ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2017 Управление, вычислительная техника и информатика № 40

УДК 517.977.56
DOI: 10.17223/19988605/40/2

К.Б. Мансимов, Ш.М. Расулова

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ТИПА А.И. МОСКАЛЕНКО

Рассматривается задача оптимального управления для модели объекта, описываемого совокупностью двух дифференциальных уравнений, связанных друг с другом по независимым переменным и начальным условиям. Доказан соответствующий аналог принципа максимума Понтрягина, рассмотрен случай его вырождения.
Ключевые слова: условие максимума Понтрягина; особый случай; необходимое условие оптимальности; задача оптимального управления с распределенными параметрами.

В работах [1, 2] А.И. Москаленко исследованы задачи оптимального управления, занимающих некоторое промежуточное положение между задачами оптимального управления сосредоточенными и распределенными параметрами.

В настоящей статье изучается задача типа А.И. Москаленко [1], причем в отличие от этой работы критерий качества является многоточечным. Получены необходимые условия оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Понтрягина и изучен случай вырождения условий (особое управление).

1. Постановка задачи

Требуется минимизировать многоточечный функционал

$$S(u)=\varphi\big(y(X_1),y(X_2),\dots,y(X_k)\big)+\int_{x_0}^{x_1}F\big(x,z(T_1,x),z(T_2,x),\dots,z(T_k,x)\big)dx \tag{1}$$

при ограничениях

$$u(t)\in U\subset R^r,\quad t\in T=[t_0,t_1],$$

$$v(x)\in V\subset R^q,\quad x\in X=[x_0,x_1], \tag{2}$$

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}=f\big(t,x,z(t,x),u(t)\big),\quad (t,x)\in D=T\times X, \tag{3}$$

$$z(t_0,x)=y(x),\qquad x\in X, \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dx}=g\big(x,y(x),v(x)\big),\quad x\in X, \tag{5}$$

$$y(x_0)=y_0. \tag{6}$$

Здесь $f(t,x,z,u)$ $\big(g(x,y,v)\big)$ – заданная n-мерная вектор-функция, определенная и непрерывная в $D\times R^n\times R^r$ $\left(X\times R^n\times R^q\right)$ вместе с частными производными по z (y) до второго порядка включительно; t_0, t_1, x_0, x_1, y_0 заданы; $T_i\in(t_0,t_1]$, $i=\overline{1,k}$ $(t_0<T_1<T_2<\ldots<T_k\le t_1)$; $X_i\in(x_0,x_1]$, $i=\overline{1,k}$, $(x_0<X_1<X_2<\ldots<X_k\le x_1)$ – заданные точки; $\varphi(a_1,a_2,\dots,a_k)$ $\big(F(x,b_1,b_2,\dots,b_k)\big)$ – заданная и непрерывная в $R^{k\cdot n}$ $\left(X\times R^{k\cdot n}\right)$ вместе с частными производными по $(a_1,a_2,\dots,a_k)$ $\big((b_1,b_2,\dots,b_k)\big)$ до второго порядка включительно скалярная функция; U и V – заданные непустые и ограниченные множества; $u(t)$ $\big(v(x)\big)$ – кусочно-непрерывная (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор-функция управляющих воздействий.

Пару функций $(u(t),\ v(x))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $(u^o(t),\ v^o(x))$ (в смысле [1, 2]) соответствует единственное решение $(z^o(t,x),\ y^o(x))$ для (2)–(6).

Допустимое управление $(u^o(t),\ v^o(x))$, доставляющее минимум функционалу (1) при ограничениях (2)–(6), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u^o(t),\ v^o(x),\ z^o(t,x),\ y^o(x))$ – оптимальным процессом.

2. Формула для приращения критерия качества

Пусть $(u^o(t),\ v^o(x))$ – фиксированное допустимое управление, а $(\bar{u}(t)=u^o(t)+\Delta u(t),\ \bar{v}(t)=v^o(x)+\Delta v(x))$ – произвольное допустимое управление. Через $(z^o(t,x),\ y^o(x))$, $(\bar{z}(t)=z^o(t)+\Delta z(t),\ \bar{y}(t)=y^o(x)+\Delta y(x))$ обозначим соответствующие им решения уравнений (3)–(6).

Функции $\Delta z(t,x),\ \Delta y(x)$ являются решением следующих уравнений

$$\frac{d\Delta y(x)}{dx}=g(x,\bar{y}(x),\bar{v}(x))-g(x,y(x),v(x)),\ \Delta y(x_0)=0\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \Delta z(t,x)}{\partial t}=f(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t))-f(t,x,z(t,x),u(t)),\ \Delta z(t_0,x)=\Delta y(x)\,. \tag{8}$$

Приращения функционала качества (1) с использованием формулы Тейлора можно записать в виде

$$\begin{gathered}\Delta S(u^o,v^o)=S(\bar{u},\bar{v})-S(u^o,v^o)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial \varphi'(y(X_1),...,y(X_k))}{\partial a_i}\Delta y(X_i)+\\ +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta y'(X_i)\frac{\partial^2\varphi(y(X_1),...,y(X_k))}{\partial a_i\,\partial a_j}\Delta y(X_j)+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\left\|\Delta y(X_i)\right\|\right]^2\right)+\\ +\sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F'(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x))}{\partial b_i}\Delta z(T_i,x)\,dx+\\ +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(T_i,x)\frac{\partial F^2(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x))}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z(T_j,x)\,dx+o_2\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\left\|\Delta z(T_i,x)\right\|\right]^2\right).\end{gathered} \tag{9}$$

Введем аналоги функций Гамильтона–Понтрягина:

$$H(t,x,z,u,p^o)=p^{o'}f(t,x,z,u),\qquad M(x,y,v,q^o)=q^{o'}g(y,v)\,,$$

где p^o, q^o – пока неизвестные вектор-функции. Тогда, используя соотношения (7), (8), приращение (9) функционала качества при помощи формулы Тейлора представляется в виде

$$\begin{gathered}\Delta S(u^o,v^o)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi'(y(X_1),...,y(X_k))}{\partial a_i}\Delta y(X_i)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta y'(X_i)\frac{\partial^2\varphi(y(X_1),...,y(X_k))}{\partial a_i\,\partial a_j}\Delta y(X_j)+\\ +o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\left\|\Delta y(X_i)\right\|\right]^2\right)+\sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F'(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x))}{\partial b_i}\Delta z(T_i,x)\,dx+\\ +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(T_i,x)\frac{\partial F'(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x))}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z(T_j,x)\,dx+o_2\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\left\|\Delta z(T_i,x)\right\|\right]^2\right)+\\ +\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}p^0(t,x)\frac{\partial\Delta z(t,x)}{\partial t}\,dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[H(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t),p^o(t,x))-\end{gathered}$$

$$-H\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x)\right)\Big]dx\,dt+\int_{x_0}^{x_1}q^{0'}(x)\frac{\partial\Delta y(x)}{\partial x}dx-$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}\Big[M\left(x,\overline{y}(x),\overline{v}(x),q^o(x)\right)-M\left(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x)\right)\Big]dx\,dt. \tag{10}$$

В дальнейшем будем использовать следующие формулы

$$\Delta z(t,x)=\Delta y(x)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\Delta z(\tau,x)}{\partial\tau}d\tau, \tag{11}$$

$$\Delta y(x)=\int_{x_0}^{x}\Delta\dot{y}(s)ds. \tag{12}$$

Введем обозначения :

$$\Delta_{\overline{u}(t)}H(t,x)=H\left(t,x,z^o(t,x),\overline{u}(t),p^o(t,x)\right)-H\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x)\right),$$
$$H_z(t,x)=H_z\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x)\right),\quad H_{zz}(t,x)=H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t),p^o(t,x)\right),$$
$$\Delta_{\overline{v}(x)}M(x)=M\left(x,y^o(x),\overline{v}(x),q^o(x)\right)-M\left(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x)\right),$$
$$M_y(x)\equiv M_y\left(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x)\right),\quad M_{yy}(x)\equiv M_{yy}\left(x,y^o(x),v^o(x),q^o(x)\right).$$

Учитывая эти обозначения и формулы (11), (12), из (10) получим

$$\Delta S\left(u^o,v^o\right)=\sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\alpha_i(x)\frac{\partial\varphi'\left(y(X_1),...,y(X_k)\right)}{\partial a_i}\Delta\dot{y}(x)dx+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta y'(X_i)\frac{\partial^2\varphi\left(y(X_1),y(X_2)...,y(X_k)\right)}{\partial a_i\,\partial a_j}\Delta y\left(X_j\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\beta_i(t)\frac{\partial F'\left(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x)\right)}{\partial b_i}\Delta z_t(t,x)dx\,dt+\sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F'\left(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x)\right)}{\partial b_i}\Delta y(x)dx+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(T_i,x)\frac{\partial^2F\left(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x)\right)}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z\left(T_j,x\right)dx+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}p^{0'}(t,x)\Delta z_t(t,x)dx\,dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}(t)}H(t,x)dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_z'(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}(t)}H_z'(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}q^{0'}(x)\Delta\dot{y}(x)dx-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(x)}M(x)dx-\int_{x_0}^{x_1}M_y'(x)\Delta y(x)dx-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt-$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(x)}M_y'(x)\Delta y(x)dx-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'(x)M_{yy}(x)\Delta y(x)dx+\eta_1(\Delta u;\Delta v), \tag{13}$$

где по определению $\alpha_i(x)$, $\beta_i(t)$, $i=\overline{1,k}$, – характеристические функции отрезков $\left[x_0,X_i\right]$, $\left[t_0,T_i\right]$, $i=\overline{1,k}$, соответственно,

$$\eta_1(\Delta u;\Delta v)=o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\left\|\Delta y(X_i)\right\|\right]^2\right)+\int_{x_0}^{x_1}o_2\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\left\|\Delta z(T_i,x)\right\|\right]^2\right)dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_3\left(\left\|\Delta z(t,x)\right\|^2\right)dx\,dt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'(x)\Delta_{\overline{v}(x)}M_{yy}(x)\Delta y(x)dx-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)\Delta_{\overline{u}(t)}H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt-\int_{x_0}^{x_1}o_4\left(\left\|\Delta y(x)\right\|^2\right)dx. \tag{14}$$

Далее из (13) имеем

$$\Delta S\left(u^o,v^o\right)=\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(x)\frac{\partial\varphi'\left(y(X_1),...,y(X_k)\right)}{\partial a_i}\Delta\dot{y}(x)dx+\sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1}\frac{\partial F'\left(x,z(T_1,s),...,z(T_k,s)\right)}{\partial b_i}ds\right]\times$$

$$\times\Delta\dot{y}(x)\,dx+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}p^0(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}(t)}H(t,x)\,dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}(t)}H'_z(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_x^{x_1}H'_z(t,s)\,ds\right]\Delta\dot{y}(x)\,dx+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_t^{t_1}H'_z(\tau,x)\,d\tau\right]\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt+\int_{x_0}^{x_1}q^{0'}(x)\Delta\dot{y}(x)\,dx- \tag{15}$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(x)}M(x)\,dx-\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_x^{x_1}M'_y(s)\,ds\right]\Delta\dot{y}(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'(x)M_{yy}(x)\Delta y(x)\,dx-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta y'(X_i)\frac{\partial^2\varphi(y(X_1),...,y(X_k))}{\partial a_i\,\partial a_j}\Delta y(X_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\beta_i(t)\frac{\partial F'(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x))}{\partial b_i}\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(T_i,x)\frac{\partial^2F(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x))}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z(T_j,x)\,dx-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(x)}M_y(x)\Delta y(x)\,dx+\eta_1(\Delta u;\Delta v).$$

Если предполагать, что $\left(p^o(t,x),q^o(x)\right)$ является решением системы интегральных уравнений (сопряженная система):

$$p^o(t,x)=\int_t^{t_1}H'_z(\tau,x)\,d\tau-\sum_{i=1}^{k}\beta_i(t)\frac{\partial F(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x))}{\partial b_i},$$

$$q^o(x)=-\int_x^{x_1}\frac{\partial F'(s,z(T_1,s),...,z(T_k,s))}{\partial b_i}\,ds+\int_x^{x_1}H_z(t,s)\,ds+\int_x^{x_1}M_y(s)\,ds-$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(x_i)\frac{\partial\varphi(y(X_1),...,y(X_k))}{\partial a_i}, \tag{16}$$

то формула приращения (15) примет вид

$$\Delta S(u^o,v^o)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}(x)}H(t,x)\,dx\,dt-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(x)}M(x)\,dx+ \tag{17}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta y'(X_i)\frac{\partial^2\varphi(y(X_1),...,y(X_k))}{\partial a_i\,\partial a_j}\Delta y(X_j)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(T_i,x)\frac{\partial^2F(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x))}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z(T_j,x)\,dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}(t)}H'_z(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(x)}M'_y(x)\Delta y(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'(x)M_{yy}(x)\Delta y(x)\,dx+\eta_1(\Delta u;\Delta v).$$

3. Оценка нормы приращения состояния системы

Используя (3)–(6), перейдем к эквивалентным интегральным уравнениям, будем иметь

$$\Delta z(t,x)=\Delta y(x)+\int_{t_0}^{t}\left[f\left(\tau,x,\overline{z}(\tau,x),\overline{u}(\tau)\right)-f\left(\tau,x,z^o(\tau,x),u^o(\tau)\right)\right]d\tau, \tag{18}$$

$$\Delta y(x)=\int_{x_0}^{x}\left[g\left(s,\overline{y}(s),\overline{v}(s)\right)-g\left(s,y^o(s),v^o(s)\right)\right]ds. \tag{19}$$

Отсюда получим неравенство

$$\| z(t,x) \| \leq \| \Delta y(x) \| + \int_{t_0}^{t} \| \Delta_{\overline{u}(\tau)} f(\tau,x) \| \, d\tau + L_1 \int_{t_0}^{t} \| \Delta z(\tau,x) \| \, d\tau, \tag{20}$$

$$\| \Delta y(x) \| \leq \int_{x_0}^{x} \| \Delta_{v(s)} g(s) \| \, ds + L_2 \int_{x_0}^{x} \| \Delta y(s) \| \, ds, \tag{21}$$

где $L_i = \text{const} > 0, \quad i = 1,2,$ – постоянные Липшица. Из (20), (21) применяя аналог леммы Гронуолла–Беллмана (см., например, [3, 4]), приходим к неравенствам

$$\| \Delta z(t,x) \| \leq \| \Delta y(x) \| + L_3 \int_{t_o}^{t} \| \Delta_{\overline{u}(\tau)} f(\tau,x) \| \, d\tau, \tag{22}$$

$$\| \Delta y(x) \| \leq L_4 \int_{x_0}^{x} \| \Delta_{\overline{v}(s)} g(s) \| \, ds. \tag{23}$$

где $L_i, \ i = 3,4,$ – некоторые положительные постоянные числа.

С учетом неравенства (23), неравенство (22) запишется в виде

$$\| \Delta z(t,x) \| \leq L_4 \int_{x_0}^{x} \| \Delta_{\overline{v}(s)} g(s) \| \, ds + L_3 \int_{t_0}^{t} \| \Delta_{\overline{u}(\tau)} f(\tau,x) \| \, d\tau. \tag{24}$$

Таким образом, получили оценку нормы приращения состояния, соответствующую приращению управления.

4. Необходимые условия оптимальности

Считая $\left(u^o(t),\ v^o(x)\right)$ оптимальным управлением, его специальное приращение определим по формуле

$$\begin{cases} \overline{u}_\varepsilon(t) = \begin{cases} u, & t \in [\theta, \theta+\varepsilon), \\ u^{\text{o}}(t), & t \in T \setminus [\theta, \theta+\varepsilon), \end{cases} \\ \overline{v}_\mu(x) = v^{\text{o}}(x), \quad x \in X. \end{cases} \tag{25}$$

Здесь $\theta \in [t_0, t_1)$ – произвольная точка непрерывности управления $u^{\text{o}}(t)$; $u \in U$ – произвольный вектор, $\varepsilon > 0$ – произвольное число, такое что $\theta + \varepsilon < t_1$. Через $\left(\Delta z_\varepsilon(t,x), \Delta y_\varepsilon(x)\right)$ обозначим специальное приращение состояния $\left(z^o(t,x), y^o(x)\right)$, отвечающее приращению (25) управления $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$. Из оценок (23), (24) следует, что

$$\left\| \Delta z_\varepsilon^{\text{o}}(t,x) \right\| \leq L_5 \, \varepsilon, \quad \left\| \Delta y_\varepsilon(x) \right\| \leq L_6 \, \varepsilon, \tag{26}$$

где $L_5, L_6 = \text{const} > 0$ – некоторые положительные постоянные.

С учетом (25), (26) из формулы приращения (17) получим, что вдоль оптимального управления $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$:

$$\Delta_u S_\varepsilon\left(u^o, v^o\right) = -\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \Delta_u H(\theta, x) \, dx + o(\varepsilon) \geq 0. \tag{27}$$

Теперь специальное приращение оптимального управления определим по формуле

$$\overline{u}_\varepsilon(t) = u(t), \quad t \in T,$$

$$\overline{v}_\mu(x) = \begin{cases} v, & x \in [\xi, \xi+\varepsilon), \\ v^{\text{o}}(x), & x \in X \setminus [\xi, \xi+\varepsilon), \end{cases} \tag{28}$$

где $\xi \in [x_0, x_1)$ – произвольная точка непрерывности управляющей функции $v^o(x)$; $v \in V$ – произвольный вектор; $\mu > 0$ – произвольное достаточно малое число, такое что $\xi + \mu < x_1$.

Через $(\Delta z_\mu(t,x), \Delta y_\mu(x))$ обозначим специальное приращение состояния $(z^o(t,x), y^o(x))$, отвечающее приращению (28) управления $(u^o(t), v^o(x))$.

Из оценок (23), (24) следует, что

$$\|\Delta z_\mu(t,x)\| \le L_7 \mu, \quad \|\Delta y_\mu(x)\| \le L_8 \mu, \tag{29}$$

где $L_7, L_8 = \text{const} > 0$ – некоторые положительные постоянные.

Принимая во внимание эти оценки и формулу (27), из (17) получим, что

$$\Delta_{\bar{v}} S_\mu(u^o, v^o) = S(u^o, \bar{v}) - S(u^o, v^o) = -\mu \Delta_v M(\xi) + o(\mu) \ge 0. \tag{30}$$

Из неравенств (27), (30), в силу произвольности ε и μ приходим к соотношениям

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta_u H(\theta, x)\, dx \le 0, \tag{31}$$

$$\Delta_v M(\xi) \le 0. \tag{32}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u^o(t), v^o(x))$ в задаче (1)-(6) необходимо, чтобы неравенства (31), (32) выполнялись соответственно для всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $u \in U$ и $\xi \in [x_0, x_1)$, $v \in V$.

Неравенства (31), (32) являются необходимыми условиями первого порядка и пара неравенств (31), (32) представляет собой аналог принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи.

Формула приращения (17) позволяет исследовать также случай особых управлений.

Определение 1. Если выполняются соотношения

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta_u H(\theta, x)\, dx = 0 \text{ для всех } \theta \in [t_0, t_1),\ u \in U, \tag{33}$$

$$\Delta_v M(\xi) = 0 \text{ для всех } \xi \in [x_0, x_1),\ v \in V, \tag{34}$$

то допустимое управление $(u^o(t), v^o(x))$ назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлением.

Из определения 1 видно, что для особых управлений условие максимума (31), (32), вырождаясь, становится неэффективным. Поэтому нужны новые необходимые условия оптимальности. Понятие особого управления было введено Л.И. Розоноэром [5]. В дальнейшем особые управления исследовались Г. Келли [6], Р. Коппом и Г. Мойером [7], Ю.И. Параевым [8], Р. Габасовой, Ф.М. Кирилловой [9] и др. Довольно полный обзор соответствующих результатов имеется в работах [9–16] и др. Заметим, что особые управления возникают во многих прикладных задачах управления (см., например, [6, 7, 9, 17, 18] и др.).

Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности для особых управлений.

Из (7), (8) видно, что $(\Delta y(x), \Delta z(t,x))$ является решением линеаризованной задачи

$$\Delta \dot{y}(x) \equiv g_y(x) \Delta y(x) + \Delta_{\bar{v}(x)} g(x) + \eta_2(x; \Delta v), \tag{35}$$

$$\Delta y(x_0) = 0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \Delta z(t,x)}{\partial z} \equiv f_z(t,x) \Delta z(t,x) + \Delta_{\bar{u}(t)} f(t,x) + \eta_3(t,x;\Delta u), \tag{37}$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta y(x). \tag{38}$$

Здесь по определению

$$\eta_2(x; \Delta v(x)) = \Delta_{\bar{v}(x)} g(x) \Delta y(x) + o_4(\|\Delta y(x)\|),$$

$$\eta_3(t,x; \Delta u(t)) = \Delta_{\bar{u}(t)} f_z(t,x) \Delta z(t,x) + o_5(\|\Delta z(t,x)\|).$$

Решения уравнений (35), (36) и (37), (38) на основе аналога формулы Коши о представлении решений линейных дифференциальных уравнений (см., например, [19, 20]) имеют вид

$$\Delta y(x)=\int_{x_0}^{x}\Phi(x,s)\Delta_{\overline{v}(s)}g(s)ds+\eta_4(x;\Delta v(x)), \tag{39}$$

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)\Delta_{\overline{u}(\tau)}f(\tau,x)d\tau+F(t,t_0,x)\Delta y(x)+\eta_5(t,x;\Delta u(t)). \tag{40}$$

Здесь

$$\eta_4(x;\Delta v(x))=\int_{x_0}^{x}\Phi(x,s)\eta_2(s;\Delta v(s))ds,$$

$$\eta_5(t,x;\Delta u(t))=\int_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)\eta_3(\tau,x;\Delta u(\tau))d\tau,$$

где $\Phi(x,s)$, $F(t,\tau,x)$ – $(n\times n)$ матричные функции, являющиеся решениями матричных дифференциальных уравнений

$$\Phi_s(x,s)=-\Phi(x,s)g_y(s),\qquad \Phi(x,x)=E,$$

$$F_\tau(t,\tau,x)=-F(t,\tau,x)f_z(\tau,x),\qquad F(t,t,x)=E,$$

где E – $(n\times n)$ единичная матрица.

Из (39) с учетом представления (40) получаем

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)\Delta_{\overline{u}(\tau)}f(\tau,x)d\tau+\int_{x_0}^{x}F(t,t_0,x)\Phi(x,s)\Delta_{\overline{v}(s)}g(s)ds+\eta_6(t,x;\Delta u(t),\Delta v(x)). \tag{41}$$

Здесь по определению

$$\eta_6(t,x;\Delta u(t),\Delta v(x))=\eta_5(t,x;\Delta u(t))+F(t,t_0,x)\eta_4(x;\Delta v(x)).$$

С учетом оценок (23), (24) из представлений (39), (41) получаем

$$\Delta z_\varepsilon(t,x)=\int_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)\Delta_{\overline{u}_\varepsilon(\tau)}f(\tau,x)d\tau+o(\varepsilon;t,x),\ \ \Delta y_\varepsilon(x)=0, \tag{42}$$

$$\Delta z_\mu(t,x)=\int_{x_0}^{x}F(t,t_0,x)\Phi(x,s)\Delta_{\overline{v}_\mu(s)}g(s)ds+o(\mu;t,x), \tag{43}$$

$$\Delta y_\mu(x)=\int_{x_0}^{x}\Phi(x,s)\Delta_{\overline{v}_\mu(s)}g(s)ds+o(\mu). \tag{44}$$

В особом случае из формулы приращения (13) получаем справедливость разложений

$$S\left(u^o(t)+\Delta u_\varepsilon(t),v^o(x)\right)-\Delta S\left(u^o(t),v^o(x)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z_\varepsilon'(T_i,x)\frac{\partial^2F(x,z(T_1,x),\dots,z(T_k,x))}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z_\varepsilon(T_j,x)dx-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z_\varepsilon'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z_\varepsilon(t,x)dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}_\varepsilon(t)}H_z'(t,x)\Delta z_\varepsilon(t,x)dx\,dt+o(\varepsilon^2), \tag{45}$$

$$S\left(u^o(t),v^o(x)+\Delta v_\mu(x)\right)-\Delta S\left(u^o(t),v^o(x)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta y_\mu'(X_i)\frac{\partial^2\varphi(y(X_1),y(X_2),\dots,y(X_k))}{\partial a_i\,\partial a_j}\Delta y_\mu(X_j)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z_\mu'(T_i,x)\frac{\partial^2F(x,z(T_1,x),z(T_2,x),\dots,z(T_k,x))}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z_\mu(T_j,x)dx-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}_\mu(x)}M_y'(x)\Delta y_\mu(x)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'_\mu(x)M_{yy}(x)\Delta y_\mu(x)dx-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'_\mu(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z_\mu(t,x)dx\,dt+o\left(\mu^2\right). \tag{46}$$

Из (42) следует

$$\Delta z_\varepsilon(T_i,x)=\int_{t_0}^{t}\alpha_i(\tau)F(T_i,\tau,x)\Delta_{\overline{u}_\varepsilon(\tau)}f(\tau,x)d\tau+o(\varepsilon), \tag{47}$$

где $\alpha_i(t)$ – характеристическая функция отрезка $[t_0,T_i]$.

Используя (47), доказывается справедливость следующих тождеств:

$$\begin{gathered}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'_\varepsilon(T_i,x)\frac{\partial^2F\left(x,z(T_1,x),z(T_2,x),...,z(T_k,x)\right)}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z_\varepsilon\left(T_j,x\right)dx=\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\beta_i(\tau)\beta_j(s)\times\\ \times\Delta_{\overline{u}_\varepsilon(\tau)}f'(\tau,x)F(T_i,\tau,x)\frac{\partial^2F\left(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x)\right)}{\partial b_i\,\partial b_j}F\left(T_j,s,x\right)\Delta_{\overline{u}_\varepsilon(s)}f(s,x)ds\,d\tau\,dx+o\left(\varepsilon^2\right),\end{gathered} \tag{48}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}_\varepsilon(t)}H'_z(t,x)\Delta z_\varepsilon(t,x)dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\Delta_{\overline{u}_\varepsilon(\tau)}H'_z(\tau,x)F(\tau,t,x)\Delta_{\overline{u}_\varepsilon(t)}f(t,x)d\tau\right]dx\,dt+o\left(\varepsilon^2\right), \tag{49}$$

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'_\varepsilon(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z_\varepsilon(t,x)dx\,dt=\\ =\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\overline{u}_\varepsilon(\tau)}f(\tau,x)\left\{\int_{\max(\tau,s)}^{x_1}F'(t,\tau,x)H_{zz}(t,x)F(t,s,x)dt\right\}\Delta_{\overline{u}_\varepsilon(s)}f(s,x)d\tau\,ds\,dx+o\left(\varepsilon^2\right).\end{gathered} \tag{50}$$

Далее из представления (44) следует

$$\Delta y_\mu(X_i)=\int_{x_0}^{x_1}\alpha_i(s)\Phi(x_i,s)\Delta_{\overline{v}_\varepsilon(s)}g(s)ds+o(\mu). \tag{51}$$

При помощи представлений (44), (51) получаем

$$\begin{gathered}\Delta y'_\mu(X_i)\frac{\partial^2\varphi\left(y(X_1),y(X_2),...,y(X_k)\right)}{\partial a_i\,\partial a_j}\Delta y_\mu\left(X_j\right)=\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\alpha_i(\alpha)\alpha_j(\beta)\Phi\left(x_j,\alpha\right)\times\\ \times\Delta_{\overline{v}_\varepsilon(\beta)}g(\alpha)\frac{\partial^2\varphi\left(y(X_1),y(X_2),...,y(X_k)\right)}{\partial a_i\,\partial a_j}\Phi\left(x_j,\beta\right)\Delta_{\overline{v}_\varepsilon(\beta)}g(\beta)d\alpha\,d\beta+o\left(\mu^2\right),\end{gathered} \tag{52}$$

$$\begin{gathered}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'_\mu(T_i,x)\frac{\partial^2F\left(x,z(T_1,x),z(T_2,x),...,z(T_k,x)\right)}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z_\mu\left(T_j,x\right)dx=\\ =\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}_\mu(\tau)}g'(\tau)\left\{\int_{\max(\tau,s)}^{x_1}F'(T_i,t_0,x)\Phi'(x,\tau)\frac{\partial^2F\left(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x)\right)}{\partial b_i\,\partial b_j}F\left(T_j,t_0,x\right)\Phi(x,s)dx\right\}\times\\ \times\Delta_{\overline{v}_\mu(s)}g(s)ds\,d\tau+o\left(\mu^2\right),\end{gathered} \tag{53}$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}_\mu(x)}M'_y(x)\Delta y_\mu(x)dx=\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1}\Delta_{\overline{v}_\mu(s)}M'_y(s)\,\Phi'(s,x)ds\right]\Delta_{\overline{v}_\mu(x)}g(x)dx+o\left(\mu^2\right), \tag{54}$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'_\mu(x)M_{yy}(x)\Delta y_\mu(x)dx=\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}_\varepsilon(\tau)}g'(\tau)\left\{\int_{\max(\tau,s)}^{x_1}\Phi'(x,\tau)M_{yy}(x)\Phi(x,s)dx\right\}\Delta_{\overline{v}_\varepsilon(s)}g(s)ds\,d\tau+o\left(\mu^2\right),$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'_\mu(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z_\mu(t,x)dx\,dt= \tag{55}$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{v}_\mu(\tau)} g'(\tau) \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\max(\tau,s)}^{x_1} \Phi'(x,\tau) F'(t,t_0,x) H_{zz}(t,x) F(t,t_0,x) \Phi(x,s)\, dt\, dx \right\} \Delta_{\overline{v}_\mu(s)} g(s)\, ds\, d\tau + o\left(\mu^2\right).$$

Введем обозначения:

$$K(\tau,\alpha,x) = -\sum_{i,j=1}^{k} \beta_i(\tau)\beta_j(s) F'(T_i,\tau,x) \frac{\partial^2 G\left(x, z^{o}(T_i,x)\right)}{\partial b_i\, \partial b_j} F\left(T_j,\alpha,x\right) + \\ + \int\limits_{\max(\tau,\alpha)}^{t_1} F(t,\tau,x) \frac{\partial^2 H(t,x)}{\partial z^2} F(t,\alpha,x)\, dt, \tag{56}$$

$$L(\tau,s) = -\sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i(\tau)\alpha_j(s) \Phi'(x_i,\tau) \frac{\partial^2 \varphi\left(y(X_1), y(X_2), \dots, y(X_k)\right)}{\partial a_i\, \partial a_j} \Phi\left(x_j,s\right) + \\ + \int\limits_{\max(\tau,s)}^{x_1} F'(T_i,t_0,x)\Phi'(x,\tau) \frac{\partial^2 F\left(x, z(T_1,x), z(T_2,x), \dots, z(T_k,x)\right)}{\partial b_i\, \partial b_j} F\left(T_j,t_0,x\right)\Phi(x,s)\, dx + \\ + \int\limits_{\max(\tau,s)}^{x_1} \Phi'(x,\tau) M_{yy}(x) \Phi(x,s)\, dx + \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\max(\tau,s)}^{x_1} \Phi'(x,\tau) F'(t,t_0,x) H_{zz}(t,x) F(t,t_0,x) \Phi(x,s)\, dt\, dx. \tag{57}$$

Учитывая введенные обозначения (56), (57) и тождества (52)–(57), формулы приращения (45), (46) после некоторых преобразований запишем следующим образом:

$$S\left(u^o(t) + \Delta u_\varepsilon(t), v^o(x)\right) - \Delta S\left(u^o(t), v^o(x)\right) = \\ = -\frac{\varepsilon^2}{2} \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\Delta_u f'(\theta,x) K(\theta,\theta,x) \Delta_u f(\theta,x) + \Delta_u H'_z(\theta,x) \Delta_u f(\theta,x) \right] dx + o\left(\varepsilon^2\right), \tag{58}$$

$$S\left(u^o(t), v^o(x) + \Delta v_\mu(x)\right) - \Delta S\left(u^o(t), v^o(x)\right) = \\ = -\frac{\mu^2}{2} \left[\Delta_v g'(\xi) L(\xi,\xi) \Delta_v g(\xi) + \Delta_v M'_y(\xi) \Delta_v g(\xi) \right] + o\left(\mu^2\right). \tag{59}$$

Учитывая произвольность и независимость $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$, из разложений (58), (59) получаем, что вдоль особого оптимального управления $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$ выполняются соотношения

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\Delta_u f'(\theta,x) K(\theta,\theta,x) \Delta_u f(\theta,x) + \Delta_u H'_z(\theta,x) \Delta_u f(\theta,x) \right] dx \le 0 \tag{60}$$

для всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $u \in U$,

$$\Delta_v g'(\xi) L(\xi,\xi) \Delta_v g(\xi) + \Delta_v M'_y(\xi) \Delta_v g(\xi) \le 0, \tag{61}$$

для всех $v \in V$, $\xi \in [x_0, x_1)$.

Сформулируем результат.

Теорема 2. Для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$ необходимо, чтобы неравенства (60), (61) выполнялись для всех $u \in U$, $\theta \in [t_0, t_1)$ и $v \in V$, $\xi \in [x_0, x_1)$ соответственно.

Заметим, что необходимые условия оптимальности (60), (61) являются аналогами условия оптимальности Габасова–Кирилловой (см., например, [9, 10]).

Заключение

В работе изучается задача оптимального управления типа А.И. Москаленко для многоточечного критерия качества. Применяя схему, предложенную в работах [11, 14, 15 и др.], установлено необходимое условие оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Москаленко А.И. Об одном классе задач оптимального регулирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. № 1. С. 69–95.
2. Москаленко А.И. Некоторые вопросы теории оптимального управления : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Томск : Том. гос. ун-т, 1971. 20 с.
3. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблема устойчивости нелинейных систем Гурса-Дарбу // Дифференциальные уравнения. 1972. № 5. С. 845–856.
4. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса-Дарбу // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. № 1. С. 61–77.
5. Розоноэр Л.И. Принцип максимума в теории оптимальных систем I-III // Автоматика и телемеханика. 1969. № 10–12. С. 1320–1334, 1441–1458, 1561–1578.
6. Келли Г. Необходимое условие для особых экстремалей, основанное на второй вариации // Ракетная техника и космонавтика. 1964. № 8. С. 26–29.
7. Копп Р., Мойер Г. Необходимое условие оптимальности особых экстремалей // Ракетная техника и космонавтика. 1965. № 8. С. 84–91.
8. Параев Ю.И. Об особом управлении в оптимальных процессах, линейных относительно управляющих воздействий // Автоматика и телемеханика. 1962. № 9. С. 1202–1209.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Наука, 1973. 256 с.
10. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности высокого порядка (обзор) // Препринт ИМ АН БССР. 1982. № 30 (155). 48 с.
11. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку : Изд-во ЭЛМ, 1999. 171 с.
12. Марданов М.Дж. Об условиях оптимальности особых управлений // Докл. АН СССР. 1980. Т. 213, № 4. С. 815–818.
13. Меликов Т.К. Об оптимальности особых управлений в системах с последействием нейтрального типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. № 9. С. 1332–1343.
14. Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2013. 356 с.
15. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2010. 363 с.
16. Марданов М.Дж. Исследование оптимальных процессов с запаздываниями при наличии ограничений. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2010. 114 с.
17. Параев Ю.И. Оптимальное управление двухсекторной экономикой // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 3 (28). С. 4–11.
18. Параев Ю.И., Грекова Т.И., Данилюк Е.Ю. Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 5–15.
19. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск : Изд-во БГУ, 1973. 246 с.
20. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. : Наука, 1979. 419 с.

Мансимов Камиль Байрамали оглы, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: kmansimov@mail.ru
Бакинский государственный университет, Институт систем управления НАН Азербайджана (г. Баку, Азербайджан)
Расулова Шахла Меджид кызы. E-mail: rasulzade_sh@yahoo.com
Институт Систем Управления НАН Азербайджана (г. Баку, Азербайджан)

Поступила в редакцию 11 октября 2016 г.

Mansimov Kamil B. (Baku State University, Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences).
Rasulova Shahla M. (Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences).

About one A.I. Moskalenko control problem.

Keywords: Pontryagin maximum condition; special case; the necessary optimality condition; optimal control problem with distributed parameters.

DOI: 10.17223/19988605/40/2

Suppose you want to minimize the multi-point functional

$$S(u)=\varphi\big(y(X_1),y(X_2),...,y(X_k)\big)+\int_{x_0}^{x_1}F\big(x,z(T_1,x),z(T_2,x),...,z(T_k,x)\big)dx \qquad (1)$$

with constraints

$$u(t)\in U\subset R^r,\ t\in T=[t_0,t_1],\ v(x)\in V\subset R^q,\ x\in X=[x_0,x_1], \qquad (2)$$

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}=f\big(t,x,z(t,x),u(t)\big),\quad (t,x)\in D=T\times X\ , \qquad (3)$$

$$z(t_0, x) = y(x), \quad x \in X, \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y(x), v(x)), \quad x \in X, \tag{5}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{6}$$

Here $f(t,x,z,u)$ $(g(x,y,v))$ is a given n-dimensional vector-function defined and continuous in $D \times R^n \times R^r$ $(X \times R^n \times R^q)$ together with partial derivatives with respect to $z(y)$ up to the second order inclusive, $T_i \in (t_0, t_1]$ $i = \overline{1,k}$, $(t_0 < T_1 < T_2 < ... < T_k \le t_1)$, $X_i \in (x_0, x_1]$ $(x_0 < X_1 < X_2 < ... < X_k \le x_1)$ are given points, $\varphi(a_1, a_2, ..., a_k)$ $(F(x, b_1, b_2, ..., b_k))$ is a given and continuous in $R^{k \cdot n}$ $(X \times R^{k \cdot n})$ together with the partial derivatives up to the second order inclusive a scalar function, U and V are non-empty and bounded sets, $u(t)$ $(v(x))$ is a piecewise continuous (with a finite number of points of discontinuity of the first kind) vector-function of control actions.

Paper deals obtaining the necessary conditions for optimality in the problem (1)–(6).

REFERENCES

1. Moskalenko, A.I. (1969) Ob odnom klasse zadach optimal'nogo regulirovaniya [On a class of optimal control problems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Journal. Comput. mat. and mat. physicists*. 1. pp. 69–95.
2. Moskalenko, A.I. (1971) *Nekotorye voprosy teorii optimal'nogo upravleniya* [Some questions in the optimal control theory]. Abstract of Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk.
3. Plotnikov, V.I. & Sumin, V.I. (1972) Problema ustoychivosti nelineynykh sistem Gursa-Darbu [The problem of stability of nonlinear systems Goursat-Darboux]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations.* 5. pp. 845–856.
4. Plotnikov, V.I, & Sumin, V.I. (1972) Optimizatsiya ob"ektov s raspredelennymi parametrami, opisyvaemye sistemami Gursa-Darbu [Optimization of objects with distributed parameters, described by Goursat-Darboux systems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki.* 1. pp. 61–77.
5. Rozonoer, L.I. (1969) The maximum principle in the theory of optimal systems I-III. *Automation and Remote Control.* 10–12. pp. 1320–1334, 1441–1458, 1561–1578.
6. Kelly, G. (1064) A necessary condition for the singular extremals, based on the second variation. *Rocketry and Astronautics.* 8. pp. 26–29.
7. Kopp, R. & Moyer, H. (1965) Necessary condition for optimality of singular extremals. *Rocketry and Astronautics.* no. 8. pp. 84–91.
8. Paraev, Yu.I. (1962) On special management of optimal processes, linear with respect to control actions. *Automation and Remote Control.* 9. pp. 1202–1209.
9. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Osobye optimal'nye upravleniya* [Special optimal control]. Moscow: Nauka.
10. Gabasov, R., Kirillova, F.M. & Mansimov, K.B. (1982) Neobkhodimye usloviya optimal'nosti vysokogo poryadka (obzor) [Necessary conditions for optimal-of-order (review)]. *Preprint BSSR.* 30(155).
11. Mansimov, K.B. (1999) *Osobye upravleniya v sistemakh s zapazdyvaniem* [Specific management systems with delay]. Baku: ELM.
12. Mardanov, M.C. (1980) Ob usloviyakh optimal'nosti osobykh upravleniy [On optimality conditions for singular controls]. *Dokl. USSR Academy of Sciences.* 213(4). pp. 815–818.
13. Melikov, T.G. (2001) Ob optimal'nosti osobykh upravleniy v sistemakh s posledeystviem neytral'nogo tipa [On the optimality of singular controls in the system and aftereffect neutral type]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Journal. Comput. mat. and mat.physicists*. 9. pp. 1332–1343.
14. Mardanov, M.C., Mansimov, K.B. & Melikov, T.G. (2013) *Issledovanie osobykh upravleniy i neobkhodimye usloviya optimal'nosti vtorogo poryadka v sistemakh s zapazdyvaniem* [Investigation of special departments and the necessary conditions for optimality in the second order systems with delay]. Baku: ELM.
15. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.C. (2010) *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa-Darbu* [Qualitative theory of optimal control of the Goursat-Darboux systems]. Baku: ELM.
16. Mardanov, M.C. (2010) *Issledovanie optimal'nykh protsessov s zapazdyvaniyami pri nalichii ogranicheniy* [Study of optimal processes with delays with restrictions]. Baku: ELM.
17. Parayev, Yu.I. (2014) Optimal control of a two-sector economy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 3(28). pp. 4–11. (In Russian).
18. Parayev, Yu.I., Grekova, T.I. & Danliyuk, E.Yu. (2011) The analytical solution of the optimal control problem sector economy on a finite interval of time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 4(17). pp. 5–15. (In Russian).
19. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Optimizatsiya lineynykh sistem* [Optimization of linear systems]. Minsk: BSU.
20. Alakceyev, V.M., Tikhomirov, V.M. & Fomin, C.V. (1979) *Optimal'noe upravlenie* [Optimal control]. Moscow: Nauka.