УДК 517.977.56
DOI 10.17223/19988621/49/3

К.Б. Мансимов, В.А. Сулейманова

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА – ДАРБУ

Изучается граничная задача оптимального управления системами Гурса – Дарбу при предположении открытости области управления. Установлен аналог уравнения Эйлера. Выведены необходимые условия оптимальности второго порядка.

Ключевые слова: *граничное управление, система Гурса – Дарбу, необходимое условие оптимальности, аналог уравнения Эйлера, аналог условия Габасова-Кирилловой.*

1. Введение

Задачи оптимального управления, описываемые системами Гурса – Дарбу, с управляемыми граничными условиями начали изучаться еще с работ [1, 2] А.И. Егорова. Отметим работы [3–9], в которых получен ряд необходимых условий оптимальности и доказаны теоремы существования оптимальных граничных управлений.

В предлагаемой работе исследуется одна граничная задача оптимального управления, описываемая системой Гурса – Дарбу, при предположении открытости области управления. Установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$I(u)=\varphi\big(a(t_1)\big)+G\big(z(t_1,x_1)\big) \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$u(t)\in U\subset R^r,\ \ t\in T=[t_0,t_1]; \tag{2.2}$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f(t,x,z,z_x),\ \ (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1]; \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} z(t,x_0)&=a(t), \quad t\in T=[t_0,t_1],\\ z(t_0,x)&=b(x), \quad x\in X=[x_0,x_1]; \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$a(t_0)=b(x_0)=a_0\,,$$

$$\dot a=g(t,a,u), \quad t\in T; \tag{2.5}$$

$$a(t_0)=a_0\,. \tag{2.6}$$

Здесь $f(t,x,z,z_x)$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z,z_x до второго порядка включительно; $B(t,x)$ – заданная измеримая и ограниченная $(n\times n)$ матричная функция; $b(x)$ – заданная n-мерная абсолютно непрерывная вектор-функция; t_0,t_1,x_0,x_1 $(t_0<t_1;\ x_0<x_1)$ – заданы; a_0 – заданный постоянный вектор; $g(t,a,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (a,u) до второго порядка включительно; $\varphi(a)$ и $G(z)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции; U – заданное непустое ограниченное и открытое множество; $u(t)$ – измеримая и ограниченная r-мерная управляющая вектор-функция.

Каждую управляющую функцию $u(t)$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что при заданном допустимом управлении $u(t)$ задача Коши (2.5), (2.6) и задача Гурса (2.3), (2.4) имеют единственное абсолютно непрерывное решение (в смысле [10 – 13]) $a(t)$ и $z(t,x)$ соответственно.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (2.1) при ограничениях (2.2) – (2.6), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t),a(t),z(t,x))$ – оптимальным процессом.

3. Вариации функционала качества

Считая $(u(t),a(t),z(t,x))$ фиксированным допустимым процессом, введем обозначения

$$M(t,a,u,q)=q'g(t,a,u),$$

$$H(t,x,z,z_x,\psi)=\psi' f(t,x,z,z_x),$$

$$M_a(t,a(t),u(t),q(t))=M_a(t),$$

$$M_{aa}(t,a(t),u(t),q(t))=M_{aa}(t),$$

$$M_{ua}(t,a(t),u(t),q(t))=M_{ua}(t),$$

$$M_{uu}(t,a(t),u(t),q(t))=M_{uu}(t),$$

$$H_z(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x))=H_z(t,x),$$

$$H_{zz}(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x))=H_{zz}(t,x),$$

$$H_{zz_x}(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x))=H_{zz_x}(t,x),$$

$$g_a(t,a(t),u(t))=g_a(t),$$

$$f_z(t,x,z(t,x),z_x(t,x))=f_z(t,x),$$

$$f_{z_x}(t,x,z(t,x),z_x(t,x))=f_{z_x}(t,x),$$

где $\psi=\psi(t,x)$ и $q=q(x)$ – пока неизвестные n-мерные вектор-функции.

Через $\left(\bar{u}(t)=u(t)+\Delta u(t),\ \bar{a}(x)=a(x)+\Delta a(x),\ \bar{z}(t,x)=z(t,x)+\Delta z(t,x)\right)$ обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение критерия качества

$$\Delta I(u)=I(\bar{u})-I(u)=\varphi(\bar{a}(t_1))-\varphi(a(t_1))+G(\bar{z}(t_1,x_1))-G(z(t_1,x_1)). \quad (3.1)$$

Далее ясно, что приращение $(\Delta a(t),\Delta z(t,x))$ – состояния $(a(t),z(t,x))$ есть решение задачи

$$\Delta\dot{a}=g(t,\bar{a},\bar{u})-g(t,a,u); \quad (3.2)$$

$$\Delta a(t_0)=0; \quad (3.3)$$

$$\Delta z_{tx}=B(t,x)\Delta z_t+f(t,x,\bar{z},\bar{z}_x)-f(t,x,z,z_x); \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\Delta z(t,x_0)&=\Delta a(t), \quad t\in T,\\ \Delta z(t_0,x)&=0, \quad x\in X.\end{aligned} \quad (3.5)$$

Умножая обе части соотношения (3.2) ((3.4)) слева скалярно на $q(t)$ $(\psi(t,x))$, а затем интегрируя обе части полученного соотношения по T (по D) получим

$$\int_{t_0}^{t_1} q'(t)\Delta\dot{a}(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[M(t,\bar{a}(t),\bar{u}(t),q(t))-M(t,a(t),u(t),q(t))\right]dt; \quad (3.6)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[H(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{z}_x(t,x),\psi(t,x))-H(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x))\right]dx\,dt. \quad (3.7)$$

Здесь и в дальнейшем штрих $(')$ – операция транспонирования.

С учетом тождеств (3.6) и (3.7) формула приращения (3.1) записывается в виде

$$\Delta I(u)=\varphi(\bar{a}(t_1))-\varphi(a(t_1))+G(\bar{z}(t_1,x_1))-G(z(t_1,x_1))+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1} q'(t)\Delta\dot{a}(t)\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[M(t,\bar{a}(t),\bar{u}(t),q(t))-M(t,a(t),u(t),q(t))\right]dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[H(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{z}_x(t,x),\psi(t,x))-H(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x))\right]dx\,dt.$$

Отсюда, используя формулу Тейлора, будем иметь

$$I(\mathrm{u})=\varphi'_a(a(t_1))\Delta a(t_1)+\frac{1}{2}\Delta a'(t_1)\varphi_{aa}(a(t_1))\Delta a(t_1)+$$
$$+G'_z(z(t_1,x_1))\Delta z(t_1,x_1)+\frac{1}{2}\Delta z(t_1,x_1)G_{zz}(z(t_1,x_1))\Delta z(t_1,x_1)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} q'(t)\Delta\dot{a}(t)\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[M_a'(t)\Delta a(t)+M_u'(t)\Delta u(t)\right]dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta a'(t)M_{aa}(t)\Delta a(t)+2\,\Delta u'(t)M_{ua}(t)\Delta a(t)+\Delta u'(t)M_{uu}(t)\Delta u(t)\right]dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[H_z'(t,x)\Delta z(t,x)+H_{z_x}'(t,x)\Delta z_x(t,x)\right]dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)+\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz}(t,x)\Delta z(t,x)+$$

$$+\Delta z'(t,x)H_{zz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)+\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)\Big]dx\,dt+$$

$$+\,o_1\left(\|\Delta a(t_1)\|^2\right)+o_2\left(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2\right)-\int_{t_0}^{t_1}o_3\left(\left[\|\Delta u(t)\|+\|\Delta a(t)\|\right]^2\right)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_4\left(\left[\|\Delta z(t,x)\|+\|\Delta z_x(t,x)\|\right]^2\right)dx\,dt, \tag{3.8}$$

где $o\left(\alpha^2\right)/\alpha^2\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Ясно, что

$$\Delta a(t)=\int_{t_0}^{t}\Delta\dot{a}(\tau)\,d\tau\,; \tag{3.9}$$

$$\Delta z(t,x)=\Delta a(t)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\Delta z_{\tau s}(\tau,s)\,ds\,d\tau\,; \tag{3.10}$$

$$\Delta z_t(t,x)=\Delta\dot{a}(t)+\int_{x_0}^{x}\Delta z_{ts}(t,s)\,ds\,; \tag{3.11}$$

$$\Delta z_{\,x}(t,x)=\int_{t_0}^{t}\Delta z_{\tau x}(\tau,x)\,d\tau\,. \tag{3.12}$$

Используя формулы (3.9) – (3.12) и применяя формулу Фубини (см., напр., [6, 10]), можно доказать, что

$$\int_{t_0}^{t_1}M_a'(t)\Delta a(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}M_a'(\tau)\,d\tau\right]\Delta\dot{a}(t)\,dt\,; \tag{3.13}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta\dot{a}(t)\,dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1}\psi'(t,s)B(t,s)\,ds\right]\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt; \tag{3.14}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_z'(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_z'(t,x)\Delta a(t)\,dx\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_z'(t,x)\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1} \Delta z_{\tau s}(\tau,s)\,ds\,d\tau\right]dx\,dt; \qquad (3.15)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_z'(t,x)\Delta a(t)\,dx\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1} H_z'(\tau,x)\,d\tau\right]\Delta\dot{a}(t)\,dx\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1} H_z'(\tau,s)\,ds\,d\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_{z_x}'(t,x)\Delta z_x(t,x)\,dx\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1} H_{z_x}'(\tau,x)\,d\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt,$$

$$\varphi_a'\left(a(t_1)\right)\Delta a(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_a'\left(a(t_1)\right)\Delta\dot{a}(t)\,dt,$$

$$G_z'\left(z(t_1,x_1)\right)\Delta z(t_1,x_1) = \int_{t_0}^{t_1} G_z'\left(z(t_1,x_1)\right)\Delta\dot{a}(t)\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} G_z'\left(z(t_1,x_1)\right)\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt. \qquad (3.16)$$

С учетом доказанных тождеств (3.13) – (3.16) формула (3.9) для приращения функционала качества (2.1) представляется в виде

$$\Delta I(u) = -\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\overline{u}(t)}M(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\varphi_a\left(a(t_1)\right) + q(t) + G_z\left(z(t_1,x_1)\right) - \int_{t}^{t_1} M_a(\tau)\,d\tau -$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\int_{t}^{t_1} H_z'(\tau,x)\,dx\,d\tau - \int_{x_0}^{x_1} B'(t,x)\psi(t,x)\,dx\Bigg]'\Delta\dot{a}(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[G_z\left(z(t_1,x_1)\right) - \psi(t,x) -$$

$$-\int_{s}^{x_1} B'(t,s)\psi(t,s)\,ds - \int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1} H_z'(\tau,s)\,d\tau\,ds - \int_{t}^{t_1} H_{z_x}'(\tau,x)\,d\tau\Big]'\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta a'(t_1)\varphi_{aa}\left(a(t_1)\right)\Delta a(t_1) + \frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x_1)G_{zz}\left(z(t_1,x_1)\right)\Delta z(t_1,x_1) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta a'(t)M_{aa}(t)\Delta a(t) + 2\,\Delta u'(t)M_{ua}(t)\Delta a(t) + \Delta u'(t)M_{uu}(t)\Delta u(t)\right]dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x) + \Delta z'(t,x)H_{zz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x) + \Delta z_x'(t,x)H_{z_xz}(t,x)\Delta z(t,x) +$$

$$+\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)\Big]dx\,dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Delta a'(t)\Delta_{\bar{u}(t)}M_{aa}(t)\Delta a(t)dt+o_1\left(\|\Delta a(t_1)\|^2\right)+$$

$$+o_2\left(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2\right)+\int_{t_0}^{t_1}o_3\left([\|\Delta a(t)\|+\|\Delta u(t)\|]^2\right)dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_4\left([\|\Delta z(t,x)\|+\|\Delta z_x(t,x)\|]^2\right)dx\,dt. \quad (3.17)$$

Если предполагать, что $(\psi(t,x),q(t))$ является решением системы интегральных уравнений

$$\psi(t,x)=-G_z(z(t_1,x_1))+\int_s^{x_1}B'(t,s)\psi(t,s)ds+\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}H_z(\tau,s)ds\,d\tau+\int_t^{t_1}H_{z_x}(\tau,x)d\tau; \quad (3.18)$$

$$q(t)=-\varphi_a(a(t_1))-G_z(z(t_1,x_1))+\int_t^{t_1}M_{aa}(\tau)d\tau-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\int_t^{t_1}H_z(\tau,x)dx\,d\tau+\int_{x_0}^{x_1}B'(t,x)\psi(t,x)dx, \quad (3.19)$$

то формула приращения (3.17) примет вид

$$\Delta I(u)=\frac{1}{2}\Delta a'(t_1)\varphi_{aa}(a(t_1))\Delta a(t_1)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z(t_1,x_1)G_{zz}(z(t_1,x_1))\Delta z(t_1,x_1)-\int_{t_0}^{t_1}M_u'(t)\Delta u(t)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta a'(t)M_{aa}(t)\Delta a(t)+2\,\Delta u'(t)M_{ua}(t)\Delta a(t)+\Delta u'(t)M_{uu}(t)\Delta u(t)\right]dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)+\Delta z'(t,x)H_{zz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)+$$

$$+\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz}(t,x)\Delta z(t,x)+\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)\Big]dx\,dt+$$

$$+o_1\left(\|\Delta a(t_1)\|^2\right)+o_2\left(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2\right)-\int_{t_0}^{t_1}o_3\left(\left[\|\Delta a(t)\|+\|\Delta u(t)\|\right]^2\right)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_4\left(\left[\|\Delta z(t,x)+\Delta z_x(t,x)\|\right]^2\right)dt\,dx. \quad (3.20)$$

Пусть ε – достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T$, – произвольная кусочно-непрерывная и ограниченная r-мерная вектор-функция (вариация управления).

В силу открытости области управления U специальное приращение управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t)=\varepsilon\delta u(t),\ t\in T. \quad (3.21)$$

Через $\left(\Delta a(t;\varepsilon),\Delta z(t,x;\varepsilon)\right)$ обозначим специальное приращение вектора состояния $\left(a(t),z(t,x)\right)$, отвечающее приращению (3.21) управления $u(t)$.

Из оценок, приведенных, например, в работах [1, 2, 11–13] следует, что

$$\left\|\Delta a(t;\varepsilon)\right\| \le L\varepsilon, \tag{3.22}$$

$$\left\|\Delta z(t,x;\varepsilon)\right\| \le L\varepsilon, \quad \left\|\Delta z_x(t,x;\varepsilon)\right\| \le L\varepsilon, \quad (t,x)\in D.$$

Используя эти оценки и (3.21), при помощи (3.2), (3.3) и (3.4), (3.5) аналогично [14] доказывается

Теорема 3.1. Для специального приращения $\left(\Delta a(t;\varepsilon),\Delta z(t,x;\varepsilon)\right)$ состояния $\left(a(t),z(t,x)\right)$ имеют место разложения

$$\begin{gathered}\Delta a(t;\varepsilon)=\varepsilon\,\delta a(t)+o(\varepsilon;t),\\ \Delta z(t,x;\varepsilon)=\varepsilon\,\delta z(t,x)+o(\varepsilon;t,x),\\ \Delta z_x(t,x;\varepsilon)=\varepsilon\,\delta z_x(t,x)+o(\varepsilon;t,x),\end{gathered} \tag{3.23}$$

где $\left(\delta a(t),\delta z(t,x)\right)$ (вариация состояния $\left(a(t),z(t,x)\right)$) является решением уравнения в вариациях

$$\delta\dot a(t)=g_a(t)\delta a(t)+g_u(t)\delta u(t); \tag{3.24}$$

$$\delta a(t_0)=0; \tag{3.25}$$

$$\delta z_{tx}(t,x)=B(t,x)\delta z_t(t,x)+f_z(t,x)\delta z(t,x)+f_{z_x}(t,x)\delta z_x(t,x); \tag{3.26}$$

$$\begin{gathered}\delta z(t,x_0)=\delta a(t),\\ \delta z(t_0,x)=0.\end{gathered} \tag{3.27}$$

С учетом разложений (3.23) из формулы приращения (3.20) получаем, что

$$\begin{gathered}\Delta I_\varepsilon(u)=I(u+\varepsilon\delta u)-I(u)=-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}M_u'(t)\delta u(t)\,dt+\\ +\frac{\varepsilon^2}{2}\Big\{\delta a'(t_1)\varphi_{aa}\left(a(t_1)\right)\delta a(t_1)+\delta z(t_1,x_1)G_{zz}\left(z(t_1,x_1)\right)\delta z(t_1,x_1)-\\ -\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta a'(t)M_{aa}(t)\delta a(t)+2\delta u'(t)M_{ua}(t)\delta a(t)+\delta u'(t)M_{uu}(t)\delta u(t)\right]dt+\\ +\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\delta z(t,x)+\delta z'(t,x)H_{zz_x}(t,x)\delta z_x(t,x)+\\ +\delta z_x'(t,x)H_{z_xz}(t,x)\delta z(t,x)+\delta z_x'(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)\delta z_x(t,x)\Big]dx\,dt\Big\}+o\left(\varepsilon^2\right).\end{gathered} \tag{3.28}$$

Из разложения (3.28) следует, что первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала $I(u)$ имеют соответственно вид

$$\delta^1 I(u;\, \delta u) = -\int_{t_0}^{t_1} M_u'(t)\delta u(t)\,dt; \tag{3.29}$$

$$\begin{gathered}\delta^2 I(u;\, \delta u) = \delta a'(t_1)\varphi_{aa}(a(t_1))\delta a(t_1) + \delta z(t_1,x_1)G_{zz}(z(t_1,x_1))\delta z(t_1,x_1) - \\ -\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta a'(t)M_{aa}(t)\delta a(t) + 2\,\delta u'(t)M_{ua}(t)\delta a(t) + \delta u'(t)M_{uu}(t)\delta u(t)\right]dt + \\ +\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\delta z(t,x) + \delta z'(t,x)H_{zz_x}(t,x)\delta z_x(t,x) + \right. \\ \left. +\delta z_x'(t,x)H_{z_x z}(t,x)\delta z(t,x) + \delta z_x'(t,x)H_{z_x z_x}(t,x)\delta z_x(t,x)\right]dx\,dt.\end{gathered} \tag{3.30}$$

4. Необходимые условия оптимальности

Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы соотношения

$$\int_{t_0}^{t_1} M_u'(t)\delta u(t)\,dt = 0; \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}\delta a'(t_1)\varphi_{aa}(a(t_1))\delta a(t_1) + \delta z(t_1,x_1)G_{zz}(z(t_1,x_1))\delta z(t_1,x_1) - \\ -\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta a'(t)M_{aa}(t)\delta a(t) + 2\,\delta u'(t)M_{ua}(t)\delta a(t) + \delta u'(t)M_{uu}(t)\delta u(t)\right]dt + \\ +\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\delta z(t,x) + \delta z'(t,x)H_{zz_x}(t,x)\delta z_x(t,x) + \right. \\ \left. +\delta z_x'(t,x)H_{z_x z}(t,x)\delta z(t,x) + \delta z_x'(t,x)H_{z_x z_x}(t,x)\delta z_x(t,x)\right]dx\,dt \ge 0.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Соотношения (4.1), (4.2) являются неявными необходимыми условиями оптимальности первого и второго порядка соответственно.

Из (4.1) по известной схеме (см., напр., [15, 16]) получается аналог уравнения Эйлера [15].

Теорема 4.1. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ выполнялось соотношение

$$M_u(\theta) = 0, \tag{4.3}$$

где $\theta \in [t_0, t_1)$ – здесь и в дальнейшем произвольная точка Лебега (правильная точка) (см., напр., [16–18]) управления $u(t)$.

Необходимое условие оптимальности (4.3) есть аналог уравнения Эйлера и представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка.

Определение 4.1. Каждое допустимое управление $u(t)$, являющееся решением уравнения Эйлера, назовем классической экстремалью.

Ясно, что оптимальное управление (если оно существует) находится среди классических экстремалей.

Для сужения множества классических экстремалей надо иметь необходимые условия оптимальности второго порядка.

С этой целью будем использовать неявное необходимое условие оптимальности второго порядка (4.2).

Решение задачи (3.24), (3.25) допускает представление (см., напр., [10, 19])

$$\delta a(t)=\int_{t_0}^{t} F(t,\tau)g_u(\tau)\delta u(\tau)d\tau, \tag{4.4}$$

где $F(t,\tau)$ $(n\times n)$ – матричная функция – решение задачи

$$F_\tau(t,\tau)=F(t,\tau)g_u(\tau),$$

$$F(t,t)=E$$

(E $(n\times n)$ – единичная матрица).

Далее решение краевой задачи (3.26), (3.27) допускает представление [20]

$$\delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)\left[\delta\dot a(\tau)-f_{z_x}(\tau,x_0)\delta a(\tau)\right]d\tau,$$

где $R(t,x;\tau,s)$ есть решение интегрального уравнения:

$$R(t,x;\tau,s)=E+\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x} R(t,x;\alpha,\beta)f_z(\alpha,\beta)d\alpha\, d\beta+$$

$$+\int_{\tau}^{t} R(t,x;\alpha,s)f_{z_x}(\alpha,s)d\alpha+\int_{s}^{x} R(t,x;\tau,\beta)B(\tau,\beta)d\beta.$$

Принимая во внимание (4.4), из (4.5) имеем

$$\delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)\left[g_a(\tau)\delta a(\tau)+g_u(\tau)\delta u(\tau)-f_{z_x}(\tau,x_0)\delta u(\tau)\right]d\tau. \tag{4.5}$$

Полагая

$$L(t,x,\tau)=R(t,x;\tau,x_0)\left[g_a(\tau)-f_{z_x}(\tau,x_0)\right],$$

представление (4.5) записывается в виде

$$\delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)g_u(\tau)\delta u(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t} L(t,x,\tau)\delta a(\tau)d\tau. \tag{4.6}$$

Далее, с учетом представления (4.4) будем иметь

$$\delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)g_u(\tau)\delta u(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{\tau} L(t,x,\tau)F(\tau,s)g_u(s)\delta u(s)ds\right]d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t} L(t,x,s)F(s,\tau)ds\right]g_u(\tau)\delta u(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)g_u(\tau)\delta u(\tau)d\tau. \tag{4.7}$$

Введя обозначения

$$Q(t,x,\tau)=\int_{\tau}^{t} L(t,x,s)F(s,\tau)ds+R(t,x;\tau,x), \tag{4.8}$$

представление (4.7) записывается в виде

$$\delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t} Q(t,x,\tau)g_u(\tau)\delta u(\tau)d\tau. \tag{4.9}$$

Из (4.9) следует, что

$$\delta z_x(t,x)=\int_{t_0}^{t} Q_x(t,x,\tau)g_u(\tau)\delta u(\tau)d\tau. \tag{4.10}$$

При помощи представления (4.4) доказывается, что

$$\delta a'(t_1)\varphi_{aa}(a(t_1))\delta a(t_1)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)g_u'(\tau)F'(t_1,\tau)\varphi_{aa}(a(t_1))F(\tau,s)g_u(s)\delta u(s)ds\,d\tau; \tag{4.11}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(t)M_{ua}(t)\delta a(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta u'(\tau)M_{ua}(\tau)F(\tau,t)\ d\tau\right]g_u(t)\delta u(t)dt; \tag{4.12}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta a'(t)M_{aa}(t)\delta a(t)dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)g_u(\tau)\delta u(\tau)d\tau\right)M_{aa}(t)\left(\int_{t_0}^{t}F(t,s)g_u(s)\delta u(s)ds\right)dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)g_u'(\tau)\left\{\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}F'(t,\tau)M_{aa}(t)F(t,s)dt\right\}g_u(s)\delta u(s)ds\,d\tau. \tag{4.13}$$

Далее, используя (4.9), (4.10), получаем, что

$$\delta z(t_1,x_1)G_{zz}(z(t_1,x_1))\delta z(t_1,x_1)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)g_u'(\tau)Q'(t_1,x_1,\tau)G_{zz}(z(t_1,x_1))Q(t_1,x,s)g_u(s)\delta u(s)ds\,d\tau; \tag{4.14}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\delta z(t,x)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t_1}Q(t,x,\tau)g_u(\tau)\delta u(\tau)d\tau\right)'H_{zz}(t,x)\left(\int_{t_0}^{t_1}Q(t,x,s)g_u(s)\delta u(s)ds\right)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta' u(\tau)g_u'(\tau)\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}Q'(t,x,\tau)H_{zz}(t,x)Q(t,x,s)dx\,dt\right\}g_u(s)\delta u(s)ds\,d\tau; \tag{4.15}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta z'(t,x)H_{zz_x}(t,x)\delta z_x(t,x)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t_1}Q(t,x,\tau)g_u(\tau)\delta u(\tau)d\tau\right)' H_{zz_x}(t,x)\left(\int_{t_0}^{t_1}Q_x(t,x,s)g_u(s)\delta u(s)ds\right)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta' u(\tau)g_u'(\tau)\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}Q'(t,x,\tau)H_{zz_x}(t,x)Q_x(t,x,s)dx\,dt\right\}g_u(s)\delta u(s)ds\,d\tau; \quad (4.16)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta z_x'(t,x)H_{z_x z}(t,x)\delta z(t,x)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t_1}Q_x(t,x,\tau)g_u(\tau)\delta u(\tau)d\tau\right)' H_{z_x z}(t,x)\left(\int_{t_0}^{t_1}Q(t,x,s)g_u(s)\delta u(s)ds\right)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta' u(\tau)g_u'(\tau)\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}Q_x'(t,x,\tau)H_{z_x z}(t,x)Q(t,x,s)dx\,dt\right\}g_u(s)\delta u(s)ds\,d\tau; \quad (4.17)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta z_x'(t,x)H_{z_x z_x}(t,x)\delta z_x(t,x)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t_1}Q_x(t,x,\tau)g_u(\tau)\delta u(\tau)d\tau\right)' H_{z_x z_x}(t,x)\left(\int_{t_0}^{t_1}Q_x(t,x,s)g_u(s)\delta u(s)ds\right)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\delta' u(\tau)g_u'(\tau)\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}Q_x'(t,x,\tau)H_{z_x z_x}(t,x)Q_x(t,x,s)dx\,dt\right\}g_u(s)\delta u(s)ds\,d\tau. \quad (4.18)$$

Пусть $K(\tau,s)$ $(n\times n)$ – матричная функция, определяемая формулой

$$\begin{aligned}K(\tau,s)&=-F'(t_1,\tau)\varphi_{aa}(a(t_1))F(t_1,s)+\\&+Q'(t_1,x_1,\tau)G_{zz}(z(t_1,x_1))Q(t_1,x_1,s)-\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}F'(t,\tau)M_{aa}(t)F(t,s)dt+\\&+\int_{x_0}^{x_1}\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}\Big[Q'(t,x,\tau)H_{zz}(t,x)Q(t,x,s)+Q'(t,x,\tau)H_{zz_x}(t,x)Q_x(t,x,s)+\\&+Q_x'(t,x,\tau)H_{z_x z}(t,x)Q(t,x,s)+Q_x'(t,x,\tau)H_{z_x z_x}(t,x)Q_x(t,x,s)\Big]dx\,dt.\end{aligned} \quad (4.19)$$

Матричная функция $K(\tau,s)$, определяемая формулой (4.19), является аналогом матричных функций, введенных в работах [21, 22], а также используемых для исследовании особых управлений и вывода необходимых условий оптимальности для различных классов задач оптимального управления (см., напр., [11]).

С учетом (4.19) и тождеств (4.11) – (4.18) неравенство (4.2) записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta' u(\tau)g_u'(\tau)K(\tau,s)g_u(s)\delta u(s)\,ds\,d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1}\delta' u(\tau)M_{ua}(\tau)F(\tau,t)d\tau\right]g_u(t)\delta u(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}\delta' u(t)M_{uu}(t)\delta u(t)dt\le 0. \quad (4.20)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 4.2. Для оптимальности классической экстремали $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство (4.20) выполнялось для всех $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T$.

Неравенство (4.20) есть необходимое условие оптимальности второго порядка, выраженное непосредственно через параметры задачи (2.1) – (2.6), и носит довольно общий характер. Из него, используя произвольность вариации $\delta u(t)$ управления $u(t)$, можно получить относительно легко проверяемые необходимые условия оптимальности, в частности аналог условия Лежандра – Клебша.

Пусть $\theta\in[t_0,t_1)$ – произвольная точка Лебега управления $u(t)$, $v\in R^r$ – произвольный вектор, а $\mu>0$ – произвольное достаточно малое число, такое, что $\theta+\mu<t_1$.

Вариацию $\delta u(t)$ управления $u(t)$ определим по формуле

$$\delta u_\mu(t)=\begin{cases} v, & t\in[\theta,\theta+\mu),\\ 0, & t\in T\setminus[\theta,\theta+\mu).\end{cases} \quad (4.21)$$

Принимая во внимания (4.21), в неравенстве (4.20) получим

$$\mu v' M_{uu}(\theta)v+o(\mu)\le 0.$$

Следовательно

$$v' M_{uu}(\theta)v\le 0. \quad (4.22)$$

Теорема 4.3. (Аналог условия Лежандра – Клебша) Для оптимальности классической экстремали $u(t)$в задаче (2.1) – (2.6) необходимо, чтобы неравенство (4.22) выполнялось для всех $\theta\in[t_0,t_1)$, $v\in R^r$.

Как видно, проверка аналога условия Лежандра – Клебша относительно легче. Но «платой» за это является то, что условие оптимальности (4.22) может вырождаться.

Определение 4.2. Классическую экстремаль $u(t)$ назовем особым в классическом смысле управлением, если

$$v' M_{uu}(\theta)v=0, \quad (4.23)$$

для всех $\theta\in[t_0,t_1)$, $v\in R^r$.

Считая $u(t)$ особым в классическом смысле управлением, его специальную вариацию определим по формуле

$$\delta u_{\mu}(t)=\sum_{i=1}^{m}\delta u\left(t,\mu;\theta_i,l_i,v_i\right). \tag{4.24}$$

Здесь m – произвольное натуральные число; $\theta_i\in\left[t_0,t_1\right), i=\overline{1,m}$, произвольные правильные точки управления $u(t)$, удовлетворяющие условию $t_0\le\theta_1\le\theta_2\le\ldots$ $\le\theta_m<t_1$; $l_i\ge 0$, $i=\overline{1,m}$, – произвольные числа; $v_i\in R^r$, $i=\overline{1,m}$, – произвольные ограниченные векторы. А $\delta u\left(t,\mu;\theta_i,l_i,v_i\right)$ – аналог игольчатой вариации, определяемый формулой

$$\delta u\left(t,\mu;\theta_i,l_i,v_i\right)=\begin{cases}v_i, t\in\left[\theta_i,\theta_i+l_i\varepsilon\right),\\ 0, t\in\left[t_0,t_1\right]\setminus\left[\theta_i,\theta_i+l_i\varepsilon\right).\end{cases} \tag{4.25}$$

Операцию сложения игольчатых вариаций $\delta u\left(t,\mu;\theta_i,l_i,v_i\right)$ следуя [22] определяем следующим образом.

Если $\theta_1\ne\theta_2$, то суммой вариаций $\delta u\left(t,\mu;\theta_1,l_i,v_i\right)$ и $\delta u\left(t,\mu;\theta_2,l_i,v_i\right)$ назовем вариацию вида

$$\delta u_{\mu}(t)=\begin{cases}v_i, t\in\left[\theta_i,\theta_i+\mu_i l_i\right),\\ 0, t\in T\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{2}\left[\theta_i,\theta_i+l_i\mu\right).\end{cases}$$

Если же $\theta_1=\theta_2$, то суммой вариаций $\delta u\left(t,\mu;\theta_1,l_i,v_i\right)$ и $\delta u\left(t,\mu;\theta_2,l_i,v_i\right)$ назовем вариацию

$$\delta u_{\mu}(t)=\begin{cases}v_1, t\in\left[\theta_1,\theta_1+l_1\mu\right),\\ v_2, t\in\left[\theta_1,\theta_1+\left(l_1+l_2\right)\mu\right),\\ 0, t\in T\setminus\left[\theta_1,\theta_1+(l_1+l_2)\mu\right).\end{cases}$$

Понятие суммирования подобным образом распространяется на любое конечное число игольчатых вариаций вида (4.25).

Теперь предположим, что $u(t)$ – особое в классическом смысле оптимальное управление. Учитывая вид (4.24) игольчатой вариации $\delta u_{\mu}(t)$ в неравенстве (4.20), а также принимая во внимание (4.23), после некоторых преобразований получим,что

$$\mu^2\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}l_i\, v_i' g_u'(\theta_i)K(\theta_i,\theta_j)g_u(\theta_j)v_j+\sum_{i=1}^{m}l_i v_i' H_{ua}(\theta_i)\left[l_i\, g_u(\theta_i)v_i+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2\sum_{j=1}^{i-1}l_i F(\theta_i,\theta_j)g_u\left(\theta_j\right)v_j\right]\right]+o(\mu^2)\le 0.$$

Отсюда в силу произвольности μ следует справедливость утверждения.

Теорема 4.4 (Многоточечное необходимое условия оптимальности). Для оптимальности особого в классическом смысле управления $u(t)$ необходимо, чтобы для любого натуралного m неравенство

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i v_i' g_u'(\theta_i) K(\theta_i,\theta_j) g_u(\theta_j) v_j + \sum_{i=1}^{m} l_i v_i' H_{ua}(\theta_i)\Big[l_i\, g_u(\theta_i) v_i +$$

$$+2\sum_{j=1}^{i-1} l_i F(\theta_i,\theta_j) g_u(\theta_j) v_j \Big] \le 0 \qquad (4.26)$$

выполнялось для всех $v_i \in R^r, l_i \ge 0,\ \theta_i \in [t_0,t_1), i=\overline{1,m}.$

Неравенство (4.26) есть многоточечное необходимое условие оптимальности особых в классическом смысле управлений.

Из теоремы 4.4. при $m=1$ следует

Теорема 4.5. Для оптимальности классической экстремали $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$v'\big[g_u'(\theta) K(\theta,\theta) g_u(\theta) + M_{uu}(\theta) g_u(\theta) \big] v \le 0 \qquad (4.27)$$

выполнялось для всех $v \in R^r$, $\theta \in [t_0,t_1)$.

Неравенство (4.27) есть аналог условия Габасова – Кирилловой из [24–26], полученный другим методом для терминальной задачи оптимального управления обыкновенными динамическими системами. Заметим, что необходимое условия оптимальности (4.26) остается в силе также при вырождении необходимого условия оптимальности (4.27).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров А.И.* Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами // Математический сборник. 1966. Т. 69. № 3. С. 371–421.
2. *Егоров А.И.* Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1965. Т. 29. № 6. С. 1205–1260.
3. *Егоров А.И.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Оптимальные системы. Статистические методы: сб. М.: Наука, 1967. С. 76–92.
4. *Срочко В.А.* Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1989. 160 с.
5. *Васильев О.В.* Качественные и конструктивные методы оптимизации систем с распределенными параметрами: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Л., 1984. 42 с.
6. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
7. *Васильев О.В.*, *Срочко В.А.*, *Терлецкий В.А.* Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск: Наука, 1990. 190 с.
8. *Погодаев Н.И.* О свойствах решений задачи Гурса – Дарбу с граничными и распределенными управлениями // Сиб. матем. журнал. 2007. № 5. С. 1116–1123.
9. *Погодаев Н.И.* О решениях системы Гурса – Дарбу с распределенными граничными управлениями: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 2009. 18 с.
10. *Алексеев В.М.*, *Тихомиров В.М.*, *Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 550 с.
11. *Мансимов К.Б.*, *Марданов М.Дж.* Качественная теория оптимального управления системами Гурса – Дарбу. Баку: Изд-во ЭЛМ, 2010. 360 с.

12. *Плотников В.И., Сумин В.И.* Оптимизация объектов с распределенными параметрами описываемых системами Гурса – Дарбу // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1972. № 1. С. 61–72.
13. *Плотников В.И., Сумин В.И.* Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса – Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. № 5. С. 845–856.
14. *Гасанов К.К.* О существовании оптимальных управлений для процессов, описываемых системой гиперболических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. № 3. С. 591–608.
15. *Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др.* Методы оптимизации. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с.
16. *Мордухович Б.Ш.* Метод матрических аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.
17. *Понтрягин Л.С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
18. *Новоженов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И.* Методы оптимального управления системами математической физики. Горький: Изд-во ГГУ, 1986. 87 с.
19. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ, 1973. 256 с.
20. *Ахиев С.С., Ахмедов К.Т.* Об интегральном представлении решений некоторых дифференциальных уравнений // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1973. № 2.
21. *Мансимов К.Б.* Об одной схеме исследования особых управлений в системах Гурса – Дарбу // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1981. № 2. С. 100–104.
22. *Мансимов К.Б.* Исследование особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Баку, 1994. 42 с.
23. *Гороховик С.Я.* Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории // Дифференц. уравнения. 1975. № 10. С. 1765–1773.
24. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
25. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* К теории необходимых условий оптимальности высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1970. № 4. С. 665–670.
26. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Об оптимальности особых управлений // Дифференц. уравнения. 1969. № 6. С. 1000–1011.

Статья поступила 15.03.2017 г.

Mansimov K. B., Suleymanova V.A. (2017) NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN THE ONE BOUNDARY CONTROL PROBLEM FOR QOURSAT – DARBOUX SYSTEMS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 26–42

DOI 10.17223/19988621/49/3

In this paper, a boundary optimal control problem described by the Goursat–Darboux system is considered under the assumption that the control domain is open.

We consider the problem of minimizing of the functional

$$I(u)=\varphi(a(t_1))+G(z(t_1,x_1)),$$

under constraints

$$u(t)\in U\subset R^r,\ \ t\in T=[t_0,t_1],$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f(t,x,z,z_x),\ \ (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1],$$

$$z(t,x_0)=a(t),\quad t\in T=[t_0,t_1],$$
$$z(t_0,x)=b(x),\quad x\in X=[x_0,x_1],$$

$$a(t_0)=b(x_0)=a_0,$$

$$\dot a=g(t,a,u),\quad t\in T,$$

$$a(t_0)=a_0.$$

Here, $f(t,x,z,z_x)$ is a given *n*-dimensional vector-function which is continuous with respect to set of variables, together with partial derivatives with respect to z,z_x up to second order, $B(t,x)$ is a given measurable and bounded matrix function, $b(x)$ is a given *n*-dimensional absolute continuous vector-valued function, t_0,t_1,x_0,x_1 $(t_0<t_1;\, x_0<x_1)$ are given, a_0 is a given constant vector, $g(t,a,u)$ given *n*-dimensional vector-function which is continuous with respect to the set of variables together with partial derivatives with respect to (a,u) up to second order, $\varphi(a)$ and $G(z)$ are given twice continuously differentiable scalar functions, *U* is a given non-empty, bounded, and open set, and $u(t)$ is a measurable and bounded *r*-dimensional control vector-function.

The first and second order necessary conditions of optimality are established.

Keywords: boundary control, Goursat–Darboux systems, analoqus the Eyler equation, analoqus the Gabasov – Kirillova optimality condition.

MANSIMOV Kamil' Bayramali ogly (Doctor of Physics and Mathematics Baku State University, Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan)
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

SULEYMANOVA Vusalya Abdulla gyzy (Sumgait State University, Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan)

REFERENCES

1. Yegorov A.I. (1966) Neobkhodimye usloviya optimalnosti dlya sistem s raspredelennmi parametrami [Necessary optimality conditions for systems with distributed parameters]. *Matematicheskii sbornik*. 69(3). pp. 371–421.
2. Yegorov A.I. (1965) Optimal’nye protsessy v sistemakh s raspredelennmi parametram i nekotorye zadachi invariantnosti [Optimal processes in systems with distributed parameters and some problems of the theory of invariance]. *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. math.* 29(6). pp. 1205–1260.
3. Yegorov A.I. (1967) Optimal’noe upravlenie sistemami s raspredelennmi parametrami i nekotorye zadachi invariantnosti [Optimal control of systems with distributed parameters and some problems of invariance theory]. *Optimal Systems. Statistical methods*. Moscow: Nauka, pp. 76–92.
4. Srochko V.A. (1989) *Variatsionnyi printsip maksimuma i metod linearizatsii v zadachakh optimal’nogo upravleniya* [Variational Maximum Principle and Linearization Method in Optimal Control Problems]. Irkutsk. Irkutsk University Publ.
5. Vasilyev O.V. (1984) *Kachestvennye i konstruktivnye metody optimizatsii sistem s raspredelennymi parametrami* [Qualitative and constructive methods for optimizing systems with distributed parameters]. Avtoref. diss. degree of doctor of phys.-math. sciences. Leningrad. 42 p.
6. Vasilyev F.P. (1981) *Metody resheniya ekstremal’nykh zadach* [Methods for solving extreme problems]. Moscow: Nauka.
7. Vasilyev O.V, Srochko V.A, Terletskiy V.A. (1990) *Metody optimizatsii i ikh prilojenya* [Optimization methods and their applications]. Novosibirsk: Nauka.
8. Pogodaev N.I. (2007) On the properties of solutions to the Goursat–Darboux problem with boundary and distributed controls. *Sib. Math. J.* 48(5). pp. 897–912. https://doi.org/10.1007/s11202-007-0092-3.
9. Pogodayev N.I. *O resheniyakh sistemy Gursa–Darbu s raspredelennymi granichnymi upravleniyami* [On solutions of the Goursat–Darboux system with distributed and boundary controls]. Abstract. diss. scientific degree of candidate of physico-mathematical sciences. Irkutsk, 2009. 18 p.

10. Alekseyev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. (1979) *Optimal'noe upravlenie* [Optimal control]. Moscow: Nauka.
11. Mansimov K.B, Mardanov M.J. (2010) *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa–Darbu* [Qualitative theory of optimal control for Goursat-Darboux systems]. Baku: Elm Publ.
12. Plotnikov V.I., Sumin V.I. (1972) The optimization of objects with distributed parameters, described by Goursat-Darboux systems. *Zh. vychisl. mat. mat. fiz.* 12(1). pp. 61–77. https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90066-3.
13. Plotnikov V.I., Sumin V.I. (1972) Problemy ustoychivosti nelineynykh sistem Gursa–Darbu [Problems of stability of nonlinear Goursat–Darboux systems]. *Differents.Uravneniya.* 5. pp. 845–856.
14. Gasanov K.K. (1973) *The existence of optimal controls for processes described by a system of hyperbolic equations*. Zh. vychisl. mat. mat. fiz. 13(3). pp. 599–608. https://doi.org/10.1016/0041-5553(73)90101-8.
15. Gabasov R., Kirillova F.M., et al. (2011) *Metody optimizatsii* [Methods of optimization]. Minsk: Chetyre chetverti.
16. Morduhovich B.Sh. (1988) *Metod matrichnykh approksimatsiy v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Method of matrix approximations in optimization and control problems]. Moscow: Nauka.
17. Pontryagin L.S. et al. (1969) *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka.
18. Novozhenov M.M., Sumin V.I., Sumin M.I. (1986) *Metody optimal'nogo upravleniya sistemami matematicheskoy fiziki* [Methods of optimal control of systems of mathematical physics]. Gor'kiy: Izd-vo GGU.
19. Gabasov R., Kirillova F.M. (1973) *Optimizatsiya lineynykh sistem* [Optimization of linear systems]. Minsk: Izd-vo BSU.
20. Akhiyev S.S., Akhmedov K.T. (1973) Ob integral'nom predstavlenii resheniy nekotorykh differentsial'nykh uravneniy [On the integral representation of solutions of some differential equations]. *Izv. AN Azerb. SSR. Ser. Fiz.-tehn. and mat. Sciences.* 2.
21. Mansimov K.B. (1981) Ob odnoy scheme issledovaniya osobykh upravleniy v sistemakh Gursa–Darbu [On a scheme for investigating special controls in Goursat–Darboux systems]. *Izv. AN Azerb. SSR. Ser. Fiz.-tehn. and math. Sciences*. 2. pp. 100–104.
22. Mansimov K.B. (1994) *Issledovaniye osobykh protsessov v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Investigation of special processes in problems of optimal control]. Avtoref. diss. degree of phys. math. sciences. Baku. 42 p.
23. Gorokhavik S.Ya. (1975) Neobkhodimye usloviya optimal'nosti v zadache s podvizhnym pravm kontsom trayektorii [Necessary optimality conditions for the problem with the right end of the moving path]. *Differential Equations*. 10. p. 1765–1773.
24. Gabasov R., Kirillova F.M. (1973) *Osobye optimal'nye upravleniya* [Special optimal controls]. Moscow: Nauka.
25. Gabasov R., Kirillova F.M. (1970) K teorii neobkhodimykh usloviy optimalnosti vysokogo poryadka [To the theory of necessary conditions for high-order optimality]. *Differents. Equations*. 4. p. 665–670.
26. Gabasov R., Kirillova F.M. (1969) Ob optimal'nosti osobykh upravleniy [On the optimality of singular controls]. *Differents. Equations*. 6. pp. 1000–1011.