

МЕХАНИКА

УДК 621.735.043

DOI 10.17223/19988621/49/7

А.Ю. Албагачиев, А.М. Моисеенко, И.М. Якововская, Е.В. Зернов

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОЙ КВАДРАТНОЙ ЗАГОТОВКИ ПРИ ЕЕ ОСАДКЕ ШЕРОХОВАТЫМИ ПЛИТАМИ

Получены зависимости и разработан метод определения параметров напряженного состояния при осадке жесткопластической тонкой квадратной заготовки с использованием метода минимизации полной энергии деформаций.

Ключевые слова: осадка, внутренняя энергия, интенсивность скоростей деформаций, предел текучести.

Представленная работа, в которой параметры напряженного и деформированного состояния определены с помощью уравнений равновесия и физических уравнений, является продолжением статей [1, 4]. В целях упрощения решения были приняты допущения, обоснованность которых нужно проверить. В частности при определении напряжений по формулам Леви – Мизеса интенсивность относительных скоростей полагалась приближённо постоянной равной V/h , в то время как она переменна. При нахождении силы трения на торцевых поверхностях принималось, что она равна τ_{cp} – средне-интегральному значению касательных напряжений на этих поверхностях, тогда как в общепринятой постановке сила трения вычисляется по закону Амонтона – Кулона. С этой целью задача определения параметров напряженного и деформированного состояния была решена с помощью принципа минимума полной энергии, свободного от вышеуказанных допущений. Согласно этому принципу, для тонкой квадратной заготовки $\left(\frac{h}{a} < \frac{1}{4}\right)$ полная энергия деформации [3]

$$\Pi = \sigma_T \left(\iiint_{\omega} \zeta_i d\omega + \mu \iint_s \sqrt{V_r^2 + V_\phi^2} ds \right), \quad (1)$$

где σ_T – предел текучести; ω, s – объем и площадь торца заготовки; ζ_i – интенсивность скоростей деформаций,

$$\zeta_i = \sqrt{2/3} \sqrt{(\zeta_r - \zeta_\phi)^2 + (\zeta_r - \zeta_z)^2 + (\zeta_\phi - \zeta_z)^2 + 3/2 \zeta_r^2};$$

μ – коэффициент внешнего трения; V_r, V_ϕ, V_z – компоненты скорости точки.

На рис. 1 представлена схема заготовки при ее осадке, где $2a, 2h$ – сторона и толщина заготовки, O – центр заготовки, V – скорость осадки.

Так как пластинка имеет 5 осей симметрии и нагрузка симметрична относительно осей, то рассматривается только 1/8 часть пластинки при $\phi \in [0, \pi/4]$.

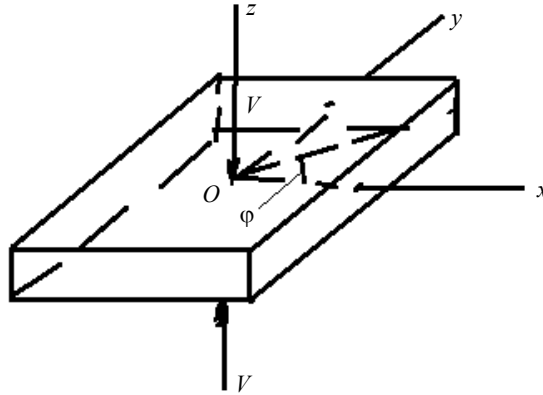


Рис. 1. Схема заготовки при ее осадке
Fig. 1. Diagram of the workpiece during upsetting

Для минимизации полной энергии согласно методу Ритца подбираем выражения для скоростей так, чтобы выполнялись граничные условия и условие несжимаемости. Тогда $V_z = -Vz/h$, $V_\varphi = cVr^2 \sin(4\varphi)$, а V_r находится из условия несжимаемости:

$$\zeta_z + \zeta_r + \zeta_\varphi = 0, \quad (2)$$

где $\zeta_z, \zeta_r, \zeta_\varphi$ – компоненты скорости деформации.

$$\zeta_z = \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{V}{h}; \quad \zeta_\varphi = \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}; \quad \zeta_r = \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (3)$$

Подставляя эти выражения в (2), получим

$$V_r = \frac{Vr}{2h} + \frac{4}{3}cVr^2 \cos 4\varphi$$

Тогда скорость сдвига

$$\eta_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} = -\frac{19}{3}crV \sin 4\varphi,$$

где c – коэффициент, зависящий от размеров заготовки и μ . Подставляя выражения скоростей и скоростей деформаций в (1), получим

$$\begin{aligned} \Pi = \sigma_T V \left[\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a/\cos\varphi} r \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{9}{2h^2} + \frac{384}{9}c^2r^2 - \frac{23}{6}c^2r^2 \sin^2 4\varphi \right)} dr \int_0^h dz + \right. \\ \left. + \mu \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a/\cos\varphi} r \sqrt{\frac{r^2}{4h^2} + \frac{4}{3}c \frac{r^3}{h} \cos 4\varphi + \frac{16}{9}c^2r^4 - \frac{7}{9}c^2r^4 \sin^2 4\varphi} dr \right]. \end{aligned}$$

Линеаризуя выражения под знаком интеграла, применяя биномиальное разложение и беря два его первых члена, а затем, интегрируя, получим

$$\Pi = \sigma_T V \left[a^2 0.867 + c^2 (2.266h^2 a^4 + 0.913\mu a^5 h) - 0.0972c\mu a^4 + 0.195 \frac{\mu a^3}{h} \right].$$

Тогда из выражения $\frac{\partial \Pi}{\partial c} = 0$

получим
$$c = \frac{0.048\mu}{2.266h^2 + 0.913\mu ah} \quad (4)$$

Обсуждение результатов

Для проверки точности полученных выражений для скоростей и скоростей деформаций были взяты заготовки из технического пластилина размерами 23×23×5 мм. Осадка производилась плитами из стали 12Х18Н10Т, шероховатостью 90 мкм, при $T = 21-22$ °С. Перед осадкой торцевые поверхности заготовки смазывались тальком. В выражение для коэффициента c входит коэффициент внешнего трения μ , который нам неизвестен. Чтобы его определить, строили кривые $r(V)|_{\varphi=0}$ для различных значений c , используя формулу для V_r , и сравнивали с такой же кривой, полученной экспериментально. Из семейства кривых $r(V)|_{\varphi=0}$ выбиралась кривая, наиболее близкая к экспериментальной, таким образом коэффициент c , а значит и μ , были определены. Для заготовки указанных размеров $c = 6.62 \cdot 10^{-4}$ 1/мм², $\mu = 0.3$. На рис. 2 при указанных выше c и μ приведены опытная и теоретическая кривые перемещения точки ($\varphi = 0$, $r = a$), т.е. кривые $r(V)|_{\varphi=0}$. Теперь, зная значение коэффициента c , можно по формулам (3) определить поле скоростей и скоростей деформаций, которые нам потребуются для определения напряжений, определяемых из уравнений связи Леви – Мизеса [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\zeta_i} \zeta_r, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\zeta_i} \zeta_\varphi, \\ \sigma_z &= \sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\zeta_i} \zeta_z, \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\zeta_i} \eta_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Первые три уравнения определяют нормальные напряжения через скорости деформаций (которые известны) с точностью до σ_0 – среднего напряжения.

Определим неизвестное σ_0 в точках $(\varphi, \frac{a}{\cos \varphi})$ границы (свободной поверхности). Так как на границе нормальное напряжение $\sigma_n = 0$, то для определения σ_0 на границе имеем условие

$$\sigma_n = (\sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\zeta_i} \zeta_r) \cos \varphi + (\sigma_0 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\zeta_i} \zeta_\varphi) \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Поле деформаций, а значит, скорости деформаций, определены на границе, т.е. в выражении (6) неизвестной является только величина σ_0 , в предположении, что $\sigma_i = \sigma_\tau = 1$ (в единицах σ_τ). Определив σ_0 и, следовательно, σ_r , исходя из

формул (5) на границе, находим σ_r в точках внутри области. В уравнении равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0$$

последние два слагаемых – известные величины в каждой точке (r, φ) на луче $(0 \leq \varphi \leq \pi/4)$. Следовательно, величину $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$ определим из этого уравнения. Итак,

в точке $(r, a/\cos \varphi)$ на границе известны величины $\sigma_r, \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$. Задаваясь определенным шагом и двигаясь с этим шагом от граничной точки по лучу $\varphi = \text{const}$, будем получать искомые значения σ_r , и $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$ в каждой точке луча, а σ_φ может быть получено через σ_r вычитанием из первого уравнения второго в выражениях (5).

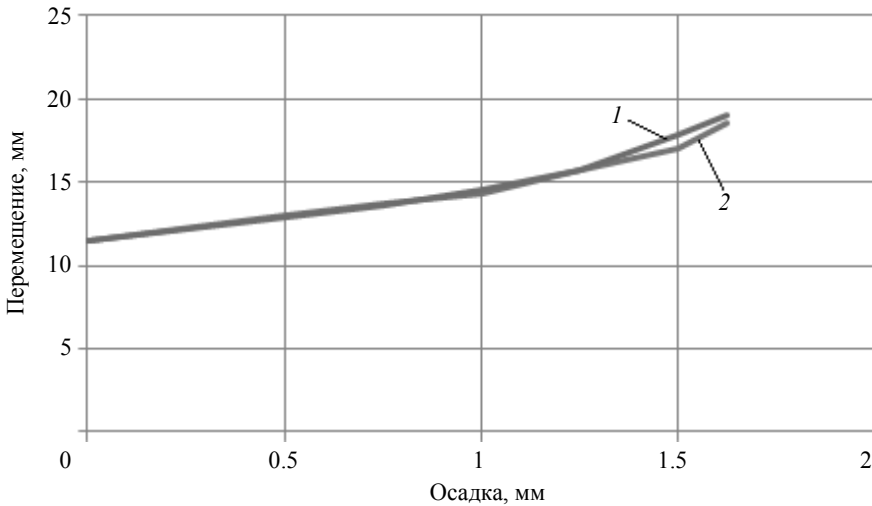


Рис. 2. Теоретическая (1) и экспериментальная (2) кривые зависимости радиального перемещения точки ($\varphi = 0, r = a$) от величины осадки

Fig. 2. Theoretical (1) and experimental (2) dependency diagrams of the radial displacement of the point ($\varphi = 0, r = a$) upon the upsetting value

Таким образом, зная значение коэффициента c по формуле (4), можно определить поле скоростей и скоростей деформаций, которые потребуются для определения напряжений из уравнений связи Леви – Мизеса.

Заключение

Полученные зависимости для скоростей и скоростей деформаций хорошо согласуются с экспериментальными данными, позволяют определять конфигурацию заготовки в зависимости от величины осадки, а также определять напряжения и коэффициент внешнего трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Албагачиев А.Ю., Якобовская И.М., Зернов Е.В. Напряженное и деформированное состояние при осадке жесткопластической заготовки квадратного сечения // Вестник МГУПИ. 2012. № 40. С. 9.
2. Воронцов А.Л. Технологические задачи теории пластичности. Т. 3. М.: Машиностроение, 2006. 475 с.
3. Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. М.: Машиностроение, 1979. 567 с.
4. Албагачиев А.Ю., Зернов Е.В., Моисеенко А.М. Напряженное и деформированное состояние прямоугольной пластины, осаживаемой шероховатыми пластинами // Ресурсосберегающие технологии при хранении и переработке сельскохозяйственной продукции. XI Международный научно-практический семинар. Орел, 2012. С. 15–23.

Статья поступила: 11.08.2017 г.

Albagachiev A.Yu., Moiseenko A.M., Yakobovskaya I.M., Zernov E.V. (2017) A STRESS-STRAIN STATE OF THE THIN SQUARE WORKPIECE DURING UPSETTING BY THE ROUGH PLATES *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 75–80
DOI 10.17223/19988621/49/7

In this paper, a stress-strain state of the thin square rigid-plastic plate upsetting by the rough plates has been investigated using the energy minimization method. It is known that the total strain energy Π is expressed in terms of the strain rate, which according to the Ritz method must be chosen so that the boundary conditions and incompressibility conditions are both satisfied. The obtained dependences for the strain rates contain the c coefficient depending on the plate dimensions and external friction coefficient. The value of the c is obtained from the condition of zero partial derivative of Π with respect to c . Having determined the c , it is possible to obtain the strain rate field, i.e. the solution of the problem of strain state of the plate. The strain state as detailed in the paper is determined using the Levy-Mises equations, which integrate the stress with the strain rates. The authors of the paper have previously considered a similar problem and it has been solved using the equilibrium equations and physical equations of the plastic flow. The results in the form of strain state parameters of the workpieces made of different materials have been experimentally obtained. In both cases, there is a good agreement with the theoretical dependences for the strain rates. The obtained dependences for velocities and strain rates, which are in a good agreement with the experimental data, allow determining both the workpiece configuration depending on the upsetting value, the voltage and the external friction coefficient.

Keywords: upsetting, internal energy, intensity of the strain rates, yield stress.

ALBAGACHIEV Ali Yusupovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Technological University, Moscow, Russian Federation).

MOISEENKO Anatoliy Mikhailovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Orel State Agrarian University named after N.V. Parahin, Orel, Russian Federation).
E-mail: puare54@yandex.ru

YAKOBOVSKAYA Inga Mikhailovna (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Moscow Technological University, Moscow, Russian Federation).

ZERNOV Evgeniy Vladimirovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Moscow Technological University, Moscow, Russian Federation).
E-mail: zernov1935@mail.ru

REFERENCES

1. Albagachiev A.Yu., Jakobovskaya I.M., Zernov V.E. (2012) Napryazhennoe i deformirovanoe sostoyanie pri osadke zhestkoplasticheskoy zagotovki kvadratnogo secheniya [Stress and strain state of the rigid-plastic workpiece of square cross-section during upsetting]. *Vestnik MGUPI – Bulletin of Moscow Technological University*. 40. p. 9.
2. Vorontsov A.L. (2006) *Tekhnologicheskie zadachi teorii plastichnosti* [Technological problems of plasticity theory]. Part 2. Moscow: Mashinostroenie.
3. Johnson W., Mellor P. (1979) *Teoriya plastichnosti dlya inzhenerov* [The theory of plasticity for engineers]. Moscow: Mashinostroenie.
4. Albagachiev A.Yu., Zernov E.V., Moiseenko A.M. (2012) Napryazhennoe i deformirovanoe sostoyanie pryamougol'noy plastiny, osazhivaemoy sherokhovatyimi plastinami [Stress and strain state of rectangular plate upsetting by the rough plates]. *Resursosberegayushchie tekhnologii pri khranении i pererabotke sel'skokhozyaystvennoy produktii. XI Mezhdunarodnyy nauchno-prakticheskiy seminar – Energy-saving technologies for the storage and processing of the agricultural products. XI International scientific-practical seminar*. Orel. pp. 15–23.