ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2017 Управление, вычислительная техника и информатика № 40

УДК 336.51
DOI: 10.17223/19988605/40/8

**Г.А. Медведев**

# МОДЕЛЬ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ДОХОДНОСТИ ЛОНГСТАФФА–ШВАРТЦА И ЕЕ РАСШИРЕНИЕ

Рассматривается модель Лонгстаффа–Швартца как в пространстве латентных переменных состояний, так и в пространстве наблюдаемых (или оцениваемых) переменных состояний. Получены аналитические выражения для кривых доходности до погашения и форвардных кривых в обоих случаях. Предложено расширение модели на произвольную размерность пространства состояний. В рамках этого расширения предложен способ получения аналитических решений уравнений относительно функций временной структуры доходности, когда исходные уравнения динамики краткосрочной процентной ставки приводят к нелинейным системам уравнений Риккати относительно этих функций, не позволяющих известными методами получить аналитическое решение. Этот способ основан на очевидном утверждении, что если задан процесс краткосрочной процентной ставки, то соответствующая ему временная структура доходности не зависит от того, каким способом описывается пространство переменных состояния финансового рынка. Приводятся численные примеры.
**Ключевые слова:** временная структура доходности; краткосрочная процентная ставка; модель Лонгстаффа–Швартца; системы уравнений Риккати.

Временная структура бескупонной доходности является одной из востребованных характеристик, которая используется при определении стоимости финансовых активов. Однако до сих пор временные структуры в аналитической форме удавалось получить только для аффинных систем доходности, как правило, для однофакторных моделей. Поскольку однофакторные модели описывают ситуацию на финансовом рынке недостаточно точно, возникают модели с использованием большего числа факторов. Одной из первых таких моделей является двухфакторная модель Лонгстаффа–Швартца (1992). Она основана на использовании так называемых латентных (скрытых) факторов, т.е. переменных состояния, которые непосредственно на рынке не наблюдаются. Считается, что динамика этих факторов описывается процессами «с квадратным корнем» Кокса–Ингерсолла–Росса (CIR). Затем, если удается связать эти процессы с реально наблюдаемыми показателями, то можно придать анализу такой модели реальный смысл. Это свойство может быть использовано в более общих обстоятельствах, когда рассматривается модель с произвольным числом латентных факторов.

## 1. Модель Лонгстаффа–Швартца

Известной версией двухфакторной модели CIR является модель Лонгстаффа–Швартца [1]. В этой модели в качестве исходных переменных состояния выбираются два независимых процесса CIR, имеющих смысл неких ненаблюдаемых экономических факторов:

$$dx = (a - bx)dt + \sqrt{x}dW_1,$$
$$dy = (d - ey)dt + \sqrt{y}dW_2. \tag{1}$$

В дальнейшем считается, что взвешенная сумма этих факторов образует краткосрочную процентную ставку

$$r(t) = \alpha x(t) + \beta y(t), \tag{2}$$

где $\alpha$ и $\beta$ – неотрицательные константы. Использование исходных уравнений и формулы Ито позволяет написать

$$dr(t) = \alpha\, dx(t) + \beta\, dy(t) =$$
$$= [\alpha a + \beta d - bx(t) - ey(t)]dt + \alpha\sqrt{x(t)}\, dW_1(t) + \beta\sqrt{y(t)}\, dW_2(t)\,.$$

Заметим, что стационарные математические ожидания процессов $x(t)$ и $y(t)$ определяются равенствами $E[x(t)] = a/b$ и $E[y(t)] = d/e$. По тем же причинам квадрат $dr(t)$ имеет вид

$$(dr(t))^2 = \alpha^2 x(t)\,dt + \beta^2\,y(t)\,dt.$$

Локальная (по времени) дисперсия изменения процентной ставки за интервал времени $(t,\ t + dt)$ на единицу времени равна

$$V(t) = \alpha^2 x(t) + \beta^2\,y(t). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что между прями $(x, y)$ и $(r, V)$ имеется взаимно однозначная связь, определяемая соотношениями

$$r = \alpha x + \beta y, \qquad V = \alpha^2 x + \beta^2 y,$$
$$x = \frac{\beta r - V}{\alpha(\beta-\alpha)}, \qquad y = \frac{V - \alpha r}{\beta(\beta-\alpha)}. \tag{4}$$

Поэтому более естественно рассматривать в качестве переменных состояния не ненаблюдаемые неопределенные «экономические факторы» $(x, y)$, а имеющие вполне определенный смысл процентную ставку $r$ и ее локальную дисперсию $V$. Однако следует заметить, что если областью задания переменных $(x, y)$ является весь первый квадрант плоскости $(X, Y)$, то переменные $(r, V)$ принимают значения только в ограниченной области первого квадранта, определяемой неравенствами $\alpha r < V < \beta r$ (или $V/\beta < r < V/\alpha$), $0 < \alpha < \beta$, в которой малым ставкам могут соответствовать только малые дисперсии (или малые дисперсии имеют только малые процентные ставки). Имея ввиду существующее линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} r \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \tag{5}$$

вместо системы уравнений (1) по формуле Ито получим соответствующую систему для $(r, V)$:

$$d\begin{pmatrix} r \\ V \end{pmatrix} = K\left(\theta - \begin{pmatrix} r \\ V \end{pmatrix}\right)dt + \sigma(r,V)\,d\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$K = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} e\alpha - b\beta & b-e \\ \alpha\beta(e-b) & b\alpha - e\beta \end{pmatrix},\ \theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a/b \\ d/e \end{pmatrix},$$

$$\sigma(r,V) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{(\beta r - V)}{\alpha(\beta-\alpha)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\dfrac{(V-\alpha r)}{\beta(\beta-\alpha)}} \end{pmatrix}.$$

Для определения дифференциальных уравнений для функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ применим технику, описанную в [2]. Для получения системы уравнений (4), (5) из [2] воспользуемся разложением по переменным $r$ и $V$ элементов стохастического дифференциального уравнения (6). При составлении уравнений (5) из [2] весовые коэффициенты $\phi_i$ выбирались таким образом, чтобы было выполнено необходимое условие $\lim\limits_{\tau\to 0} y(\tau, x) = r$. Так что если в качестве переменных состояния принимаются $(r, V)$, то $\phi_r = 1$, а $\phi_V = 0$. Если в качестве переменных состояния используются $(x, y)$, то $\phi_x = \alpha$, а $\phi_y = \beta$. Заметим, что

$$K\theta = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta d \\ \alpha^2 a + \beta^2 d \end{pmatrix},\ K_r = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} e\alpha - b\beta \\ \alpha\beta(e-b) \end{pmatrix},\ K_V = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} b-e \\ b\alpha - e\beta \end{pmatrix}.$$

$$\sigma(r,\ V)\sigma(r,\ V)^{\mathrm{T}} = \beta_0 + \beta_r r + \beta_V V,$$

$$\beta_0 = 0,\ \beta_r = -\alpha\beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha+\beta \end{pmatrix},\ \beta_V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma(r,\ V)\lambda(r,\ V)^{\mathrm{T}} = \xi + \eta_r r + \eta_V V,$$

$$\xi = 0,\ \eta_r = \frac{1}{\beta-\alpha}\begin{pmatrix} \beta\lambda_r - \alpha\lambda_V \\ \alpha\beta(\lambda_r - \lambda_V) \end{pmatrix},\ \eta_V = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} \lambda_r - \lambda_V \\ \alpha\lambda_r - \beta\lambda_V \end{pmatrix}.$$

Здесь предполагается, что рыночные цены риска определяются соотношением $\lambda(r, V) = (\lambda_r, \lambda_V)\sigma(r, V)$, где $\lambda_r$ и $\lambda_V$ – константы. Подставляя полученные разложения в уравнения (4), (5) из [2], находим систему уравнений для функций временной структуры $A(\tau)$, $B_r(\tau)$ и $B_V(\tau)$:

$$A'(\tau) = -(\alpha a + \beta d)\, B_r(\tau) - (\alpha^2 a + \beta^2 d) B_V(\tau), \quad A(0) = 0, \tag{7}$$

$$B_r'(\tau) = 1 - B(\tau)^{\mathrm{T}}(\eta_r + K_r) - B(\tau)^{\mathrm{T}}\beta_r B(\tau)/2 = \tag{8}$$

$$= 1 - \frac{1}{\alpha-\beta}((e\alpha - b\beta - \beta\lambda_r + \alpha\lambda_V)B_r(\tau) + \alpha\beta(e - b - \lambda_r + \lambda_V)B_V(\tau)) +$$

$$+ \alpha\beta B_V(\tau)(B_r(\tau) + (\alpha+\beta)B_V(\tau)/2), \quad B_r(0) = 0,$$

$$B_V'(\tau) = -B(\tau)^{\mathrm{T}}(\eta_V + K_V) - \frac{1}{2}B(\tau)^{\mathrm{T}}\beta_V B(\tau) = \tag{9}$$

$$= -\frac{1}{\alpha-\beta}((b - e + \lambda_r - \lambda_V)B_r(\tau) + (b\alpha - e\beta + \alpha\lambda_r - \beta\lambda_V)B_V(\tau)) -$$

$$-\frac{1}{2}B_r(\tau)^2 - (\alpha+\beta)B_r(\tau)B_V(\tau) - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)B_V(\tau)^2, \quad B_V(0) = 0.$$

К сожалению, полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений для $(B_r, B_V)$ относится к системам уравнений Риккати, является нелинейной и не известно какого-либо способа для получения ее аналитического решения. Вместе с тем задача определения временной структуры рассматриваемой модели при использовании исходных ненаблюдаемых переменных состояния $(x, y)$ имеет аналитическое решение. Действительно, для системы (1) получаются следующие данные для составления уравнений (4), (5) из [2]:

$$K = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} a/b \\ d/e \end{pmatrix}, K\theta = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix},$$

$$\sigma(x,y)\sigma^{\mathrm{T}}(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y,$$

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если положить, что рыночные цены риска определяются соотношением $\lambda(x, y) = (\lambda_x, \lambda_y)\sigma(x, y)$, где $\lambda_x$ и $\lambda_y$ – константы, тогда

$$\sigma(x,y)\lambda^{\mathrm{T}}(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda_x x \\ \lambda_y y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_x \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_y \end{pmatrix} y,$$

$$\xi = 0, \quad \eta_x = \begin{pmatrix} \lambda_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_y = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_y \end{pmatrix}.$$

Система дифференциальных уравнений (4), (5) из [2] для этих данных имеет вид

$$A'(\tau) = -a\, B_x(\tau) - d\, B_y(\tau), \quad A(0) = 0, \tag{10}$$

$$B_x'(\tau) = \alpha - (\lambda_x + b)B_x(\tau) - B_x^2(\tau)/2, \quad B_x(0) = 0, \tag{11}$$

$$B_y'(\tau) = \beta - (\lambda_y + e)B_y(\tau) - B_y^2(\tau)/2, \quad B_y(0) = 0. \tag{12}$$

Два последних уравнения уже не составляют систему, а являются независимыми скалярными уравнениями Риккати, имеющими аналитическое решение

$$B_x(\tau) = \alpha\left(\frac{\varepsilon_x}{e^{\varepsilon_x\tau} - 1} + J_x\right)^{-1}, \quad \varepsilon_x = \sqrt{(b + \lambda_x)^2 + 2\alpha}, \quad J_x = (\varepsilon_x + \lambda_x + b)/2; \tag{13}$$

$$B_y(\tau) = \beta\left(\frac{\varepsilon_y}{e^{\varepsilon_y\tau} - 1} + J_y\right)^{-1}, \quad \varepsilon_y = \sqrt{(e + \lambda_y)^2 + 2\beta}, \quad J_y = (\varepsilon_y + \lambda_y + e)/2. \tag{14}$$

Подстановка этих выражений в уравнение для функции $A(\tau)$ приводит к следующему результату:

$$A(\tau) = -a\alpha \frac{J_x\tau - \ln[1+(e^{\varepsilon_x\tau}-1)J_x/\varepsilon_x])}{J_x(J_x-\varepsilon_x)} -$$

$$-d\beta \frac{J_y\tau - \ln[1+(e^{\varepsilon_y\tau}-1)J_y/\varepsilon_y]}{J_y(J_y-\varepsilon_Y)}. \quad (15)$$

Наконец, кривая доходности вычисляется в аналитическом виде

$$y(\tau \mid x, y) = \frac{xB_x(\tau) + yB_y(\tau) - A(\tau)}{\tau} = \quad (16)$$

$$= \frac{x\alpha}{\tau}\left(\frac{\varepsilon_x}{e^{\varepsilon_x\tau}-1} + J_x\right)^{-1} + \frac{y\beta}{\tau}\left(\frac{\varepsilon_y}{e^{\varepsilon_y\tau}-1} + J_y\right)^{-1} +$$

$$+ a\alpha \frac{J_x\tau - \ln[1+(e^{\varepsilon_x\tau}-1)J_x/\varepsilon_x]}{J_x(J_x-\varepsilon_x)\tau} + d\beta \frac{J_y\tau - \ln[1+(e^{\varepsilon_y\tau}-1)J_y/\varepsilon_y]}{J_y(J_y-\varepsilon_Y)\tau}.$$

Для получения форвардной кривой можно воспользоваться формулой (6) из [2], что дает

$$f(\tau \mid x, y) = x\frac{dB_x(\tau)}{d\tau} + y\frac{dB_y(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} = \quad (17)$$

$$= x\alpha + y\beta + (a - xb - x\lambda_x)B_x(\tau) +$$

$$+ (d - ye - y\lambda_y)B_y(\tau) - x\,B_x^2(\tau)/2 - y\,B_y^2(\tau)/2,$$

где функции $B_x(\tau)$ и $B_y(\tau)$ явно вычисляются по формулам (13) и (14).

Заметим, что

$$\lim_{\tau\to 0} y(\tau \mid x, y) = \lim_{\tau\to 0} f(\tau \mid x, y) = x\alpha + y\beta = r, \quad (18)$$

$$\lim_{\tau\to\infty} y(\tau \mid x, y) = \lim_{\tau\to\infty} f(\tau \mid x, y) = \frac{a\alpha}{J_x} + \frac{d\beta}{J_y}. \quad (19)$$

Вместе с тем, какими бы переменными состояния ни описывалось поведение процесса процентных ставок в рассматриваемой модели, доходность до погашения для некоторого срока до погашения $\tau$ должна быть одинаковой для любых способов описания процесса процентных ставок, если преобразование переменных состояний задает взаимно однозначное соответствие переменных. В нашем случае для переменных состояния $(x, y)$ и $(r, V)$ это имеет место, поскольку матрица линейного преобразования (5) является невырожденной. Следовательно, должно выполняться следующее равенство:

$$y(\tau \mid x, y) = y(\tau \mid r, V).$$

Поэтому для получения аналитического выражения для доходности до погашения $y(\tau \mid r, V)$ достаточно выразить в формуле (13) переменные состояния $x$ и $y$ через $r$ и $V$ по формуле (4). Тогда после упрощения получим

$$y(\tau \mid r, V) = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\alpha^2 B_y(\tau) - \beta^2 B_x(\tau)}{\alpha\beta(\alpha-\beta)} r - \frac{\alpha B_y(\tau) - \beta B_x(\tau)}{\alpha\beta(\alpha-\beta)} V - A(\tau)\right), \quad (20)$$

где функции временной структуры $A(\tau)$, $B_x(\tau)$ и $B_y(\tau)$ вычисляются по формулам (13)–(15). Выражение доходности до погашения (20) предпочтительнее формулы (16), поскольку в нем используются переменные $r$ и $V$, которые можно наблюдать или оценивать, в то время как в (16) используются ненаблюдаемые переменные $x$ и $y$, не имеющие явной финансовой трактовки.

Аналогично для получения аналитического выражения для форвардной кривой $f(\tau \mid r, V)$ достаточно в формуле (17) переменные состояния $x$ и $y$ выразить через $r$ и $V$ по формулам (4). Это дает

$$f(\tau \mid r, V) = a\,B_x(\tau) + d\,B_y(\tau) +$$

$$+\left(1 + \beta\frac{(b+\lambda_x)B_x(\tau) + B_x(\tau)^2/2}{\alpha(\alpha-\beta)} - \alpha\frac{(e+\lambda_y)B_y(\tau) + B_y(\tau)^2/2}{\beta(\alpha-\beta)}\right) r -$$

$$-\left(\frac{(b+\lambda_x)B_x(\tau)+B_x(\tau)^2/2}{\alpha(\alpha-\beta)}-\frac{(e+\lambda_y)B_y(\tau)+B_y(\tau)^2/2}{\beta(\alpha-\beta)}\right)V. \qquad (21)$$

Таким образом, кривые доходности в пространстве ($r$, $V$) могут быть рассчитаны по формулам (20), (21) в аналитическом виде или численно с помощью «аналитически неразрешимых» нелинейных уравнений (7)–(9). Вычисления показывают, что оба этих способа приводят к полностью совпадающим кривым. Поэтому функции $B_r(\tau)$ и $B_V(\tau)$, удовлетворяющие системе уравнений (8), (9), можно записать в следующем аналитическом виде:

$$B_r(\tau)=\frac{\alpha^2 B_y(\tau)-\beta^2 B_x(\tau)}{\alpha\beta(\alpha-\beta)},\ B_V(\tau)=\frac{\beta B_x(\tau)-\alpha B_y(\tau)}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}, \qquad (22)$$

где функции $B_x(\tau)$ и $B_y(\tau)$ вычисляются по формулам (13)–(15). Справедливость этого утверждения легко проверяется путем подстановки выражений (22) в уравнения (8) и (9).

Заметим, что аналитические выражения для кривой доходности до погашения для рассматриваемой модели были найдены Ф. Лонгстаффом и Э. Шварцем (1992) в другом, более громоздком виде.

На рисунке 1 кривые $y(\tau \mid r, V)$ и $f(\tau \mid r, V)$ представлены для нейтральной к риску среды ($\lambda_x = \lambda_y = 0$) при следующих значениях параметров:

$$r = 0{,}06,\ V = 0{,}03,\ a = 0{,}3,\ b = 4,\ d = 0{,}5,\ e = 1{,}7,\ \alpha = 0{,}3,\ \beta = 0{,}7.$$

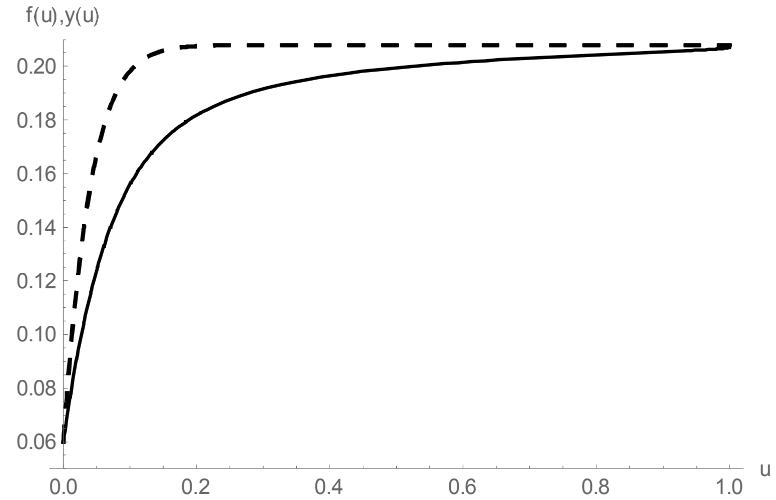


Рис. 1. Кривая доходности до погашения $y(u)$ и кривая форвардных ставок $f(u)$

Для представления кривых «целиком» для всего интервала возможных значений сроков до погашения $\tau \in (0, \infty)$ использовано нелинейное преобразование сроков до погашения: $u = 1 - e^{-\rho\tau}$, которое отображает положительную полуось $(0, \infty)$ в единичный интервал (0, 1). Принятое при расчетах численное значение $\rho = \ln 10/30 = 0{,}07675$ соответствует тому, что сроки до погашения от 0 до 30 лет отображаются в интервал (0; 0,9). Кривые стартуют из точки $y(0 \mid r, V) = f(0 \mid r, V) = r = 0{,}06$ и при $u \to 1$ стремятся к одному и тому же пределу $y(1 \mid r, V) = f(1 \mid r, V) = 0{,}2079$. Сплошной линией показана кривая доходности до погашения $y(u)$, а пунктирной – кривая форвардных ставок $f(u)$.

## 2. Расширение модели Лонгстаффа–Шварца

Рассмотренную модель Лонгстаффа–Шварца можно отнести к классу двухфакторных моделей Кокса–Ингерсолла–Росса. Однако полученные результаты позволяют расширить эту модель на случай $n$ факторов. Действительно, пусть $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ обозначает $n$-мерный вектор неких латентных переменных состояния рынка.

Уравнения динамики этих переменных состояния, расширяя на этот случай модель Лонгстаффа – Шварца (1), запишем в виде

$$dx_i = \kappa_i(a_i - x_i)dt + \sqrt{x_i}\,dW_i, \quad 1 \le i \le n. \tag{23}$$

Предположим, что латентные переменные $X$ связаны невырожденным линейным преобразованием

$$Z = H\,X \tag{24}$$

с вектором других переменных состояния $Z = (z_1, z_2, ..., z_n)^{\mathrm{T}}$, компоненты которого наблюдаемы и имеют вполне определенный экономический или статистический смысл. Например, $z_1$ – это краткосрочная процентная ставка, $z_2$ – ее мгновенная дисперсия и т.д., $H$ – невырожденная матрица с компонентами $h_{is}$, $1 \le i,\ s \le n$. Тогда в соответствии со стохастическим анализом Ито для динамики вектора переменных состояния $Z$ получается уравнение, аналогичное уравнению (6):

$$dZ = K(\theta - Z)dt + H\,D(\sqrt{H^{-1}Z}\,)\,dW, \tag{25}$$

где $K = HD(\kappa)H^{-1}$, $\theta = Ha$. В (23) $\kappa$ – вектор с компонентами $\kappa_i$; $a$ – вектор с компонентами $a_i$; $D(\kappa)$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются элементы вектора $\kappa$; $D(\sqrt{H^{-1}Z}\,)$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются квадратные корни элементов вектора $H^{-1}Z$.

Относительно матрицы преобразования $H$ сделаем следующие предположения. Удобно компоненту $z_1$ вектора состояний $Z$ отождествлять с краткосрочной процентной ставкой $r$, так что согласно представлению (24) первая строка матрицы $H$ должна состоять из элементов, обеспечивающих равенство $z_1 \equiv r = \sum_{i=1}^{n} h_{1i}x_i$ . Кроме того, элементы матрицы $H$ должны быть такими, чтобы было выполнено необходимое условие (18) для кривых доходности $\lim\limits_{\tau\to 0} y(\tau\,|\,X) = r$.

Обозначим кривую доходности до погашения в случае, когда переменные состояния определяются вектором $X$ как $y(\tau|X)$, и, соответственно, кривую доходности до погашения в случае, когда переменные состояния определяются вектором $Z$ как $y(\tau|Z)$. Характер динамики переменных состояния в обоих случаях обеспечивает тот факт, что кривые доходности будут относиться к аффинному классу, т.е. $\tau y(\tau|X) = A(\tau) + X^{\mathrm{T}}B(\tau)$ и $\tau y(\tau|Z) = a(\tau) + Z^{\mathrm{T}}b(\tau)$. Очевидно, что в каких бы координтах ни описывалось текущее состояние какого-либо конкретного процесса краткосрочной процентной ставки, кривые доходности для этого процесса должны совпадать, т.е. $\tau y(\tau|X) = \tau y(\tau|Z)$ или $A(\tau) + X^{\mathrm{T}}B(\tau) = a(\tau) + Z^{\mathrm{T}}b(\tau)$. Поскольку эти равенства должны иметь место для любых сроков до погашения $\tau$ и любых значений переменных состояния $X$ и $Z$ (и нулевых тоже), то имеем $a(\tau) = A(\tau)$, $X^{\mathrm{T}}B(\tau) = Z^{\mathrm{T}}b(\tau) = X^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}b(\tau)$. Таким образом, если функции временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ для кривой доходности $y(\tau|X)$ известны, для кривой доходности $y(\tau|Z)$ функции временной структуры $a(\tau)$ и $b(\tau)$ находятся из соотношений

$$a(\tau) = A(\tau),\ \ b(\tau) = (H^{\mathrm{T}})^{-1}B(\tau). \tag{26}$$

Для определения дифференциальных уравнений относительно функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ снова применим подход, описанный в [2]. Для системы (23) получаются следующие данные для составления уравнений (4), (5) из [2]:

$$K = \begin{pmatrix} \kappa_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \kappa_n \end{pmatrix},\quad \theta = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix},\ K\theta = \begin{pmatrix} \kappa_1 a_1 \\ ... \\ \kappa_n a_n \end{pmatrix}.$$

$$\sigma(X)\sigma^T(X) = \begin{pmatrix} x_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix} x_1 + ... + \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 \end{pmatrix} x_n,$$

$$\beta_0 = 0,\ \ \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, ..., \beta_n = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Если положить, что рыночные цены риска определяются соотношением $\lambda(X) = (\lambda_1\ \lambda_2\ ...\ \lambda_n)\ \sigma(X)$, где $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$ – константы, тогда

$$\sigma(X)\lambda^{\mathrm{T}}(X)=\begin{pmatrix}\lambda_1 x_1\\ \ldots\\ \lambda_n x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \ldots\\ 0\end{pmatrix}x_1+\ldots+\begin{pmatrix}0\\ \ldots\\ \lambda_n\end{pmatrix}x_n,$$

$$\xi=0,\quad \eta_1=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \ldots\\ 0\end{pmatrix},\ \ldots,\ \eta_n=\begin{pmatrix}0\\ \ldots\\ \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Следовательно, система дифференциальных уравнений (4), (5) из [2] в этом случае имеет вид

$$A'(\tau)=-\sum_{i=1}^{n}a_i\kappa_i B_i(\tau),\quad A(0)=0, \tag{27}$$

$$B_i'(\tau)=h_{1i}-(\kappa_i+\lambda_i)B_i(\tau)-B_i^2(\tau)/2,\ B_i(0)=0,\ 1\le i\le n. \tag{28}$$

Полученные уравнения с точностью до параметров совпадают с уравнениями (11) и (12), поэтому их решения имеют тот же вид, что и (13):

$$B_i(\tau)=h_{1i}\left(\frac{\varepsilon_i}{e^{\varepsilon_i\tau}-1}+J_i\right)^{-1},\ \varepsilon_i=\sqrt{(\kappa_i+\lambda_i)^2+2h_{1i}},\ J_i=(\varepsilon_i+\lambda_i+\kappa_i)/2. \tag{29}$$

Таким образом,

$$y(\tau|X)=\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n}h_{1i}\left(x_i\left(\frac{\varepsilon_i}{e^{\varepsilon_i\tau}-1}+J_i\right)^{-1}+a_i\kappa_i\frac{J_i\tau-\ln[1+(e^{\varepsilon_i\tau}-1)J_i/\varepsilon_i]}{J_i(J_i-\varepsilon_i)}\right). \tag{30}$$

Форвардная кривая $f(\tau|X)$ определяется по формуле (17) следующим выражением:

$$f(\tau|X)=\sum_{i=1}^{n}x_i(h_{1i}-(\kappa_i+\lambda_i)B_i(\tau)-B_i^2(\tau)/2)+\sum_{i=1}^{n}a_i\kappa_i B_i(\tau), \tag{31}$$

где функции $B_i(\tau)$ вычисляются по формулам (29).

Кривые $y(\tau|X)$ и $f(\tau|X)$ обладают следующими предельными свойствами:

$$\lim_{\tau\to 0}y(\tau\mid X)=\lim_{\tau\to 0}f(\tau\mid X)=\sum_{i=1}^{n}h_{1i}x_i=r, \tag{32}$$

$$\lim_{\tau\to\infty}y(\tau\mid X)=\lim_{\tau\to\infty}f(\tau\mid X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\kappa_i h_{1i}}{J_i}. \tag{33}$$

Таким образом, после того как определены кривые доходности $y(\tau|X)$ и $f(\tau|X)$ в пространстве переменных $X$, кривые доходности $y(\tau|Z)$ и $f(\tau|Z)$ в пространстве переменных $Z$ определяются с помощью соотношений (26) по формулам

$$y(\tau|Z)=Z^{\mathrm{T}}(H^{\mathrm{T}})^{-1}B(\tau)/\tau-A(\tau)/\tau, \tag{34}$$

$$f(\tau\mid Z)=Z^{\mathrm{T}}(H^{-1})^{\mathrm{T}}\frac{dB(\tau)}{d\tau}-\frac{dA(\tau)}{d\tau}, \tag{35}$$

где функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ определяются соотношениями (27)–(29).

Таким образом, если наблюдаемые (или оцениваемые) переменные состояния рынка $Z$ имеют динамику, описываемую уравнением (25), то уравнение временной структуры бескупонных доходностей будет иметь вид

$$-\frac{dA(\tau)}{d\tau}+Z^{\mathrm{T}}\frac{dB(\tau)}{d\tau}+(Z^{\mathrm{T}}-\theta^{\mathrm{T}})K^{\mathrm{T}}B(\tau)+\frac{1}{2}B(\tau)^{\mathrm{T}}H\,D(H^{-1}Z)H^{\mathrm{T}}B(\tau)-$$

$$-Z^{\mathrm{T}}H_1^{\mathrm{T}}=-\lambda^{\mathrm{T}}D(H^{-1}Z)B(\tau),$$

где $D(H^{-1}Z)$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются элементы вектора $H^{-1}Z$; $H_1$ – первая строка матрицы $H$. Считая компоненты вектора $Z$ независимыми переменными, из этого равенства можно получить следующую систему уравнений для функций временной структуры $a(\tau)$ и $b(\tau)$:

$$a'(\tau) = -(K\theta)^{\mathrm{T}} b(\tau), \quad a(0) = 0, \tag{36}$$

$$b_i'(\tau) = h_{1i} - \xi_i\, b(\tau) - b^{\mathrm{T}}(\tau)\, \zeta_i\, b(\tau)/2, \quad b_i(0) = 0, \quad 1 \le i \le n, \tag{37}$$

где $\xi_i = (K_i - D(\mathrm{G}_i)\lambda)^{\mathrm{T}}$, а $K_i$ и $\mathrm{G}_i$ – $i$-е столбцы матриц $K$ и $H^{-1}$ соответственно; $\zeta_i = HD(\mathrm{G}_i)H^{\mathrm{T}}$, $D(\mathrm{G}_i)$ – по-прежнему диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются элементы вектора $\mathrm{G}_i$. Никаких прямых методов аналитического решения системы уравнений Риккати (37) неизвестно. Однако, как следует из вышеприведенного анализа, переход к переменным состояния $X = H^{-1}Z$ позволяет аналитически решить задачу определения кривых доходности $y(\tau|X)$ и $f(\tau|X)$ в виде (30) и (31), а затем выразить кривые доходности $y(\tau|Z)$ и $f(\tau|Z)$ в аналитическом виде по формулам (34), (35).

## 3. Числовой пример

В заключение рассмотрим числовой пример. Для простоты будем решать задачу в риск-нейтральной постановке, когда рыночные цены риска $\lambda = 0$. Пусть наблюдение за процессами на финансовом рынке позволяет сформировать для описания динамики наблюдаемых переменных состояния $Z = (z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}}$, для которых $z_1 = r$ – краткосрочная процентная ставка, следующую систему стохастических дифференциальных уравнений типа (6):

$$dZ = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 - z_1 \\ 2 - z_2 \\ 3 - z_3 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{z_1 - z_3} & \sqrt{z_1 - z_2} & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \\ \sqrt{z_1 - z_3} & 0 & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \\ 0 & \sqrt{z_1 - z_2} & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \end{pmatrix} dW. \tag{38}$$

Для составления уравнений относительно функций временной структуры $a(\tau)$ и $b(\tau)$ выпишем необходимые элементы системы:

$$K\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; K_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; K_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; K_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(Z)\,\sigma(Z)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_2 & z_3 + z_2 - z_1 \\ z_3 & z_3 + z_2 - z_1 & z_3 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставив эти выражения в систему уравнений (4), (5) из [2], получим уравнения для $a(\tau)$ и $b(\tau)$:

$$\begin{gathered} a'(\tau) = -8b_1(\tau) - 4b_2(\tau) - 5b_3(\tau), \; a(0) = 0, \\ b_1'(\tau) = 1 - 4b_1(\tau) - 2b_2(\tau) - b_3(\tau) - 0{,}5b_1(\tau)^2 + b_2(\tau)b_3(\tau), \; b_1(0) = 0, \\ b_2'(\tau) = b_1(\tau) - b_2(\tau) + b_3(\tau) - 0{,}5b_2(\tau)^2 - b_1(\tau)b_2(\tau) - b_2(\tau)b_3(\tau), \; b_2(0) = 0, \\ b_3'(\tau) = 2b_1(\tau) + 2b_2(\tau) - b_3(\tau) + 0{,}5b_3(\tau)^2 - b_1(\tau)b_3(\tau) - b_2(\tau)b_3(\tau), \; b_3(0) = 0. \end{gathered} \tag{39}$$

Система дифференциальных уравнений для компонент векторной функции $b(\tau)$ нелинейна и методы получения ее решения в аналитическом виде неизвестны, хотя численное ее решение можно найти просто, используя, например, программу Wolfram Mathematica.

Для получения аналитического решения, следуя представленной выше идее описания динамики рыночных процессов в другом пространстве переменных состояния, рассмотрим следующее линейное преобразование:

$$Z = HX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - z_3 \\ z_1 - z_2 \\ z_3 + z_2 - z_1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Экономический смысл переменных $X$ мы не определяем, а пользуемся этим преобразованием только для получения аналитичеких решений для кривых доходностей, в итоговых выражениях для кривых доходностей, в которых сами переменные $X$ не используются. При таком преобразовании согласно стохастическому анализу Ито функция дрейфа в уравнении (38) для переменных состояния $X$ приобретает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 - z_1 \\ 2 - z_2 \\ 3 - z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ 2 - x_2 \\ 1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицу волатильности в уравнении (38) можно записать как

$$\begin{pmatrix} \sqrt{z_1 - z_3} & \sqrt{z_1 - z_2} & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \\ \sqrt{z_1 - z_3} & 0 & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \\ 0 & \sqrt{z_1 - z_2} & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{z_1 - z_3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{z_1 - z_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \end{pmatrix}.$$

Значит, с учетом соотношений (40) при преобразовании переменных состояния к $X$ матрица волатильности преобразуется к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{z_1 - z_3} & \sqrt{z_1 - z_2} & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \\ \sqrt{z_1 - z_3} & 0 & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \\ 0 & \sqrt{z_1 - z_2} & \sqrt{z_3 + z_2 - z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{x_3} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в пространстве состояний $X$ уравнение динамики рыночных процессов (38) приобретает вид трехфакторной модели Лонгстаффа–Швартца (1):

$$dX = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ 2 - x_2 \\ 1 - x_3 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{x_1}\, dW_1 \\ \sqrt{x_2}\, dW_2 \\ \sqrt{x_3}\, dW_3 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Это означает, что система (38) превращается в набор независимых уравнений

$$dx_1 = 3(1 - x_1)dt + \sqrt{x_1}\, dW_1,$$

$$dx_2 = 2(2 - x_2)dt + \sqrt{x_2}\, dW_2,$$

$$dx_3 = (1 - x_3)dt + \sqrt{x_3}\, dW_3.$$

С учетом того, что $z_1 = x_1 + x_2 + x_3 = r$, а также используя свойства системы (41) для построения уравнений (4), (5) из [2] для функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau) = (B_1(\tau)\ B_2(\tau)\ B_3(\tau))^{\mathrm{T}}$ в пространстве переменных состояния $X$, получим также набор независимых уравнений для функций $B(\tau)$ типа (11), (12):

$$A'(\tau) = -3B_1(\tau) - 4B_2(\tau) - B_3(\tau),\ A(0) = 0,$$

$$B_1'(\tau) = 1 - 3B_1(\tau) - B_1(\tau)^2/2,\ B_1(0) = 0,$$

$$B_2'(\tau) = 1 - 2B_2(\tau) - B_2(\tau)^2/2,\ B_2(0) = 0,$$

$$B_3'(\tau) = 1 - B_3(\tau) - B_3(\tau)^2/2,\ B_3(0) = 0,$$

которые имеют аналитические решения типа (13), (14):

$$B_1(\tau) = \left( \frac{\sqrt{11}}{e^{\tau\sqrt{11}} - 1} + \frac{3 + \sqrt{11}}{2} \right)^{-1},\ B_2(\tau) = \left( \frac{\sqrt{6}}{e^{\tau\sqrt{6}} - 1} + \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \right)^{-1},\ B_3(\tau) = \left( \frac{\sqrt{3}}{e^{\tau\sqrt{3}} - 1} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^{-1}. \tag{42}$$

Наконец, на основании равенств (26) получаем выражения для $a'(\tau)$, $b_1(\tau)$, $b_2(\tau)$ и $b_3(\tau)$, которые являются аналитическими решениями нелинейных уравнений (36), (37):

$$a'(\tau) = -3B_1(\tau) - 4B_2(\tau) - B_3(\tau),$$

$$b_1(\tau) = B_1(\tau) + B_2(\tau) - B_3(\tau),$$

$$b_2(\tau) = -B_2(\tau) + B_3(\tau),$$
$$b_3(\tau) = -B_1(\tau) + B_3(\tau),$$

где $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ и $B_3(\tau)$ вычисляются по формулам (41). Справедливость этих решений проверяется просто подстановкой таким образом найденных $b_1(\tau)$, $b_2(\tau)$ и $b_3(\tau)$ в уравнения (39). После определения функций временной структуры по формулам (34) и (35) можно построить кривые доходности до погашения $y(\tau|Z)$ и форвардные кривые $f(\tau|Z)$. Аналитические выражения $y(\tau|Z)$ и $f(\tau|Z)$ здесь не выписываются ввиду их громоздкости. На рисунке 2 они представлены в виде графиков для стартовых значений компонент вектора $Z$: $z_1 = r = 10$ (в %), $z_2 = 0$, $z_3 = 0$. Для графиков рис. 2 переменная срока до погашения преобразована так же, как и на рис. 1, только значение параметра $\rho$ здесь равно 0,2303.

Заметим, что согласно свойствам (32), (33) кривые $Y(u|Z)$ и $F(u|Z)$ стартуют из общей точки $Y(0|Z) = F(0|Z) = r = 10$ и при $u \to 1$ стремятся к общему значению

$$Y(1|Z) = F(1|Z) = \frac{3}{J_1} + \frac{4}{J_2} + \frac{1}{J_3} = \frac{6}{3+\sqrt{11}} + \frac{8}{2+\sqrt{6}} + \frac{2}{1+\sqrt{3}} = 3{,}4799.$$

Форвардная кривая $F(u|Z)$ в окрестности стартовой точки изменяется быстрее, чем кривая доходности до погашения $Y(u|Z)$ (по теории ее производная по абсолютной величине в два раза больше производной кривой доходности до погашения). Кривые имеют минимумы, причем кривая доходности до погашения $Y(u|Z)$ имеет минимум в точке пересечения с кривой $F(u|Z)$, что соответствует теории.

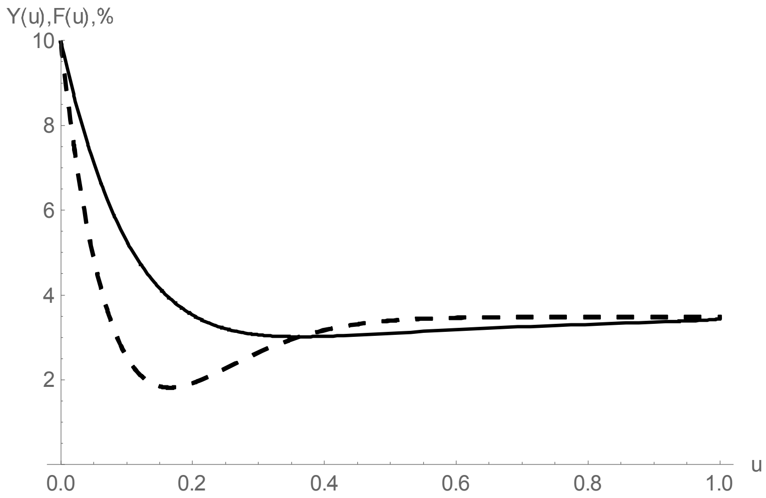


Рис. 2. Кривая доходности до погашения $Y(u)$ и кривая форвардных ставок $F(u)$ для случая, когда динамика переменных состояния определяется уравнением (38)

## Заключение

В статье на основе анализа модели Лонгстаффа–Швартца предложена ее расширенная версия для произвольного числа переменных состояния, которую можно использовать для получения аналитического решения уравнений относительно функций временной структуры доходности, что позволяет получать аналитические выражения для кривых доходности до погашения и форвардных кривых процентных ставок. При этом использован очевидный принцип, заключающийся в том, что если задан процесс краткосрочной процентной ставки, то выражения для кривых доходности, соответствующих этому процессу, не зависят от того, каким способом описывается пространство переменных состояния финансового рынка. Показано, что применение этого принципа в расширении модели Лонгстаффа–Швартца позволяет получить аналитические решения системы нелинейных уравнений Риккати произвольного порядка, аналитические методы решения которых в литературе не описаны. Предложенное расширение модели Лонгстаффа–Швартца свободно от недостатка, присущего этой модели и заключающегося в том, что при переходе от латентных переменных к реальным наблюдаемым переменным ограничивается область возможных значений реальных переменных состояний. В расширении такого эффекта нет.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Longstaff F.A., Schwartz E.S. Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model // Journal of Finance. 1992. V. 47, No. 4. P. 1259–1282.
2. Медведев Г.А. О временной структуре доходности. 1. Модель Васичека // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1 (18). С. 102–111.



***Медведев Геннадий Алексеевич,*** д-р. физ.-мат. наук, профессор. E-mail: MedvedevGA@bsu.by
Белорусский государственный университет (г. Минск, Беларусь)



Поступила в редакцию 21 марта 2017 г.



*Medvedev Gennady A.* (Belarusian State University, Belarus).


**The Longstaff-Schwartz model of yield term structure and its expansion.**


**Keywords:** yield term structure; short-term interest rate; Longstaff-Schwartz model; system of Riccati equations.

DOI: 10.17223/19988605/40/5



The Longstaff-Schwartz model is considered both in the space of latent state variables and in the space of observable (or estimated) state variables. Analytical expressions for yield curves to maturity and forward curves are obtained in both cases. Based on the analysis of the Longstaff-Schwartz model, an extended version is proposed for an arbitrary number of state variables. Within the framework of this expansion, a method is proposed for obtaining analytical solutions of equations with respect to the functions of the yield term structure, when the initial equations for the dynamics of the short-term interest rate lead to non-linear systems of Riccati equations with respect to these functions, which do not allow an analytical solution to be obtained by known methods. This allows you to obtain analytical expressions for yield curves to maturity and forward interest rate curves. At the same time, the obvious principle is used: if the process of a short-term interest rate is specified, then the expressions for yield curves corresponding to this process do not depend on how the space of state variables of the financial market is described. It is shown that the application of this principle to the extension of the Longstaff-Schwartz model allows one to obtain analytical solutions of a system of nonlinear Riccati equations of arbitrary order, whose analytical methods are not described in the literature. The proposed extension of the Longstaff-Schwartz model is free from the draw¬back inherent in this model, which consists in the fact that in the transition from latent variables to real observable variables, the domain of definition of these real state variables is limited. In the expansion there is no such effect. Numerical examples are given.



## REFERENCES

1. Longstaff, F.A. & Schwartz, E.S. (1992) Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model. *Journal of Finance*. 47(4). pp. 1259–1282. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1992.tb04657.x
2. Medvedev, G.A. (2012) On term structure of yield rates. 1. Vasiček model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 1(18). pp. 102–111. (In Russian).