ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2017 Управление, вычислительная техника и информатика № 40

# ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21
DOI: 10.17223/19988605/40/4

**А.М. Горцев, М.Е. Завгородняя**

## ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРА НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ СЛУЧАЙНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ В ПУАССОНОВСКОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ

Рассматривается простейший поток событий с параметром $\lambda$, функционирующий в условиях непродлевающегося мертвого времени, порождаемого текущим наблюдаемым событием. Случайное мертвое время распределено по экспоненциальному закону с параметром $\alpha$. Показано, что оценивание неизвестных параметров $\lambda$ и $\alpha$ ($\lambda \neq \alpha$) методом максимального правдоподобия либо методом моментов неосуществимо. Оценивание является возможным указанными методами только тогда, когда один из параметров является известным либо известно, что $\lambda = \alpha$. При этом метод максимального правдоподобия обеспечивает более приемлемые оценки, чем метод моментов.
**Ключевые слова:** простейший поток; непродлевающееся мертвое время; оценки параметров; метод максимального правдоподобия; метод моментов.

Распространенными математическими моделями физических явлений и процессов являются потоки событий. В частности, такие модели применяются при исследовании информационных потоков сообщений в телекоммуникационных системах, в спутниковых сетях связи и т.п. Задачи по оценке параметров случайных потоков событий возникают в оптических и лазерных системах, функционирующих в режиме счета фотонов. В большинстве публикаций авторы рассматривают математические модели потоков событий, когда события потока доступны наблюдению. Однако на практике возникают ситуации, когда наступившее событие влечет за собой ненаблюдаемость последующих событий. Причиной ненаблюдаемости выступает мертвое время регистрирующих приборов [1, 2], в течение которого зарегистрированное событие обрабатывается; другие же события, поступившие в этот период, теряются. Регистрирующие приборы при этом делятся на два вида: с непродлевающимся мертвым временем и продлевающимся [Там же]. Задачи по оценке параметров и состояний потока событий в условиях наличия мертвого времени фиксированной длительности рассматривались в работах [3–33]. При этом в [3, 5–8, 10, 12–16, 18–31] получены результаты для непродлевающегося мертвого времени, в [4, 9, 11, 17] – для продлевающегося.

При непродлевающемся мертвом времени фиксированной длительности $T$ решены задачи по нахождению оценки $\hat{T}$: в [3] – для пуассоновского потока, в [5, 6] – для синхронного альтернирующего потока, в [7, 8, 10] – для асинхронного альтернирующего потока, в [12] – для синхронного потока, в [13–15] – для асинхронного потока, в [16, 18] – для полусинхронного потока, в [19–21] – для обобщенного асинхронного потока, в [22, 23] – для обобщенного полусинхронного потока, в [24, 25] – для MAP-потока, в [26, 27] – для модулированного синхронного потока, в [28, 29] – для модулированного обобщенного полусинхронного потока, в [30–33] – для модулированного MAP-потока; при продлевающемся мертвом времени фиксированной длительности $T$ – в [4] (для пуассоновского потока), в [9] – для альтернирующего асинхронного потока, в [11] – для синхронного потока, в [17] – для полусинхронного потока.

Однако достаточно открытым остается вопрос изучения потоков событий, когда мертвое время является случайной величиной с тем или иным законом распределения. В настоящей статье в текущем времени строятся оценки параметров наблюдаемого потока, порожденного пуассоновским потоком, функционирующим в условиях непродлевающегося мертвого времени случайной длительности.

## 1. Математическая модель наблюдаемого потока

Рассматривается пуассоновский поток событий интенсивности $\lambda$. После каждого зарегистрированного в момент времени $t_k$ события наступает период мертвого времени случайной длительности, в течение которого другие события потока недоступны наблюдению и не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время). По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени случайной длительности и т.д. Принимается, что длительность мертвого времени распределена по экспоненциальному закону с параметром $\alpha$. Вариант возникновения ситуации приведен на рис. 1, где прямоугольниками обозначены периоды мертвого времени длительности $T_1$, $T_2$,…; $t_1$, $t_2$,… – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

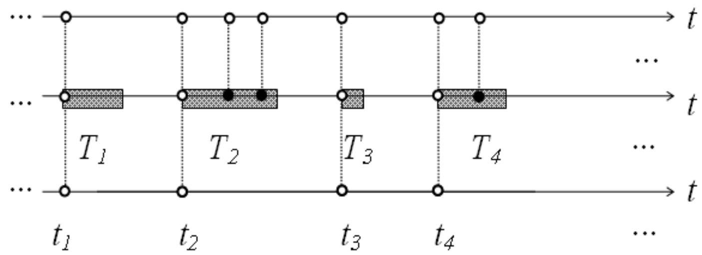


Рис.1. Формирование наблюдаемого потока событий

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на полуинтервале наблюдения $(t_0, t]$, где $t_0$ – начало наблюдений, $t$ – окончание наблюдений, пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$.

Предполагается, что параметры наблюдаемого потока $\lambda$ и $\alpha$ являются неизвестными. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени $t$) на основании выборки $t_1$, $t_2$, .., $t_n$ наблюденных моментов наступления событий потока осуществить методом максимального правдоподобия и методом моментов построение оценок $\hat{\lambda}$ и $\hat{\alpha}$ и произвести сравнение качества полученных оценок.

## 2. Оценки максимального правдоподобия параметров λ и α

Обозначим через $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k$ = 1,2…, значение длительности $k$-го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k \geq 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятности значений длительности $k$-го интервала есть $p_\alpha(\tau_k) = p_\alpha(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого $k$ (индекс $\alpha$ подчеркивает, что плотность вероятности зависит от случайной длительности мертвого времени) в наблюдаемом потоке событий. В силу этого момент времен $t_k$ без потери общности можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$. В [3] получено выражение для плотности вероятности $p(\tau \mid T)$, когда длительность мертвого времени является детерминированной величиной:

$$p(\tau \mid T) = 0, \tau < T, \ p(\tau \mid \mathrm{T}) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(\tau - \mathrm{T})}, \ \tau \geq T. \tag{1}$$

Тогда плотность вероятности $p_\alpha(\tau)$ запишется в виде

$$p_\alpha(\tau) = \int_0^\tau p(T) p(\tau \mid T) dT. \tag{2}$$

Подставляя в (2) выражение (1) и учитывая, что $p(T) = \alpha e^{-\alpha T}$, находим

$$p_\alpha(\tau) = \frac{\alpha\lambda}{\lambda - \alpha}\left(e^{-\alpha\tau} - e^{-\lambda\tau}\right), \ \tau \geq 0. \tag{3}$$

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1, \ldots, \tau_n = t_{n+1} - t_n$, $\tau_1 \geq 0, \ldots$, $\tau_n \geq 0$ – последовательность измеренных в результате наблюдения за потоком в течение полуинтервала наблюдения (0, $t$] значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. В силу предпосылок последовательность $\{\tau_k\}$, $k = \overline{1, n}$, образует конкретную реализацию выборки из совокупности независимых случайных величин. Тогда функция правдоподобия примет вид

$$L(\alpha,\lambda|\tau_1,...,\tau_n)=\left(\frac{\lambda\alpha}{\lambda-\alpha}\right)^n\prod_{k=1}^{n}\left(e^{-\alpha\tau_k}-e^{-\lambda\tau_k}\right). \tag{4}$$

Здесь возможны три варианта: $\lambda>\alpha$, $\lambda=\alpha$, $\lambda<\alpha$ ($\lambda>0$, $\alpha>0$).

Рассмотрим вариант $\lambda>\alpha$. Тогда, логарифмируя (4), после чего взяв первые производные по $\lambda$ и $\alpha$, получим систему уравнений правдоподобия для определения оценок $\hat{\lambda},\hat{\alpha}$

$$-\frac{n\alpha}{\lambda(\lambda-\alpha)}+\sum_{k=1}^{n}\tau_k\frac{e^{\alpha\tau_k}}{e^{\lambda\tau_k}-e^{\alpha\tau_k}}=0, \tag{5}$$

$$\frac{n\lambda}{\alpha(\lambda-\alpha)}-\sum_{k=1}^{n}\tau_k\frac{e^{\lambda\tau_k}}{e^{\lambda\tau_k}-e^{\alpha\tau_k}}=0. \tag{6}$$

Преобразовывая (5), (6), находим

$$\lambda+\alpha=\hat{\tau}\alpha\lambda, \tag{7}$$

$$\frac{n}{\alpha[(2/\hat{\tau})-\alpha]\hat{\tau}}+\sum_{k=1}^{n}\tau_k\left[\exp\left\{\alpha\tau_k\frac{\alpha-(2/\hat{\tau})}{\alpha-(1/\hat{\tau})}\right\}-1\right]^{-1}=0. \tag{8}$$

В (7), (8) величина $\hat{\tau}=(1/n)\sum_{k=1}^{n}\tau_k$. Отметим, что уравнение (8) есть уравнение относительно $\alpha$, решение которого определяет оценку $\hat{\alpha}$. Подстановкой $\hat{\alpha}$ в уравнение (7) находится оценка $\hat{\lambda}$. Если решение уравнений (7), (8) существует, то $\hat{\alpha}<(2/\hat{\tau})$, $\hat{\lambda}>(2/\hat{\tau})$.

Эквивалентные преобразования уравнения (5), (6) приводят к уравнениям

$$\lambda+\alpha=\hat{\tau}\alpha\lambda, \tag{9}$$

$$\frac{n}{\lambda[(2/\hat{\tau})-\lambda]\hat{\tau}}+\sum_{k=1}^{n}\tau_k\left[\exp\left\{\lambda\tau_k\frac{\lambda-(2/\hat{\tau})}{\lambda-(1/\hat{\tau})}\right\}-1\right]^{-1}=0. \tag{10}$$

Уравнение (10) есть уравнение относительно $\lambda$, решение которого определяет оценку $\hat{\lambda}$. Подстановкой $\hat{\lambda}$ в уравнение (9) находится оценка $\hat{\alpha}$. Если решение уравнений (9), (10) существует, то $\hat{\alpha}<(2/\hat{\tau})$, $\hat{\lambda}>(2/\hat{\tau})$.

**Замечание 1.** Уравнения (7), (8) и уравнения (9), (10) полностью идентичны.

**Замечание 2.** Аналогичный результат получается для варианта $\lambda<\alpha$, за исключением того что $\hat{\alpha}>(2/\hat{\tau})$, $\hat{\lambda}<(2/\hat{\tau})$.

Рассмотрим вариант $\alpha=\lambda$. Тогда (4) выпишется в виде

$$L(\alpha=\lambda\mid\tau_1,...,\tau_n)=\lambda^{2n}\exp\left\{-\lambda\sum_{k=1}^{n}\tau_k\right\}\prod_{k=1}^{n}\tau_k .$$

При этом из уравнения правдоподобия находится оценка $\hat{\lambda}=2/\hat{\tau}$.

**Теорема 1.** Метод максимального правдоподобия вне зависимости от соотношения неизвестных параметров $\lambda$ и $\alpha$ обеспечивает оценки $\hat{\lambda}$ и $\hat{\alpha}$ в виде $\hat{\alpha}=\hat{\lambda}=2/\hat{\tau}$, т.е. его работоспособность распространяется только на вариант $\alpha=\lambda$.

***Доказательство.*** Рассмотрим вариант $\lambda>\alpha$. В силу идентичности уравнений (8), (10) выпишем их в виде

$$\frac{n}{x[(2/\hat{\tau})-x]\hat{\tau}}+\sum_{k=1}^{n}\tau_k\left[\exp\left\{x\tau_k\frac{x-(2/\hat{\tau})}{x-(1/\hat{\tau})}\right\}-1\right]^{-1}=0. \tag{11}$$

Пусть $x^*$ – корень уравнения (11). Тогда $\alpha^* = x^*$ – корень уравнения (8). С другой стороны, $\lambda^* = x^*$ – корень уравнения (10). Таким образом, имеем $\alpha^* = \lambda^*$. Тогда из (7) следует $\hat{\lambda} = \alpha^*/(\hat{\tau}\alpha^* - 1)$, из (9) следует $\hat{\alpha} = \lambda^*/(\hat{\tau}\lambda^* - 1)$. Так как $\alpha^* = \lambda^*$, то $\hat{\lambda} = \hat{\alpha}$. Из уравнений (7), (8) вытекает $\hat{\alpha} < (2/\hat{\tau})$, $\hat{\lambda} > (2/\hat{\tau})$. Тогда, так как $\hat{\alpha} = \hat{\lambda}$, имеем $\hat{\lambda} < (2/\hat{\tau})$, $\hat{\lambda} > (2/\hat{\tau})$, поэтому $\hat{\alpha} = \hat{\lambda} = (2/\hat{\tau})$ – единственная точка, в которой уравнения (7), (8), а также уравнения (9), (10) не противоречивы.

Аналогично рассматривается вариант $\lambda < \alpha$. Теорема 1 доказана.

## 3. ММ-оценки параметров $\lambda$ и $\alpha$

Получим оценки параметров $\lambda$ и $\alpha$ методом моментов. Теоретическое среднее значение длительности интервала между соседними моментами наступления событий наблюдаемого потока (начальный момент первого порядка):

$$T_1 = \int_0^\infty \tau\, p_\alpha(T) d\tau = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\lambda}.$$

Оценка $\hat{T}_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tau_k = \hat{\tau}_1 \quad (\hat{\tau}_1 = \hat{\tau})$.

Начальный момент второго порядка

$$T_2 = \int_0^\infty \tau^2 p_\alpha(T) d\tau = 2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Оценка $\hat{T}_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tau_k^2 = \hat{\tau}_2$. Уравнения моментов при этом примут вид

$$\lambda + \alpha = \hat{\tau}_1\alpha\lambda, \; 2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = \hat{\tau}_2\alpha^2\lambda^2. \tag{12}$$

Преобразовывая (12), находим

$$\lambda = \alpha/[\hat{\tau}_1\alpha - 1], \; [\hat{\tau}_1^2 - (1/2)\hat{\tau}_2]\alpha^2 - \hat{\tau}_1\alpha + 1 = 0. \tag{13}$$

Решением квадратного уравнения (13) являются корни $\alpha_1$ и $\alpha_2$, которые определяют оценки $\hat{\alpha}_1 = \alpha_1$, $\hat{\alpha}_2 = \alpha_2$. В свою очередь, оценки $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$ путем подстановки в первое уравнение (13) определяют соответствующие оценки $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$.

Эквивалентные преобразования уравнения (12) приводят к уравнениям

$$\alpha = \lambda/[\hat{\tau}_1\lambda - 1], \; [\hat{\tau}_1^2 - (1/2)\hat{\tau}_2]\lambda^2 - \hat{\tau}_1\lambda + 1 = 0. \tag{14}$$

Решением квадратного уравнения (14) являются корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$, которые определяют оценки $\hat{\lambda}_1 = \lambda_1$, $\hat{\lambda}_2 = \lambda_2$. В свою очередь, оценки $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ путем подстановки в первое уравнение (14) определяют соответствующие оценки $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$.

**Замечание 3.** Уравнения (13) и (14) полностью идентичны.

**Теорема 2.** Решение уравнений моментов (12) не существует.

***Доказательство.*** В силу идентичности уравнений (13), (14), полученных из (12), выпишем квадратное уравнение в виде

$$\psi(x) = [\hat{\tau}_1^2 - (1/2)\hat{\tau}_2]x^2 - \hat{\tau}_1 x + 1 = 0. \tag{15}$$

Корнями уравнения (15) являются

$$x_1 = \frac{\hat{\tau}_1 - \sqrt{2\hat{\tau}_2 - 3\hat{\tau}_1^2}}{2\hat{\tau}_1^2 - \hat{\tau}_2}, \qquad x_2 = \frac{\hat{\tau}_1 + \sqrt{2\hat{\tau}_2 - 3\hat{\tau}_1^2}}{2\hat{\tau}_1^2 - \hat{\tau}_2}.$$

При этом должно выполняться $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, так как $\alpha > 0$, $\lambda > 0$.

Если дискриминант $D = 2\hat{\tau}_2 - 3\hat{\tau}_1^2 < 0$, то решение уравнения (15) не существует. Случай $D = 0$, который приводит к оценкам $\hat{\alpha} = \hat{\lambda} = (2/\hat{\tau})$, имеет нулевую вероятность. Таким образом, если $D \leq 0$, то решение уравнений (12) не существует. Рассмотрим случай $D > 0$: 1) пусть $d = \hat{\tau}_1^2 - (1/2)\hat{\tau}_2 < 0$, тогда решение уравнений (12) не существует; 2) случай $d = 0$ имеет нулевую вероятность. Таким образом, если $D > 0$ и $d \leq 0$, то решение уравнений (12) не существует.

Рассмотрим последнюю ситуацию: $D > 0$ и $d > 0$. Так как $x_1$ – корень уравнения (13), то $\alpha_1 = x_1$. С другой стороны, $x_1$ – корень уравнения (14), тогда $\lambda_1 = x_1$, при этом $(1/\hat{\tau}_1) < x_1 < (2/\hat{\tau}_1)$. Отсюда следует $\alpha_1 = \lambda_1$. Из первого равенства системы (13) находим $\hat{\lambda}_1 = \alpha_1/[\hat{\tau}_1\alpha_1 - 1]$, из первого равенства системы (14) получаем $\hat{\alpha}_1 = \lambda_1/[\hat{\tau}_1\lambda_1 - 1]$. Так как $\alpha_1 = \lambda_1$, то $\hat{\alpha}_1 = \hat{\lambda}_1$. Из уравнений (13) следует $(1/\hat{\tau}_1) < \hat{\alpha}_1 < (2/\hat{\tau}_1)$, $\hat{\lambda}_1 > (2/\hat{\tau}_1)$. Из уравнений (14) вытекает $(1/\hat{\tau}_1) < \hat{\lambda}_1 < (2/\hat{\tau}_1)$, $\hat{\alpha}_1 > (2/\hat{\tau}_1)$. Так как уравнения (13), (14) эквивалентны, то единственная точка, которая одновременно удовлетворяет этим уравнениям, есть $\hat{\alpha}_1 = \hat{\lambda}_1 = (2/\hat{\tau}_1)$. Последнее равенство возможно, если $D = 0$. Выполнение последнего равенства имеет нулевую вероятность, так что решения уравнений (12) не существует.

Аналогичное утверждение имеет место для корня $x_2$. Теорема 2 доказана.

Таким образом, при оценке неизвестных параметров $\lambda$ и $\alpha$ метод моментов неработоспособен.

**Замечание 4.** Для варианта $\alpha = \lambda$ имеем $T_1 = (2/\alpha)$. Тогда уравнение моментов принимает вид $(2/\alpha) = \hat{\tau}_1$, откуда следует $\hat{\alpha} = (2/\hat{\tau}_1)$.

## 4. МП- и ММ-оценки параметра α

Пусть параметр $\lambda$ является известным.

***МП-оценка параметра* α.** Для оценки параметра $\alpha$ имеем уравнение (6). Обозначим левую часть уравнения (6) через $f(\alpha)$. После преобразования уравнение (6) примет вид

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\lambda}{\alpha(\lambda-\alpha)} - \tau_k\frac{e^{\lambda\tau_k}}{e^{\lambda\tau_k} - e^{\alpha\tau_k}}\right\} = 0,\ \ \alpha \geq 0\,,$$

$$\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha) = \infty, \qquad \lim_{\alpha\to\lambda} f(\alpha) = \frac{n}{2\lambda}(2 - \lambda\hat{\tau}_1), \qquad \lim_{\alpha\to\infty} f(\alpha) = -\,0. \tag{16}$$

**Замечание 5.** Функция $f(\alpha)$, по крайней мере, один раз пересекает ось абсцисс, т.е. решение уравнения (16) существует.

**Замечание 6.** Решение уравнения (16) возможно только численно.

***ММ-оценка параметра* α.** Для оценки параметра $\alpha$ имеем первое уравнение моментов (12), из которого получаем $\hat{\alpha} = \lambda/[\hat{\tau}_1\lambda - 1]$.

С целью установления качества получаемых оценок параметра $\alpha$ методом максимального правдоподобия и методом моментов поставлен статистический эксперимент.

Отдельный $j$-й эксперимент ($j=\overline{1,N}$) заключается в следующем: 1) при заданных значениях $\alpha$, $\lambda$ и заданном времени моделировании $T_m$ осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока; выходом имитационной модели является последовательность значений $\tau_1, \tau_2 \ldots, \tau_n$; 2) численно решается уравнение (16), т.е. находится оценка $\hat{\alpha}_{\text{МП}}^{(j)}$; 3) по первой формуле (14) находится оценка $\hat{\alpha}_{\text{ММ}}^{(j)}$; 4) осуществляется повторение $N$ раз шагов 1–3 для получения выборок достаточного объема.

Результатом выполнения описанного алгоритма являются две выборки ($\hat{\alpha}_{\text{МП}}^{(1)}, \ldots, \hat{\alpha}_{\text{МП}}^{(N)}$), ($\hat{\alpha}_{\text{ММ}}^{(1)}, \ldots, \hat{\alpha}_{\text{ММ}}^{(N)}$), на основании которых вычисляются выборочные средние

$$\hat{\bar{\alpha}}_{\text{МП}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{\alpha}_{\text{МП}}^{(j)}\,,\ \hat{\bar{\alpha}}_{\text{ММ}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{\alpha}_{\text{ММ}}^{(j)}$$

и выборочные вариации получаемых оценок

$$\hat{V}_{\text{МП}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\hat{\alpha}_{\text{МП}}^{(j)} - \alpha)^2\,,\ \hat{V}_{\text{ММ}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\hat{\alpha}_{\text{ММ}}^{(j)} - \alpha)^2\,,$$

где $\alpha$ – известное истинное значение оцениваемого параметра (это значение задается в исходных данных имитационной модели наблюдаемого потока).

Программа расчета реализована на языке программирования C# в среде Microsoft Visual Studio C#. При проведении статистического эксперимента выбраны следующие параметры имитационной ли: $\lambda = 1$, $\alpha = 2$. В табл. 1, 2 в качестве иллюстрации приведены результаты эксперимента. Результаты получены для $N = 100$.

Таблица 1

**Результаты статистического эксперимента $T_m \leq 60$**

| $T_m$ | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{\bar{\alpha}}_{МП}$ | 2,628 | 2,701 | 2,349 | 2,295 | 2,278 |
| $\hat{V}_{МП}$ | 3,274 | 3,561 | 1,474 | 1,016 | 0,734 |
| $\hat{\bar{\alpha}}_{ММ}$ | 63,135 | 3,806 | 2,685 | 2,501 | 2,352 |
| $\hat{V}_{ММ}$ | 359361,2 | 19,696 | 24,892 | 3,184 | 1,069 |
| $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$ | –359357,9 | –16,135 | –23,418 | –2,168 | –0,335 |

Таблица 2

**Результаты статистического эксперимента $100 \leq T_m \leq 500$**

| $T_m$ | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{\bar{\alpha}}_{МП}$ | 2,184 | 2,056 | 2,051 | 1,973 | 2,010 |
| $\hat{V}_{МП}$ | 0,350 | 0,137 | 0,063 | 0,061 | 0,040 |
| $\hat{\bar{\alpha}}_{ММ}$ | 2,211 | 2,104 | 2,080 | 1,971 | 2,023 |
| $\hat{V}_{ММ}$ | 0,446 | 0,255 | 0,096 | 0,076 | 0,050 |
| $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$ | –0,096 | –0,118 | –0,033 | –0,015 | –0,010 |

В первой строке таблиц указано время моделирования $T_m$ (в табл. 1: $T_m = 20, 30, \ldots, 60$; в табл. 2: $T_m = 100, 200, \ldots, 500$); во второй и четвертой строках приведены значения выборочных средних $\hat{\bar{\alpha}}_{МП}$ и $\hat{\bar{\alpha}}_{ММ}$; в третьей и пятой – значения выборочных вариаций $\hat{V}_{МП}$ и $\hat{V}_{ММ}$; в шестой – значения разностей $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$.

Анализ численных результатов показывает, что в смысле введенного критерия (выборочная вариация оценки $\hat{\alpha}$) оценки $\hat{\alpha}_{МП}$ всегда лучше оценок $\hat{\alpha}_{ММ}$. При этом качество оценок улучшается при увеличении времени моделирования $T_m$, что является естественным.

## Заключение

По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы: 1) оценивание неизвестных параметров наблюдаемого потока $\alpha$, $\lambda$ по наблюдениям моментов наступления событий методом максимального правдоподобия либо методом моментов является невозможным; 2) в случае, когда известно, что $\lambda = \alpha$, либо известен параметр $\lambda$ (параметр $\alpha$), осуществимо оценивание параметра $\alpha$ (параметра $\lambda$), при этом метод максимального правдоподобия обеспечивает более приемлемые оценки, чем метод моментов.

ЛИТЕРАТУРА


1. Курочкин С.С. Многомерные статистические анализаторы. М. : Атомиздат, 1968. 446 с.
2. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.

3. Горцев А.М., Климов И.С. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости // Радиотехника. 1991. № 12. С. 3–7.
4. Горцев А.М., Климов И.С. Оценивание периода ненаблюдаемости и интенсивности пуассоновского потока событий // Радиотехника. 1996. № 2. С. 8–11.
5. Горцев А.М., Нежельская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2003. № 6. С. 232–239.
6. Василевская Т.П., Горцев А.М., Нежельская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо непроявлением событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. Приложение. № 9 (II). С. 129–138.
7. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Известия высших учебных заведений. Физика. 2005. № 10. С. 35–49.
8. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 137–145.
9. Горцев А.М., Паршина М.Е. Оценивание параметров альтернирующего потока событий в условиях «мертвого времени» // Известия высших учебных заведений. Физика. 1999. № 4. С. 8–13.
10. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10, № 3. С. 273–280.
11. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
12. Горцев А.М., Нежельская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. № 10. С. 8–16.
13. Vasileva L.A., Gortsev A.M. Estimation of the dead time of an asynchronous double stochastic flow of events under incomplete observability // Automation and Remote Control. 2003. V. 64, No.12. P. 1890–1898.
14. Vasileva L.A., Gortsev A.M. Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability // Automation and Remote Control. 2002. V. 63, No. 3. P. 511–515.
15. Горцев А.М., Куснатдинов Р.Т. Оценивание состояний МС-потока событий при его частичной наблюдаемости // Известия высших учебных заведений. Физика. 1998. № 4. С. 22–30.
16. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
17. Горцев А.М., Нежельская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлевающемся мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
18. Нежельская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
19. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
20. Леонова М.А., Нежельская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
21. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
22. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.
23. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
24. Gortsev A.M., Solov'ev A.A. Joint probability density of interarrival interval of a flow of physical events with unextendable dead time period // Russian Physics Journal. 2014. V. 57, No. 7. P. 973–983.
25. Горцев А.М., Соловьев А.А. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлевающегося мертвого времени в потоке физических событий // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 11. С. 141–149.
26. Сиротина М.Н., Горцев А.М. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1 (34). С. 50–64.
27. Gortsev A., Sirotina A. Joint probability density function of modulated synchronous flow interval duration under conditions of fixed dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 41–52.
28. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1 (26). С. 13–24.
29. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 13–27.

30. Nezhelskaya L. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 342–350.
31. Нежельская Л.А. Условия рекуррентности потока физических событий при непродлевающемся мертвом времени // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 12. С. 168–175.
32. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
33. Nezhel'skaya L. Estimation of the unextendable dead time period in a flow of physical events by the method of maximum likelihood // Russian Physics Journal. 2016. V. 59, No. 5. P. 651–662.

***Горцев Александр Михайлович,*** д-р техн. наук, профессор. E-mail: gam@fpmk.tsu.ru
Национальный исследовательский Томский государственный университет
***Завгородняя Мария Евгеньевна,*** канд. техн. наук. E-mail: mari.zavgor@mail.ru
Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 21 марта 2017 г.

*Gortsev Alexander M., Zavgorodnyaya Maria E.* (National Research Tomsk State University, Russian Federation).
**Estimation of the parameter of unextendable dead time random duration in the Poisson flow of events.**
**Keywords:** the simplest flow; an unextendable dead time; parameter estimates; the maximum likelihood method; the method of moments.

We consider a Poisson flow of intensity events λ. After each event registered at time tk, a dead time period of random duration occurs during which other events of the flow are unavailable to the observation and do not cause it to be prolonged (unextendable dead time). At the end of the dead time period, the first event that occurred again creates a period of dead time of random duration, etc. It is assumed that the dead time duration is distributed exponentially with the parameter α.

The stationary mode of operation of the observed event flow is studied, therefore we neglect the transient processes on the observation half-line $(t_0, t]$, where $t_0$ is the beginning of the observations, $t$ is the end of the observations, then without loss of generality we can set $t_0 = 0$.

It is assumed that the parameters of the observed flow are unknown. It is necessary, at the end of the observations (at time $t$), based on the sample $t_1, t_2, .., t_n$ the observed moments of the onset of the flow events, to make the maximum likelihood method and the method of moments constructing the estimates $\hat{\lambda}$, $\hat{\alpha}$ and to compare the quality of the estimates obtained.

The likelihood function is written out

$$L(\alpha, \lambda|\tau_1,...,\tau_n) = \left(\frac{\lambda\alpha}{\lambda-\alpha}\right)^n \prod_{k=1}^{n}\left(e^{-\alpha\tau_k} - e^{-\lambda\tau_k}\right)$$

and likelihood equations

$$-\frac{n\alpha}{\lambda(\lambda-\alpha)} + \sum_{k=1}^{n}\tau_k \frac{e^{\alpha\tau_k}}{e^{\lambda\tau_k} - e^{\alpha\tau_k}} = 0, \quad \frac{n\lambda}{\alpha(\lambda-\alpha)} - \sum_{k=1}^{n}\tau_k \frac{e^{\lambda\tau_k}}{e^{\lambda\tau_k} - e^{\alpha\tau_k}} = 0,$$

where, $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1,2,...,$ is the sequence of the values of the lengths of intervals between adjacent events of the flow measured during the observation of the flow during the observation interval $(0, t]$. It is shown that the maximum likelihood method, regardless of the ratio of the unknown parameters $\lambda$ and $\alpha$, provides estimates $\hat{\lambda}$ and $\hat{\alpha}$ in the form $\hat{\alpha} = \hat{\lambda} = 2/\hat{\tau}$, i.e. its performance only applies to the option $\alpha = \lambda$.

For the method of moments it is proved that the equations of moments

$$\lambda + \alpha = \hat{\tau}_1\alpha\lambda; \; 2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = \hat{\tau}_2\alpha^2\lambda^2$$

relatively unknown parameters and have no solution.

For the case of a known parameter $\lambda$, an unknown parameter $\alpha$ is estimated both by the maximum likelihood method and by the moment method. In this situation, the numerical results show the advantage of the maximum likelihood method.

## REFERENCES

1. Kurochkin, S.S. (1968) *Mnogomernye statisticheskie analizatory* [Multivariate statistical analyzers]. Moscow: Atomizdat.
2. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: University Press.
3. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) Otsenka intensivnosti puassonovskogo potoka sobytiy v usloviyakh chastichnoy ego nenablyudaemosti [Intensity estimation of the Poisson flow of events in condition of its incomplete observability]. *Radiotekhnika.* 12. pp. 3–7.
4. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Otsenivanie perioda nenablyudaemosti i intensivnosti puassonovskogo potoka sobytiy [The estimationof intensity process and period of unobservability of the Poisson flow of events]. *Radiotekhnika.* 2. pp. 8–11.
5. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Dead time period and parameter estimation of synchronous alternating flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Prilozhenie – Tomsk State University Journal. Supplement*. 6. pp. 232–239. (In Russian).
6. Vasilevskaya, T.P., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Dead time and parameters estimation of synchronousalternating flow with or without event manifestation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Prilozhenie – Tomsk State University Journal. Supplement*. 9. pp. 129–138.
7. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2005) Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal.* 10. pp. 35-49. DOI: 10.1007/s11182-006-0023-y

8. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) Dead time and parameter estimation of asynchronous alternating flow with additionalevent initiation. *Tomsk State University Journal*. 284. pp. 137–145. (In Russian).
9. Gortsev, A.M. & Parshina, M.E. (1999) Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of dead time. *Russian Physics Journal*. 4. pp. 8–13.
10. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (1997) Otsenka parametrov al'terniruyushchego potoka sobytiy pri uslovii ego chastichnoy nablyu-daemosti [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of particulate observability]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 10(3). pp. 273–280.
11. Bushlanov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control.* 69(9). pp. 1517-1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075
12. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radioengineering*. 10. pp. 8–16.
13. Vasileva, L.A. & Gortsev, A.M. (2003) Estimation of the dead time of an asynchronous double stochastic flow of events under incomplete observability. *Automation and Remote Control*. 64(12). pp. 1890–1898. DOI: 10.1023/B:AURC.0000008427.99676.df
14. Vasileva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control*. 63(3). pp. 511–515. DOI: 10.1023/A:1014718921138
15. Gortsev, A.M. & Kusnatdinov, R.T. (1998) Estimation of states of the MC-flow of events under its partial observation. *Russian Physics Journal*. 41(4). pp. 22–30.
16. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536–545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
17. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semi-synchronous twice-stochastic event flow in conditions of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(1). pp. 31–41. (In Russian).
18. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal state estimation of semi-synchronus flow in conditions of its incomplete observability. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal.* 269. pp. 95–98. (In Russian).
19. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) Joint probability density function of interval duration of generic asynchronous event flow in conditions of fixed dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 4(21). pp. 14–25. (In Russian).
20. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flowof events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2(23). pp. 54–63. (In Russian).
21. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Comparison of MP- and MM-estimations of dead time in generic asynchronous flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 4(25). pp. 32–42. (In Russian).
22. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time of generic semichronousflow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27–37. (In Russian).
23. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalizedsemi-synchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19–29. (In Russian).
24. Gortsev, A.M. & Solovyev, A.A. (2014) Joint probability density of interarrival interval of a flow of physical events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal.* 57(7). pp. 973–983. (In Russian).
25. Gortsev, A.M. & Solovyev, A.A. (2015) Maximum likelihood estimation of fixed dead time in physical flow of events. *Russian Physics Journal.* 58(11). pp. 141–149. (In Russian).
26. Sirotina, M.N. & Gortsev, A.M. (2016) Maxumum likelihood function estimation of dead time duration in modulated synchronous doubly stochastic flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 1(34). pp. 50–64. (In Russian).
27. Gortsev, A. & Sirotina, A. (2015) Joint probability density function of modulated synchronous flow interval duration under conditions of fixed dead time. *Communications in Computer and Information Science.* 564. pp. 41–52. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_4
28. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2014) Optimal states estimation of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in the condition of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 1(26). pp. 13–24.
29. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2015) Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science.* 564. pp. 13–27. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
30. Nezhelskaya, L. (2014) Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science.* 487. pp. 342–350. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_39
31. Nezhelskaya, L.A. (2015) Conditions for recurrence of flow of physical events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal.* 58(12). pp. 168–175. (In Russian). DOI: 10.1007/s11182-016-0727-6
32. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science.* 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_12
33. Nezhelskaya, L. (2016) Estimation of the unextendable dead time period in a flow of physical events by the method of maximum likelihood. *Russian Physics Journal.* 59(5). pp. 651–662. (In Russian). DOI: 10.1007/s11182-016-0818-4