показано на рис. 2. Используя соотношение (1) из теоремы 1 и условие $\varepsilon \leqslant 1/300$, оценим ненадёжность схемы $\psi(S')$:

$$P(\psi(S')) \leqslant \varepsilon + (2 \cdot 11\varepsilon + \varepsilon)^2 = \varepsilon + 529\varepsilon^2 \leqslant \varepsilon + \frac{529}{300}\varepsilon \leqslant 3\varepsilon.$$

Следовательно, $\psi(S')$ — искомая схема S. Для $n = 1$ теорема верна.

2. Пусть утверждение верно для функций $f(\tilde{x}^{n-1})$ с числом переменных $n - 1$. Докажем, что оно верно для функций $f(\tilde{x}^n)$. Разложим функцию $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ по переменной x_n:

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = J_0(x_n) \& f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \vee$$
$$\vee J_1(x_n) \& f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee J_2(x_n) \& f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 2).$$

Используя это разложение, построим схему C (рис. 3), реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$, причём S_0 — схема, реализующая функцию $f_0 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, S_1 — схема, реализующая функцию $f_1 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$, а S_2 — схема, реализующая функцию $f_2 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 2)$.

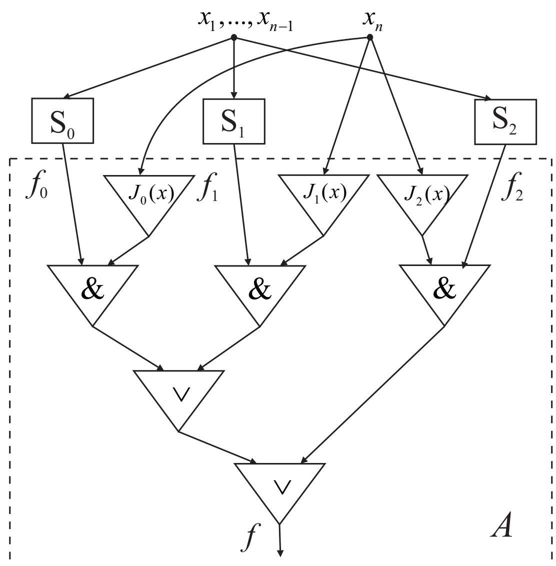

Рис. 3. Схема C

В схеме C выделим подсхему A, состоящую из восьми элементов, выход которой является выходом схемы C, а на входы подаются значения x_n, $f_0 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, $f_1 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ и $f_2 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 2)$.

Подсхема A состоит из восьми элементов, поэтому её ненадёжность $P(S) \leqslant 8\varepsilon$. Функции $f_0 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, $f_1 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ и $f_2 = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 2)$ по индуктивному предположению можно реализовать такими схемами S_0, S_1 и S_2, что ненадёжность каждой из них не больше 3ε. Если схема A исправна, то для реализации f она использует значение одной из схем, реализующих функции f_0, f_1 и f_2. Поэтому $P(C) \leqslant P(A) + 3\varepsilon \leqslant 8\varepsilon + 3\varepsilon = 11\varepsilon$.

По схеме C построим схему $\psi(C)$ (см. рис. 2). Воспользуемся соотношением (1) и оценим ненадёжность схемы $\psi(C)$, учитывая, что $\varepsilon \leqslant 1/300$:

$$P(\psi(C)) \leqslant \varepsilon + (2 \cdot 11\varepsilon + \varepsilon)^2 = \varepsilon + 529\varepsilon^2 \leqslant \varepsilon + \frac{529}{300}\varepsilon \leqslant 3\varepsilon.$$

Следовательно, схема $\psi(C)$ — искомая схема S. Теорема 2 доказана. ■

Теорема 3. Любую функцию $f \in P_3$ можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant \varepsilon + 12\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

Доказательство. По теореме 2 любую функцию f можно реализовать схемой D с ненадёжностью $P(D) \leqslant 3\varepsilon$. По схеме D построим схему $\psi(D)$ (см. рис. 2) и оценим её ненадёжность по формуле (1) из теоремы 1:

$$P(\psi(D)) \leqslant \varepsilon + (2 \cdot 3\varepsilon + \varepsilon)^2 = \varepsilon + 49\varepsilon^2 \leqslant 1,17\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0, 1/300]$. По схеме $\psi(D)$ построим схему $\psi^2(D)$ и оценим её ненадёжность по формуле (1) из теоремы 1: $P(\psi^2(D)) \leqslant \varepsilon + (\varepsilon + 2,34\varepsilon)^2 \leqslant \varepsilon + 12\varepsilon^2$. Схема $\psi^2(D)$ — искомая схема S. ■

Из теоремы 3 следует, что любую функцию из P_3 можно реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не больше ε.

4. Нижняя оценка ненадёжности схем

Пусть $K(n)$ — множество функций трёхзначной логики, каждая из которых зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 1)$, отлична от константы 0 и функций $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K(n)$. Очевидно, что $|K(n)| = 3^{3^n} - n - 1$, а значит, класс $K(n)$ содержит почти все функции из множества $P_3(n)$ $\Big($поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{3^n} - n - 1}{3^{3^n}} = 1\Big)$.

Справедлива теорема 4 о нижней оценке ненадёжности схем, каждая из которых реализует функцию из класса K.

Теорема 4. Пусть функция $f \in K$. Тогда для любой схемы S, реализующей f, верно неравенство $P(S) \geqslant \varepsilon$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что функция $f \in K(n)$, пусть S — любая схема, реализующая f. Заметим, что схема S содержит хотя бы один элемент. Пусть E — функциональный элемент схемы S, выход которого является выходом схемы.

Поскольку $f \not\equiv 0$, найдутся такие значение $i \in E_3 \setminus \{0\}$ и входной набор $\tilde{a}^n$, что $f(\tilde{a}^n) = i$. Вычислим вероятность $P_0(S, \tilde{a}^n)$ появления значения 0 на выходе схемы S на наборе $\tilde{a}^n$, обозначив через p_0 вероятность появления нулевого набора на входах элемента E: $P_0(S, \tilde{a}^n) = p_0 + (1 - p_0)\varepsilon = \varepsilon + p_0(1 - \varepsilon) \geqslant \varepsilon$. ■

Из теоремы 4 следует, что ненадёжность любой схемы, реализующей функцию $f \in K$, не меньше ε. Это означает, что схема, реализующая функцию $f \in K$ и удовлетворяющая условиям теоремы 3, является асимптотически оптимальной по надёжности и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$.

Напомним, что функции 0, x_i ($i \in \mathbb{N}$) (и именно эти функции не содержатся в классе K) можно реализовать абсолютно надёжно.

Заключение

В базисе Россера — Туркетта (в P_3) при неисправностях типа 0 на выходах элементов:

1) любую функцию трёхзначной логики можно реализовать схемой, ненадёжность которой асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) не больше ε;

2) для любой функции $f \in K$ такая схема является асимптотически оптимальной по надёжности и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$;

3) функции $f \notin K$ (т. е. функции 0, x_i ($i \in \mathbb{N}$)) можно реализовать абсолютно надёжно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Von Neuman J.* Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata Studies / eds. C. Shannon and J. McCarthy. Princeton University Press, 1956. P. 43–98. (Русс. пер.: Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 68–139.)
2. *Добрушин Р. Л., Ортюков С. И.* Верхняя оценка для избыточности самокорректирующихся схем из ненадежных функциональных элементов // Пробл. передачи информ. 1977. Т. 13. № 3. С. 56–76.
3. *Ортюков С. И.* Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов // Труды семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 27–29 января 1987 г.). М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 166–168.
4. *Uhlig D.* Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity // LNCS. 1987. V. 278. P. 462–469.
5. *Pippenger N.* On networks of noisy gates // 26th Ann. Symp. Foundations of Computer Science. Portland, 21–23 Oct. 1985. P. 30–38.
6. *Яблонский С. В.* Асимптотически наилучший метод синтеза надежных схем из ненадежных элементов // Banach Center Publ. 1982. V. 7. No. 1. P. 11–19.
7. *Тарасов В. В.* К синтезу надежных схем из ненадежных элементов // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 3. С. 391–400.
8. *Виноградов Ю. А.* О синтезе трехзначных МДП-схем // Математические вопросы кибернетики. 1991. Вып. 3. С. 187–198.
9. *Виноградов Ю. А.* О синтезе четырехзначных квазикомплементарных МОП-схем // Математические вопросы кибернетики. 1999. Вып. 8. С. 298–300.
10. *Барсукова О. Ю.* Синтез надежных схем, реализующих функции двузначной и трехзначной логик: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пенза, 2014. 87 с.
11. *Алехина М. А., Каргин С. П.* О синтезе схем из ненадежных элементов в P_4 // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2014. № 4 (32). С. 47–56.
12. *Алехина М. А.* Синтез схем из ненадежных элементов в P_k // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2015. № 3. С. 8–10.
13. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* О надежности схем, реализующих функции из P_3 // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. № 1 (21). С. 57–65.

14. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Оценки ненадежности схем в базисе Россера — Туркетта // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2014. № 1 (29). С. 5–19.
15. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Ненадёжность схем в базисе Россера — Туркетта // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. № 7. С. 109–110.
16. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* О надежности схем, реализующих функции трехзначной логики // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2014. Т. 21. № 4 (118). С. 12–24.
17. *Алехина М. А., Каргин С. П.* Асимптотически оптимальные по надежности схемы в базисе Россера — Туркетта в P_4 // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2015. № 1. С. 37–53.
18. *Алехина М. А., Барсукова О. Ю.* Нижняя оценка ненадёжности схем в базисе, состоящем из функции Вебба // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2015. № 8. С. 102–103.
19. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Высш. шк., 2001. 384 с.

REFERENCES

1. *Von Neuman J.* Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components. Automata Studies. Eds. C. Shannon and J. McCarthy. Princeton University Press, 1956, pp. 43–98.
2. *Dobrushin R. L. and Ortyukov S. I.* Upper bound on the redundancy of self-correcting arrangements of unreliable functional elements. Problems Inform. Transmission, 1977, vol. 13, iss. 3, pp. 203–218.
3. *Ortyukov S. I.* Ob izbytochnosti realizatsii bulevykh funktsiy skhemami iz nenadezhnykh elementov [On the redundancy of the Boolean functions implementation by circuits from unreliable elements]. Proc. Seminar on Discr. Math. and its Appl. (Moscow, 27–29 Jan. 1987). Moscow, MSU Publ., 1989, pp. 166–168. (in Russian)
4. *Uhlig D.* Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity. LNCS, 1987, vol. 278, pp. 462–469.
5. *Pippenger N.* On networks of noisy gates. 26th Ann. Symp. Foundations of Computer Science, Portland, 21–23 Oct. 1985, pp. 30–38.
6. *Yablonskiy C. V.* Asimptoticheski nailuchshiy metod sinteza nadezhnykh skhem iz nenadezhnykh elementov [Asymptotically best method for synthesizing reliable circuits from unreliable elements]. Banach Center Publ., 1982, vol. 7, no. 1, pp. 11–19. (in Russian)
7. *Tarasov V. V.* The synthesis of reliable circuits from unreliable elements. Math. Notes, 1976, vol. 20, iss. 3, pp. 775–780.
8. *Vinogradov Yu. A.* O sinteze trekhznachnykh MDP-skhem [On the synthesis of three-valued MDS-circuits]. Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, 1991, iss. 3, pp. 187–198. (in Russian)
9. *Vinogradov Yu. A.* O sinteze chetyrekhznachnykh kvazikomplementarnykh MOP-skhem [On the synthesis of four-valued quasicomplementary MOSFETs]. Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, 1999, iss. 8, pp. 298–300. (in Russian)
10. *Barsukova O. Yu.* Sintez nadezhnykh skhem, realizuyushchikh funktsii dvuznachnoy i trekhznachnoy logik [Synthesis of reliable schemes realizing the functions of two-valued and three-valued logics]. PhD Thesis, Penza, 2014. 87 p. (in Russian)
11. *Alekhina M. A. and Kargin S. P.* O sinteze skhem iz nenadezhnykh elementov v P_4 [On synthesis of unreliable element circuits in P_4]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Povolzhskiy Region. Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2014, no. 4 (32), pp. 47–56. (in Russian)
12. *Alekhina M. A.* Sintez skhem iz nenadezhnykh elementov v P_k [Synthesis of circuits containing unreliable gates in P_k]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Povolzhskiy Region. Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2015, no. 3, pp. 8–10. (in Russian)

13. *Alekhina M. A. and Barsukova O. Yu.* O nadezhnosti skhem, realizuyushchikh funktsii iz P_3 [On the reliability of circuits realizing functions from P_3]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Povolzhskiy Region. Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2012, no. 1 (21), pp. 57–65. (in Russian)
14. *Alekhina M. A. and Barsukova O. Yu.* Otsenki nenadezhnosti skhem v bazise Rossera — Turketta [Circuit failure estimate in the Rosser — Turkett basis]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Povolzhskiy Region. Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2014, no. 1 (29), pp. 5–19. (in Russian)
15. *Alekhina M. A. and Barsukova O. Yu.* Nenadezhnost' skhem v bazise Rossera — Turketta [Unreliability of circuits in the basis by Rosser — Turkett]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika. Prilozhenie, 2014, no. 7, pp. 109–110. (in Russian)
16. *Alekhina M. A. and Barsukova O. Yu.* O nadezhnosti skhem, realizuyushchikh funktsii trekhznachnoy logiki [On reliability of circuits realizing ternary logic functions]. Diskretn. Anal. Issled. Oper., 2014, vol. 21, no. 4, pp. 12–24. (in Russian)
17. *Alekhina M. A. and Kargin S. P.* Asimptoticheski optimal'nye po nadezhnosti skhemy v bazise Rossera — Turketta v P_4 [Asymptotic reliability-optimal circuits in the Rosser — Turkett basis in P_4]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Povolzhskiy Region. Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2015, no. 1, pp. 37–53. (in Russian)
18. *Alekhina M. A. and Barsukova O. Yu.* Nizhnyaya otsenka nenadezhnosti skhem v bazise, sostoyashchem iz funktsii Vebba [A lower bound for unreliability of circuits in the Webb basis]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika. Prilozhenie, 2015, no. 8, pp. 102–103. (in Russian)
19. *Yablonskiy S. V.* Vvedenie v diskretnuyu matematiku [Introduction to Discrete Mathematics]. Moscow, Vyssh. Shk., 2001. 384 p. (in Russian)