УДК 517. 977.5
DOI 10.17223/19988621/49/2

Г.Ф. Гулиев, Ю.С. Гасымов, Х.Т. Тагиев, Т.М. Гусейнова

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ НАХОЖДЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Рассматривается задача определения правой части волнового уравнения с нелокальным условием. Эта задача приводит к задаче минимизации некоторого функционала, построенного с помощью дополнительной информации. Для новой задачи выводится необходимое и достаточное условие оптимальности.

Ключевые слова: *обратная задача, волновое уравнение, нелокальные условия, условие оптимальности.*

В последнее время обратные задачи для дифференциальных уравнений интенсивно изучаются. Отметим, что такие задачи возникают в самых разнообразных областях математики, геофизики, сейсмологии, астрономии, экологии и т.д. [1]. В данной работе рассматривается подход к решению одной обратной задачи для волнового уравнения. Поиск неизвестной правой части уравнения сводится к задаче минимизации функционала, построенного с помощью дополнительной информации. В результате получаем градиент функционала и условие оптимальности.

1. Постановка задачи

Для цилиндра $Q_T=\Omega\times(0,T)$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=\vartheta(x,t)\,,\ (x,t)\in Q_T\,; \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi_1(x)\,,\ x\in\Omega\,; \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_T}=\int_{\Omega} K(x,y)u(y,t)dy\,,\ (x,t)\in S_T\,. \tag{3}$$

Здесь $\Omega\in R^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$; $S_T=\partial\Omega\times(0,T)$ – боковая поверхность цилиндра Q_T; ν – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$; $\varphi_0(x)\in W_2^1(\Omega)$, $\varphi_1(x)\in L_2(\Omega)$; $K(x,y)\in L_2(\Omega\times\Omega)$ – заданная функции, а $\vartheta(x,t)\in L_2(Q_T)$ – неизвестная функция. Для того чтобы определить $\vartheta(x,t)$, воспользуемся дополнительной информацией

$$u(x,T)=g(x),\ x\in\Omega\,, \tag{4}$$

где $g(x)\in L_2(\Omega)$ – заданная функция.

Приводим эту задачу к задаче оптимального управления, т.е. на решениях задачи (1) – (3) минимизируем функционал

$$J_0(\vartheta)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(u(x,T;\vartheta)-g(x)\right)^2 dx\,, \tag{5}$$

где $u(x,T;\vartheta)$ является решением задачи (1) – (3), которое соответствует функции $\vartheta(x,t)$. Функцию $\vartheta(x,t)$ назовем управлением. Если мы найдем управление $\vartheta(x,t)$, которое доставляет функционалу (5) нулевое значение, тогда дополнительное условие (4) выполняется.

Отметим, что при каждом фиксированном управлении $\vartheta(x,t)\in L_2(Q_T)$ краевая задача (1) – (3) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ [2].

2. О разрешимости задачи (1) – (3), (5)

Теперь рассмотрим следующую задачу: при каких условиях

$$\inf_{\vartheta\in L_2(Q_T)} J_0(\vartheta)=0\,? \tag{6}$$

Пусть $\psi_0(x)$ – заданная функция из $L_2(\Omega)$, такая, что

$$\int_{\Omega}\psi_0(x)u(x,T;\vartheta)dx=0,\ \ \forall\vartheta\in L_2(Q_T)\,. \tag{7}$$

Мы хотим выяснить, будет ли отсюда следовать $\psi_0(x)\equiv 0$?

Введем функцию $W(x,t)$ как решение задачи:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\Delta W=\int_{\partial\Omega}K(\xi,x)W(\xi,t)ds\,,\ (x,t)\in Q_T\,; \tag{8}$$

$$W(x,T)=0,\ \frac{\partial W(x,T)}{\partial t}=\psi_0(x)\,,\ x\in\Omega\,; \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial \nu}\right|_{S_T}=0\,,\ (x,t)\in S_T\,. \tag{10}$$

Как и в работе [2], можно показать, что (8) – (10) имеет единственное обобщенное решение из класса $W_2^1(Q_T)$ и это решение обладает свойствами $W(x,t)\in C([0,T],W_2^1(\Omega)),\ \frac{\partial W(x,t)}{\partial t}\in C([0,T],L_2(\Omega))$.

В силу определения обобщенного решения задачи (1) – (3) имеем: при $t=0$ выполняется условие $u(x,0)=\varphi_0(x)$ и интегральное тождество:

$$\int_0^T\int_{\Omega}\left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\nabla u\nabla\eta\right)dxdt-\int_0^T\int_{\partial\Omega}\eta(x,t)\int_{\Omega}K(x,y)u(y,t)\,dydsdt-$$
$$-\int_{\Omega}\varphi_1(x)\eta(x,0)dx=\int_0^T\int_{\Omega}\vartheta(x,t)\eta(x,t)dxdt \tag{11}$$

для любой функций $\eta\in W_2^1(Q_T),\ \eta(x,T)=0$, где $\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

В силу определения обобщенного решения задачи (8) – (10) имеем: при $t = T$ выполняется условие $W(x,T) = 0$ и интегральное тождество:

$$\int_0^T \int_\Omega \left(-\frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla W \nabla \Phi \right) dxdt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \Phi(x,t) \int_\Omega K(x,y) W(y,t)\, dydsdt -$$

$$-\int_\Omega \frac{\partial W(x,0)}{\partial t} \Phi(x,0) dx = \int_\Omega \psi_0(x) \Phi(x,T) dxdt, \qquad (12)$$

для любой функции $\Phi \in W_2^1(Q_T)$.

Теперь в (11) за функцию η возьмем W, а в (12) за функцию Φ возьмем u, из (11) вычтем (12), тогда имеем

$$\int_\Omega \frac{\partial W(x,0)}{\partial t} \varphi_0(x) dx - \int_\Omega \varphi_1(x) W(x,0) dx -$$

$$-\int_0^T \int_\Omega \vartheta(x,t) W(x,t) dxdt + \int_\Omega \psi_0(x) u(x,T;\vartheta) dxdt = 0 .$$

Если учесть условия (7), то получим

$$\int_\Omega \frac{\partial W(x,0)}{\partial t} \varphi_0(x) dx - \int_\Omega \varphi_1(x) W(x,0) dx - \int_0^T \int_\Omega \vartheta(x,t) W(x,t) dxdt = 0 . \qquad (13)$$

Если соотношение (13) записать для произвольных $\vartheta_1(x,t)$ и $\vartheta_2(x,t)$, то из полученных двух равенств следует, что

$$\int_0^T \int_\Omega (\vartheta_1(x,t) - \vartheta_2(x,t)) W(x,t) dxdt = 0, \forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in L_2(Q_T) .$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что $W = 0$ в Q_T. Значит, в силу (8) $\psi_0(x) \equiv 0$ в Ω.

Таким образом, в силу теоремы Хана – Банаха [3] получаем, что

$$\inf_{\vartheta \in L_2(Q_T)} J_0(\vartheta) = 0 .$$

Если образ $L_2(Q_T)$ при отображении $\vartheta \to u(x,T;\vartheta)$ замкнут в $L_2(Q_T)$, то возможно существует такой элемент $\vartheta_0(x,t) \in L_2(Q_T)$, что

$$\inf_{\vartheta \in L_2(Q_T)} J_0(\vartheta) = J_0(\vartheta_0) = 0 .$$

В задаче (1) – (3), (5) минимизирующий элемент $\vartheta(x,t) \in L_2(Q_T)$, вообще говоря, не единственный. Теперь рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_\alpha(\vartheta) = J_0(\vartheta) + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_\Omega \left(\vartheta(x,t) - \omega(x,t) \right)^2 dxdt \qquad (14)$$

в выпуклом замкнутом множестве $U_{ad} \in L_2(Q_T)$ при ограничениях (1) – (3), где $\omega(x,t) \in L_2(Q_T)$ – заданная функция, $\alpha > 0$ – заданное число.

Тогда, в силу известных результатов [5], в задаче (1) – (3), (14) существует единственный минимизирующий элемент.

3. Вычисление дифференциала функционала (14) и необходимое условие оптимальности

Теперь покажем, что функционал (14) дифференцируем в $L_2(Q_T)$. Берем два допустимых управления $\vartheta, \vartheta+\delta\vartheta \in U_{ad}$. Соответствующее решение задачи (1) – (3) обозначим через $u(x,t;\vartheta)$ и $u(x,t;\vartheta+\delta\vartheta)$.

Пусть $\delta u(x,t) = u(x,t;\vartheta+\delta\vartheta) - u(x,t;\vartheta)$. Ясно что $\delta u(x,t)$ является обобщенным решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \Delta\delta u = \delta\vartheta(x,t), \ (x,t)\in Q_T; \tag{15}$$

$$\delta u(x,0) = 0, \ \frac{\partial \delta u(x,0)}{\partial t} = 0, \ x\in\Omega; \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial \delta u}{\partial \nu}\right|_{S_T} = \int_\Omega K(x,y)\delta u(y,t)dy, \ (x,t)\in S_T, \tag{17}$$

т.е. для любой функций $\eta \in W_2^1(Q_T), \eta(x,T)=0$ выполняется интегральное тождество

$$\begin{gathered}\int_0^T\int_\Omega\left(-\frac{\partial \delta u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla\delta u\nabla\eta\right)dxdt - \int_0^T\int_{\partial\Omega}\eta(x,t)\int_\Omega K(x,y)\delta u(y,t)\,dydsdt = \\ = \int_0^T\int_\Omega \delta\vartheta(x,t)\eta(x,t)dxdt.\end{gathered} \tag{18}$$

Пусть ψ – обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = \int_{\partial\Omega} K(\xi,x)\psi(\xi,t)ds, \ (x,t)\in Q_T; \tag{19}$$

$$\psi(x,T) = 0, \ \frac{\partial \psi(x,T)}{\partial t} = u(x,T;\vartheta) - g(x), \ x\in\Omega; \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right|_{S_T} = 0, \ (x,t)\in S_T. \tag{21}$$

То есть для любой функции $\Phi \in W_2^1(Q_T)$ выполняется интегральное тождество

$$\begin{gathered}\int_0^T\int_\Omega\left(-\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla\psi\nabla\Phi\right)dxdt - \int_0^T\int_{\partial\Omega}\Phi(x,t)\int_\Omega K(x,y)\psi(y,t)\,dydsdt - \\ -\int_\Omega \frac{\partial\psi(x,0)}{\partial t}\Phi(x,0)dx - \int_\Omega (u(x,T;\vartheta)-g(x))\Phi(x,T)\,dx = 0.\end{gathered} \tag{22}$$

Поскольку смешанная задача (19) – (21) является линейной относительно $\psi(x,t)$, то эта задача в пространстве $W_2^1(Q_T)$ имеет единственное решение[2].

Теперь вычислим приращение функционал (14). Ясно, что

$$\begin{gathered}\delta J_\alpha(\vartheta) = J_\alpha(\vartheta+\delta\vartheta) - J_\alpha(\vartheta) = \int_\Omega (u(x,T;\vartheta)-g(x))\delta u(x,T)dx + \\ +\alpha\int_0^T\int_\Omega\big(\vartheta(x,t)-\omega(x,t)\big)\delta\vartheta(x,t)dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega(\delta u(x,T))^2dx + \frac{\alpha}{2}\int_0^T\int_\Omega(\delta\vartheta)^2dxdt.\end{gathered} \tag{23}$$

Если в (18) положить $\eta(x,t)=\psi(x,t)$, а в (22) $\Phi(x,t)=\delta u(x,t)$ и вычесть полученные соотношения, то имеем

$$\int\limits_{\Omega}(u(x,T;\vartheta)-g(x))\delta u(x,T)dx=\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\delta\vartheta(x,t)\psi(x,t)dxdt\,.$$

Тогда, учитывая это равенство в (23), получим

$$\delta J_{\alpha}(\vartheta)=\alpha\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\left(\vartheta(x,t)-\omega(x,t)\right)\delta\vartheta(x,t)dxdt-\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\delta\vartheta(x,t)\psi(x,t)dxdt+R\,, \qquad (24)$$

где
$$R=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\delta u(x,T))^2dx+\frac{\alpha}{2}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}(\delta\vartheta)^2dxdt\,.$$

Теперь оценим остаточный член R, входящий в (24). Покажем, что

$$\left|R\right|\le c\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\left(\delta\vartheta\right)^2dxdt\,. \qquad (25)$$

Для этого покажем, что

$$\left\|\delta u\right\|^2_{W_2^1(Q_T)}\le c\left\|\delta\vartheta\right\|^2_{L_2(Q_T)}\,. \qquad (26)$$

Здесь и в дальнейшем через c будем обозначать различные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и от допустимых управлений.

Применяя метод Галеркина, из (15) – (17) получим

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial^2\delta u^N(x,t)}{\partial t^2}\frac{\partial\delta u^N(x,t)}{\partial t}dx+\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\delta u^N(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2\delta u^N(x,t)}{\partial x_i\partial t}dx-$$
$$-\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\delta u^N(x,t)}{\partial t}\int\limits_{\Omega}K(x,y)\delta u^N(y,t)\,dy\,ds=\int\limits_{\Omega}\delta\vartheta\frac{\partial\delta u^N(x,t)}{\partial t}dx.$$

Здесь $\delta u^N(x,t)$ – приближения Галеркина, т.е. $\delta u^N(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{N}C_k^N(t)\varphi_k(x)$, $\varphi_k(x)$ – базис в $W_2^1(\Omega)$.

Интегрируя по t от 0 до t, получаем

$$\int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial^2\delta u^N}{\partial t}\right)^2+\left|\nabla\delta u^N\right|^2\right)dx\ =$$
$$=\ 2\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\delta u^N(x,t)}{\partial t}\int\limits_{\Omega}K(x,y)\delta u^N(y,t)dy\,ds\,dt+\ 2\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega}\delta\vartheta\frac{\partial\delta u^N(x,t)}{\partial t}dxdt. \qquad (27)$$

Преобразуем интеграл по боковой поверхности S_T следующим образом:

$$\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\delta u^N(x,t)}{\partial t}\int\limits_{\Omega}K(x,y)\delta u^N(y,t)dydsdt=i_1+i_2+i_3\,,$$

где
$$i_1=-\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{0}^{t}\delta u^N(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,y)\frac{\partial\delta u^N(y,t)}{\partial t}dydtds\,,$$

$$i_2=\int\limits_{\partial\Omega}\delta u^N(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,y)\delta u^N(y,t)dyds\,,$$

$$i_3 = -\int_{\partial\Omega} \delta u^N(x,0) \int_{\Omega} K(x,y)\, \delta u^N(y,0) dyds = 0 .$$

Пользуясь неравенством $\int_{\partial\Omega} |W| ds \le c \int_{\Omega} (|W| + |\nabla W|) dx$ [4] и затем неравенством Коши – Буняковского, получаем

$$|i_1| = \left| \int_0^t \int_{\partial\Omega} \delta u^N(x,t) \int_{\Omega} K(x,y) \frac{\partial \delta^N(y,t)}{\partial t} dydsdt \right| \le$$

$$\le c \int_0^t \int_{\Omega} ((\delta u^N(x,t))^2 + \left|\nabla \delta u^N(x,t)\right|^2) dxdt + c \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \delta u^N(y,t)}{\partial t} \right)^2 dydt ; \qquad (28)$$

$$|i_2| = \left| \int_{\partial\Omega} \delta u^N(x,t) \int_{\Omega} K(x,y) \delta u^N(y,t) dyds \right| \le$$

$$\le c \left(\int_{\Omega} \left((\delta u^N(x,t))^2 + \left|\nabla \delta u^N(x,t)\right|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} (\delta u^N(x,t))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} . \qquad (29)$$

Введем обозначение

$$Z^N(t) \equiv \int_{\Omega} ((\delta u^N)^2 + \left(\frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right)^2 + \left|\nabla \delta u^N\right|^2) dx .$$

Ясно, что

$$\int_{\Omega} (\delta u^N(x,t))^2 dx \le 2t \int_0^t y^N(t) dt ,$$

где
$$y^N(t) = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial \delta u^N(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \left|\nabla \delta u^N(x,t)\right|^2 \right) dx .$$

Из (29) следует

$$|i_2| \le c (Z^N(t))^{\frac{1}{2}} \left(2t \int_0^t Z^N(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} . \qquad (30)$$

При условиях на данные задачи и учитывая (28) и (30), из (27) имеем

$$Z^N(t) \le c \int_0^t Z^N(t)\, dt + 2t \int_0^t Z^N(t) dt + c (Z^N(t))^{\frac{1}{2}} \left(2t \int_0^t Z^N(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} + c \int_0^t \int_{\Omega} (\delta \vartheta)^2 dxdt.$$

Обозначим $\max\limits_{0 \le \xi \le t} Z^N(\xi) = \overline{Z}^N(t)$, тогда

$$\overline{Z}^N(t) \le (c + 2t) t \overline{Z}^N + ct \overline{Z}^N(t) + c \int_0^t \int_{\Omega} (\delta \vartheta)^2 dxdt .$$

Определяя t_1 из условия $(c + 2t_1) t_1 = \dfrac{1}{2}$, получим

$$\overline{Z}^N(t) \le c \int_0^t \int_{\Omega} (\delta \vartheta)^2 dxdt .$$

Продолжая этот процесс, за конечное числа шагов получаем неравенство:

$$\int_\Omega ((\delta u^N)^2 + \left(\frac{\partial \delta u^N}{\partial t}\right)^2 + \left|\nabla \delta u^N\right|^2)dx \le c\left\|\delta\vartheta\right\|^2_{L_2(Q_T)}, \forall t \in [0,T],$$

из которого следует

$$\left\|\delta u^N\right\|^2_{W_2^1(Q_T)} \le c\left\|\delta\vartheta\right\|^2_{L_2(Q_T)}. \tag{31}$$

В силу (31), из последовательности $\{\delta u^N\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся слабо в $W_2^1(Q_T)$ к некоторому элементу $\delta u(x,t) \in W_2^1(Q_T)$.

Поскольку норма в гильбертовом пространстве слабо полунепрерывна снизу, то отсюда следует, что для предельной функции $\delta u(x,t)$ справедлива оценка (26) [7].

По теореме выложения $W_2^1(Q_T) \subset L_2(\Omega)$ [4] получаем, что

$$\left\|\delta u(x,T)\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le c\left\|\delta u(x,t)\right\|^2_{W_2^1(Q_T)}. \tag{32}$$

Сопоставляя соотношения (26) и (32), имеем

$$\left\|\delta u(x,T)\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le c\left\|\delta\vartheta(x,t)\right\|^2_{L_2(Q_T)}.$$

Отсюда и из выражения R следует справедливость оценки (25).

Тогда из равенства (24) и из оценки (25) следует, что функционал $J_\alpha(\vartheta)$ дифференцируем в $L_2(Q_T)$ и его дифференциал и градиент определяются выражениями

$$\left\langle J'_\alpha(\vartheta), \delta\vartheta\right\rangle_{L_2(Q_T)} = \int_0^T\int_\Omega (\alpha(\vartheta-\omega) - \psi(x,t;\vartheta))\delta\vartheta(x,t)dxdt \tag{33}$$

и

$$J'_\alpha(\vartheta) = \alpha(\vartheta-\omega) - \psi(x,t;\vartheta) \tag{34}$$

соответственно.

Можно показать, что отображение $\vartheta \to J'_\alpha(\vartheta)$ из $U_{ad} \to L_2(Q_T)$ является непрерывным.

Из (34) следует

$$J'_\alpha(\vartheta+\delta\vartheta) - J'_\alpha(\vartheta) = \alpha\delta\vartheta - \delta\psi(x,t). \tag{35}$$

Из выражения (35) имеем

$$\left\|J'_\alpha(\vartheta+\delta\vartheta) - J'_\alpha(\vartheta)\right\|_{L_2(Q_T)} \le c(\int_0^T\int_\Omega ((\delta\vartheta)^2 + (\delta\psi)^2)dxdt)^{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

Ясно, что $\delta\psi(x,t) = \psi(x,t;\vartheta+\delta\vartheta) - \psi(x,t;\vartheta)$ является решением задачи:

$$\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial t^2} - \Delta\delta\psi = \int_{\partial\Omega} K(\xi,x)\delta\psi(\xi,t)ds,\ (x,t)\in Q_T; \tag{37}$$

$$\delta\psi(x,T) = 0,\ \frac{\partial\delta\psi(x,T)}{\partial t} = \delta u(x,T),\ x\in\Omega; \tag{38}$$

$$\left.\frac{\partial\delta\psi}{\partial\nu}\right|_{S_T} = 0,\ (x,t)\in S_T. \tag{39}$$

Как и для задачи (15) – (17), относительно $\delta\psi(x,t)$ имеем оценку

$$\|\delta\psi\|^2_{W_2^1(Q_T)} \le c\|\delta u(x,T)\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{40}$$

По теореме выложения $W_2^1(Q_T) \subset L_2(\Omega)$ [4] получаем, что

$$\|\delta u(x,T)\|^2_{L_2(\Omega)} \le c\|\delta u(x,t)\|^2_{W_2^1(Q_T)}. \tag{41}$$

Сопоставляя соотношения (26), (40) и (41), имеем

$$\|J'_\alpha(\vartheta+\delta\vartheta) - J'_\alpha(\vartheta)\|_{L_2(Q_T)} \le c\|\delta\vartheta\|^2_{L_2(Q_T)}. \tag{42}$$

Из этого неравенства следует, что при $\|\delta\vartheta\|_{L_2(Q_T)} \to 0$

$$\|J'_\alpha(\vartheta+\delta\vartheta) - J'_\alpha(\vartheta)\|_{L_2(Q_T)} \to 0.$$

Следовательно, отображение $\vartheta \to J'_\alpha(\vartheta)$ из $U_{ad} \to L_2(Q_T)$ является непрерывным.

Теорема. Пусть выполняются вышеналоженные условия на данные задачи (1) – (4). Тогда для оптимальности управления $\vartheta_* = \vartheta_*(x,t) \in U_{ad}$ в задаче (1) – (3), (14) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^T \int_\Omega (\alpha(\vartheta_* - \omega) - \psi(x,t;\vartheta_*))(\vartheta - \vartheta_*)dxdt \ge 0 \tag{43}$$

при всех $\vartheta \in U_{ad}$.

Доказательство. Согласно доказанным утверждениям, функционал $J_\alpha(\vartheta)$ непрерывно дифференцируем по Фреще на $L_2(Q_T)$ и его дифференциал в точке $\vartheta(x,t) \in U_{ad}$ определяется равенством (33). В силу теоремы [6, с.28] на элементе $\vartheta_* \in U_{ad}$ необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left\langle J'_\alpha(\vartheta), \vartheta - \vartheta_* \right\rangle \ge 0 \text{ при всех } \vartheta \in U_{ad}.$$

Отсюда и из (34) следует справедливость равенства (43). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
2. *Кожанов А.И.*, *Пулькина Л.С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.
3. *Колмогоров А.Н.*, *Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 543 с.
4. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
5. *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
6. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
7. *Tagiev H.T.* Gradient of the functional in the optimal control problem with non-local conditions for the wave equation // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics NAS of Azerbaijan. V. XXXVII(XLV). 2012. P. 139–148.

Статья поступила 16.03.2017 г.

Guliyev H.F., Gasimov Y.S., Tagiyev H.T., Huseynova T.M.(2017) ON THE INVERSE PROBLEM OF FINDING THE RIGHT-HAND SIDE OF WAVE EQUATION WITH NONLOCAL CONDITION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 16–25

DOI 10.17223/19988621/49/2

Recently, inverse problems for the differential equations have been intensively studied. Such problems arise in the various fields of mathematics, geophysics, seismology, astronomy, ecology, etc. In this paper, we propose an approach to solving the inverse problem for the wave equation. The search for the unknown right-hand side of the equation is reduced to the problem of minimizing the functional constructed using additional information. The gradient of the functional is calculated and the optimality condition is derived.

In the cylinder $Q_T = \Omega \times (0,T)$, consider the problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \vartheta(x,t)\ ,\ (x,t) \in Q_T\ , \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x)\ ,\ x \in \Omega\ , \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_T} = \int_\Omega K(x,y)u(y,t)dy\ ,\ (x,t) \in S_T\ , \tag{3}$$

where $\Omega \in R^n$ is a bounded domain with a smooth boundary $\partial\Omega$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ is the laterial surface of Q_T, ν is an outward normal to $\partial\Omega$, $\varphi_0(x) \in W_2^1(\Omega)$, $\varphi_1(x) \in L_2(\Omega)$, $K(x,y) \in L_2(\Omega \times \Omega)$ are given functions, and $\vartheta(x,t) \in L_2(Q_T)$ is the unknown function. To determine $\vartheta(x,t)$, we use the following additional information:

$$u(x,T) = g(x),\ x \in \Omega \text{, where } g(x) \in L_2(\Omega) \text{ is a given function.} \tag{4}$$

The problem is reduced to the following problem: minimize the functional

$$J_0(\vartheta) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u(x,T;\vartheta) - g(x))^2 dx \tag{5}$$

subject to (1)–(3), where $u(x,T;\vartheta)$ is a solution of problem (1)–(3) corresponding to $\vartheta(x,t)$ which is called a control. The solvability of problem (1)–(3), (5) is proved.

Consider the functional

$$J_\alpha(\vartheta) = J_0(\vartheta) + \frac{\alpha}{2}\int_0^T\int_\Omega (\vartheta(x,t) - \omega(x,t))^2 dxdt\ . \tag{6}$$

Then, the differential of this functional is calculated and the following theorem is proved:

Theorem. Under the considered conditions, for the optimality of the control $\vartheta_* = \vartheta_*(x,t) \in U_{ad}$ in the problem (1)–(3), (6) it is necessary that the inequality

$$\int_0^T\int_\Omega (\alpha(\vartheta_* - \omega) - \psi(x,t;\vartheta_*))(\vartheta - \vartheta_*)dxdt \geq 0 \tag{7}$$

is fulfilled for all $\vartheta \in U_{ad}$.

Keywords: inverse problem, wave equation, nonlocal conditions, optimality condition.

GULIYEV Hamlet Farman (Doctor of Physics and Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan). E-mail: hkuliyev@rambler.ru

GASIMOV Yusif Soltan (Doctor of Physics and Mathematics, Azerbaijan University, Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan)
E-mail: yusif.gasimov@au.edu.az

TAGIYEV Hikmet Tahir (Candidate of Physics and Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan). E-mail: hitagiyev@gmail.com

GUSEYNOVA Tunzale Maharram (Candidate of Physics and Mathematics, Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan). E-mail: tunzalemustafayeva@mail.ru

REFERENCES

1. *Kabanikhin S.I.* (2009) *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and ill-posed problems] Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo.
2. Kozhanov A.I., Pul'kina L.S. (2006) On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations. *Diff. Equat*. 42. pp. 1233–1246. https://doi.org/10.1134/S0012266106090023
3. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. (1981) *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow: Nauka.
4. Ladyzhenskaya O.A. (1973) *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka.
5. Lions J.L. (1968) *Controle optimal de systèmes gouvernés par des équations dérivées partielles*. Paris, Dunod, Gauthier-Villars.
6. Vasilyev F.P. (1981) *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extreme problems]. Moscow: Nauka.
7. Tagiev H.T. (2012) Gradient of the functional in the optimal control problem with non-local conditions for the wave equation. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics NAS of Azerbaijan*. XXXVII(XLV). pp. 139–148.