УДК 517.952
DOI 10.17223/19988621/49/5

И.В. Рахмелевич

ДВУМЕРНОЕ НЕАВТОНОМНОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Рассматривается двумерное неавтономное гиперболическое уравнение второго порядка со степенными нелинейностями по первым производным. Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях, при которых это уравнение допускает функциональное разделение переменных заданного вида. С помощью метода функционального разделения переменных получен ряд частных решений данного уравнения. Исследована зависимость вида решений от параметров уравнения. Доказана теорема об условиях существования обобщенного автомодельного решения.

Ключевые слова: *неавтономное уравнение, функциональное разделение переменных, степенная нелинейность, решение типа бегущей волны, автомодельное решение.*

Одним из важнейших направлений современной математической физики является получение точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, развитие известных и создание новых методов их нахождения. При этом большое внимание уделяется исследованию уравнений со степенными нелинейностями [1–7]. Большинство известных результатов для этого класса задач уравнений получены для автономных уравнений. В то же время, потребности развития теории, а также практических приложений требуют исследования неавтономных уравнений, прежде всего для изучения неоднородных и нестационарных физических процессов. Целью настоящей работы является исследование неавтономного гиперболического уравнения второго порядка, содержащего степенные функции первых производных. При этом использован метод функционального разделения переменных [1, 2, 8, 9], известный как один из наиболее эффективных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

1. Постановка задачи. Теорема о функциональном разделении переменных

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = g(u) f(x,y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{\beta_2}. \qquad (1)$$

В уравнении (1) $\beta_{1,2} \in \boldsymbol{R}$ – заданные параметры, $g(u), f(x,y)$ – заданные функции. Частный случай $f(x,y) \equiv 1$, когда уравнение (1) является автономным, рассмотрен в [3]. В данной работе будем искать решения уравнения (1) методом функционального разделения переменных [1, 2, 8]. Возможность разделения переменных в уравнении (1) и общий вид решения определяется следующей теоремой.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (*1*) *допускало функциональное разделение переменных вида*

$$u(x,y)=U(z),\ z=X(x)+Y(y), \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(x,y)$ *можно было представить как*

$$f(x,y)=[X'(x)]^{1-\beta_1}[Y'(y)]^{1-\beta_2}\,\Phi(z), \tag{3}$$

причем $X(x),Y(y)$ *– произвольно заданные, дважды дифференцируемые функции,* $\Phi(z)$ *– произвольная функция; а функция* $U(z)$ *должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению* (*ОДУ*):

$$U''(z)-g(U(z))[U'(z)]^{\beta_\Sigma}\,\Phi(z)=0,\quad \beta_\Sigma=\beta_1+\beta_2. \tag{4}$$

Доказательство. 1. *Необходимость*. Пусть уравнение (1) имеет решение вида (2). Подставив это решение в уравнение (1), получаем

$$f(x,y)[X'(x)]^{\beta_1-1}[Y'(y)]^{\beta_2-1}=\Phi(z), \tag{5}$$

где $\Phi(z)$ определяется выражением

$$\Phi(z)=\frac{U''(z)}{g(U(z))[U'(z)]^{\beta_\Sigma}},\quad \beta_\Sigma=\beta_1+\beta_2. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что функция $f(x,y)$ должна быть представима в виде (3), а функция $U(z)$ должна удовлетворять уравнению (4). Необходимость доказана.

2. *Достаточность*. Пусть функцию $f(x,y)$ можно представить в виде (3) для произвольных дифференцируемых функций $X(x),Y(y)$. Подставив функцию (2) в уравнение (1), получаем для функции $U(z)$ уравнение (4). Достаточность доказана.

2. Решения типа бегущей волны

В данном разделе рассмотрим некоторые частные решения уравнения (1) для случая, когда $X(x)=c_1x, Y(y)=c_2y$. Тогда, согласно теореме 1, уравнение (1) имеет решение вида $u(x,y)=U(z)$, если $f(x,y)=c_1^{1-\beta_1}c_2^{1-\beta_2}\Phi(z)$, причем в данном случае $z=c_1x+c_2y$. Пусть также

$$g(u)=g_0u^\gamma,\ \ \Phi(z)=z^\lambda. \tag{7}$$

Для функций вида (7) уравнение (4) сводится к обобщенному уравнению Эмдена – Фаулера. В справочнике [10] приведены общие решения этого уравнения для ряда значений параметров, при которых уравнение разрешимо. В данной работе рассмотрим частные решения, которые существуют при произвольных значениях параметров, кроме специальных случаев, указанных ниже.

1) *Степенное решение*:

$$u(x,y)=U_0z^\sigma. \tag{8}$$

Подставляя функцию (8) в уравнение (4) и учитывая (7), находим

$$\sigma=\frac{\beta_\Sigma-\lambda-2}{\beta_\Sigma+\gamma-1},\quad U_0=\left\{\frac{(\sigma-1)\sigma^{1-\beta_\Sigma}}{g_0}\right\}^{\frac{1}{\beta_\Sigma+\gamma-1}}. \tag{9}$$

Решение вида (8) приведено также в [10, с. 279]. На основании выражений (9) укажем некоторые значения параметров, при которых степенное решение не существует или вырождается в тривиальное.

а) При $\beta_\Sigma + \gamma = 1$ решение не существует;

б) при $\lambda = -\gamma - 1 \quad (\sigma = 1)$ возможны две ситуации:

- если $\beta_\Sigma + \gamma - 1 > 0$, то решение вырождается в тривиальное;
- если $\beta_\Sigma + \gamma - 1 \le 0$, то решение не существует;

в) при $\lambda = \beta_\Sigma - 2 \quad (\sigma = 0)$ также возможны две ситуации:

- если $\dfrac{1-\beta_\Sigma}{\beta_\Sigma + \gamma - 1} \ge 0$, то решение вырождается в тривиальное;
- если $\dfrac{1-\beta_\Sigma}{\beta_\Sigma + \gamma - 1} < 0$, то решение не существует.

2) *Логарифмическое решение*:

$$u(x, y) = U_0 \ln|z|. \tag{10}$$

Будем предполагать, что $\gamma = 0$, т.е. $g(u) = g_0$. Подставляя (10) в уравнение (4), находим, что это решение существует при выполнении условий $\lambda = \beta_\Sigma - 2$, $\beta_\Sigma \ne 1$, при этом U_0 определяется выражением

$$U_0 = (-g_0)^{\frac{1}{1-\beta_\Sigma}}.$$

3) *Экспоненциальное решение*:

$$u(x, y) = U_0 \exp(\sigma z). \tag{11}$$

Для данного случая предполагаем, что

$$g(u) = g_0 u^\gamma, \quad \Phi(z) = \exp(\lambda z). \tag{12}$$

Подставляя (11) в уравнение (4) и учитывая (12), находим:

- если $\beta_\Sigma + \gamma - 1 \ne 0, \lambda \ne 0$, то

$$\sigma = \frac{\lambda}{1-\beta_\Sigma - \gamma}, \; U_0 = \left(\frac{\sigma^{2-\beta_\Sigma}}{g_0} \right)^{\frac{1}{\beta_\Sigma + \gamma - 1}}; \tag{13}$$

- если $\beta_\Sigma + \gamma - 1 = 0, \lambda = 0$, то U_0, σ – произвольные, но при этом решение существует только при выполнении условия $g_0 = \sigma^{2-\beta_\Sigma}$;
- если $\beta_\Sigma + \gamma - 1 = 0, \lambda \ne 0$, то решение не существует.

Рассмотрим решения типа бегущей волны при особых значениях параметров. При анализе решений (8), (11) было показано, что указанные решения не существуют в случае, если

$$\beta_\Sigma + \gamma - 1 = 0. \tag{14}$$

Рассмотрим решение для данного случая, предполагая, что $\Phi(z)$ – произвольная функция, а $g(u)$ определяется первой из формул (7). С учетом (14), уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{U''(z)}{U'(z)} = g_0 \left(\frac{U'(z)}{U(z)} \right)^{-\gamma} \Phi(z). \tag{15}$$

Для уравнения (15) можно понизить порядок с помощью замены переменной

$$w(z)=\frac{U'(z)}{U(z)}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в уравнение (15), получаем уравнение первого порядка

$$w'(z)+\left[w(z)\right]^2=g_0\Phi(z)\left[w(z)\right]^{1-\gamma}. \tag{17}$$

Приведем решения уравнения (17) для некоторых значений γ.

а) при $\gamma=-1$ (17) сводится к уравнению с разделяющимися переменными, решение которого имеет вид

$$w(z)=-\frac{1}{z-z_0+g_0\int\Phi(z)dz}. \tag{18}$$

Из (16), (18) получаем решение уравнения (4):

$$U(z)=U_0\exp\left\{-\int\frac{dz}{z-z_0+g_0\Psi(z)}\right\}, \tag{19}$$

где $\Psi(z)=\int\Phi(z)dz$; U_0, z_0 – произвольные постоянные.

б) при $\gamma=0$ (17) сводится к уравнению Бернулли

$$w'(z)=g_0\Phi(z)w(z)-\left[w(z)\right]^2. \tag{20}$$

Решая уравнение (20) и учитывая соотношение (16), находим

$$U(z)=U_0\exp\left\{\int\frac{\Omega(z)dz}{C+\int\Omega(z)dz}\right\}. \tag{21}$$

Здесь $\Omega(z)=\exp\left\{g_0\int\Phi(z)dz\right\}$.

Рассмотрим случай $\lambda=\beta_\Sigma-2$, при этом предполагаем, что $g(u)$ – произвольная функция, а $\Phi(z)$ определяется второй формулой (7). Тогда уравнение (4) сводится к однородному уравнению

$$z^2U''(z)-g\left(U(z)\right)\left[zU'(z)\right]^{\beta_\Sigma}=0. \tag{22}$$

Выполнив в уравнении (22) замену переменной $z=\exp(\varsigma)$, преобразуем его к автономному уравнению:

$$U''(\varsigma)-U'(\varsigma)-g\left(U(\varsigma)\right)\left[U'(\varsigma)\right]^{\beta_\Sigma}=0. \tag{23}$$

Пусть $\beta_\Sigma=1$. Тогда решение уравнения (23) в неявном виде определяется формулой

$$\varsigma-\varsigma_0=\int\frac{dU}{U+G(U)+A}. \tag{24}$$

Возвращаясь к переменной z, решение (24) можно привести к виду

$$z=z_0\exp\left(\int\frac{dU}{U+G(U)+A}\right). \tag{25}$$

В формулах (24), (25) $G(U)=\int g(U)dU;$ ς_0, z_0, A – произвольные постоянные.

3. Другие частные решения

В данном разделе будем рассматривать решения более общего вида.

Теорема 2. *Пусть*

$$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)\,, \tag{26}$$

где $\varphi(x),\psi(y)$ *– некоторые заданные функции,* $g(u)$ *определяется первой из формул* (*7*). *Тогда уравнение* (*1*) *имеет решения следующего вида*:

1) *при* $\beta_\Sigma+\gamma-1\neq 0$:

$$u(x,y)=g_0{}^{\sigma}\,q_1q_2\,\xi(x)\eta(y)\,, \tag{27}$$

где

$$\xi(x)=\begin{cases}[\varphi(x)]^{\sigma} & \text{при } \beta_1=1,\\ \left\{\int[\varphi(x)]^{1/(1-\beta_1)}\,dx+C_0\right\}^{\sigma(1-\beta_1)} & \text{при } \beta_1\neq 1;\end{cases} \tag{28а}$$

$$\eta(y)=\begin{cases}[\psi(y)]^{\sigma} & \text{при } \beta_2=1,\\ \left\{\int[\psi(y)]^{1/(1-\beta_2)}\,dy+D_0\right\}^{\sigma(1-\beta_2)} & \text{при } \beta_2\neq 1;\end{cases} \tag{28б}$$

$$q_i=\begin{cases}1 & \text{при } \beta_i=1,\\ \left(\dfrac{1}{\sigma(1-\beta_i)}\right)^{\sigma(1-\beta_i)} & \text{при } \beta_i\neq 1\end{cases},\quad u_0=\left(\frac{g_0}{\sigma^{2-\beta_\Sigma}}\right)^{\sigma},\ \sigma=\frac{1}{1-\beta_\Sigma-\gamma}\,, \tag{29}$$

$D_0\,,C_0$ *– произвольные постоянные;*

2) *при* $\beta_\Sigma+\gamma-1=0$:

$$u(x,y)=u_0\,\xi(x)\eta(y)\,, \tag{30}$$

где

$$\xi(x)=\exp\left\{\lambda_1^{1/(1-\beta_1)}\int[\varphi(x)]^{1/(1-\beta_1)}\,dx\right\}, \tag{31а}$$

$$\eta(y)=\exp\left\{\lambda_2^{1/(1-\beta_2)}\int[\psi(y)]^{1/(1-\beta_2)}\,dy\right\}. \tag{31б}$$

Выражения (*31а*), (*31б*) *справедливы при* $\beta_1\neq 1$, $\beta_2\neq 1$ *соответственно. При* $\beta_1=1$ $\xi(x)$ *– произвольная функция при условии* $\varphi(x)=\text{const}$, *в противном случае данное решение не существует. Аналогично, при* $\beta_2=1$ $\eta(y)$ *– произвольная функция при условии* $\psi(y)=\text{const}$, *в противном случае данное решение не существует. В выражениях* (*30*),(*31а,б*) u_0,λ_1,λ_2 *– произвольные постоянные, причем* λ_1,λ_2 *связаны соотношением*

$$\lambda_1\lambda_2=g_0\ . \tag{32}$$

Доказательство. При условиях теоремы 2 решение уравнения (1) ищем в виде

$$u(x,y)=u_1(x)u_2(y)\,. \tag{33}$$

Подставляя выражение (33) в уравнение (1), с учетом (26) и первой из формул (7), приводим (1) к виду

$$\frac{[u_1'(x)]^{1-\beta_1}\,[u_1(x)]^{-\gamma-\beta_2}}{\varphi(x)}\cdot\frac{[u_2'(y)]^{1-\beta_2}\,[u_2(y)]^{-\gamma-\beta_1}}{\psi(y)}=g_0\,. \tag{34}$$

Левая часть уравнения (34) представлена в виде произведения двух сомножителей, один из которых зависит от x, а другой от y. Поэтому, используя известную схему разделения переменных, получаем уравнения для функций $u_1(x), u_2(y)$:

$$\frac{[u_1'(x)]^{1-\beta_1}[u_1(x)]^{-\gamma-\beta_2}}{\varphi(x)}=\lambda_1, \quad \frac{[u_2'(y)]^{1-\beta_2}[u_2(y)]^{-\gamma-\beta_1}}{\psi(y)}=\lambda_2, \tag{35}$$

где λ_1, λ_2 – некоторые постоянные, связанные соотношением (32). Для дальнейшего анализа уравнения (35) перепишем в виде

$$[u_1'(x)]^{\theta_1}[u_1(x)]^{\delta-\theta_1}=\lambda_1\varphi(x), \quad [u_2'(y)]^{\theta_2}[u_2(y)]^{\delta-\theta_2}=\lambda_2\psi(y), \tag{36}$$

где $\delta=1-\beta_\Sigma-\gamma$, $\theta_i=1-\beta_i$ $(i=1,2)$. Рассмотрим возможные частные случаи для первого уравнения (36).

Случай 1. $\delta\neq 0$.

а) $\theta_1\neq 0$ $(\beta_1\neq 1)$. Решение первого уравнения (36)

$$u_1(x)=\lambda_1{}^{\sigma}\left(\frac{1}{\sigma\theta_1}\right)^{\sigma\theta_1}\left\{\int[\varphi(x)]^{1/\theta_1}dx+C_0\right\}^{\sigma\theta_1};$$

б) $\theta_1=0$ $(\beta_1=1)$. Тогда из (36) $u_1(x)=[\lambda_1\varphi(x)]^{\sigma}$ (здесь учтено, что $\sigma=1/\delta$).

Случай 2. $\delta=0$.

а) $\theta_1\neq 0$ $(\beta_1\neq 1)$. Решая первое уравнение (36), находим

$$u_1(x)=u_{10}\exp\left\{\lambda_1^{1/\theta_1}\int[\varphi(x)]^{1/\theta_1}dx\right\};$$

б) $\theta_1=0$ $(\beta_1=1)$. Тогда первое уравнение (36) принимает вид $\lambda_1\varphi(x)=1$. Этому уравнению удовлетворяет произвольная функция $u_1(x)$, при условии, что $\varphi(x)=1/\lambda_1=\mathrm{const}$.

Решение второго уравнения (36) полностью аналогично. Используя полученные выражения для $u_1(x)$, $u_2(x)$ и подставляя их в (26), после элементарных преобразований находим решения (27) – (30). Теорема доказана.

Приведенная ниже теорема определяет условия существования обобщенных автомодельных решений уравнения (1).

Теорема 3. *Уравнение* (*1*) *имеет обобщенное автомодельное решение вида*

$$u(x,y)=X_0(x)U(z), \quad z=yX(x), \tag{37}$$

только в том случае, если выполнены условия

$$X_0(x)=a_0[X(x)]^{\lambda}, \quad f(x,y)=f_0[X(x)]^{\lambda(1-\beta_\Sigma)+\beta_1-\beta_2}[X'(x)]^{1-\beta_1}\Phi(z), \tag{38}$$

где a_0,λ *– некоторые постоянные, а* $\Phi(z)$ *– некоторая произвольная функция.*

При этом функция $U(z)$ *удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению:*

$$[U'(z)]^{1-\beta_\Sigma}\left(1+\lambda+\frac{zU''(z)}{U'(z)}\right)-\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{U(z)}{zU'(z)}\right)^{\beta_1}z^{\beta_1}\Phi(z)=0. \tag{39}$$

Доказательство.

1. Пусть уравнение (1) имеет решение вида (37). Уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Bigg/\left\{g(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\beta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{\beta_2}\right\}. \tag{40}$$

Подставим (37) в правую часть (40), тогда после элементарных преобразований это уравнение принимает вид

$$f(x,y)\frac{\left[X(x)X_0(x)\right]^{\beta_2}\left[X_0'(x)\right]^{1-\beta_1}}{X_0(x)X'(x)}=\frac{\left[U'(z)\right]^{1-\beta_\Sigma}\left(1+\dfrac{X_0'(x)X(x)}{X_0(x)X'(x)}+\dfrac{zU''(z)}{U'(z)}\right)}{\left(\dfrac{X_0(x)X'(x)}{X_0'(x)X(x)}+\dfrac{U(z)}{zU'(z)}\right)^{\beta_1}z^{\beta_1}} \tag{41}$$

Из уравнения (41) может быть получено ОДУ относительно функции $U(z)$ только при выполнении условия

$$\frac{X_0'(x)X(x)}{X_0(x)X'(x)}=\lambda\ , \tag{42}$$

где λ – некоторая постоянная.

Рассмотрим условие (42) и выполним в нем замену переменных:

$$X_0(x)=\exp\left(\chi_0(x)\right),\ X(x)=\exp\left(\chi(x)\right). \tag{43}$$

С учетом (43) условие (42) приводится к виду

$$\chi_0'(x)-\lambda\chi'(x)=0\ . \tag{44}$$

Интегрируя уравнение (44) и возвращаясь к функциям $X_0(x), X(x)$ согласно (43), получаем первое из условий (38). Далее, с учетом (42), уравнение (41) принимает вид

$$f(x,y)\frac{\left[X(x)X_0(x)\right]^{\beta_2}\left[X_0'(x)\right]^{1-\beta_1}}{X_0(x)X'(x)}=\frac{\left[U'(z)\right]^{1-\beta_\Sigma}\left(1+\lambda+\dfrac{zU''(z)}{U'(z)}\right)}{\left(\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{U(z)}{zU'(z)}\right)^{\beta_1}z^{\beta_1}}\ . \tag{45}$$

Правая часть уравнения (45) зависит только от переменной z, следовательно, и левая часть (45) должна быть функцией только этой переменной. Отсюда находим, что функция $f(x,y)$ должна удовлетворять условию

$$f(x,y)\frac{\left[X(x)X_0(x)\right]^{\beta_2}\left[X_0'(x)\right]^{1-\beta_1}}{X_0(x)X'(x)}=\Phi(z)\ , \tag{46}$$

где $\Phi(z)$ – произвольная функция. Учитывая доказанное выше первое из условий (38) и выражая $X_0(x)$ через $X(x)$, получаем второе условие (38). Кроме того, отсюда получаем уравнение (39) для функции $U(z)$. Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, исследованы решения двумерного гиперболического уравнения со степенными нелинейностями по первым производным, которое явно зависит от искомой функции и от независимых переменных. Доказана теорема, определяющая необходимые и достаточные условия функционального разделения переменных в этом уравнении. Получены решения типа бегущей волны и частные решения других типов, приведены условия существования полученных решений, а также получены решения при особых значениях параметров уравнения. Доказана теорема об условиях существования обобщенного автомодельного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полянин А.Д.*, *Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
2. *Полянин А.Д.*, *Зайцев В.Ф.*, *Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.
3. *Рахмелевич И.В.* О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1(33). С. 12–19.
4. *Рахмелевич И.В.* О некоторых новых решениях многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 3(35). С. 18–25. DOI 10.17223/19988621/35/3.
5. *Рахмелевич И.В.* О решениях многомерного дифференциального уравнения произвольного порядка со смешанной старшей частной производной и степенными нелинейностями // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18. № 4. С. 41–49. DOI 10.23671/VNC.2016.4.5992.
6. *Рахмелевич И.В.* О редукции многомерных уравнений первого порядка с мультиоднородной функцией от производных // Изв. вузов. Математика. 2016. № 4. С. 57–67.
7. *Рахмелевич И.В.* О многомерных уравнениях в частных производных со степенными нелинейностями по первым производным // Уфимский математический журнал. 2017. Т. 9. № 1. С. 98–108.
8. *Полянин А.Д.*, *Журов А.И.* Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 606–611.
9. *Miller J.* (*Jr.*), *Rubel L.A.* Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // J. Physics A. 1993. V. 26. P. 1901–1913.
10. *Зайцев В.Ф.*, *Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

Rakhmelevich I.V. (2017) TWO-DIMENSIONAL NON-AUTONOMOUS HYPERBOLIC EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH POWER-LAW NONLINEARITIES. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 52–60

DOI 10.17223/19988621/49/5

The study of non-autonomous differential equations is of interest for the development of methods of their solutions and applications, including the study of inhomogeneous and non-stationary physical processes. In this paper, we consider the two-dimensional non-autonomous hyperbolic equation of second order containing a power-law nonlinearity in the first derivatives and arbitrary functions of the dependent and independent variables. To study the solutions of this equation, the method of functional separation of variables is used. The theorem on necessary and sufficient conditions under which this equation admits a functional separation of variables of a specified type is proved. A number of particular solutions of this equation have been obtained. In particular, we present solutions of the traveling wave type with exponential, logarithmic, and exponential functions of independent variables. For the found solutions, we formulate conditions of their existence and investigate the dependence of solutions on parameters of the equation. We have also obtained particular solutions with functions of the independent variables of a more general form. The theorem on the condition of existence of generalized self-similar solution has been proved. The results obtained in this work can be generalized for non-autonomous nonlinear equations of higher orders and more complex types of nonlinearities.

Keywords: non-autonomous equation, functional separation of variables, power-law nonlinearity, solution of travelling wave type, self-similar solution.

RAKHMELEVICH Igor Vladimirovich (Candidate of Technical Sciences, Assoc. Prof., Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russian Federation)
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

REFERENCES

1. Polyanin A.D., Zaitsev V. F. (2004) *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press.
2. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. (2005) *Metody resheniya nelineinyh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Methods of solving nonlinear equations of mathematica physics and mechanics]. Moscow: Fizmatlit.
3. Rakhmelevich I.V. (2015) O dvumernykh giperbolicheskikh uravneniyakh so stepennoy nelineynost'yu po proizvodnym.[On two-dimensional hyperbolic equations with power-law nonlinearity in the derivatives]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(33). pp. 12–19.
4. Rakhmelevich I.V. (2015) O nekotorykh novykh resheniyakh mnogomernogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka so stepennymi nelineynost'yami [On some new solutions of the multi-dimensional first order partial differential equation with power-law nonlinearities]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(35). pp. 18–25. DOI:10.17223/19988621/35/3.
5. Rakhmelevich I.V. (2016) O resheniyakh mnogomernogo differentsialnogo uravneniya so smeshannoy starshey chastnoy proizvodnoy i stepennymi nelineynost'yami [On the solutions of multi-dimensional arbitrary order differential equation with mixed senior partial derivative and power-law non-linearities]. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal*. 4. pp. 41–49. DOI 10.23671/VNC.2016.4.5992.
6. Rakhmelevich I.V. (2016) Reduction of multidimensional first order equations with multi-homogeneous function of derivatives. *Russian Mathematics*. 60(4). pp. 47–55. https://doi.org/10.3103/S1066369X16040071.
7. Rakhmelevich I.V. (2016) On multi-dimensional partial differential equations with power nonlinearities in first derivatives. *Ufa Mathematical Journal*. 8(4). pp. 98–108.
8. Polyanin A.D., Zhurov A.I. (2002) The generalized and functional separation of variables in mathematical physics and mechanics. *Doklady Mathematics*. 65(1). pp. 129–134.
9. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. (1993) Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *Journal of Physics A*. 26. pp. 1901–1913.
10. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. (2003) *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. Boca Raton: Chapman Hall/CRC Press.