

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2017

№ 41

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,
Высшей аттестационной комиссии

Founder – Tomsk State University

EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Operation Research Department, Tomsk State University. Tel: +72822529599

Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Operation Research Department Tomsk State University. Tel: +72822529599

Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Doctor. of Sc.,
Docent of the Operation Research Department.
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Sc., Prof. of the Higher Mathematics and Mathematical Modeling Department Tomsk State University

Vladimir Vishnevsky – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

Gennady Koshkin – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Cybernetics Department Tomsk State University

Yury Kostyuk – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University

Anjela Matrosova – Doctor of Sc., Prof., Head of the Programming Department Tomsk State University

Anatoly Nazarov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University

Konstantin Samouylov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)

Eugene Semenko – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State Aerospace University (Krasnoyarsk, Russia)

Sergey Sushchenko – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department, Director of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science Tomsk State University

Mais Farkhadov – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

Gurami Tsitsishvili – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)

Editorial address:

Faculty of applied mathematics and cybernetics

National Research Tomsk State University

36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050

Telephone / fax: +72822529599

E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli

PhD, Prof.
University VII
Paris, France

Vladimir Dombrovskii

Doctor of Sc., Prof.
Tomsk State University
Russia

Alexander Dudin

Doctor of Sc., Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Enco Orsingher

PhD, Prof.
University of Rome
Italy

Paolo Prinetto

Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Gilbert Saporta

PhD, Prof.
Pierre and Marie Curie
University, Paris, France

Raimund Ubar

Doctor of Sc., Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia

Reindert Nobel

Doctor of Sc., Associate Prof.
Vrije University of Amsterdam
Netherlands

Nina Yevtushenko

Doctor of Sc., Prof.
Tomsk State University
Russia

Yervant Zorian

PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

Учредитель – Томский государственный университет

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой исследования операций ТГУ. Тел. +72822529599

Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры исследования операций ТГУ. Тел. +72822529599

Нежелская Людмила Алексеевна – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, доц. кафедры исследования операций ТГУ
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики и математического моделирования ТГУ

Вишневский Владимир Миронович – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)

Кошкин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры теоретической кибернетики ТГУ

Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ

Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, зав. кафедры программирования ТГУ

Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ

Самуйлов Константин Евгеньевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РUDN (г. Москва)

Семенкин Евгений Станиславович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, САУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)

Сушенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики, директор института прикладной математики и компьютерных наук ТГУ

Фархадов Манс Паша Оглы – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)

Цицашвили Гурами Шалвович – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36

Национальный исследовательский Томский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики

Телефон / факс: +72822529599

E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Кавалли

д-р философии, проф.
Университет VII,
Париж, Франция
Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Александр Дудин

д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Енцо Орзингер

д-р философии, проф.
Римский университет,
Италия

Паоло Принетто

проф.
Политехнический институт,
Турин, Италия

Жильберт Сапорта

д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии,
Кюри, Париж, Франция
Раймонд Убар

д-р, проф.
Технологический университет,
Таллинн, Эстония

Рейндерт Нобель

д-р, доцент
Свободный университет,
Амстердам, Нидерланды

Нина Евтушенко

д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Ервант Зориан

д-р философии, гл. науч. сотр.
фирмы «Синопсис», США

JORNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- *control of dynamical systems,*
- *mathematical modeling,*
- *data processing,*
- *informatics and programming,*
- *discrete function and automation,*
- *designing and diagnostics of computer systems.*

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке

Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- *управление динамическими системами,*
- *математическое моделирование,*
- *обработка информации,*
- *информатика и программирование,*
- *дискретные функции и автоматы,*
- *проектирование и диагностика вычислительных систем.*

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Акинина Н.В., Псоянц В.Г., Колесенков А.Н., Таганов А.И. Теория и практика применения нечетких сетей Петри для мониторинга экологических рисков	4
Березин Д.В., Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний обобщенного МАР-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени	12
Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Веретельникова И.В. О применении критериев проверки однородности законов распределения	24
Летунович Ю.Е., Якубович О.В. Открытые марковские сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом	32
Medvedev G.A. On yield curves of the European central bank	39

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Бабанов А.М., Петров А.В. Реализация репозитория ERM-модели в CASE-системе Oracle Designer	47
Павликов М.К. Метод авторизации клиентских приложений в гетерогенной распределенной программной системе, построенной на основе протокола HDP	55

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Matrosova A.Yu., Ostanin S.A., Kirienko I.E., Nikolaeva E.A. A Fault-tolerant Sequential Circuit Design for Stuck-at Faults and Path Delay Faults	61
Сапожников В.В., Сапожников В.В., Ефанов Д.В., Пивоваров Д.В. Синтез систем функционального контроля многовыходных комбинационных схем на основе метода логического дополнения	69
Сведения об авторах	81

CONTENTS

DATA PROCESSING

Akinina N.V., Psoyants V.G., Kolsenkov A.N., Taganov A.I. Theory and practice of using fuzzy Petri nets for monitoring environmental risks	4
Berezin D.V., Nezhel'skaya L.A. Optimal state estimation of Generalized MAP under conditions of non-extendable dead time	12
Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Veretel'nikova I.V. Application of criteria for testing homogeneity of distribution laws	24
Letunovich Yu.E., Yakubovich O.V. Open Markov queueing networks with control queues and quarantine node	32
Medvedev G.A. On yield curves of the European central bank	39

DATA PROCESSING

Babanov A.M., Petrov A.V. Implementation of the ERM-model repository in CASE-system Oracle Designer	47
Pavlikov M.K. Authorization method of client applications in a heterogeneous distributed software system built on the basis of the HDP protocol	55

DESIGNING AND DIAGNOSTICS
OF COMPUTER SYSTEMS

Matrosova A.Yu., Ostanin S.A., Kirienko I.E., Nikolaeva E.A. A Fault-tolerant Sequential Circuit Design for Stuck-at Faults and Path Delay Faults	61
Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I., Efanov D.V., Pivovarov D.V. Synthesis of concurrent error detection systems of multioutput combinational circuits based on Boolean complement method	69
Brief information about the authors	81

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 004.9:519.2

DOI: 10.17223/19988605/41/1

Н.В. Акинина, В.Г. Псоянц, А.Н. Колесенков, А.И. Таганов

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ПРИМЕНЕНИЯ НЕЧЕТКИХ СЕТЕЙ ПЕТРИ ДЛЯ МОНИТОРИНГА ЭКОЛОГИЧЕСКИХ РИСКОВ

Представлены результаты системного анализа нечетких продукционных систем поддержки принятия решений в контексте геоинформационного мониторинга экологических рисков. Рассмотрен способ представления правил нечетких продукций в нечеткой системе анализа и сокращения экологических рисков, основанный на применении нечетких сетей Петри. Предложен способ представления правил нечетких продукций при решении прикладных задач нечеткого моделирования по экологическим рискам. В результате программной реализации алгоритма получился эффективный и удобный в применении программный продукт.

Ключевые слова: геоинформационная система; ГИС; правила нечетких продукций; нечеткие сети Петри; нечеткий логический вывод; мониторинг; экологический риск.

Наряду с классическими подходами к структурному и функциональному построению ГИС анализа и мониторинга экологических рисков [1–3] в настоящей работе рассматривается новый подход к организации процесса анализа и мониторинга экологических рисков в условиях нечеткости, основанный на применении современной теории и практики анализа и мониторинга рисков в сложных программных проектах. В предлагаемом подходе процесс анализа и мониторинга экологических рисков в составе ГИС включает в себя алгоритм, состоящий из следующих шагов:

1. Идентификация экологических рисков – определение того, какие риски могут повлиять на экологию региона, и документальное оформление их характеристик.
2. Качественный анализ экологических рисков – расположение рисков по степени их приоритета для дальнейшего анализа или обработки путем оценки и суммирования вероятностей их возникновения и воздействия на экологию региона.
3. Количественный анализ экологических рисков – количественный анализ потенциального влияния идентифицированных рисков на общие цели сохранения экологии региона.
4. Планирование реагирования на экологические риски – разработка возможных вариантов действий, способствующих повышению благоприятных возможностей и снижению угроз экологии региона.
5. Мониторинг и управление рисками – отслеживание идентифицированных и остаточных рисков, идентификация новых рисков, исполнение планов реагирования на риски и оценка их эффективности на протяжении жизненного цикла региона.

Важным шагом этого алгоритма является качественный анализ экологических рисков, выполняемый экспертными методами [4]. В результате такого анализа экспертами формируется ранжированный реестр экологических рисков, которые сгруппированы по категориям:

- список рисков, требующих немедленного реагирования;
- список рисков для дополнительного анализа и реагирования;
- список рисков с низким приоритетом, нуждающихся в наблюдении.

Сформированный реестр экологических рисков является основой для выполнения следующих этапов алгоритма для системного анализа и мониторинга экологических рисков [5]. При этом процесс качественного анализа экологических рисков является весьма трудоемким. Для формализации этого процесса предлагается использовать современные методы поддержки принятия экспертных решений в условиях нечеткости. В связи с этим в статье рассматривается подход к представлению правил нечетких продукций в нечеткой продукционной ГИС, предназначенной для анализа и мониторинга экологических рисков.

1. Описание математического аппарата

Существующие нечеткие продукционные системы поддержки принятия решений по определению предназначены для реализации процесса нечеткого вывода и служат концептуальным базисом современной нечеткой логики. Достигнутые успехи в применении этих систем для решения широкого класса задач управления и послужили базой при выборе математического аппарата для формализации процесса анализа и сокращения экологических рисков на основе использования моделей, методов и алгоритмов теории нечетких множеств и нечетких сетей Петри (НСП) [6].

Сети Петри (СП) и их многочисленные модификации являются одним из классов моделей, неоспоримым достоинством которых является возможность адекватного представления не только структуры сложных организационно-технических систем и комплексов, но также и логико-временных особенностей процессов их функционирования. Сети Петри представляют собой математическую модель для представления структуры и анализа динамики функционирования систем в терминах «условие – событие». Они могут быть использованы при анализе рисков событий и выявлении потенциальных рисков экологического профиля.

Важной разновидностью СП являются нечеткие сети Петри, позволяющие конструктивно решать задачи нечеткого моделирования и нечеткого управления, в которых неопределенность имеет нестохастический или субъективный характер. В связи с этим открываются определенные перспективы в исследовании возможностей применения НСП для описания и формализации процессов управления рисками, в том числе для анализа рисков в условиях нечеткости геоданных [7, 8].

В рамках предлагаемого формализованного подхода к анализу рисков рассматриваются НСП, получаемые в результате введения нечеткости в начальную маркировку и правила срабатывания переходов базового формализма ординарных СП. Здесь нечеткая сеть Петри типа C_f определяется как $C_f = (N, f, \lambda, m_0)$, где $N = (P, T, I, O)$ – структура НСП C_f , которая аналогична структуре ординарных СП и для которой $I: P \times T \rightarrow \{0, 1\}$ и $O: T \times P \rightarrow \{0, 1\}$ – входная и выходная функции переходов соответственно; $f = (f_1, f_2, \dots, f_u)$ – вектор значений функции принадлежности нечеткого срабатывания переходов, при этом $f_j \in [0, 1]$ ($\forall j \in \{1, 2, \dots, u\}$); $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u)$ – вектор значений порога срабатывания переходов, при этом $\lambda_j \in [0, 1]$ ($\forall j \in \{1, 2, \dots, u\}$); $m = (m_1^0, m_2^0, \dots, m_n^0)$ – вектор начальной маркировки, каждая компонента которого определяется значением функции принадлежности нечеткого наличия одного маркера в соответствующей позиции данной НСП C_f , при этом $m_i^0 \in [0, 1]$ ($\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$).

Структура N введенного в рассмотрение подкласса НСП C_f также имеет обычный (нечеткий) вид, определяемый матрицами входных I и выходных O позиций. Поэтому графически НСП C_f изображаются ориентированным двудольным графом аналогично ординарным СП.

Динамика изменения начальной и последующих маркировок НСП C_f после момента ее запуска подчиняется следующим правилам $P(C_f)$.

(P_1) *Правило определения текущей маркировки.* Любое текущее состояние НСП C_f определяется вектором $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, компоненты которого ($m_i \in [0, 1]$) интерпретируются как значения функции принадлежности нечеткого наличия одного маркера в соответствующих позициях $p_i \in P$ НСП C_f . Начальное состояние НСП определяется вектором начальной маркировки m_0 .

(P_2) *Правило (условие) активности перехода.* Переход $t_k \in T$ НСП C_f называется активным (разрешенным, возбужденным) при некоторой текущей маркировке m , если выполнено следующее условие:

$$\min_{(j \in \{1, 2, \dots, n\}) \wedge (I(p_i, t_k) > 0)} \{m_i\} \geq \lambda_k, \quad (1)$$

где λ_k – значения порога срабатывания перехода $t_k \in T$. Другими словами, переход $t_k \in T$ НСП C_f является активным, если во всех его входных позициях имеются ненулевые значения компонентов вектора текущей маркировки, а минимальное из них – не меньше порога срабатывания рассматриваемого перехода.

(P_3) *Правило нечеткого срабатывания перехода.* Если переход $t_k \in T$ НСП C_f является активным при некоторой текущей маркировке m (т.е. для него выполнено условие (1)), то нечеткое срабатывание данного перехода, осуществляемое мгновенным образом, приводит к новой маркировке $m_v = (m_1^v, m_2^v, \dots, m_n^v)$, компоненты вектора которой определяются по следующим формулам:

– для каждой из входных позиций $p_i \in P$, для которых $I(p_i, t_k) > 0$:

$$m_i^v = 0, \quad (\forall p_i \in P) \wedge (I(p_i, t_k) > 0); \quad (2)$$

– для каждой из выходных позиций $p_j \in P$, для которых $O(t_k, p_j) > 0$:

$$m_j^v = \max \{ m_j, \min \{ m_i, f_k \} \}, \quad (\forall p_j \in P) \wedge (O(t_k, p_j) > 0), \quad (3)$$

$(i \in \{1, 2, \dots, n\}) \wedge (I(p_i, t_k) > 0)$

где f_k – значение функции принадлежности или мера возможности нечеткого срабатывания (запуска) перехода $t_k \in T$, которое задается при определении конкретной НСП C_f .

Если некоторые из позиций $p_i \in P$ являются одновременно входными и выходными для разрешенного перехода $t_k \in T$, то для них компоненты вектора новой маркировки рассчитываются последовательно, вначале по формуле (2), а затем – по формуле (3). При этом строгое определение диаграммы достижимых маркировок НСП C_f базируется на отношениях непосредственного следования и достижимости маркировок, что позволяет построить необходимые правила нечетких продукций для нечеткой продукционной системы анализа и мониторинга экологических рисков [9].

2. Способ представления правил нечетких продукций

Рассмотренный выше системный анализ НСП C_f позволяет конкретизировать предлагаемый способ представления правил нечетких продукций при решении прикладных задач нечеткого моделирования и выполнения процесса приближенных рассуждений по экологическим рискам. Для этого будем использовать модифицированные нечеткие сети Петри $C'_f = (N, f, \lambda, m_0)$, для которых правила P_1, P_2 такие же, как и теоретически рассмотренные выше для $P(C_f)$, а правило P_3 модифицировано и принимает следующий вид:

(P_3') При расчете компонентов вектора новой маркировки m как для входных, так и для выходных позиций здесь используется единая формула (3).

Это правило обусловлено тем обстоятельством, что НСП C'_f используют для интерпретации маркеров в позициях понятие нечеткой истинности высказывания. Значение последнего не становится равным нулю для высказываний в левой части правил продукций после их выполнения при данной интерпретации [10].

В предлагаемом способе используется следующая интерпретация позиций и переходов НСП. Правило нечеткой продукции вида "ПРАВИЛО i : ЕСЛИ А, ТО Б" представляется как некоторый переход $t_i \in T$ НСП (N, f, λ, m_0) , при этом условию "А" этого правила соответствует входная позиция $p_i \in P$ этого перехода, а заключению – выходная позиция $p_k \in P$ этого перехода t_i .

Если условие правила нечеткой продукции состоит из нескольких подусловий, соединенных операцией нечеткой конъюнкции $A = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_l$, то все эти подусловия представляются как входные позиции соответствующего перехода.

Если заключение правила нечеткой продукции состоит из нескольких подзаключений, соединенных операцией нечеткой конъюнкции $B = B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_l$, то все эти подзаключения также представляются как выходные позиции соответствующего перехода.

Более сложный случай соответствует дизъюнкции подусловий и подзаключений. Так, если условие правила нечеткой продукции состоит из нескольких подусловий, соединенных операцией нечеткой дизъюнкции: $A = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_l$, то все эти подусловия представляются как входные позиции отдельных переходов t_i для $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Если же заключение правила нечеткой продукции состоит из нескольких подзаключений, соединенных операцией нечеткой дизъюнкции $B = B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_l$, то все эти подзаключения представляются как выходные позиции отдельных переходов t_i для $i \in \{1, 2, \dots, l\}$.

Веса или коэффициенты определенности F_i правил нечетких продукций преобразуются в вектор $f = (f_1, f_2, \dots, f_u)$ значений функции принадлежности нечеткого срабатывания переходов, а степеням истинности подусловий правил соответствуют значения компонентов начальной маркировки $m_0 = (m_1^0, m_2^0, \dots, m_n^0)$, которая в этом случае описывает текущую ситуацию моделируемой проблемной области. Следует заметить, что в дополнение к базовому формализму правил нечетких продукций в НСП можно учесть возможность активизации каждого из правил заданием вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u)$, компоненты которого определяют значения порога срабатывания переходов [11, 12].

3. Реализация нечеткой продукционной системы анализа экологических рисков

На основе использования модифицированных НСП может быть разработана экспериментальная версия автоматизированной системы поддержки принятия решений по экологическим рискам [13]. Эта система, по существу, является экспертной системой, отражающей нечеткую логику взаимосвязи входных величин – экспертных оценок состояния экологии региона и выходных величин – степеней истинности возможных экологических рисков (рис. 1).

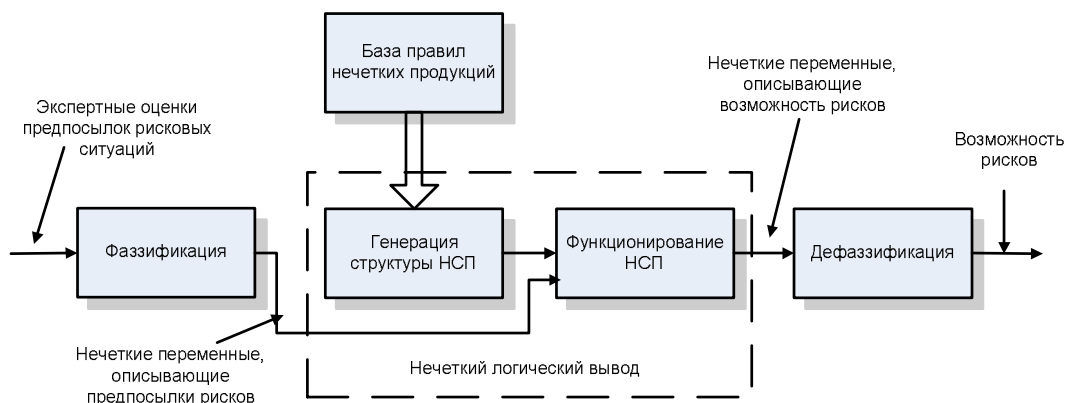


Рис. 1. Схема процесса анализа рисков с применением НСП

Основными функциональными модулями такой автоматизированной системы следует считать: базу правил нечетких продукций, блок нечеткого логического вывода, интерфейсный модуль, модуль модификации базы правил, модули фаззификации и дефаззификации [14, 15].

Интерфейс пользователя автоматизированной системы должен основываться на представлении всех доступных пользователю системных объектов и функций в виде графических компонентов экрана. Все элементы интерфейса пользователя разбиваются на группы исходя из их функционального назначения:

- интерфейс для работы с базой правил и ее возможного редактирования;
- интерфейс ввода исходных данных, характеризующих текущую рисковую ситуацию региона;
- интерфейс для просмотра и анализа сгенерированных НСП по текущей рисковому ситуации региона;

- интерфейс для настройки и редактирования функций принадлежности;
- интерфейс представления результатов нечеткого вывода по экологическим рискам проекта.

В раскрывающемся списке следует выбрать нечеткую переменную, для которой необходимо отредактировать функцию принадлежности. Далее нужно изменить параметры функции принадлежности. Все изменения сразу отображаются на графике, расположенном в нижней части окна (рис. 2).

Просмотр нечеткой сети Петри выполняется с использованием интерфейса, представленного на рис. 3. Позиции НСП, соответствующие входным и выходным данным, выделены цветом.

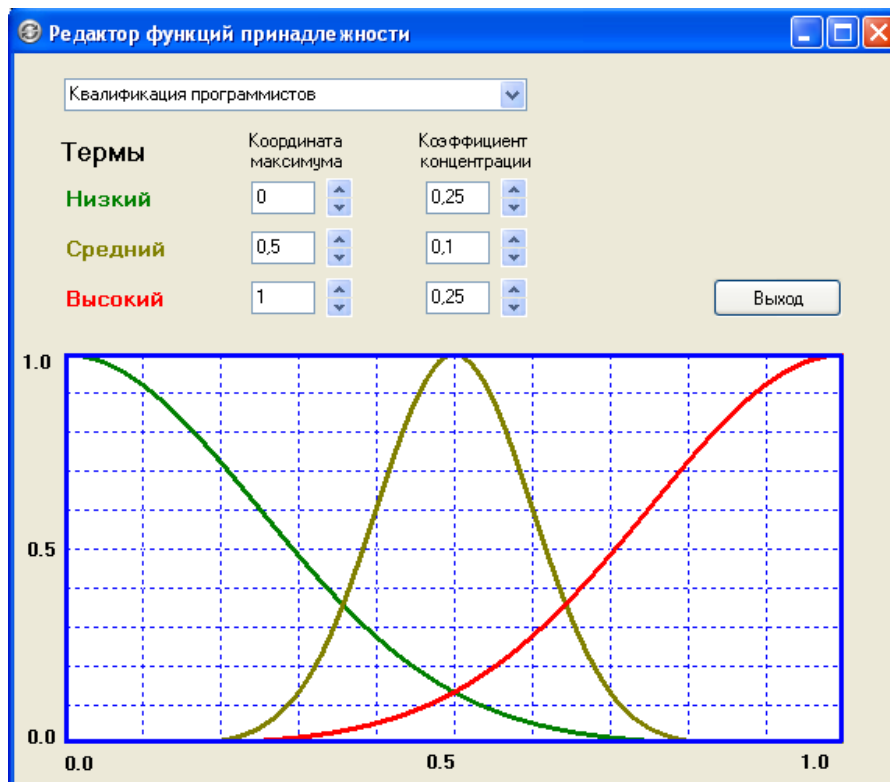


Рис. 2. Окно редактора функций принадлежности

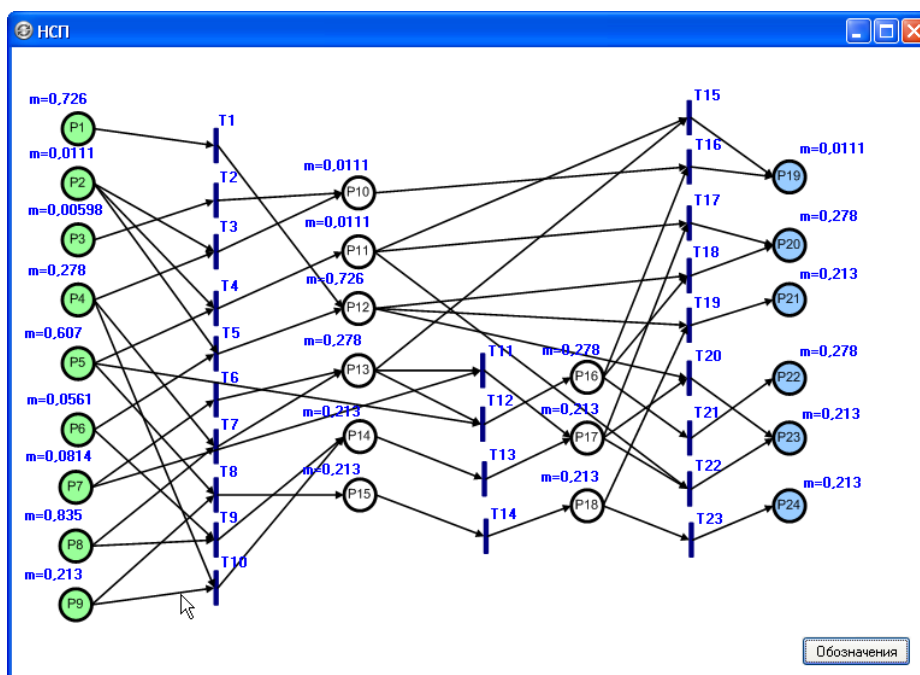


Рис. 3. Форма просмотра нечеткой сети Петри

В результате программной реализации алгоритма анализа экологических рисков с использованием математического аппарата НСП получился эффективный и удобный программный продукт, который предназначен для применения на практике как самостоятельно, так и в составе промышленных ГИС.

Заключение

Для формализации процесса анализа экологических рисков в работе предложен способ представления правил нечетких продукций в нечеткой системе анализа экологических рисков, основанный на применении нечетких сетей Петри [4]. Выполнена программная реализация нечеткой продукционной системы анализа экологических рисков на основе использования модифицированных нечетких сетей Петри [16]. Программный продукт достаточно эффективен для решения задач в составе ГИС экологического мониторинга [17].

Современные теория и практика развития геоинформационных систем (ГИС) для анализа и мониторинга экологических рисков в условиях разнородных исходных геоданных указывают на необходимость разработки новых эффективных подходов и алгоритмов поддержки принятия решений по экологическим рискам в условиях нечеткости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Таганов А.И. Применение нечетких множеств для формализации процессов анализа и идентификации важности рисков программного проекта // Системы управления и информационные технологии. 2007. № 4 (30). С. 46–51.
2. Гинко В.И. Экологический риск в системе управления риском // В мире научных открытий. 2013. № 7.2 (43). С. 301–312.
3. Попов С.Ю. Геоинформационные системы и пространственный анализ данных в науках о лесе. СПб. : Интермедия, 2013. 400 с.
4. Wheeler M.W., Bailer A.J. Benchmark dose estimation incorporating multiple data sources // Risk Analysis. 2009. V. 29, No. 2. P. 249–256.
5. Саркисян С.А. Теория прогнозирования и принятия решений. М. : Высшая школа, 1977. 351 с.
6. Ecological Risk Assessment for Contaminated Sites / G.W. Suter II. New York : Taylor & Francis, 2000. 438 p.
7. Kolesenkov A.N., Kostrov B.V., Ruchkin V.N., Ruchkina E.V. Anthropogenic Situation Express Monitoring on the Base of the Fuzzy Neural Networks // Proceedings – 2014 3rd Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2014 – Including ECyPS 2014, Budva, Montenegro. P. 166–168.
8. Костров Б.В., Баранчиков А.И. Теория и методы исследования моделей и алгоритмов представления данных для предметных областей с ранжируемыми атрибутами // Вестник РГРТУ. 2013. № 5 (вып. 47). С. 59–64.
9. Encyclopedia of Environmental Science and Engineering / ed. by J.R. Pfafflina, E.N. Zieglera. 5th ed. New York : Taylor & Francis, 2006. V. 2: M–Z. 1383 p.
10. Паклин Н.Б., Орешков В.И. Бизнес-аналитика: от данных к знаниям. СПб. : Питер, 2009. 624 с.
11. Акинина Н.В., Акинин М.В., Соколова А.В., Колесенков А.Н., Никифоров М.Б. Методы и алгоритмы фильтрации разнородных помех с применением систем искусственного интеллекта в задачах обработки данных дистанционного зондирования земли // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2015. Вып. 9. С. 12–19.
12. Барсегян А., Куприянов М., Холод И., Тесс М., Елизаров С. Анализ данных и процессов. СПб. : БХВ-Петербург, 2009. 544 с.
13. Балабанов И.Т. Риск-менеджмент. М. : ФиС, 1996. 192 с.
14. Govaerts B., Beck B., Lecoutre E., le Bailly C., Vanden Eeckhaut P. From monitoring data to regional distributions: a practical methodology applied to water risk assessment // Institut de statistique, Universite catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, 2001.
15. Gusev S.I., Spirikina O.V. A research of an adaptation algorithm convergence using spatial signal pre-processing // 5th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO. Montenegro, Bar, 2016. P. 301–303.
16. Михаль О.Ф., Руденко О.Г., Халайбех З. Принципы алгоритмической реализации нечетких сетей Петри // Вестник национального технического университета «ХПИ». 2003. № 5. С. 75–84.
17. Таганов А.И., Колесенков А.Н., Псоянц В.Г., Акинина Н.В. Автоматизированный синтез карты экологических рисков в ГИС // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып. 2. С. 188–198.

Акинина Наталья Викторовна. E-mail: natalya.akinina@gmail.com

Псоянц Владимир Григорьевич. E-mail: psioians@mail.ru

Колесенков Александр Николаевич, канд. техн. наук, доцент. E-mail: sk62@mail.ru

Таганов Александр Иванович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: alxtag@yandex.ru

Рязанский государственный радиотехнический университет

Поступила в редакцию 28 апреля 2017 г.

Theory and practice of using fuzzy Petri nets for monitoring environmental risks.

Key words: geoinformation system; fuzzy product rules; fuzzy Petri nets; monitoring; environmental risk.

DOI: 10.17223/19988605/41/1

The results of theoretical analysis of fuzzy production systems for decision support in the context of geoinformation monitoring of environmental risks are presented. Along with classical approaches to structural and functional construction of geoinformation systems of GIS analysis and monitoring of environmental risks, a new approach to the organization of the process of analysis and monitoring of environmental risks in conditions of fuzziness is considered. The approach is based on applying modern theory and practice of risk analysis and monitoring in complex software projects. In the proposed approach, the process of analyzing and monitoring environmental risks in the GIS includes an algorithm consisting of the following steps: identification of environmental risks; a qualitative analysis of environmental risks; quantitative analysis of environmental risks; planning of response to environmental risks; monitoring and risk management. An important step of this algorithm is a qualitative analysis of environmental risks, performed by expert methods. As a result of this analysis, experts form a ranked register of environmental risks, which are grouped by category. The established register of environmental risks is the basis for the following stages of the algorithm for system analysis and monitoring of environmental risks. At the same time, the process of qualitative analysis of environmental risks is a very laborious process. To formalize this process, it is proposed to use modern methods to support the adoption of expert decisions in conditions of fuzziness. In this connection, the article considers the approach to presenting fuzzy product rules in a fuzzy production GIS designed for the analysis and monitoring of environmental risks.

Existing fuzzy decision-making decision support systems by definition are designed to implement the process of fuzzy inference and serve as a conceptual basis for modern fuzzy logic. The achieved successes in the application of these systems for solving a wide class of control tasks and served as the basis for choosing a mathematical apparatus for formalizing the process of analysis and reducing environmental risks based on the use of models, methods and algorithms of fuzzy sets theory and fuzzy Petri nets. Within the framework of the proposed formalized approach to risk analysis, NSPs obtained as a result of the introduction of fuzziness in the initial marking and in the rules for triggering the transitions of the basic formalism of ordinary JVs are considered.

The considered system analysis of the NSP allows us to concretize the proposed way of presenting the rules of fuzzy products in solving applied problems of fuzzy modeling and performing the process of approximate reasoning on environmental risks. Based on the use of modified NSPs, a pilot version of an automated decision support system for environmental risks can be developed. This system is essentially an expert system that reflects the fuzzy logic of the interrelation of input values - expert assessments of the state of the region's ecology and output values - the degrees of truth of possible environmental risks. The main functional modules of such an automated system should be considered: a base of rules for fuzzy products, a block of fuzzy logic inference, an interface module, a rule base modification module, modules for fuzzification and defuzzification. The user interface of the automated system should be based on the representation of all system objects and functions available to the user in the form of graphic components of the screen.

To formalize the process of environmental risk analysis, the paper proposes a way to present fuzzy product rules in a fuzzy environmental risk analysis system based on the use of fuzzy Petri nets. A program implementation of a fuzzy production system for the analysis of environmental risks based on the use of modified fuzzy Petri nets was implemented. The software product has a sufficiently effective application for solving problems in the GIS of environmental monitoring. The modern theory and practice of GIS development for the analysis and monitoring of environmental risks in conditions of diverse initial geodata indicates the need to develop new effective approaches and algorithms for supporting decision-making on environmental risks in conditions of fuzziness. As a result of the software implementation of the algorithm for analyzing environmental risks using the mathematical apparatus of the NRS, an effective and easy-to-use software product has been developed that is intended for application in practice both independently and as part of industrial GIS.

REFERENCES

1. Taganov, A.I. (2007) *Primenenie nechetkikh mnozhestv dlya formalizatsii protsessov analiza i identifikatsii vazhnosti riskov programnogo proekta* [Application of fuzzy sets for formalization of processes of analysis and identification of the importance of program project risks]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*. 4(30). pp. 46–51.
2. Ginko, V.I. (2013) Environmental risk in the control system of risk. *V mire nauchnykh otkrytiy – In the World of Scientific Discoveries*. 7.2(43). pp. 301–312.
3. Popov, S.Yu. (2013) *Geoinformatsionnye sistemy i prostranstvennyy analiz dannykh v naukakh o lese* [Geoinformation systems and spatial data analysis in forest sciences]. St. Petersburg: Intermediya.
4. Wheeler, M.W. & Bailer, A.J. (2009) Benchmark dose estimation incorporating multiple data sources. *Risk Analysis*. 29(2). pp. 249–256. DOI: 10.1111/j.1539-6924.2008.01144.x.
5. Sarkisyan, S.A. (1977) *Teoriya prognozirovaniya i prinyatiya resheniy* [The theory of forecasting and decision making]. Moscow: Vysshaya shkola.
6. Suter II, G.W. (2000) *Ecological Risk Assessment for Contaminated Sites*. New York: Taylor & Francis.
7. Kolesenkov, A.N., Kostrov, B.V., Ruchkin, V.N. & Ruchkina, E.V. (2014) Anthropogenic Situation Express Monitoring on the Base of the Fuzzy Neural Networks. *MECO 2014 – Including ECyPS 2014*. Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Embedded Computing. Budva, Montenegro. pp. 166–168.
8. Kostrov, B.V. & Baranchikov, A.I. (2013) Teoriya i metody issledovaniya modeley i algoritmov predstavleniya dannykh dlya predmetnykh oblastey s ranzhiruemyimi atributami [Theory and methods of research of models and algorithms of data representation for subject domains with ranked attributes]. *Vestnik RGRTU – Vestnik of Ryazan State Radio Engineering University*. 5(47). pp. 59–64.

- 9 Pfafflina, J.R. & Zieglera, E.N. (eds) (2006) *Encyclopedia of Environmental Science and Engineering*. 5th ed. Vol. 2. New York: Taylor & Francis.
10. Paklin, N.B. & Oreshkov, V.I. (2009) *Biznes-analitika: ot dannykh k znaniyam* [Business analysis: from data to knowledge]. St. Petersburg: Piter.
11. Akinina, N.V., Akinin, M.V., Sokolova, A.V., Kolesenkov, A.N. & Nikiforov, M.B. (2015) Metody i algoritmy fil'tratsii raznorodnykh pomekh s primeneniem sistem iskusstvennogo intellekta v zadachakh obrabotki dannykh distantsionnogo zondirovaniya zemli [Methods and algorithms for filtering heterogeneous jamming using artificial intelligence systems in problems of processing remote sensing data]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki - News of Tula State University. Technical Sciences*. 9. pp. 12–19.
12. Barsegyan, A., Kupriyanov, M., Kholod, I., Tess, M. & Elizarov, S. (2009) *Analiz dannykh i protsessov* [Analysis of data and processes]. St. Petersburg: BKhV-Peterburg.
13. Balabanov, I.T. (1996) *Risk-menedzhment* [Risk management]. Moscow: FiS.
14. Govaerts, B., Beck, B., Lecoutre, E., le Bailly, C. & Vanden Eeckhaut, P. (2001) *From monitoring data to regional distributions: a practical methodology applied to water risk assessment*. Louvain-la-Neuve: Institut de statistique, Universite catholique de Louvain.
15. Gusev, S.I. & Spirikina, O.V. (2016) A research of an adaptation algorithm convergence using spatial signal pre-processing. *The 5th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO*. Montenegro, Bar. pp. 301–303.
16. Mikhal, O.F., Rudenko, O.G. & Khalaybekh, Z. (2003) Printsipy algoritmicheskoy realizatsii nechetkikh setey Petri [Principles of algorithmic realization of fuzzy Petri nets]. *Vestnik natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta KhPI*. 5. pp. 75–84.
17. Taganov, A.I., Kolesenkov, A.N., Psoyants, V.G. & Akinina, N.V. (2017) Avtomatizirovanny sintez karty ekologicheskikh riskov v GIS [Automated synthesis of ecological risk map in GIS]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – News of Tula State University. Technical Sciences*. 2. pp. 188–198.

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/41/2

Д.В. Березин, Л.А. Нежелская

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОГО МАР-ПОТОКА СОБЫТИЙ В УСЛОВИЯХ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ

Получены явные выражения для апостериорных вероятностей состояний обобщенного МАР-потока событий, учитывающие эффект непродлевающегося мертвого времени. Разработан алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного МАР-потока событий при непродлевающемся мертвом времени. Проведены статистические эксперименты для установления качества оценивания, получены и проанализированы численные результаты.

Ключевые слова: обобщенный МАР-поток событий; оптимальное оценивание состояний; метод максимума апостериорной вероятности; непродлевающееся мертвое время.

Интенсивное развитие компьютерной техники и информационных технологий послужило стимулом к созданию важной сферы приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей, телекоммуникационных сетей и т.п. Интенсивность входящих потоков событий в реальных системах и сетях меняется со временем, как правило, случайно, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [1, 2]; ко второму – потоки с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний [3–5]. Отметим, что МАР-потоки событий [6] относятся ко второму классу дважды стохастических потоков и наиболее характерны для реальных телекоммуникационных сетей [7].

Реальные телекоммуникационные сети работают в условиях полной либо частичной неопределенности, т.е. когда параметры входящего потока неизвестны либо частично известны. Состояния же МАР-потока неизвестны по определению.

В связи с этим при исследовании дважды стохастических потоков событий выделяют два класса задач: 1) оценивание состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) в произвольный момент времени по наблюдениям за моментами наступления событий [8, 9]; 2) оценивание параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [10–12].

Исследование систем массового обслуживания, как правило, осуществляется в условиях, когда все события входящего потока доступны наблюдению. Однако зарегистрированное событие может вызвать период так называемого мертвого времени, в течение которого другие события становятся ненаблюдаемыми для регистрирующего прибора (теряются) [13–15]. Таким образом, эффект мертвого времени приводит к потерям событий потока, что отрицательно сказывается на оценке его состояний. Задача оптимального оценивания состояний МАР-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени решена в [16].

В настоящей статье приведены аналитические и численные результаты оптимального оценивания состояний обобщенного МАР-потока. Предлагается алгоритм оптимального оценивания состояний, когда решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений [17]. Сам критерий минимизирует полную вероятность ошибки вынесения решения. Для получения численных результатов оценивания построена имитационная модель потока, с помощью которой проведен ряд статистических экспериментов.

1. Математическая модель обобщенного МАР-потока событий

Рассматривается обобщенный МАР-поток событий с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda_1$ и $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии, $i = 1, 2$, является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону $F_i = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$; в момент окончания i -го состояния процесс $\lambda(t)$ переходит с вероятностью $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$ в j -е состояние ($i \neq j$) с наступлением события; либо с вероятностью $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$ переходит в j -е состояние ($i \neq j$) без наступления события; либо с вероятностью $P_1(\lambda_i | \lambda_i)$ остается в i -м состоянии с наступлением события; либо с вероятностью $P_0(\lambda_i | \lambda_i)$ остается в i -м состоянии без наступления события. ($P_1(\lambda_j | \lambda_i) + P_0(\lambda_j | \lambda_i) + P_1(\lambda_i | \lambda_i) + P_0(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$). Отметим, что в сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс.

Блочная матрица инфинитезимальных характеристик [18] процесса $\lambda(t)$ при этом примет вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_1 P_0(\lambda_1 | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) + \lambda_2 P_0(\lambda_2 | \lambda_2) & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \end{pmatrix} = \|\mathbf{D}_0 | \mathbf{D}_1\|.$$

Элементами матрицы $\mathbf{D}_1$ являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы $\mathbf{D}_0$ – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}_0$ – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если $P_0(\lambda_1 | \lambda_1) = P_0(\lambda_2 | \lambda_2) = 0$, то имеет место обычный МАР-поток событий [18].

Пусть $\pi_i(t | t^0)$ – априорная вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени t принимает значение λ_i , $i = 1, 2$, при условии, что функционирование обобщенного МАР-потока началось в момент времени t^0 .

Лемма 1. Априорная вероятность $\pi_1(t | t^0)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ для обобщенного МАР-потока событий удовлетворяет линейному неоднородному [19] дифференциальному уравнению

$$\pi_1'(t | t^0) = \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)] - \pi_1(t | t^0) [\lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] + \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]]. \quad (1)$$

Доказательство осуществляется Δt -методом [20].

Лемма 2. Априорные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ для обобщенного МАР-потока событий имеют вид

$$\pi_1(t | t^0) = \frac{\lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]}{\lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] + \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]} - \left(\frac{\lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]}{\lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] + \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]} - \pi \right) e^{-(\beta_1 + \beta_2)(t - t^0)},$$

$$\pi_2(t | t^0) = 1 - \pi_1(t | t^0)$$

с начальными условиями в момент t^0 вида

$$\pi_1(t^0 | t^0) = \pi, \quad \pi_2(t^0 | t^0) = 1 - \pi,$$

$$\beta_1 = \lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)], \quad \beta_2 = \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)].$$

Доказательство проводится интегрированием уравнения (1).

Следствие леммы 2. Априорные финальные вероятности [21] состояний процесса $\lambda(t)$ для обобщенного МАР-потока событий при $t \rightarrow \infty$ (или $t^0 \rightarrow -\infty$) имеют вид

$$\pi_1 = \frac{\lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]}{\lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] + \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]}, \quad (2)$$

$$\pi_2 = 1 - \pi_1.$$

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного обобщенного МАР-

потока недоступны наблюдению [22]. По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. Пример возникающей ситуации приведен на рис. 1, где 1 и 2 – состояния процесса $\lambda(t)$, $t_1, t_2, \dots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке, жирной линией обозначены длительности мертвого времени, черными кружками – события обобщенного МАР-потока, недоступные наблюдению.

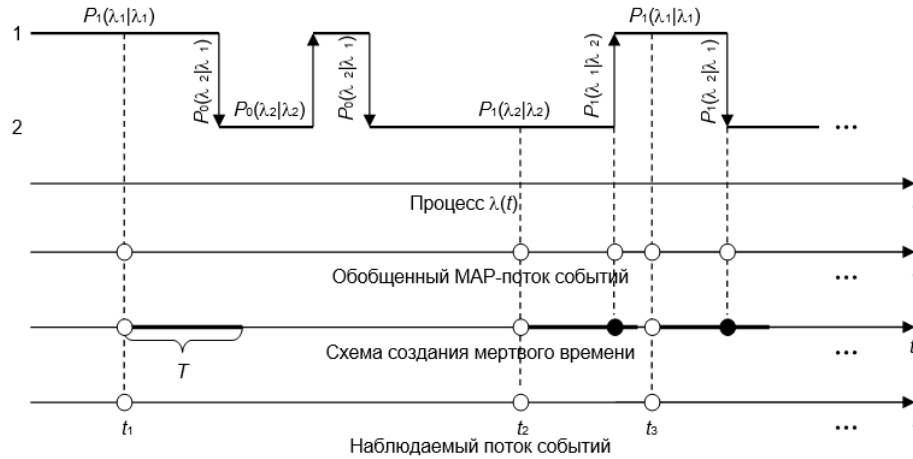


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Процесс $\lambda(t)$ принципиально ненаблюдаем (скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий потока $t_1, t_2, \dots$, поэтому необходимо по этим наблюдениям оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (или обобщенного МАР-потока) в момент окончания наблюдения.

Рассматривается стационарный режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) , где t_0 – момент начала наблюдений, t – момент вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$, пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ (m – количество наблюденных событий за время t), при этом $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$. Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится путем сравнения вероятностей: если $w(\lambda_i | t) \geq w(\lambda_j | t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, то оценка состояния $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, иначе $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$.

2. Алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного МАР-потока событий

Рассмотрим интервал (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между соседними событиями рассматриваемого потока. Момент вынесения решения t будет принадлежать этому интервалу. При этом для начального интервала (t_0, t_1) момент t будет лежать между моментом начала наблюдения t_0 и моментом наступления первого события потока. Значение длительности интервала (t_k, t_{k+1}) есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$. С другой стороны, так как наблюдаемое в момент t_k событие порождает период мертвого времени длительностью T , то $\tau_k = T + \eta_k$, где η_k – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени $t_k + T$ и моментом t_{k+1} , т.е. интервал (t_k, t_{k+1}) разбивается на два смежных: первый полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, второй – интервал $(t_k + T, t_{k+1})$. Подчеркнем, что условия нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ и интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ принципиально разные. Кроме того, для нахождения вероятности $w(\lambda_1 | t)$ необходимо точно знать значение T либо, по крайней мере, предварительно осуществить оценку T . В противном случае отсутствие такой информации делает попытку строгого нахождения вероятности $w(\lambda_1 | t)$ невозможной. Здесь предполагается, что значение T известно точно.

Рассмотрим ситуацию, когда $T = 0$, т.е. мертвое время отсутствует. Применим методику [24] получения рекуррентных соотношений для апостериорных вероятностей $w(\lambda_i | t)$, $i = 1, 2$.

Пусть наблюдения за потоком начинаются в момент времени $t = 0$ и время t изменяется дискретно с шагом Δt : $t^{(k)} = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots$. Введем двумерный случайный процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$, где $\lambda^{(k)}$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $k\Delta t$, r_k – количество событий потока, наступивших на интервале времени $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длительности Δt , $k = 0, 1, \dots, m$. Поскольку на интервале $(-\Delta t, 0)$ наблюдение за потоком не производится, то положим $r_0 = 0$.

Обозначим $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$ – последовательность значений количества наблюдаемых событий за время от 0 до $m\Delta t$ на интервалах $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длительности Δt , $k = 0, 1, \dots, m$; $p(\lambda^{(k)}, r_k | \lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$ – вероятность перехода процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$ за один шаг Δt из состояния $(\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$ в состояние $(\lambda^{(k)}, r_k)$; $w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m)$ – условная вероятность значения $\lambda^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация $\mathbf{r}_m$. Случайный процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$ является марковским. Тогда для дважды стохастических потоков событий с двумя состояниями справедливо рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей [23]:

$$w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}, \quad (3)$$

где $w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) = w(\lambda^{(m)} | t)$, $w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1}) = w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t)$. В связи с тем, что для обобщенного МАР-потока $p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m) = p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})$, рекуррентное соотношение (3) принимает вид

$$w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}. \quad (4)$$

Замечание 1. Компонента r_k вектора наблюдений $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$ может принимать значения $r_k = 0$ или $r_k = 1$. Случаи $r_k = 2, 3, \dots$ в силу определения обобщенного МАР-потока событий имеют вероятность $o(\Delta t)$.

Пусть в (4) $r_{m+1} = 0$, т.е. на интервале $(t, t + \Delta t)$, где $t = m\Delta t$, $t + \Delta t = (m+1)\Delta t$, нет событий потока. Кроме того, в (4) положим $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$. Переходные вероятности для обобщенного МАР-потока событий в (4) имеют вид

$$\begin{aligned} p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) &= p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) = \\ &= 1 - \lambda_1(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_1))\Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) &= p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) = \\ &= \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1)\Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) &= p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) = \\ &= \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)\Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) &= p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) = \\ &= 1 - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_2))\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 3. На временных интервалах (t_0, t_1) и (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$w'(\lambda_1 | t) = [\lambda_2(P_0(\lambda_2 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2) - 1) - \lambda_1(P_0(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_1 | \lambda_1) - 1)]w^2(\lambda_1 | t) + [\lambda_1 P_0(\lambda_1 | \lambda_1) - \lambda_2 P_0(\lambda_2 | \lambda_2) - 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) - \lambda_1 + \lambda_2]w(\lambda_1 | t) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2);$$

$$t_0 < t < t_1, t_k < t < t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Подставляя (5) в (4), выполняя необходимые преобразования и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем дифференциальное уравнение Риккати (6). Лемма доказана.

Пусть в (4) $r_{m+1} = 1$, что соответствует случаю наблюдения одного события потока на интервале времени $(t, t + \Delta t)$, допустим, в момент времени t_k . Для определенности в (4) положим $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$.

Рассмотрим два смежных интервала (t, t_k) и $(t_k, t + \Delta t)$, длительности которых есть $\Delta t' = t_k - t$ и $\Delta t'' = t + \Delta t - t_k$ соответственно. Тогда с учетом сделанных обозначений (4) принимает вид

$$w(\lambda_1 | t_k + \Delta t'') = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t_k - \Delta t') p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t_k - \Delta t') p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}.$$

В этой ситуации переходные вероятности для обобщенного МАР-потока событий в (7) выпишутся в виде

$$\begin{aligned} p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) &= \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) &= \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) &= \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) &= \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Для обобщенного МАР-потока событий имеет место следующая лемма.

Лемма 4. Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в момент t_k , $k = 1, 2, \dots$, наступления события модулированного МАР-потока определяется формулой пересчета

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{\lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) w(\lambda_1 | t_k - 0) + \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) w(\lambda_2 | t_k - 0)}{\lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2)] w(\lambda_2 | t_k - 0) + \lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1(\lambda_1 | \lambda_1)] w(\lambda_1 | t_k - 0)},$$

где $w(\lambda_2 | t_k - 0) = 1 - w(\lambda_1 | t_k - 0)$.

Доказательство. Подставляя (8) в (7), учитывая при этом, что $w(\lambda_2 | t_k - \Delta t') = 1 - w(\lambda_1 | t_k - \Delta t')$, и переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ ($\Delta t' \rightarrow 0$ и $\Delta t'' \rightarrow 0$ одновременно), получим утверждение леммы. Лемма доказана.

Замечание 2. В точке t_k вероятность $w(\lambda_1 | t)$ претерпевает разрыв (имеет место конечный скачок). Вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ зависит от значения $w(\lambda_1 | t_k - 0)$, где $w(\lambda_1 | t_k - 0)$ – значение вероятности $w(\lambda_1 | t)$ в момент времени t_k , когда $w(\lambda_1 | t)$, определяемая в уравнении (6), изменяется на интервале (t_{k-1}, t_k) , соседнем с интервалом (t_k, t_{k+1}) , $k = 2, 3, \dots$. Таким образом, в значении $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ «сосредоточена» вся предыстория наблюдений за обобщенным МАР-поток, начиная от момента $t_0 = 0$ до момента t_k . В качестве начального значения $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0)$ на полуинтервале $[t_0, t_1)$ выбирается априорная финальная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$, представленная в (2).

Леммы 3, 4 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на временных интервалах (t_0, t_1) и (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, определяется явными формулами

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1[w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - w_2[w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]e^{-A(w_2 - w_1)(t - t_k)}}{w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0) - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]e^{-A(w_2 - w_1)(t - t_k)}},$$

$$w_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad w_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

$$A = \lambda_2(P_0(\lambda_2 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2) - 1) - \lambda_1(P_0(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_1 | \lambda_1) - 1) \neq 0,$$

$$B = \lambda_1 P_0(\lambda_1 | \lambda_1) - \lambda_2 P_0(\lambda_2 | \lambda_2) - 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) - \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$C = \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2);$$

для $A = 0$

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{(C + B \cdot w(\lambda_1 | t_k))e^{B(t-t_k)} - C}{B}, \quad (11)$$

$t_0 < t < t_1$, $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ определена формулой (9), $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1$, где π_1 определена в (2).

Возвратимся к ситуации, когда длительность мертвого времени $T \neq 0$ (см. рис. 1). Тогда вычисление вероятности $w(\lambda_1 | t)$ по формуле (10) справедливо на интервале $(t_k + T, t_{k+1})$. При этом начальное условие для $w(\lambda_1 | t)$ привязывается к моменту времени $t_k + T$, т.е. в формуле (10) нужно заменить $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ на $w(\lambda_1 | t_k + T)$ и $t_k + T \leq t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Формула (9) остается без изменения, так как предназначена для вычисления $w(\lambda_1 | t)$ в момент t_k наступления события, которое порождает мертвое время. Рассмотрим полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$. На этом полуинтервале событие имеет место в граничной точке t_k , на самом полуинтервале события отсутствуют.

Утверждение. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на временных полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \pi_1 + [w(\lambda_1 | t_k + 0) - \pi_1]e^{-(\beta_1 + \beta_2)(t-t_k)}, \quad (12)$$

$$\beta_1 = \lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)], \quad \beta_2 = \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)],$$

$t_k < t \leq t_k + T$, $k = 1, 2, \dots$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ определена формулой (9); π_1 определена в (2).

Доказательство. В течение периода мертвого времени T , т.е. на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, обобщенный МАР-поток событий является ненаблюдаемым. В этой связи поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на $(t_k, t_k + T]$ аналогично поведению априорной вероятности $\pi_1(t | t^0)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ для обобщенного МАР-потока событий (лемма 2); разница лишь в задании начального значения $w(\lambda_1 | t)$ в момент времени t_k наступления события наблюдаемого потока. Нетрудно показать (лемма 1), что вероятность $w(\lambda_1 | t)$ на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, определяется уравнением

$$\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} + (\lambda_1 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] + \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)])w(\lambda_1 | t) = \lambda_2 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]$$

с начальным условием $w(\lambda_1 | t = t_k) = w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$. Интегрируя выписанное дифференциальное уравнение, находим (12). Утверждение доказано.

Полученные формулы позволяют сформулировать алгоритм расчета вероятности $w(\lambda_1 | t)$ и алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t (алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного МАР-потока):

1) вычисляется априорная вероятность π_1 нахождения процесса в состоянии λ_1 в момент начала наблюдения t_0 по формуле (2);

2) на промежутке (t_0, t_1) по формуле (10) или (11) в зависимости от значения коэффициента A вычисляется апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t , где в качестве $w(\lambda_1 | t_0 + 0)$, t_0 – момент начала наблюдения, используется значение π_1 ;

3) в момент наступления события t_k апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ рассчитывается по формуле (9). Здесь в качестве $w(\lambda_1 | t_k - 0)$ используется значение, вычисленное по формуле (10) или (11) в момент времени $t = t_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, при этом $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ заменяется на $w(\lambda_1 | t_{k-1} + 0)$, а t_k – на t_{k-1} ;

4) на промежутке $(t_k, t_k + T]$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ вычисляется по формуле (12), где $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ – значение, вычисленное на предыдущем шаге алгоритма по формуле (9);

5) на интервале $(t_k + T, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$, значение $w(\lambda_1 | t)$ рассчитывается по формуле (10) или (11), где в качестве $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ используется значение $w(\lambda_1 | t_k + T)$, вычисленное на шаге 4. Далее осуществляется переход на шаг 3. Шаги 3–5 повторяются до момента t окончания наблюдения за потоком.

Параллельно по ходу вычисления $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$: если $w(\lambda_1 | t) \geq w(\lambda_2 | t)$, то оценка состояния $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, иначе $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

3. Результаты численных расчетов

Для получения численных результатов построена имитационная модель обобщенного МАР-потока событий с двумя состояниями и проведен статистический эксперимент. Основой для построения имитационной модели являются датчики случайных чисел и метод обратных функций [25]. На первом этапе работы программы строится реализация потока. На втором этапе на основании полученной выборки $t_1, t_2 \dots, t_n$ моментов наступления событий в наблюдаемом потоке происходит оценивание состояний потока методом максимума апостериорной вероятности. На рис. 2 изображена реализация потока для $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1, T_m = 5, T = 1, P_1(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,5, P_0(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,1, P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,3, P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,1, P_1(\lambda_2 | \lambda_2) = 0,3, P_0(\lambda_2 | \lambda_2) = 0,1, P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,4, P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,2$.

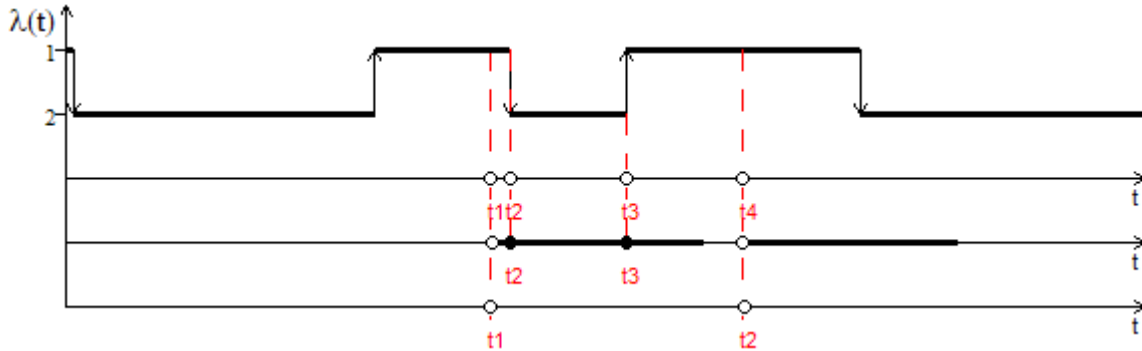


Рис. 2. Реализация обобщенного МАР-потока событий

На рис. 3 приведено поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ для тех же значений параметров.



Рис. 3. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$

На рис. 4 изображено поведение оценки $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$. Тонкая прямая линия проведена на тех временных участках, где поведение $\lambda(t)$ и $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает.

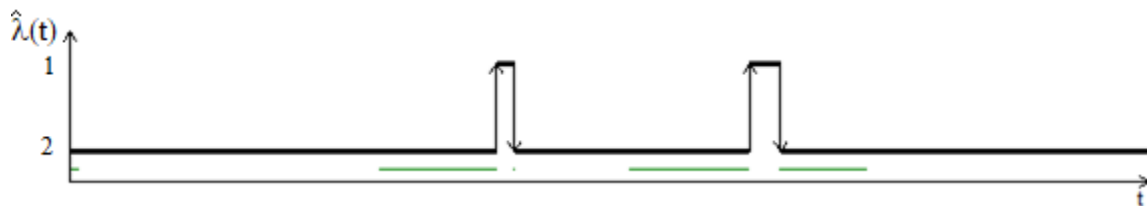


Рис. 4. Поведение оценки $\hat{\lambda}(t)$

Чтобы установить частоту ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$, проведены статистические эксперименты, состоящие из следующих этапов:

- 1) для определенного набора параметров осуществляется моделирование потока (i -й опыт);
- 2) по формулам (2), (9), (10), (12) рассчитывается апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ и по методу максимума апостериорной вероятности выносится решение о значении процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t ;
- 3) определяется значение d_i – суммарная протяженность интервалов времени, на которых поведение $\lambda(t)$ и $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает;

4) вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_i = \frac{d_i}{T_m}$, где T_m – время моделирования;

5) шаги 1–4 повторяются N раз.

Результатом описанного алгоритма является выборка $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N$ долей ошибочных решений в N испытаниях, на основании которой вычисляются выборочное среднее $\hat{P}_o = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{p}_i$ – оценка полной вероятности ошибки принятия решения P_o , и выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{p}_i - \hat{P}_o)^2$.

В первом эксперименте устанавливается зависимость оценки $\hat{P}_o$ от длительности мертвого времени T . Данные для эксперимента приведены в табл. 1. Количество экспериментов $N = 100$.

Таблица 1

Данные для первого эксперимента

$T_m = 100$	$\lambda_1 = 5; 10; 15$	$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0,5$	$P_0(\lambda_1 \lambda_1) = 0,1$	$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0,3$	$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0,1$
$T = 0; 1; \dots; 10$	$\lambda_2 = 1$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0,1$	$P_0(\lambda_2 \lambda_2) = 0,1$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0,7$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0,1$

Результаты продемонстрированы в табл. 2 и на рис. 5.

Таблица 2

Результаты первого эксперимента

T	$\lambda_1 = 5$		$\lambda_1 = 10$		$\lambda_1 = 15$	
	$\hat{P}_o$	$S^2 \times 10^3$	$\hat{P}_o$	$S^2 \times 10^3$	$\hat{P}_o$	$S^2 \times 10^3$
0	0,22	1,0	0,13	1,0	0,09	1,3
1	0,25	2,2	0,15	1,1	0,11	1,4
2	0,26	2,3	0,16	1,4	0,11	1,3
3	0,27	2,3	0,16	1,5	0,11	1,3
4	0,27	2,1	0,16	1,0	0,12	1,2
5	0,27	2,2	0,16	1,3	0,12	1,0
6	0,27	2,5	0,16	1,2	0,12	1,1
7	0,27	2,4	0,16	1,1	0,12	1,1
8	0,28	2,1	0,16	1,2	0,12	1,6
9	0,28	2,2	0,16	1,4	0,12	1,5
10	0,27	2,4	0,16	1,3	0,12	1,5

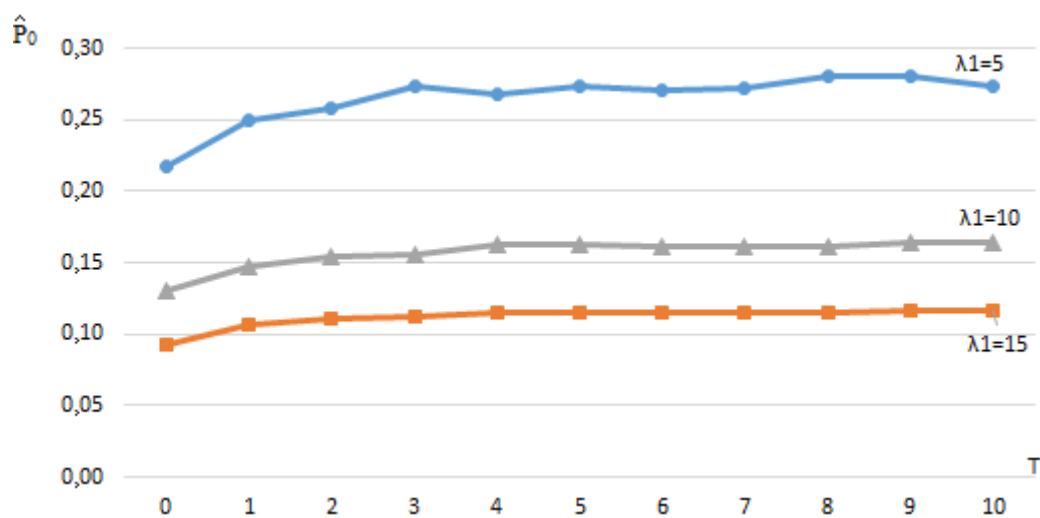


Рис. 5. Зависимость $\hat{P}_o$ от длительности мертвого времени

Результаты свидетельствуют о том, что оценка $\hat{P}_o$ растет с увеличением значения T , так как событий в наблюдаемом потоке наступает меньше, в результате чего уменьшается количество информа-

ции для алгоритма принятия решения о значении процесса $\lambda(t)$. Также чем больше соотношение λ_1/λ_2 , тем точнее оценивание, так как в этом случае состояния потока для алгоритма различимы лучше.

Во втором эксперименте устанавливается зависимость оценки $\hat{P}_0$ от длительности времени моделирования T_m . Данные для эксперимента приведены в табл. 3. Количество экспериментов $N = 100$.

Результаты продемонстрированы в табл. 4 и на рис. 6, 7.

Таблица 3

Данные для второго эксперимента

$T_m = 5; 10; \dots; 100$	$\lambda_1 = 5$	$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0,3$	$P_0(\lambda_1 \lambda_1) = 0,1$	$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0,6$	$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0$
$T = 1$	$\lambda_2 = 1$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0$	$P_0(\lambda_2 \lambda_2) = 0,1$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0,8$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0,1$

Таблица 4

Результаты второго эксперимента

T_m	$\lambda_1 = 5$		$\lambda_1 = 7$		$\lambda_1 = 10$	
	$\hat{P}_0$	$S^2 \times 10^3$	$\hat{P}_0$	$S^2 \times 10^3$	$\hat{P}_0$	$S^2 \times 10^3$
10	0,22	10,0	0,18	6,4	0,12	4,4
15	0,22	6,3	0,16	4,1	0,11	2,0
20	0,22	7,3	0,16	3,4	0,12	2,3
25	0,23	3,2	0,15	3,2	0,12	2,1
30	0,20	3,4	0,15	3,3	0,11	2,2
40	0,21	3,2	0,16	2,1	0,12	1,5
50	0,21	2,0	0,16	1,6	0,12	1,1
70	0,20	2,3	0,15	1,1	0,12	1,4
100	0,20	1,4	0,15	1,1	0,12	1,2

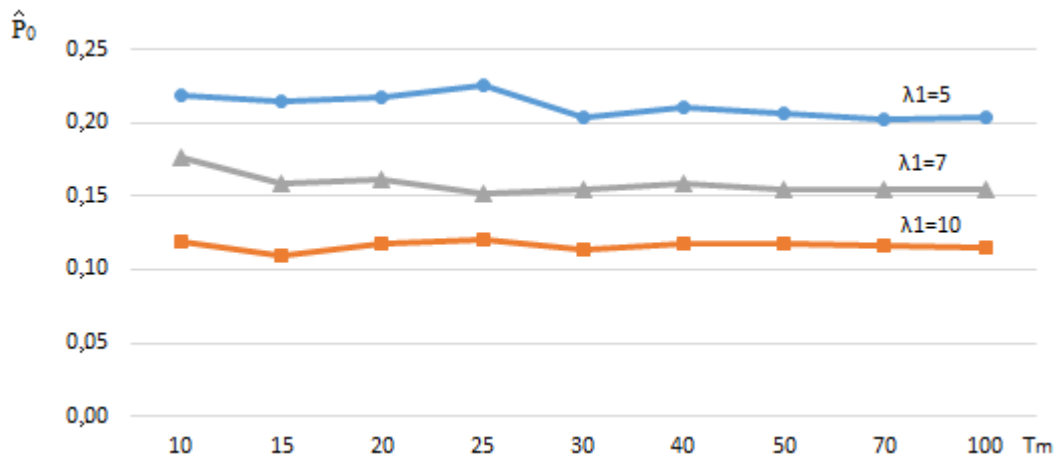


Рис. 6. Зависимость $\hat{P}_0$ от времени моделирования

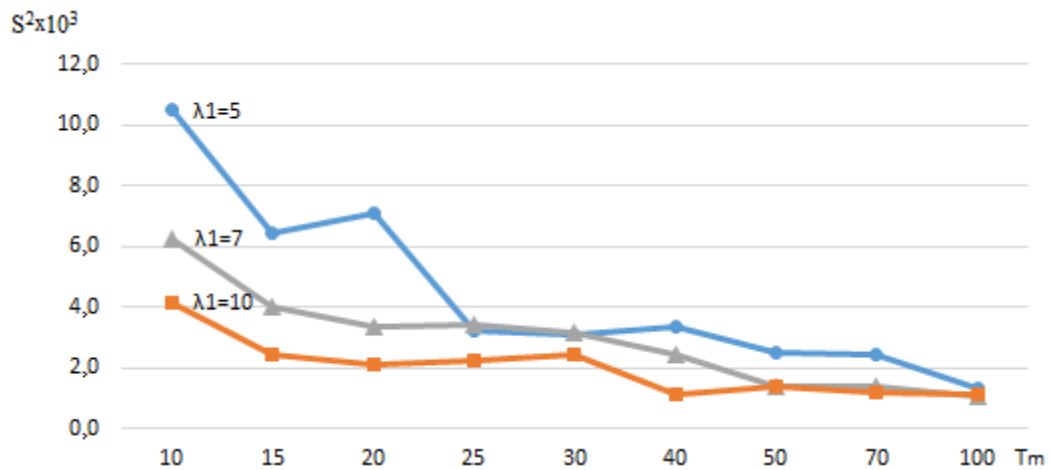


Рис. 7. Зависимость $S^2 \times 10^3$ от времени моделирования

Согласно результатам оценка $\hat{P}_o$ с ростом времени моделирования практически не изменяется. Однако с ростом времени моделирования выборочная дисперсия значительно убывает и при $T_m \approx 100$ приближается к значению 0,001. Это означает, что отклонение доли ошибочных решений $\hat{P}_i$ в i -м эксперименте от выборочного среднего $\hat{P}_o$ достаточно мало и составляет $\sqrt{S^2} \approx 0,03$. Таким образом, с ростом времени моделирования $\hat{P}_o$ сходится к истинной вероятности ошибки принятия решения P_o . Также результаты показывают, что чем больше λ_1 , тем быстрее убывает S^2 с ростом времени моделирования.

Заключение

В статье предложен алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного МАР-потока при наличии непродлевающегося мертвого времени, приведены численные результаты ряда экспериментов по выявлению зависимости оценки $\hat{P}_o$ от изменения различных параметров потока. Результаты экспериментов показывают, что оценка $\hat{P}_o$ возрастает с увеличением длительности мертвого времени, а с увеличением отношения λ_1 к λ_2 оценивание состояний процесса $\lambda(t)$ происходит значительно лучше. С ростом времени моделирования оценка $\hat{P}_o$ сходится к истинной вероятности ошибки принятия решения P_o .

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes // Proc. Camb. Phil. Soc. 1955. V. 51, No. 3. P. 433–441.
2. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. of Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, Issue. 4. P. 923–930.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
5. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. No. 16. P. 764–779.
6. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communications in Statistics. Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
7. Дудин А.Н., Клименок В.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
8. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Shevchenko T.I. Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors // Russian Physics Journal. 1993. V. 36, No. 12. P. 1153–1167.
9. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
10. Centanni S. Estimation and filtering by reversible jump MCMC for a doubly stochastic Poisson model for ultra-high-frequency financial data // Stat. Model. 2006. No. 6. P. 97–118.
11. Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S. Markovian arrival process parameter estimation with group data // IEEE/ACM Transactions on Networking (TON). 2009. V. 17, No. 4. P. 1326–1339.
12. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 18–23.
13. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
14. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
15. Normey-Rico J.E. Control of dead-time process. London : Springer-Verlag, 2007. 462 p.
16. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
17. Левин А.А. Теоретические основы статистической радиотехники. М. : Советское радио, 1968. 504 с.
18. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
19. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1976. 576 с.
20. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Физматлит, 1961. 311 с.
21. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматлит, 1963. 236 с.

22. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
23. Nezhel'skaya L.A. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendible dead time // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 342–350.
24. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М. : Советское радио, 1968. 256 с.
25. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Березин Дмитрий Владимирович. E-mail: berezin14@mail.ru

Нежелская Людмила Алексеевна, д-р физ.-мат. наук, доцент. E-mail: ludne@mail.tsu.ru

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 3 сентября 2017 г.

Berezin Dmitriy V., Nezhel'skaya Lyudmila A. (National Research Tomsk State University, Russian Federation).

Optimal state estimation of Generalized MAP under conditions of non-extendable dead time.

Keywords: generalized MAP; optimal state estimation; method of a posteriori probability maximum; non-extendable dead time.

DOI: 10.17223/19988605/41/2

The paper deals with Generalized MAP (GMAP) with intensity being piecewise constant stationary process $\lambda(t)$ with two states: $\lambda(t) = \lambda_1$ and $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$). The duration of state i ($i = 1, 2$) is an exponentially distributed random variable with distribution function $F_i = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$. When the state i ends the process switches to state j with probability $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$ at an event, and switches to state j with probability $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, $\sum_{j=1}^2 (P_1(\lambda_j | \lambda_i) + P_0(\lambda_j | \lambda_i)) = 1$ without an event. Each registered event at time instant t_k generates dead time period of duration T when the other occurring events of GMAP are not observable. After ending of dead time the first occurring event again generates dead time T . The process $\lambda(t)$ is not observable, only time instants of events $t_1, t_2 \dots$ are observable. It is necessary to estimate states of $\lambda(t)$ (or GMAP) by only these time instants $t_1, t_2 \dots$.

It is assumed that $\lambda(t)$ is stationary. The observation of the process is performed over the period (t_0, t) , where t_0 is the beginning of observation, and t is the end of observation. To estimate states of $\lambda(t)$ it is necessary to calculate a posteriori probabilities $w(\lambda_i | t)$ that at time instant t the process' state $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$. If $w(\lambda_i | t) \geq w(\lambda_j | t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, then $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, otherwise $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$.

The explicit formula for a posteriori probability $w(\lambda_i | t)$ ($w(\lambda_1 | t) = 1 - w(\lambda_2 | t)$) at time intervals is derived when GMAP is observable. The recalculation formula of a posteriori probability at time instants t_k of occurring an event is derived as well as explicit formula for $w(\lambda_1 | t)$ at time intervals, where the GMAP is not observable, i.e. during dead time T .

The described numerical results demonstrate high quality of estimation.

REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes. *Proc. of Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
2. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proc. of Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
3. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya Akademii Nauk USSR. Tekhn. Kibernet.* 17(6). pp. 92–99.
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya Akademii Nauk USSR. Tekhn. Kibernet.* 1. pp. 55–61.
5. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
6. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Communications in Statistics. Stochastic Models*. 7. P. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
7. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: Belarusian State University.
8. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*. 12. pp. 1153–1167. DOI: 10.1007/BF00559693
9. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101. (In Russian).
10. Centanni, S. (2006) Estimation and filtering by reversible jump MCMC for a doubly stochastic Poisson model for ultra-high-frequency financial data. *Statistical Modelling*. 6. pp. 97–118. DOI: 10.1191/1471082X06st1120a
11. Okamura, H., Dohi, T. & Trivedi, K.S. (2009) Markovian arrival process parameter estimation with group data. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*. 17(4). pp. 1326–1339. DOI: 10.1109/TNET.2008.2008750

12. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Parameter estimation of semi-synchronous twice-stochastic event flow using the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. Issue. 1. pp. 18–23.
13. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) Joint probability density function of interval duration of generic asynchronous event flow in conditions of fixed dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(21). pp. 14–25. (In Russian).
14. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semi-synchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19–29. (In Russian).
15. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of dead-time process*. London: Springer-Verlag.
16. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Soloviev, A.A. (2012) Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time. *Automation and Remote Control*. 73(8). pp. 1316–1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
17. Levin, A.A. (1968) *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. Moscow: Soviet Radio. 504 p. (In Russian).
18. Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (2006) *Teoriya veroyatnostey i sluchaynykh protsessov* [Theory of Probabilities and Random Processes]. Tomsk: NTL.
19. Kamke, E. (1976) *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nyim uravneniyam* [Differential Equations]. Translated from German by S. Fomin. Moscow: Nauka.
20. Pontryagin, L.S. (1961) *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Moscow: Fizmatlit.
21. Khinchin, A.Y. (1963) *Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Mathematical Queuing Theory]. Moscow: Fizmatlit.
22. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: University Press.
23. Nezhelskaya, L.A. (2014) Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 342–350.
24. Hazen, E.M. (1968) *Metody optimal'nykh statisticheskikh resheniy i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods of optimal statistical decisions]. Moscow: Soviet Radio.
25. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical Methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.

Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, И.В. Веретельникова

О ПРИМЕНЕНИИ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» (№ 1.4574.2017/6.7) и проектной части государственного задания (№ 1.1009.2017/4.6).

Проведен сравнительный анализ мощности критериев однородности законов распределения вероятностей (критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта, Андерсона–Дарлингга). Построены модели предельных распределений статистик для k -выборочного критерия Андерсона–Дарлингга. Даются рекомендации по применению критериев.

Ключевые слова: критерии однородности; критерий Смирнова; критерий Лемана–Розенблатта; критерий Андерсона–Дарлингга; мощность критерия.

С необходимостью решения задач проверки гипотез о принадлежности двух (или более) выборок случайных величин одной и той же генеральной совокупности (проверки однородности) постоянно сталкиваются при анализе случайных ошибок средств измерений, при статистическом управлении качеством процессов. Такая задача естественно возникает при проверке средств измерений, когда пытаются убедиться в том, что закон распределения случайных ошибок измерений не претерпел существенных изменений по истечении некоторого интервала времени. При обработке результатов экспериментальных исследований такую задачу часто приходится решать технологам, медикам, биологам.

Задача проверки однородности двух выборок формулируется следующим образом. Пусть имеются две упорядоченные по возрастанию выборки размером m и n :

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m \text{ и } y_1 < y_2 < \dots < y_n.$$

Для определенности обычно полагают, что $m \leq n$, но это совсем необязательно. Проверяется гипотеза о том, что две выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности, т.е. $H_0: F(x) = G(x)$ при любом x .

Как правило, на практике используется либо критерий Смирнова [1], либо критерий Лемана–Розенблатта [1–3]. В русскоязычной литературе практически не упоминается о применении критерия однородности Андерсона–Дарлингга [4] (Андерсона–Дарлингга–Петита) или, тем более, об использовании многовыборочного варианта этого критерия [5].

Настоящая статья является развитием работы [6], в которой были исследованы реальные свойства распределений статистик и мощности критериев Смирнова и Лемана–Розенблатта при ограниченных объемах выборок. В данном случае исследования дополнены анализом критериев Андерсона–Дарлингга и развитием его многовыборочного варианта. При проведении исследований использовалась методика компьютерного моделирования и исследования статистических закономерностей [7], хорошо зарекомендовавшая себя при сравнительном анализе критериев, ориентированных на проверку гипотез определённого вида [8–10].

1. Критерий Смирнова

Критерий однородности Смирнова предложен в работе [11]. Предполагается, что функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ являются непрерывными. Статистика критерия Смирнова измеряет расстояние между эмпирическими функциями распределения, построенными по выборкам

$$D_{m,n} = \sup_x |G_m(x) - F_n(x)|.$$

При практическом использовании критерия значение статистики $D_{m,n}$ рекомендуется вычислять в соответствии с соотношениями [1]:

$$D_{m,n}^+ = \max_{1 \leq r \leq m} \left[\frac{r}{m} - F_n(x_r) \right] = \max_{1 \leq s \leq n} \left[G_m(y_s) - \frac{s-1}{n} \right],$$

$$D_{m,n}^- = \max_{1 \leq r \leq m} \left[F_n(x_r) - \frac{r-1}{m} \right] = \max_{1 \leq s \leq n} \left[\frac{s}{n} - G_m(y_s) \right],$$

$$D_{m,n} = \max(D_{m,n}^+, D_{m,n}^-).$$

Для объемов выборок $m, n \leq 20$ таблицы процентных точек для статистики $D_{m,n}$ приводятся в [1]. Если гипотеза H_0 справедлива, то при неограниченном увеличении объемов выборок статистика

$$S_C = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} \quad (1)$$

в пределе подчиняется распределению Колмогорова $K(S)$ [1].

Недостатки критерия Смирнова заключаются в следующем. Во-первых, при ограниченных значениях m и n случайные величины $D_{m,n}^+$ и $D_{m,n}^-$ являются дискретными, и множество их возможных значений представляет собой решетку с шагом $1/k$, где k – наименьшее общее, кратное m и n [1]. Гладкость распределения статистики зависит от величины k . Поэтому предпочтительнее применять критерий, когда объемы выборок m и n не равны и представляют собой взаимно простые числа. При равных объемах выборок явная ступенчатость $G(S_C|H_0)$ сохраняется даже при $m = n = 1000$.

Другим недостатком применения критерия со статистикой (1) является то, что распределения $G(S_C|H_0)$ с ростом m и n приближаются к предельному распределению $K(s)$ слева. И при небольших и умеренных значениях m и n распределения $G(S_C|H_0)$ существенно сдвинуты влево от $K(S)$. В этой связи в [6] предложена простая модификация статистики (1).

2. Критерий Лемана–Розенблатта

Критерий однородности Лемана–Розенблатта представляет собой критерий типа ω^2 . Критерий предложен в работе [2] и исследован в [3]. Статистика критерия имеет вид [1]:

$$T = \frac{mn}{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} [G_m(x) - F_n(x)]^2 dH_{m+n}(x),$$

где $H_{m+n}(x) = \frac{m}{m+n} G_m(x) + \frac{n}{m+n} F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по вариационному ряду объединения двух выборок. Статистика T используется в форме [Там же]:

$$T = \frac{1}{mn(m+n)} \left[n \sum_{i=1}^n (r_i - i)^2 + m \sum_{i=1}^m (s_i - j)^2 \right] - \frac{4mn-1}{6(m+n)}, \quad (2)$$

где r_i – порядковый номер (ранг) y_i ; s_j – порядковый номер (ранг) x_j в объединенном вариационном ряду.

В [3] было показано, что статистика (2) в пределе распределена как $al(t)$ [1]. В отличие от критерия Смирнова распределение статистики T быстро сходится к предельному $al(T)$ [Там же]. При $m = n = 100$ распределение $G(T|H_0)$ статистики (2) практически совпадает с $al(T)$. При $m, n \leq 25$ желательно учитывать отклонение реального распределения $G(T|H_0)$ статистики (2) от $al(T)$.

3. Критерий Андерсона–Дарлинга

Двухвыборочный критерий Андерсона–Дарлинга (критерий однородности) рассмотрен в работе [4]. Статистика критерия определяется выражением

$$A^2 = \frac{mn}{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[G_m(x) - F_n(x)]^2}{(1 - H_{m+n}(x))H_{m+n}(x)} dH_{m+n}(x).$$

Для выборок непрерывных случайных величин выражение для этой статистики принимает простой вид [4]:

$$A^2 = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m+n-1} \frac{(M_i(m+n) - mi)^2}{i(m+n-i)}, \quad (3)$$

где M_i – число элементов первой выборки, меньших или равных i -му элементу вариационного ряда объединенной выборки.

Предельным распределением статистики (3) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 является то же самое распределение $a2(t)$ [4], которое является предельным для статистики критерия согласия Андерсона–Дарлинга [1].

Вопросы мощности критерия рассматривались в [4, 12], мощность критерия исследовалась в [13]. Сходимость распределения $G(A^2|H_0)$ статистики (7) к $a2(A^2)$ при ограниченных объемах выборок была исследована в [13], где было показано, что при $m, n \geq 45$ отклонение функции распределения $G(A^2|H_0)$ от $a2(A^2)$ не превышает 0,01. При $m = n = 100$ распределение $G(A^2|H_0)$ статистики (7) практически совпадает с $a2(A^2)$.

4. Анализ мощности двухвыборочных критериев

Мощность критериев проверки однородности исследовалась в случае различных альтернатив. В данном случае (для определенности) проверяемой гипотезе H_0 соответствовала принадлежность выборок одному и тому же стандартному нормальному закону распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2} \right\}$$

и параметрами сдвига $\theta_0 = 0$ и масштаба $\theta_1 = 1$.

При всех альтернативах первая выборка всегда соответствовала стандартному нормальному закону, а вторая – некоторому другому.

При альтернативе сдвига и конкурирующей гипотезе H_1 вторая выборка соответствовала нормальному закону с параметром сдвига $\theta_0 = 0,1$ и параметром масштаба $\theta_1 = 1$.

При изменении масштаба и конкурирующей гипотезе H_2 вторая выборка соответствовала нормальному закону с параметрами $\theta_0 = 0$ и $\theta_1 = 1,1$.

В случае конкурирующей гипотезы H_3 вторая выборка соответствовала логистическому закону с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{3}} \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} \left/ \left[1 + \exp \left\{ -\frac{\pi(x - \theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}} \right\} \right] \right|^2$$

и параметрами $\theta_0 = 0$ и $\theta_1 = 1$. Нормальный и логистический законы очень близки и трудноразличимы с помощью критериев согласия.

Поскольку при ограниченных объемах выборок распределения статистик критериев существенно отличаются от предельных, оценки мощности находились по результатам моделирования распределений статистик при справедливости проверяемой H_0 и конкурирующих гипотез H_i , $i = \overline{1,3}$, при конкретных объемах выборок n . Количество экспериментов имитационного моделирования в каждом случае составило величину $N = 10^6$. Некоторые оценки мощности критериев Смирнова (С), Лемана–Розенблатта (ЛР), Андерсона–Дарлинга (АД) при заданных уровнях значимости $\alpha = 0,1$ и различных объемах выборок представлены в табл. 1.

**Оценки мощности критериев однородности относительно альтернатив $H_1 - H_3$
в зависимости от объемов выборок ($m = n$, $\alpha = 0,1$)**

Критерий	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$
Относительно альтернативы H_1							
АД	0,114	0,137	0,175	0,319	0,447	0,691	0,919
ЛР	0,115	0,136	0,173	0,313	0,438	0,678	0,910
С	0,111	0,132	0,164	0,280	0,381	0,617	0,869
Относительно альтернативы H_2							
АД	0,104	0,112	0,128	0,202	0,290	0,528	0,861
ЛР	0,103	0,107	0,114	0,149	0,191	0,324	0,624
С	0,105	0,108	0,120	0,150	0,186	0,297	0,551
Относительно альтернативы H_3							
АД	0,103	0,108	0,117	0,156	0,203	0,343	0,640
С	0,104	0,110	0,121	0,159	0,198	0,319	0,564
ЛР	0,103	0,106	0,113	0,142	0,178	0,288	0,547

Критерий Андерсона–Дарлинга, как правило, обладает несколько большей мощностью, чем критерий Лемана–Розенблатта, особенно в случае отличия анализируемых выборок в характеристиках рассеяния. В то же время эксперименты показали, что относительно (очень) близких конкурирующих гипотез при малых объемах выборок преимущество в мощности может быть за критерием Лемана–Розенблатта. Критерий Смирнова заметно уступает в мощности критериям Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга. В то же время следует обратить внимание на неплохие показатели критерия Смирнова относительно гипотезы H_3 .

5. Многовыборочный критерий Андерсона–Дарлинга

Вопросы построения k -выборочных критериев однородности законов, являющихся аналогами критериев однородности Смирнова и Лемана–Розенблатта, рассматривались в работе [14]. Однако нам не известно о соответствующих результатах построения, которые можно было бы рекомендовать к применению.

Задача проверки однородности k выборок формулируется следующим образом. Пусть x_{ij} – j -е наблюдение i -й выборки $j = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, k}$. Предположим, что i -й выборке соответствует непрерывная функция распределения $F_i(x)$. Необходимо проверить гипотезу вида $H_0 : F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_k(x)$ без указания общего для них закона распределения.

Многовыборочный вариант критерия однородности Андерсона–Дарлинга предложен в [5]. Обозначим эмпирическую функцию распределения, соответствующую i -й выборке, как $F_{in_i}(x)$, а эмпирическую функцию распределения, соответствующую объединенной выборке объемом $n = \sum_{i=1}^k n_i$, – как $H_n(x)$. Статистика k -выборочного критерия Андерсона–Дарлинга определяется выражением

$$A_{kn}^2 = \sum_{i=1}^k n_i \int_{B_n} \frac{[F_{in_i}(x) - H_n(x)]^2}{(1 - H_n(x)) H_n(x)} dH_n(x), \quad (4)$$

где $B_n = \{x \in R : H_n(x) < 1\}$. Для $k = 2$ соотношение (4) сводится к (3). В предположении о непрерывности $F_i(x)$, упорядочив объединенную выборку $Z_1 \leq Z_2 \leq \dots \leq Z_n$, непосредственно из (4) можно получить простое выражение для вычисления статистики

$$A_{kn}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(nM_{ij} - jn_i)^2}{j(n-j)}, \quad (5)$$

где M_{ij} – число элементов в i -й выборке, которые не больше, чем Z_j . Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики (5).

В работе [5] таблица верхних процентных точек представлена не для статистики (5), а для статистики вида

$$T_{kn} = \frac{A_{kn}^2 - (k-1)}{\sqrt{D[A_{kn}^2]}}. \quad (6)$$

Дисперсия статистики A_{kn}^2 определяется выражением [5]:

$$D[A_{kn}^2] = \frac{an^3 + bn^2 + cn + d}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

при

$$a = (4g-6)(k-1) + (10-6g)H, \quad b = (2g-4)k^2 + 8hk + (2g-14h-4)H - 8h + 4g - 6, \\ c = (6h+2g-2)k^2 + (4h-4g+6)k + (2h-6)H + 4h, \quad d = (2h+6)k^2 - 4hk,$$

где

$$H = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i}, \quad h = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}, \quad g = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{1}{(n-i)j}.$$

Зависимость предельных распределений статистики (6) от числа сравниваемых выборок k иллюстрирует рис. 1. С ростом числа сравниваемых выборок это распределение медленно сходится к стандартному нормальному закону. Исследование распределений статистик методами статистического моделирования при конкретных k показало наличие соответствующих предельных распределений. Результаты моделирования выявили, что при использовании критерия отличия распределений статистик от соответствующих предельных можно пренебречь при объемах анализируемых выборок $n_i \geq 30$.

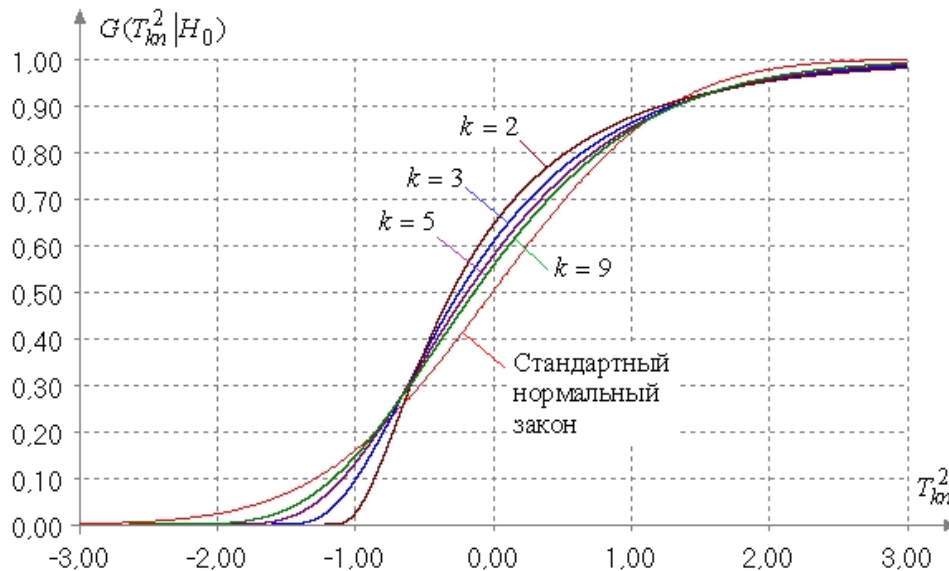


Рис. 1. Зависимость предельных распределений статистики (6) от числа сравниваемых выборок

Верхние критические значения предельных распределений для статистики (6), полученные методами статистического моделирования (при $n_i = 1000$ и числе экспериментов имитационного моделирования $N = 10^6$), уточняющие и расширяющие таблицу, приведенную в [5], представлены в [15]. В то же время для числа сравниваемых выборок $k = 2 \div 11$ нами были построены приближенные модели предельных распределений статистики (6). Хорошими моделями оказались законы семейства бета-распределений III рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\frac{x - \theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x - \theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1 - 1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1) \frac{x - \theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0 + \theta_1}}$$

при конкретных значениях параметров этого закона, найденных по полученным в результате моделирования выборкам статистик. Представленные в табл. 2 модели $B_{III}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ с приведенными значениями параметров позволяют по значениям статистики, вычисленным по соотношению (6), находить оценки достигнутого уровня значимости p_{value} при соответствующем числе k сравниваемых выборок.

Таблица 2

Модели предельных распределений статистики

k	Модель
2	$B_{III}(3,1575; 2,8730; 18,1238; 15,0000; -1,1600)$
3	$B_{III}(3,5907; 4,5984; 7,8040; 14,1310; -1,5000)$
4	$B_{III}(4,2657; 5,7035; 5,3533; 12,8243; -1,7500)$
5	$B_{III}(6,2992; 6,5558; 5,6833; 13,010; -2,0640)$
6	$B_{III}(6,7446; 7,1047; 5,0450; 12,8562; -2,2000)$
7	$B_{III}(6,7615; 7,4823; 4,0083; 11,800; -2,3150)$
8	$B_{III}(5,8057; 7,8755; 2,9244; 10,900; -2,3100)$
9	$B_{III}(9,0736; 7,4112; 4,1072; 10,800; -2,6310)$
10	$B_{III}(10,2571; 7,9758; 4,1383; 11,186; -2,7988)$
11	$B_{III}(10,6848; 7,5950; 4,2041; 10,734; -2,8400)$
∞	$N(0,0; 1,0)$

В табл. 3 приведены оценки мощности k -выборочного критерия Андерсона–Дарлинга при $k = 4$ относительно H_1 , H_2 и H_3 , когда только одна из k выборок принадлежала конкурирующему закону. При $k = 2$ критерий со статистикой (6) эквивалентен по мощности двухвыборочному критерию Андерсона–Дарлинга со статистикой (3).

Естественно, что с ростом количества сравниваемых выборок тех же объемов мощность критерия относительно аналогичных конкурирующих гипотез снижается.

Таблица 3

Оценки мощности k -выборочного критерия однородности Андерсона–Дарлинга относительно альтернатив H_1 и H_3 в зависимости от объемов выборок ($k = 4$, $n_i = n$)

Уровень значимости α	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1000$
Относительно альтернативы H_1						
0,1	0,112	0,131	0,164	0,301	0,433	0,701
Относительно альтернативы H_2						
0,1	0,104	0,110	0,123	0,180	0,254	0,474
Относительно альтернативы H_3						
0,1	0,102	0,106	0,113	0,143	0,179	0,291

Заключение

Построенные в данной работе модели предельных распределений статистики (6) при использовании k -выборочного критерия однородности Андерсона–Дарлинга для анализа k сравниваемых выборок ($k = 2 \div 11$) дают возможность находить оценки p_{value} , что, несомненно, делает результаты статистических выводов более информативными и более обоснованными.

Необходимо упомянуть о критериях однородности Жанга [16, 17], которые дают возможность анализировать $k \geq 2$ выборок. Три критерия Жанга со статистиками Z_K , Z_C и Z_A являются развитием, соответственно, критериев однородности Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга. Предварительные исследования показали, что критерии однородности Жанга имеют некоторое преимущество в мощности по отношению к альтернативам масштаба, но несколько уступают рассмотренным критериям Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлинга по отношению к альтернативам сдвига. Недостатком критериев Жанга, затрудняющим их применение в приложениях, является зависимость распределений статистик от объемов выборок. Однако при современном уровне развития информационных технологий такой недостаток уже не является критичным [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М. : Наука, 1983.
2. Lehmann E.L. Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests // Ann. Math. Statist. 1951. V. 22, No. 1. P. 165–179.
3. Rosenblatt M. Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic // Ann. Math. Statist. 1952. V. 23. P. 617–623.
4. Pettitt A.N. A two-sample Anderson-Darling rank statistic // Biometrika. 1976. V. 63, No. 1. P. 161–168.
5. Scholz F.W., Stephens M.A. K-Sample Anderson–Darling Tests // Journal of the American Statistical Association. 1987. V. 82, No. 399. P. 918–924.
6. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. О сходимости распределений статистик и мощности критериев однородности Смирнова и Лемана–Розенблатта // Измерительная техника. 2005. № 12. С. 9–14.
7. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011.
8. Лемешко Б.Ю. Непараметрические критерии согласия. Руководство по применению. М. : ИНФРА-М, 2014. DOI: 10.12737/11873.
9. Лемешко Б.Ю. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению. М. : ИНФРА-М, 2015. DOI: 10.12737/6086.
10. Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю. Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению. М. : ИНФРА-М, 2015. DOI: 10.12737/11304.
11. Смирнов Н.В. Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках // Бюл. МГУ. Сер. А. 1939. Т. 2, № 2. С. 3–14.
12. Макаров А.А., Симонова Г.И. Исследование мощности двухвыборочного критерия Андерсена–Дарлинга в случае засорения одной из выборок // Статистические методы оценивания и проверки гипотез : межвуз. сб. науч. тр. № 20. Перм. ун-т. Пермь, 2007. С. 40–52.
13. Постовалов С.Н. Применение компьютерного моделирования для расширения прикладных возможностей классических методов проверки статистических гипотез : дис. ... д-ра техн. наук. Новосибирск, 2013.
14. Kiefer J. K-Sample Analogues of the Kolmogorov-Smirnov and Cramer-v. Mises Tests // Annals of Mathematical Statistics. 1959. V. 30, No. 2. P. 420–447.
15. Лемешко Б.Ю. Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению. М. : ИНФРА-М, 2017.
16. Zhang J. Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests : PhD Thesis. Toronto : York University, 2001. URL: <http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/NQ66371.pdf> (дата обращения: 26.01.2016).
17. Zhang J. Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio // Technometrics. 2006. V. 48, No. 1. P. 95–103.

Лемешко Борис Юрьевич, д-р техн. наук, профессор. E-mail: Lemeskho@ami.nstu.ru

Лемешко Станислав Борисович, канд. техн. наук. E-mail: skyer@mail.ru

Веретельникова Ирина Викторовна. E-mail: ira-veterok@mail.ru

Новосибирский государственный технический университет

Поступила в редакцию 10 июня 2017 г.

Lemeskho Boris Yu., Lemeskho Stanislav B., Veretel'nikova Irina V. (Novosibirsk State Technical University, Russian Federation).

Application of criteria for testing homogeneity of distribution laws.

Keywords: homogeneity tests; Smirnov test; Lehmann–Rosenblatt test; Anderson–Darling test; power of test.

DOI: 10.17223/19988605/41/3

The necessity of general homogeneity hypothesis checking, i.e. whether two (or more) samples of random variables belong to the same general aggregate, arises constantly in the course of analysis of unbiased errors of measuring instruments. Such task arises naturally in the course of measuring instruments calibration and when comparing lab tests results. Technologists, medical researchers and biologists also face the same task when processing results of experimental research.

The present paper deals with the Smirnov, the Lehmann-Rosenblatt and the Anderson-Darling two-samples homogeneity tests; statistics for these tests is given; advantages and disadvantages of the tests are discussed.

As a drawback of the Smirnov test we may mention a substantial discreteness of statistics distribution which must be taken into account when having significant values of n and equal number of m and n samples. This drawback can be overcome if we choose mu-

tually prime integers as m and n . But even when this drawback has been remedied the real statistics distribution still differs substantially from the Kolmogorov limit distribution as the checked hypothesis is true. Hence when using the latter for evaluation of the significance level (p_{value}) incorrect conclusions can be reached. One can avoid this only by modifying the test statistics.

As opposed to the Smirnov test, the Lehmann-Rosenblatt and the Anderson-Darling statistics distribution homogeneity tests do not actually differ from their limit distributions when having samples values of $m, n \geq 25$.

Comparative analysis of tests powers under discussion, conducted with the help of statistic modeling methods, showed that, as a rule, the Anderson-Darling test boasts of bigger power than the Lehmann-Rosenblatt test, especially in case of differences of samples in their measure of dispersion. At the same time, when having rather similar yet competing hypothesis and smaller number of samples, the Lehmann-Rosenblatt test can show advantage in power. The Smirnov test yields to the Lehmann-Rosenblatt and the Anderson-Darling competing tests, but in certain cases it can be quite competitive.

Previously, information on distribution of statistics for k -sample Anderson-Darling homogeneity test has been available only within a limited table of critical limits. In the present case the study of statistics distribution through statistic modeling methods with actual k values showed the presence of corresponding limit distributions. Results of such modeling showed that when using this test we can disregard the difference between the statistics distributions and the corresponding limit values while the number of samples $n_i \geq 30$.

Based on the results of statistics modeling, approximate models for limit distributions of the Anderson-Darling k -samples test for $k = 2 \div 11$. This paper shows the models created, represented by the laws of beta-distributions of the IIIrd with particular parameter values. Such models produced with the help of the Anderson-Darling k -sample test enable finding the values of p_{value} , thus making the results of statistics conclusions more informative and more substantiated.

The possibility of using the Zhang k -sample homogeneity test with statistics of Z_K , Z_C and Z_A is discussed, these being the extension of the Smirnov, the Lehmann-Rosenblatt and the Anderson-Darling test, respectively. The Zhang tests have some advantages in power with reference to the scale alternatives, but they somewhat yield to the Smirnov, the Lehmann-Rosenblatt and the Anderson-Darling tests with reference to the shift alternatives.

REFERENCES

1. Bolshev, L.N. & Smirnov, N. V. (1983) *Tablitsy matematicheskoy statistiki* [Tables for Mathematical Statistics]. Moscow: Nauka.
2. Lehmann, E.L. (1951) Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests. *The Annals of Mathematical Statistics*. 22(1). pp. 165–179.
3. Rosenblatt, M. (1952) Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic. *The Annals of Mathematical Statistics*. 23. pp. 617–623.
4. Pettitt, A.N. (1976) A two-sample Anderson-Darling rank statistic. *Biometrika*. 63(1). pp. 161–168. DOI: 10.1093/biomet/63.1.161
5. Scholz, F.W. & Stephens M.A. (1987) K-Sample Anderson–Darling Tests. *Journal of the American Statistical Association*. 82(399). pp. 918–924. DOI: 10.1080/01621459.1987.10478517
6. Lemesko, B.Yu. & Lemesko, S.B. (2005) Statistical distribution convergence and homogeneity test power for Smirnov and Lehmann–Rosenblatt tests. *Measurement Techniques*. 48(12). pp. 1159–1166. DOI: 10.1007/s11018-006-0038-3
7. Lemesko, B.Yu., Lemesko, S.B., Postovalov, S.N. & Chimitova, E.V. (2011) *Statisticheskii analiz dannykh, modelirovanie i issledovanie veroyatnostnykh zakonov*. Komp'yuternyy podkhod [Statistical Data Analysis, Simulation and Study of Probability Regularities. Computer Approach]. Novosibirsk: NSTU.
8. Lemesko, B.Yu. (2014) *Neparametricheskie kriterii soglasiya. Rukovodstvo po primeneniyu* [Nonparametric goodness-of-fit tests]. Moscow: INFRA–M. DOI: 10.12737/11873
9. Lemesko, B.Yu. (2015) *Kriterii proverki otkloneniya raspredeleniya ot normal'nogo zakona* [Tests for checking the deviation from normal distribution law]. Moscow: INFRA–M. DOI: 10.12737/6086
10. Lemesko, B.Yu. & Blinov, P.Yu. (2015) *Kriterii proverki otkloneniya raspredeleniya ot ravnomernogo zakona* [Tests for checking the deviation from uniform distribution law]. Moscow: INFRA–M. DOI: 10.12737/11304
11. Smirnov, N.V. (1939) Otsenka raskhozhdeniya mezhdu empiricheskimi krivymi raspredeleniya v dvukh nezavisimyykh vyborkakh [Evaluation of discrepancy between the empirical distribution curves in two independent samples]. *Byulleten. MGU. Ser. A. – Bulletin of MGU, Series A*. 2(2). pp. 3–14.
12. Makarov, A.A. & Simonova, G.I. (2007) Issledovanie moshchnosti dvukhvyborochnogo kriteriya Andersena–Darlinga v sluchae zasoreniya odnoy iz vyborok [Studies of the power of the two-sample Anderson-Darling test in the case of littering of one of the samples]. In: Lumelsky, Ya.P. (ed.) *Statisticheskie metody otsenivaniya i proverki gipotez* [Statistics methods of evaluation and checking of hypothesis]. Perm: Perm State University. pp. 40–52.
13. Postovalov, S.N. (2013) *Primenenie komp'yuternogo modelirovaniya dlya rasshireniya prikladnykh vozmozhnostey klassicheskikh metodov proverki statisticheskikh gipotez* [Using of computer modeling for expanding application of classical methods of statistics hypothesis checking]. Engineering Dr. Diss. Novosibirsk.
14. Kiefer, J. (1959) K-Sample Analogues of the Kolmogorov-Smirnov and Cramer-v. Mises Tests. *Annals of Mathematical Statistics*. 30(2). pp. 420–447.
15. Lemesko, B.Yu. (2017) *Kriterii proverki gipotez ob odnorodnosti* [Tests for homogeneity]. Moscow: INFRA–M.
16. Zhang, J. (2001) *Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests*. PhD Thesis. Toronto: York University. [Online] Available from: <http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/NQ66371.pdf>. (Accessed: 26th January 2016).
17. Zhang, J. (2006) Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio. *Technometrics*. 48(1). pp. 95–103. DOI: 10.1198/004017005000000328. 95

УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/41/4

Ю.Е. Летунович, О.В. Якубович

ОТКРЫТЫЕ МАРКОВСКИЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОНТРОЛЬНЫМИ ОЧЕРЕДЯМИ И КАРАНТИННЫМ УЗЛОМ

Исследуется открытая сеть массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком. В каждом узле формируются две очереди заявок: контрольная очередь проверки заявок на стандартность и очередь на обслуживание заявок. Поступающие в узлы заявки присоединяются к контрольной очереди, в которой происходят их сканирование, проверка на соответствие требованиям сети. По результатам проверки заявки могут быть направлены в карантинный узел для решения обнаруженной проблемы.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания; карантинные очереди в узлах; стационарное распределение; эргодичность.

Системы и сети массового обслуживания позволяют моделировать и анализировать функционирование различных реальных объектов, осуществляющих обслуживание: сети связи, телекоммуникационные и информационные сети и т.д. В настоящее время весьма актуальным является вопрос защиты информации, использования антивирусного программного обеспечения, которое обнаруживает и обезвреживает вредоносные объекты и угрозы для систем и сетей. Ранее исследованы сети массового обслуживания, позволяющие учитывать ситуации, когда ожидающие в очереди заявки, обладая некоторым дефектом, становятся временно неактивными [1, 2] или обслуживающий прибор реагирует на вредоносные заявки сменой режима обслуживания [3]. В настоящей работе исследуются сети массового обслуживания, позволяющие описать функционирование подобного программного обеспечения с помощью введения очередей, в которых производится проверка всех поступающих объектов с последующим обезвреживанием вредоносных объектов в карантине. В работе [4] рассматривается модель с карантинным узлом, в который направляются заявки, признанные нестандартными в очередях узлов, при этом возможна ситуация, когда заявка будет направлена на обслуживание в узле, не успев пройти проверку. В настоящей работе контрольная очередь присутствует в каждом узле, что позволяет учитывать ситуацию, когда все поступающие заявки проходят предварительную проверку, сканирование до того, как они будут допущены к обслуживанию. Исследуется открытая марковская сеть, в которую поступает пуассоновский поток заявок. Узлы состоят из двух очередей: контрольной очереди и очереди для обслуживания. Заявки, поступая в узел, увеличивают длину контрольной очереди узла на единицу. В контрольной очереди узла производится проверка поступивших заявок, при обнаружении опасности заявка направляется в карантинный узел для устранения проблемы, в противном случае заявка присоединяется к обычной очереди узла.

1. Изолированный узел

1.1. Изолированный узел с контрольной очередью

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ . В системе формируются две однолинейные очереди: контрольная очередь и очередь к обслуживающему прибору. Каждая поступающая заявка присоединяется к контрольной очереди, где проверяется экспоненциальным прибором на стандартность. Времена проверки независимы, не зависят от процессов поступления, обслуживания и имеют показательное распределение с параметром ν , ν – некоторая положительная постоянная. Дисциплина проверки заявок произвольная. Каждая заявка после окончания проверки либо с вероятностью p признается нестандартной и покидает систему, либо с вероятностью $1 - p$ присоединяется к очереди стандартных заявок.

Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления, проверки и имеют показательное распределение с параметром μ . Порядок обслуживания заявок произвольный.

Функционирование рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t описывается случайным процессом $x(t) = (m(t), n(t))$, где $m(t)$ – количество заявок в контрольной очереди в момент времени t , $n(t)$ – количество заявок в обычной очереди в момент времени t . Тогда $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным пространством состояний $X = \{x = (m, n): m, n \geq 0\}$.

Предположим, что $\{p(x), x \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$p(m, n) \left[\lambda + \mu I_{\{n \neq 0\}} + \nu I_{\{m \neq 0\}} \right] = p(m-1, n) \lambda I_{\{m \neq 0\}} + p(m, n+1) \mu + \\ + p(m+1, n) \nu p + p(m+1, n-1) \nu (1-p) I_{\{n \neq 0\}}, \quad (m, n) \in X.$$

Теорема 1. При выполнении неравенств

$$\frac{\lambda}{\nu} < 1, \quad \frac{\lambda(1-p)}{\mu} < 1$$

марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид:

$$p(m, n) = \left(\frac{\lambda}{\nu} \right)^m \left(\frac{\lambda(1-p)}{\mu} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\nu} \right) \left(1 - \frac{\lambda(1-p)}{\mu} \right).$$

Доказательство проводится стандартным образом – подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности получено из эргодической теоремы Фостера.

1.2. Изолированный карантинный узел

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток нестандартных заявок с параметром λ .

Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления и имеют показательное распределение с параметром μ . Порядок обслуживания заявок произвольный.

Функционирование рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t описывается случайным процессом $n(t)$, где $n(t)$ – количество заявок в системе в момент времени t . Тогда $n(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным пространством состояний $X = \{n, n \geq 0\}$.

Предположим, что $\{p(n), n \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $n(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$p(n) \left[\lambda + \mu I_{\{n \neq 0\}} \right] = p(n-1) \lambda I_{\{n \neq 0\}} + p(n+1) \mu, \quad n \in X.$$

Теорема 2. При выполнении неравенства

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1$$

марковский процесс $n(t)$ эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид:

$$p(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right).$$

Доказательство проводится стандартным образом – подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности получено из эргодической теоремы Фостера.

2. Открытая сеть

Рассмотрим открытую сеть, состоящую из N узлов первого типа со структурой, описанной в пункте 1.1, и $(N+1)$ -го узла второго типа со структурой, описанной в пункте 1.2. В сеть поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ .

Каждая заявка независимо от других заявок направляется в i -й узел с вероятностью p_{0i} ($i = \overline{1, N}$). Очевидно, что $\sum_{i=1}^N p_{0i} = 1$. Каждая заявка, поступающая в i -й узел первого типа, присоединяется к контрольной очереди, где проверяется на стандартность. Времена проверки независимы, не зависят от процессов поступления, обслуживания и имеют показательное распределение с параметром v_i , v_i – некоторая положительная постоянная ($i = \overline{1, N}$). Каждая заявка после окончания проверки в i -м узле с вероятностью p_i признается нестандартной и независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь $(N+1)$ -го узла, а с вероятностью $1 - p_i$ присоединяется к очереди стандартных заявок в i -м узле. Стандартные заявки обслуживаются экспоненциальным прибором, времена обслуживания заявок прибором i -го узла независимы, не зависят от процесса поступления и имеют показательное распределение с параметром μ_i ($i = \overline{1, N}$). Порядок обслуживания заявок произвольный.

Каждая заявка после завершения обслуживания в i -м узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j -й узел с вероятностью p_{ij} , а с вероятностью p_{i0} покидает сеть ($\sum_{j=1}^N p_{ij} + p_{i0} = 1, i = \overline{1, N}$).

В $(N+1)$ -м узле, который назовем карантинном, осуществляется восстановление качества (лечение) нестандартных заявок или их обезвреживание. Время такого обслуживания имеет показательное распределение с параметром μ_{N+1} . Порядок обслуживания произвольный. Каждая заявка после обслуживания в $(N+1)$ -м узле независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь j -го узла с вероятностью p_{N+1j} , т.е. «вылечивается» и продолжает движение по сети, а с вероятностью p_{N+10} обезвреживается, т.е. покидает сеть ($\sum_{j=1}^N p_{N+1j} + p_{N+10} = 1$).

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{N+1}(t)),$$

где $x_i(t) = (m_i(t), n_i(t))$ – состояние узла первого типа в момент времени t , $m_i(t)$ – число заявок в контрольной очереди, $n_i(t)$ – число заявок очереди на обслуживание в i -м узле в момент времени t ($i = \overline{1, N}$); $x_{N+1}(t) = n_{N+1}(t)$ – число заявок в карантинном $(N+1)$ -м узле в момент времени t .

Процесс $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счетным пространством состояний $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{N+1}$, где $X_i = \{x_i = (m_i, n_i): m_i, n_i \geq 0, i = \overline{1, N}\}$, $X_{N+1} = \{x_{N+1} = n_{N+1}: n_{N+1} \geq 0\}$.

Уравнения трафика имеют вид

$$\varepsilon_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^N \varepsilon_j (1 - p_j) p_{ji} + \varepsilon_{N+1} p_{N+1i}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\varepsilon_{N+1} = \sum_{j=1}^N \varepsilon_j p_j.$$

Введем следующие обозначения:

$$p_{0i}^* = p_{0i},$$

$$p_{ji}^* = (1 - p_j) p_{ji},$$

$$p_{jN+1}^* = p_j,$$

$$p_{N+1i}^* = p_{N+1i}.$$

Покажем, что матрица $P^* = (p_{ji}^*, i, j = \overline{0, N+1})$ является стохастической.

$$\sum_{i=1}^N p_{0i}^* = \sum_{i=1}^N p_{0i} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{N+1} p_{ji}^* = \sum_{i=0}^N (1 - p_j) p_{ji} + p_j = \sum_{i=0}^N p_{ji} - p_j \sum_{i=0}^N p_{ji} + p_j = 1,$$

$$\sum_{i=0}^N p_{N+1i}^* = \sum_{i=0}^N p_{N+1i} = 1.$$

Будем предполагать, что матрица маршрутизации P^* , где $p_{00}^* = p_{0N+1}^* = 0$, неприводима. Записав уравнения трафика через введенные обозначения вероятностей переходов, получаем систему уравнений трафика сети Джексона, для которой доказано существование единственного положительного решения при условии неприводимости матрицы маршрутизации [5]. Таким образом, система уравнений трафика для исследуемой сети имеет единственное положительное решение $(\varepsilon_i, \overline{1, N+1})$.

Пусть $\{p(x), x \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид

$$\begin{aligned} p(x) \left(\lambda + \sum_{i=1}^N \mu_i I_{\{n_i \neq 0\}} + \mu_{N+1} I_{\{n_{N+1} \neq 0\}} + \sum_{i=1}^N v_i I_{\{m_i \neq 0\}} \right) = \\ = \sum_{i=1}^N p(x - e_i^1) \lambda p_{0i} I_{\{m_i \neq 0\}} + \sum_{i=1}^N p(x + e_i^2) \mu_i p_{i0} + p(x + e_{N+1}) \mu_{N+1} p_{N+10} + \\ + \sum_{i=1}^N p(x + e_i^1 - e_{N+1}) v_i p_i I_{\{n_{N+1} \neq 0\}} + \sum_{i=1}^N p(x + e_i^1 - e_i^2) v_i (1 - p_i) I_{\{n_i \neq 0\}} + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p(x + e_j^2 - e_i^1) \mu_j p_{ji} I_{\{m_i \neq 0\}} + \sum_{i=1}^N p(x + e_{N+1} - e_i^1) \mu_{N+1} p_{N+1i} I_{\{m_i \neq 0\}}, \quad x \in X. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь e_i^k – единичный вектор размерности $(2N+1)$ с единицей в $(2(i-1)+k)$ -й позиции, $i = \overline{1, N}$, $k = 1, 2$; e_{N+1} – единичный вектор размерности $(2N+1)$ с единицей в $(2N+1)$ -й позиции.

Теорема 3. Пусть для любых $i = \overline{1, N}$ выполняются неравенства

$$\frac{\lambda \varepsilon_i}{v_i} < 1, \quad \frac{\lambda \varepsilon_i (1 - p_i)}{\mu_i} < 1, \quad \frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} < 1, \quad (2)$$

тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет следующий вид:

$$p(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \dots p_{N+1}(x_{N+1}), \quad x \in X, \quad (3)$$

где

$$p_i(x_i) = \left(\frac{\lambda \varepsilon_i}{v_i} \right)^{m_i} \left(\frac{\lambda \varepsilon_i (1 - p_i)}{\mu_i} \right)^{n_i} \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_i}{v_i} \right) \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_i (1 - p_i)}{\mu_i} \right), \quad i = \overline{1, N}, \quad (4)$$

$$p_{N+1}(x_{N+1}) = \left(\frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} \right)^{n_{N+1}} \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} \right), \quad (5)$$

$(\varepsilon_i, \overline{1, N+1})$ – решение системы уравнений трафика.

Доказательство. Докажем, что марковский процесс $x(t)$ эргодичен при выполнении условий (2), а (3) является решением уравнений равновесия (1). Согласно эргодической теореме Фостера достаточно доказать, что существует нетривиальное решение $\{p(x), x \in X\}$ системы уравнений равновесия

$$p(x)q(x) = \sum_{y \neq x, y \in X} p(y)q(y, x), \quad x \in X, \quad (6)$$

такое, что ряд $\sum_{x \in X} q(x)p(x)$ сходится. Здесь $q(x)$ – интенсивность выхода из состояния x .

Докажем, что (3) удовлетворяет уравнениям равновесия (1). Воспользуемся методом локального баланса. Разобьем (1) на уравнения локального равновесия

$$p(x)\lambda = \sum_{i=1}^N p(x + e_i^2) \mu_i p_{i0} + p(x + e_{N+1}) \mu_{N+1} p_{N+10}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} p(x) \left(\sum_{i=1}^N \mu_i I_{\{n_i \neq 0\}} + \mu_{N+1} I_{\{n_{N+1} \neq 0\}} \right) = \\ = \sum_{i=1}^N p(x + e_i^1 - e_{N+1}) v_i p_i I_{\{n_{N+1} \neq 0\}} + \sum_{i=1}^N p(x + e_i^1 - e_i^2) v_i (1 - p_i) I_{\{n_i \neq 0\}}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$p(x) \sum_{i=1}^N v_i I_{\{m_i \neq 0\}} = \sum_{i=1}^N p(x - e_i^1) \lambda p_{0i} I_{\{m_i \neq 0\}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p(x + e_i^2 - e_j^1) \mu_i p_{ij} I_{\{m_j \neq 0\}} + \sum_{i=1}^N p(x + e_{N+1} - e_i^1) \mu_{N+1} p_{N+1i} I_{\{m_i \neq 0\}}. \quad (9)$$

Разделим обе части уравнения (7) на $p(x) = p_1(x) p_2(x) \dots p_{N+1}(x)$, подставим (4), (5), получим

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{i=1}^N \frac{\lambda \varepsilon_i (1 - p_i)}{\mu_i} \mu_i p_{i0} + \frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} \mu_{N+1} p_{N+10} = \\ &= \lambda \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i (1 - p_i) - \sum_{j=1}^N (\varepsilon_j - p_{0j} - \varepsilon_{N+1} p_{N+1j}) + \varepsilon_{N+1} p_{N+10} \right) = \lambda. \end{aligned}$$

Разделим обе части уравнения (8) на $p(x) = p_1(x) p_2(x) \dots p_{N+1}(x)$, подставим (4), (5), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mu_i I_{\{n_i \neq 0\}} + \mu_{N+1} I_{\{n_{N+1} \neq 0\}} &= \sum_{i=1}^N \frac{\lambda \varepsilon_i}{v_i} \frac{\mu_{N+1}}{\lambda \varepsilon_{N+1}} v_i p_i I_{\{n_{N+1} \neq 0\}} + \\ + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda \varepsilon_i}{v_i} \frac{\mu_i}{\lambda \varepsilon_i (1 - p_i)} v_i (1 - p_i) I_{\{n_i \neq 0\}} &= \frac{\mu_{N+1}}{\varepsilon_{N+1}} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i p_i I_{\{n_{N+1} \neq 0\}} + \sum_{i=1}^N \mu_i I_{\{n_i \neq 0\}} = \\ &= \sum_{i=1}^N \mu_i I_{\{n_i \neq 0\}} + \mu_{N+1} I_{\{n_{N+1} \neq 0\}}. \end{aligned}$$

Разделим обе части уравнения (9) на $p(x) = p_1(x) p_2(x) \dots p_{N+1}(x)$, подставим (4), (5), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N v_i I_{\{m_i \neq 0\}} &= \sum_{i=1}^N \frac{v_i}{\lambda \varepsilon_i} \lambda p_{0i} I_{\{m_i \neq 0\}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\lambda \varepsilon_j (1 - p_j)}{\mu_j} \frac{v_i}{\lambda \varepsilon_i} \mu_j p_{ji} I_{\{m_i \neq 0\}} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} \frac{v_i}{\lambda \varepsilon_i} \mu_{N+1} p_{N+1i} I_{\{m_i \neq 0\}} = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{v_i}{\varepsilon_i} \left[p_{0i} + \sum_{j=1}^N \varepsilon_j (1 - p_j) p_{ji} + \varepsilon_{N+1} p_{N+1i} \right] I_{\{m_i \neq 0\}} = \sum_{i=1}^N v_i I_{\{m_i \neq 0\}}. \end{aligned}$$

Из требования теоремы Фостера о сходимости ряда $\sum_{x \in X} q(x) p(x)$, где интенсивность выхода из состояния x

$$q(x) = \lambda + \sum_{i=1}^N \mu_i I_{\{n_i \neq 0\}} + \mu_{N+1} I_{\{n_{N+1} \neq 0\}} + \sum_{i=1}^N v_i I_{\{m_i \neq 0\}},$$

учитывая (3), получим условие (2). При этом (3) задает единственное стационарное распределение вероятностей состояний сети. Теорема доказана.

Заключение

В настоящей работе исследована открытая марковская сеть массового обслуживания с поступающим пуассоновским потоком заявок. Сеть состоит из узлов, в которых находятся две очереди: очередь для проверки заявок на стандартность и обычная очередь для обслуживания. Времена проверки и времена обслуживания независимы и имеют показательное распределение. В сети также имеется карантинный узел, в который направляются заявки, не прошедшие проверку. Установлены условия эргодичности и аналитический вид стационарного распределения состояний сети. Рассматриваемая в работе модель является обобщением модели сети, исследуемой в [5] на случай наличия карантинного узла и контрольных очередей в узлах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боярович Ю.С. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний замкнутой сети массового обслуживания с временно неактивными заявками // Автоматика и телемеханика. 2012. № 10. С. 32–41.
2. Боярович Ю.С. Стационарное распределение сети с различными типами заявок и ненадежными требованиями // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : сб. науч. ст. Минск : БГУ, 2009. С. 14–20.
3. Малинковский Ю.В., Нуеман А.Ю. Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания // Весці НАНБ. Серыя фіз.-мат. навук. 2001. № 3. С. 129–134.

4. Дудовская Ю.Е., Якубович О.В. Открытая марковская сеть массового обслуживания с «карантинным» узлом // XII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф. Минск, 5–10 сентября 2016 г.: в 5 ч. / ред. С.Г. Краковский. Ч. 4. Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2016. С. 5–6.
5. Jackson J.R. Jobshop-like Queueing Systems // Manag. Sci. 1963. V. 10, No. 1. P. 131–142.

Летунович Юлия Евгеньевна, канд. физ.-мат. наук. E-mail: yletunovich@gmail.com

Якубович Оксана Владимировна, канд. физ.-мат. наук. E-mail: yakubovich@gsu.by

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины (Республика Беларусь)

Поступила в редакцию 2 сентября 2017 г.

Letunovich Yuliya E., Yakubovich Oksana V. (F. Scorina Gomel State University, Belarus).

Open Markov queueing networks with control queues and quarantine node.

Keywords: queueing network; control queues in the nodes; stationary distribution; ergodicity.

DOI: 10.17223/19988605/41/4

Recently the questions of information security and using of the antivirus software are very important. Such software finds and neutralizes harmful objects and threats for systems and networks. In systems and queueing networks functioning of the similar software can be described by means of queues in which all arriving objects are checked with the subsequent neutralization of harmful objects in a quarantine.

In this paper, the open queueing network with the Poisson input flow with a parameter λ is investigated. Every customer goes to the node i with probability p_{0i} ($i = \overline{1, N}$, $\sum_{i=1}^N p_{0i} = 1$). In each of N nodes there are two queues: control queue and a queue for service.

Every arriving customer joins control queue, in which it is scanning, checking on compliance to requirements of the network. The times of checking have exponential distribution with a parameter v_i ($i = \overline{1, N}$).

After checking in the node i every customer is admitted as non-standard with probability p_i and is directed to the queue of node $(N+1)$ immediately and independently from the other customers. Or it joins queue of standard customers in the node i with probability $1 - p_i$.

Standard customers are served by the device, service times in each node are independent and have exponential distribution with parameter μ_i ($i = \overline{1, N}$). After service at the node i every customer is sent immediately to the node j with probability p_{ij} , and it leaves the network with probability p_{i0} ($\sum_{j=1}^N p_{ij} + p_{i0} = 1$, $i = \overline{1, N}$).

In the node $(N+1)$ called quarantine the restoration of qualities of non-standard customers or their neutralization is carried out. The times of such service have exponential distribution with a parameter μ_{N+1} . After service at the node $(N+1)$ every customer is sent immediately to the node j with probability p_{N+1j} , and it leaves the network with probability p_{N+10} ($\sum_{j=1}^N p_{N+1j} + p_{N+10} = 1$).

Network state at the moment t is characterized by a vector

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{N+1}(t)),$$

where $x_i(t) = (m_i(t), n_i(t))$ is the state of the node i at the moment t , $m_i(t)$ is the number of the customers in the control queue, $n_i(t)$ is the number of the customers in the queue for service in the node i at the time moment t ($i = \overline{1, N}$); $x_{N+1}(t) = n_{N+1}(t)$ is the number of the customers in the quarantine node $(N+1)$ at the moment t .

The process $x(t)$ is homogeneous Markov process with continuous time and finite or countable states space $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{N+1}$, где $X_i = \{x_i = (m_i, n_i): m_i, n_i \geq 0, i = \overline{1, N}\}$, $X_{N+1} = \{x_{N+1} = n_{N+1}: n_{N+1} \geq 0\}$.

Traffic equations are following

$$\varepsilon_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^N \varepsilon_j (1 - p_j) p_{ji} + \varepsilon_{N+1} p_{N+1i}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\varepsilon_{N+1} = \sum_{j=1}^N \varepsilon_j p_j.$$

Let $\{p(x), x \in X\}$ be stationary distribution of states probabilities for the process $x(t)$.

We proved the following statement. If for all $i = \overline{1, N}$ inequalities

$$\frac{\lambda \varepsilon_i}{v_i} < 1, \quad \frac{\lambda \varepsilon_i (1 - p_i)}{\mu_i} < 1, \quad \frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} < 1$$

are carried out, then Markov process $x(t)$ is ergodic and stationary distribution of the network states probabilities has the following form

$$p(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \dots p_{N+1}(x_{N+1}), \quad x \in X,$$

where

$$p_i(x_i) = \left(\frac{\lambda \varepsilon_i}{v_i} \right)^{m_i} \left(\frac{\lambda \varepsilon_i (1 - p_i)}{\mu_i} \right)^{n_i} \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_i}{v_i} \right) \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_i (1 - p_i)}{\mu_i} \right), \quad i = \overline{1, N},$$

$$p_{N+1}(x_{N+1}) = \left(\frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} \right)^{n_{N+1}} \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} \right),$$

$(\varepsilon_i, 1, N+1)$ is solutions of the traffic equations.

REFERENCES

1. Boyarovich, Yu.S.(2012) The stationary distribution invariance of states in a closed queuing network with temporarily non-active customers. *Automation and Remote Control*. 73. pp. 1616–1623. DOI: 10.1134/S0005117912100037
2. Boyarovich, Yu.S. (2009) Statsionarnoe raspredelenie seti s razlichnymi tipami zayavok i nenadezhnymi trebovaniyami [The stationary distribution of the network with various types of customers and unreliable requests]. In: *Teoriya veroyatnostey, matematicheskaya statistika i ikh prilozheniya* [Probability theory, mathematical statistics and their applications]. Minsk: Belarusian State University. pp. 14–20.
3. Malinkovsky, Yu.V. (2001) Mul'tiplikativnost' statsionarnogo raspredeleniya v otkrytykh setyakh s mnogorezhimnymi strategiyami obsluzhivaniya [Multiplication of probability distribution in open networks with multimode service strategies]. *Vesti NANB. Seryya fiz.-mat. nauk*. 3. pp. 129–134.
4. Dudovskaya, Y.E. & Yakubovich, O.V. (2016) [Open Markov queueing network with quarantine node]. *Proc. of the 12th Belarusian Conference of math*. 4. pp. 5–6. (In Russian).
5. Jackson, J.R. (1963) Jobshop-like Queueing Systems. *Managment Science*. 10(1). pp. 131–142. DOI: 10.1287/mnsc.1040.0268

УДК 336.51

DOI: 10.17223/19988605/41/5

G.A. Medvedev

ON YIELD CURVES OF THE EUROPEAN CENTRAL BANK

In this paper it is showed that the yield curve of the European Central Bank (ECB) does not satisfy the no arbitrage conditions. For this it is need to add one more term to yield curve. As the state variables, it is necessary to choose a four-dimensional diffusion Gaussian process. Fifth factor is determined from the no arbitrage conditions. The version of the modification of the yield curve proposed in the paper differs from the earlier proposed modifications in order to ensure the absence of arbitrage opportunities.

Keywords: yield curve; forward curve; Nelson–Siegel–Svensson model; no arbitrage conditions.

In June 1996, the Bank for International Settlements (BIS, Basel) agreed that the central banks of Europe should submit their data to the BIS for the calculation of zero-coupon yield curves and model parameter estimates. It was found that most European banks use the Nelson – Siegel approach (Italy and Finland) or its modification of Svensson (Belgium, Germany, Spain, Norway, France, Switzerland and Sweden) to model yield curves [1].

Unfortunately, the Nelson – Siegel – Svensson (NSS) approach does not give recommendations on how to determine the parameters of the model (only to evaluate them) and does not explain in any way whether such a model is arbitrage-free. Therefore, it makes sense to consider this problem.

1. Dynamics of parameters change in yield (spot) rate and forward curve

Statistics of the Directorate General of the European Central Bank (ECB) publishes the euro zone's yield curves every TARGET working day at 12 noon on Central European time [2]. In the ECB technical note [3] formulas are given for calculating three types of yield curves: the yield curve, the forward curve and the nominal yield curve. Formulas for the first two of them have the form:

– yield (spot) rate

$$y(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-\tau/\tau_1}}{\tau/\tau_1} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\tau/\tau_1}}{\tau/\tau_1} - e^{-\tau/\tau_1} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\tau/\tau_2}}{\tau/\tau_2} - e^{-\tau/\tau_2} \right), \quad (1)$$

– forward curve

$$f(\tau) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\tau/\tau_1} + \beta_2 \frac{\tau}{\tau_1} e^{-\tau/\tau_1} + \beta_3 \frac{\tau}{\tau_2} e^{-\tau/\tau_2}. \quad (2)$$

Here τ is a term to maturity, β_i , τ_i are the parameters that are estimated on the market data. In Fig. 1 for example, the yield curve and the forward curve from the ECB website on June 1, 2017 presented.

On the ECB website the curves are shown for term to maturities τ from 0 to 30 years. In contrast to this, in order to show these curves "whole" for the entire range of values of τ from 0 to ∞ , on Fig. 1 we used the mapping of the positive semiaxis $\tau \in (0, \infty)$ of terms to maturity to an unit interval of new variable $u \in (0, 1)$ by means of nonlinear transformation $u = 1 - e^{-\rho\tau}$. The parameter ρ was chosen in such a way that the interval of maturities $\tau \in (0, 30)$ corresponds to the values of $u \in (0, 0.9)$, i. e. $\rho = \ln 10/30 = 0.07675$. It is relevant to note here that the curves always start from one common point $y(0|\beta) = f(0|\beta) = r(t)$, current value of short-term interest rate, and for $\tau \rightarrow \infty$ always tend to one common limit value $y(\infty|\beta) = f(\infty|\beta) = \beta_0$.

Because the yield curve is to be time-varying (as it obviously is) and following [4], [5] let us here recognize that the Nelson–Siegel–Svensson (NSS) parameters β_0 , β_1 , β_2 , β_3 must be time-varying too.

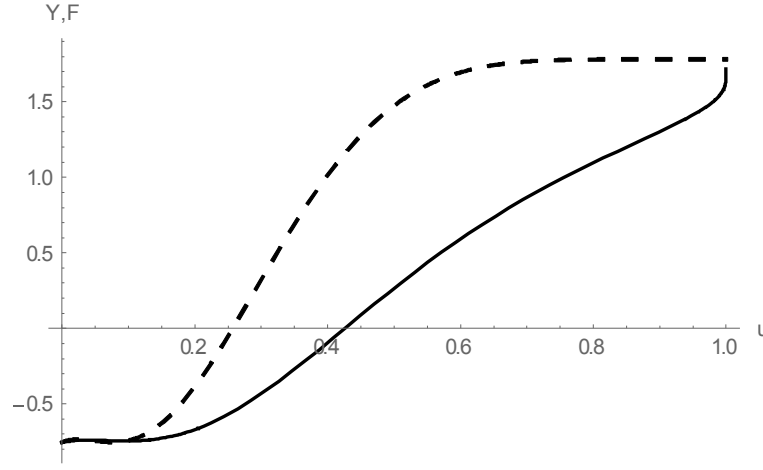


Fig. 1. The yield curve (the lower curve) and the forward curve (the upper curve) from the ECB website on June 1, 2017. Parameter values: $\beta_0 = 1.7810$, $\beta_1 = -2.5350$, $\beta_2 = 23.2948$, $\beta_3 = -27.6452$, $\tau_1 = 1.5822$, $\tau_2 = 1.7081$

Thus in the NSS yield models the yield curve $y(\tau) \equiv y(\tau | \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ and the forward curve $f(\tau) \equiv f(\tau | \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ are determined by following relations

$$y(\tau | \beta) = \beta_0(\tau) + \beta_1(t) \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + \beta_2(t) \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right) + \beta_3(t) \left(\frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} - e^{-\delta\tau} \right), \quad (3)$$

$$f(\tau | \beta) = (\tau \beta_0(\tau))' + \beta_1(t) \exp(-\gamma\tau) + \beta_2(t) \gamma\tau \exp(-\gamma\tau) + \beta_3(t) \delta\tau \exp(-\delta\tau). \quad (4)$$

For convenience, some rename have been made here: $\gamma \equiv 1/\tau_1$, $\delta \equiv 1/\tau_2$. The parameters $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ now depend on the current time t . The dependence of the parameter β_0 on the current time is somewhat different: $\beta_0(T - t) \equiv \beta_0(\tau)$, where T is the maturity date. The need for this will be clarified later. Prime means derivative with respect to the term to maturity $\tau = T - t$. In this case the state of the market can be described by a set of parameters $\{\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)\}$ and each of the parameters considered as a component of the state vector $\beta(t)$. Whether such yield curves satisfy the no arbitrage conditions? In order to clarify this it at first it is need to determine how the dynamics of the state variables $\beta(t)$ are described. At present the diffusion stochastic processes are most often used to describe the dynamics of these variables, the mathematical model of which is the stochastic differential equation

$$d\beta(t) = \mu(\beta)dt + \sigma(\beta)dW(t),$$

where $\mu(\beta)$ is a state drift vector, $\sigma(\beta)$ is a state vector volatility matrix, $W(t)$ is a vector of Wiener processes. In order to the arbitrage opportunities to be absent, it is necessary that the price of the zero-coupon bond $P(t, T, \beta) = \exp[-\tau y(\tau, \beta)]$ on a fixed date t satisfies the so-called term structure equation [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t, T, \beta)}{\partial t} + \mu(\beta)^T \frac{\partial P(t, T, \beta)}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\sigma(\beta)^T \frac{\partial^2 P(t, T, \beta)}{\partial \beta^2} \sigma(\beta) \right) - r(t)P(t, T, \beta) = \\ = \lambda(t, \beta)^T \sigma(\beta)^T \frac{\partial P(t, T, \beta)}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Here $r(t)$ is short-term interest rate, $\lambda(t, \beta)$ is a market risk price vector on some fixed date t . The equation must be supplemented by boundary conditions: $\beta_0(0) = 0$, $y(0, \beta) = r(t)$ (because of definition of short-term interest rate). It is possibly establish an more explicit relationship between the state variables $\{\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)\}$ and short-term interest rate from limiting relation $\lim_{T \rightarrow t} y(T - t, \beta) = r(t)$. Indeed for any time t

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow t} y(T - t, \beta) = \lim_{\tau \rightarrow 0} [\beta_0(\tau) + \beta_1(t) \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + \beta_2(t) \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right) + \\ + \beta_3(t) \left(\frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} - e^{-\delta\tau} \right)] = \beta_1(t) = r(t), \end{aligned} \quad (6)$$

as $\beta_0(0) = 0$. Thus the economical meaning of component $\beta_1(t)$ of the state vector $\beta(t)$ is short-term interest rate $r(t)$.

Let us introduce additional notation facilitating analysis corresponding to the state vector $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))^T$. Since the yield curves characterize the term structure of interest rates for some fixed value of the current time t , we will consider t to be a fixed value that does not change in the analysis, and for brevity we omit it in the notation. We introduce the vector of the term structure functions $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), B_3(\tau))^T$:

$$B_1(\tau) = \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma}, \quad B_2(\tau) = \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right), \quad B_3(\tau) = \left(\frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta} - \tau e^{-\delta\tau} \right). \quad (7)$$

Then the yield curve $y(\tau, \beta)$ and forward curve $f(\tau, \beta)$ in (3), (4) will have representations

$$y(\tau, \beta) = [\tau \beta_0(\tau) + \beta(t)^T B(\tau)] / \tau, \quad f(\tau, \beta) = [\tau \beta_0(\tau) + \beta(t)^T B(\tau)]'. \quad (8)$$

Because the price of the zero-coupon bond are represented in the form $P(t, T, \beta) = \exp[-\tau y(\tau, \beta)]$ it is more convenient to write the term structure equation not for the price $P(t, T, \beta)$ but for yield $y(\tau, \beta)$

$$\frac{\partial(\tau y(\tau, \beta))}{\partial \tau} + \tau [\sigma(\beta) \lambda(\beta) - \mu(\beta)]^T \frac{\partial y(\tau, \beta)}{\partial \beta} + \frac{\tau}{2} \text{tr} \left(\sigma(\beta)^T \left[\tau \frac{\partial y(\tau, \beta)}{\partial \beta} \left(\frac{\partial y(\tau, \beta)}{\partial \beta} \right)^T - \frac{\partial^2 y(\tau, \beta)}{\partial \beta^2} \right] \sigma(\beta) \right) - r = 0.$$

Taking into account that $y(\tau, \beta) = [\tau \beta_0(\tau) + \beta^T B(\tau)] / \tau$, we can write

$$\frac{\partial(\tau \beta_0(\tau))}{\partial \tau} + \beta^T \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} + [\sigma(\beta) \lambda(\beta) - \mu(\beta)]^T B(\tau) + \frac{1}{2} B(\tau)^T \sigma(\beta) \sigma(\beta)^T B(\tau) = r. \quad (9)$$

Consider the class of volatility matrices $\sigma(\beta)$ that do not depend on the current state of the market, i.e. $\sigma(\beta) = \sigma$. In this case the market risk price vector $\lambda(\beta)$ does not depend on the current state of the market too, $\lambda(\beta) = \lambda$. Such models of the dynamics of state variables β can naturally be called extended Vasicek models. Then the term structure equation reduces to following

$$\frac{\partial(\tau \beta_0(\tau))}{\partial \tau} + \lambda^T \sigma^T B(\tau) + \frac{1}{2} B(\tau)^T \sigma \sigma^T B(\tau) = -\beta^T \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} + \mu(\beta)^T B(\tau) + r. \quad (10)$$

The left-hand side of the equation does not depend on the state variables β , while on the right-hand side each term depends on them (we recall that $r = \beta_1$). Since this equality must hold for any vectors β and for any terms to maturity τ , it splits into two equations: the left-hand side gives the equation for the function $\beta_0(\tau)$, and the right-hand side determines the drift function $\mu(\beta)$.

$$\frac{\partial(\tau \beta_0(\tau))}{\partial \tau} + \lambda^T \sigma^T B(\tau) + \frac{1}{2} B(\tau)^T \sigma \sigma^T B(\tau) = c(\tau), \quad (11)$$

$$\mu(\beta)^T B(\tau) = c(\tau) + \beta^T \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} - \beta_1, \quad (12)$$

where so far $c(\tau)$ is an undefined function that can be zero. Thus

$$\beta_0(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left(c(s) - \lambda^T \sigma^T B(s) - \frac{1}{2} B(s)^T \sigma \sigma^T B(s) \right) ds. \quad (13)$$

As for the drift function $\mu(\beta)$, since the right-hand side (12) is an affine function, the drift function must also be an affine function too. Define it as $\mu(\beta) = K\beta + \xi$ where the matrix K and the vector ξ are do not depend on τ and satisfy to relation (12) or

$$\xi^T B(\tau) - c(\tau) = \beta^T \left(\frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} - K^T B(\tau) \right) - \beta_1. \quad (14)$$

The left-hand side of equality (14) defines a function $c(\tau)$: $c(\tau) = \xi^T B(\tau)$. The right-hand side of equality (14) defines the requirement which the matrix K must satisfy to be fulfilled the no arbitrage condition:

$$\beta^T \left(\frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} - K^T B(\tau) \right) = \beta_1. \quad (15)$$

In the scalar form condition (15) is equivalent to the system of equations

$$\begin{aligned} e^{-\gamma\tau} - k_{11} \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - k_{21} \left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right) - k_{31} \left(\frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta} - \tau e^{-\delta\tau} \right) &= 1, \\ \gamma \tau e^{-\gamma\tau} - k_{12} \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - k_{22} \left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right) - k_{32} \left(\frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta} - \tau e^{-\delta\tau} \right) &= 0, \\ \delta \tau e^{-\delta\tau} - k_{13} \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - k_{23} \left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right) - k_{33} \left(\frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta} - \tau e^{-\delta\tau} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

where $\{k_{ij}\}$ are the elements of matrix K . The first equation is satisfied by $k_{11} = -\gamma$, $k_{21} = k_{31} = 0$. The second equation is satisfied by $k_{12} = \gamma$, $k_{22} = -\gamma$, $k_{32} = 0$. However in order to satisfy the third equality there does not exist any constants $\{k_{13}, k_{23}, k_{33}\}$. Therefore if the volatility matrix σ does not depend on the state variable β , the yield curve $y(\tau, \beta)$ does not satisfy the no arbitrage condition (15). Thus, the yield term structure of the ECB (1) does not ensure the fulfillment of no arbitrage conditions if the volatility matrices $\sigma(\beta)$ do not depend on the current state of the market, i.e. $\sigma(\beta) = \sigma$.

Suppose now that the volatility matrix and the corresponding vector of market risk prices are such that matrix $\sigma(\beta)\sigma^T(\beta)$ and vector $\sigma(\beta)\lambda(\beta)$ are affine functions of the state variable β , i.e.

$$\sigma(\beta)\sigma^T(\beta) = \omega_0 + \sum_i \omega_i \beta_i, \quad \sigma(\beta)\lambda(\beta) = \lambda_0 + \lambda_1 \beta,$$

where $\omega_0, \omega_i, \lambda_1$ are matrices and λ_0 is vector with constant elements. Note that matrices $\{\omega_i\}$ are symmetric. Such models of the dynamics of state variables β are the Duffie–Kan models (with square-root volatility) [7]. Then equation of term structure (9) becomes

$$\frac{\partial(\tau\beta_0(\tau))}{\partial\tau} + \beta^T \frac{\partial B(\tau)}{\partial\tau} + [\lambda_0 + \lambda_1\beta - \mu(\beta)]^T B(\tau) + \frac{1}{2} B(\tau)^T \omega_0 B(\tau) + \frac{1}{2} \sum_i B(\tau)^T \omega_i B(\tau) \beta_i = r. \quad (17)$$

From the form of equation (17) it follows that the drift function $\mu(\beta)$ must be an affine too, $\mu(\beta) = K\beta + \xi$. Then equation (17) can be written as follows

$$\frac{\partial(\tau\beta_0(\tau))}{\partial\tau} + (\lambda_0 - \xi)^T B(\tau) + \frac{1}{2} B(\tau)^T \omega_0 B(\tau) = \beta^T \left((K - \lambda_1)^T B(\tau) - \frac{\partial B(\tau)}{\partial\tau} - \varphi(\tau) \right) + \beta_1. \quad (18)$$

Here for brevity it is denoted $\varphi(\tau)$ is vector with components $\varphi_i(\tau) = 0.5 B(\tau)^T \omega_i B(\tau)$. In equation (18) the left-hand side does not depend on the state variables β , while each term on the right-hand side of the equation depends on these variables. This makes it possible, on the one hand, to determine the function $\beta_0(\tau)$ and, on the other hand, to find the no arbitrage conditions to which must satisfy the set of elements of the matrices $K, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda_1$. For this from equation (18) it is possible to obtain two following equalities

$$\beta_0(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left((\lambda_0 - \xi)^T B(s) - \frac{1}{2} B(s)^T \omega_0 B(s) \right) ds, \quad (19)$$

$$\beta^T \left(\frac{\partial B(\tau)}{\partial\tau} - (K - \lambda_1)^T B(\tau) + \varphi(\tau) \right) = \beta_1. \quad (20)$$

If there exist matrices $K, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda_1$ that satisfy the equality (20) then for the yield curve (1) the no-arbitrage conditions satisfy too. The equality (20) must hold for any set of state variables $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ and any term to maturity $\tau \in (0, \infty)$. Therefore, equating to zero the coefficients for different variables β_i , it is possible to obtain three following equalities

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1(\tau)}{\partial\tau} - B(\tau)^T (K - \lambda_1)_1 + 0.5 B(\tau)^T \omega_1 B(\tau) &= 1, \\ \frac{\partial B_2(\tau)}{\partial\tau} - B(\tau)^T (K - \lambda_1)_2 + 0.5 B(\tau)^T \omega_2 B(\tau) &= 0, \\ \frac{\partial B_3(\tau)}{\partial\tau} - B(\tau)^T (K - \lambda_1)_3 + 0.5 B(\tau)^T \omega_3 B(\tau) &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

where $(K - \lambda_1)_i$ is i -th column of matrix $(K - \lambda_1)$. If at least one of these three equalities is not satisfied, then the yield curve ECB (1) does not ensure the performance of the no arbitrage condition. Let us check the third equality. We substitute into this equality the explicit form of the vectors and matrices entering into it. As a result, the left-hand side of the equality will be a linear combination of thirteen linearly independent functions

$$e^{-\tau\gamma}, e^{-2\tau\gamma}, e^{-\tau\delta}, e^{-2\tau\delta}, \tau e^{-\tau\gamma}, \tau e^{-2\tau\gamma}, \tau e^{-\tau\delta}, \tau e^{-2\tau\delta}, \tau^2 e^{-2\tau\gamma}, \tau^2 e^{-2\tau\delta}, e^{-\tau\gamma-\tau\delta}, \tau e^{-\tau\gamma-\tau\delta}, \tau^2 e^{-\tau\gamma-\tau\delta},$$

and constant. In order for this linear combination to be zero for any term to maturity τ , the coefficients at all linearly independent functions and the constant must be equated to zero. This leads to unrealizable equality (if $\delta > 0$): $\tau \delta \exp[-\tau \delta] = 0$. It means that the ECB term structure of interest rate (1) does not ensure the fulfillment of the no arbitrage condition in this case too.

2. Modification the yield curve

The question arises how to modify the yield curve (1) so that it satisfies the no-arbitrage condition. We add one more term to the expression (3):

$$y(\tau, \beta) = \beta_0(\tau) + \beta_1(t) \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + \beta_2(t) \left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right) + \beta_3(t) \left(\frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} - e^{-\delta\tau} \right) + \beta_4(t) \frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta\tau}, \quad (22)$$

which corresponds to the fact that an additional state variable β_4 is introduced together with the additional function of the term structure corresponding to it $B_4(\tau) = (1-e^{-\delta\tau})/\delta$. Then the state vector β will have four components $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^T$ and the vector of the term structure functions $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), B_3(\tau), B_4(\tau))^T$ will have following components

$$B_1(\tau) = \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma}, \quad B_2(\tau) = \left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right), \quad B_3(\tau) = \left(\frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta} - \tau e^{-\delta\tau} \right), \quad B_4(\tau) = \frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta}. \quad (23)$$

The yield curve $y(\tau, \beta)$ and forward curve $f(\tau, \beta)$ in this case will have representations (8) too

$$y(\tau, \beta) = [\tau \beta_0(\tau) + \beta(t)^T B(\tau)] / \tau, \quad f(\tau, \beta) = [\tau \beta_0(\tau) + \beta(t)^T B(\tau)]'.$$

The term structure equation for yield $y(\tau, \beta)$ will be the same as (9). However, the short-term interest rate r here will be determined differently. Indeed for any time t we have $\lim_{T \rightarrow t} y(T-t, \beta) = r(t)$.

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow t} y(T-t, \beta) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} [\beta_0(\tau) + \beta_1(t) \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + \beta_2(t) \left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right) + \\ &+ \beta_3(t) \left(\frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} - e^{-\delta\tau} \right) + \beta_4(t) \frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta\tau}] = \beta_1(t) + \beta_4(t) = r(t), \end{aligned} \quad (24)$$

as $\beta_0(0) = 0$. Thus the economical meaning of sum component $\beta_1(t)$ and $\beta_4(t)$ of the state vector $\beta(t)$ is short-term interest rate $r(t)$. Further, for volatility matrices $\sigma(\beta)$ that do not depend on the current state β of the market, i.e. $\sigma(\beta) = \sigma$, the equations (10) – (11) will be true in this case too. And for $\mu(\beta) = K\beta + \xi$ equation (15) can be written as follows

$$\beta^T \left(\frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} - K^T B(\tau) \right) = \beta_1 + \beta_4. \quad (25)$$

So system (16) becomes

$$\begin{aligned} e^{-\gamma\tau} - k_{11} \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - k_{21} \left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right) - k_{31} \left(\frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta} - \tau e^{-\delta\tau} \right) - k_{41} \frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta} &= 1, \\ \gamma \tau e^{-\gamma\tau} - k_{12} \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - k_{22} \left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right) - k_{32} \left(\frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta} - \tau e^{-\delta\tau} \right) - k_{42} \frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta} &= 0, \\ \delta \tau e^{-\delta\tau} - k_{13} \frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - k_{23} \left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right) - k_{33} \left(\frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta} - \tau e^{-\delta\tau} \right) - k_{43} \frac{1-e^{-\delta\tau}}{\delta} &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$e^{-\delta\tau} - k_{14} \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - k_{24} \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \tau e^{-\gamma\tau} \right) - k_{34} \left(\frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta} - \tau e^{-\delta\tau} \right) - k_{44} \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta} = 1.$$

This system is satisfied for following matrix K

$$K = \begin{pmatrix} -\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\delta \end{pmatrix}. \quad (27)$$

The variable $\beta_0(\tau)$ is determined by formula (19) where $\omega_0 \equiv \sigma\sigma^T$:

$$\beta_0(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left((\lambda_0 - \xi)^T B(s) - \frac{1}{2} B(s)^T \sigma \sigma^T B(s) \right) ds. \quad (28)$$

This variable determines the long-term yield interest rate for big values τ . In particular

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau, \beta) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \beta_0(\tau) = \frac{\lambda_{01} + \lambda_{02} - \xi_1 - \xi_2}{\gamma} + \frac{\lambda_{03} + \lambda_{04} - \xi_3 - \xi_4}{\delta} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\sigma_{i1} + \sigma_{i2}}{\gamma} + \frac{\sigma_{i3} + \sigma_{i4}}{\delta} \right)^2. \quad (29)$$

Here $\xi_i, \lambda_{0i}, \sigma_{ij}$ are the elements of ξ, λ_0, σ respectively.

Thus, the yield curve (22) ensures fulfillment of the no arbitrage condition unlike the ECB yield curve (1). The verification of the no arbitrage condition by the Duffie – Kan model (with square-root volatility) leads to the fact that matrices $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \lambda_1 = 0$ (the derivation of this here is not presented because of the bulkiness) and the model reduces to the four-factor Vasiček model, which we just considered.

The four-factor Vasiček model free of arbitrage generates a yield curve that completely coincides with the yield curve (22). So the NSS model (plus additional term as in (23)) is a particular case of the affine model, when the dynamics of the state variables $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^T$ are determined by the equation

$$d\beta(t) = K(\beta(t) - \theta)dt + \sigma dW(t), \quad (30)$$

where matrix K is the same as (23), matrix σ has constant elements, and $\theta = -K^{-1}\xi$ is a vector of the stationary mathematical expectations of state variables β . Within the class of affine systems of the term structure of interest rates the price of a zero-coupon bond is presented in the form $P(\tau, \beta) = \exp\{A(\tau) - \beta^T B(\tau)\}$, where function $A(\tau)$ and vector $B(\tau)$ satisfy the initial conditions: $A(0) = 0$ и $B(0) = 0$.

Note that for a bond price in this form, the short-term interest rate (1) takes the form

$$y(0, \beta) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{-\ln P(\tau, \beta)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\beta^T B(\tau) - A(\tau)}{\tau} = \beta^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \beta^T B'(0) - A'(0), \quad (31)$$

and is also an affine function of the vector β . Note that the state of the financial market is usually characterized by the values of interest rates, in other words, the components of the vector β are quantities that have the meaning of interest rates. When interest rates are zero, there is no bond yield, so in (31) we should put $A'(0) = 0$. We denote $B'(0) = \phi$. The vector $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T$ can be regarded as a vector composed of weights that are assigned to one or another component of the state vector β when determining the short-term rate $y(0, \beta(t)) = \beta^T(t)\phi = \beta_1(t)\phi_1 + \beta_2(t)\phi_2 + \beta_3(t)\phi_3 + \beta_4(t)\phi_4 = r(t)$. In our case $\beta_1(t) + \beta_4(t) = r(t)$ according to (24), i.e. $\phi_1 = 1, \phi_2 = 0, \phi_3 = 0, \phi_4 = 1$. Substituting such bond price in equation (5), one can obtain a system of differential equations for the functions of the term structure $A(\tau)$ and $B(\tau)$ in the form

$$A'(\tau) = (\sigma\lambda - K\theta)^T B(\tau) + B(\tau)^T \sigma \sigma^T B(\tau)/2, \quad A(0) = 0, \quad (32)$$

$$B'(\tau) = \phi + K^T B(\tau), \quad B(0) = 0. \quad (33)$$

Here λ is a constant vector of market prices of risk. Solution of equation (33) is the following

$$B_1(\tau) = \phi_1 \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma}, \quad B_2(\tau) = \phi_1 \frac{1 - e^{-\gamma\tau} - \gamma\tau e^{-\gamma\tau}}{\gamma} + \phi_2 \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma},$$

$$B_3(\tau) = \phi_3 \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta} + \phi_4 \frac{1 - e^{-\delta\tau} - \delta\tau e^{-\delta\tau}}{\delta}, \quad B_4(\tau) = \phi_4 \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta}.$$

If we take into account that $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = 0$, $\phi_3 = 0$, $\phi_4 = 1$ then the obtained functions of the term structure have no differences from the functions (23). The function $A(\tau)$ is equivalent to function $\tau\beta_0(\tau)$ as it follows from equations (19) and (32) because from definition $\sigma\lambda + K\theta = \lambda_0 - \xi$, ($\sigma\lambda = \lambda_0$, $\xi = -K\theta$).

So far we have considered the yield curve. As for the forward curve, it is linked in a one-to-one manner with the yield curve by the relations

$$y(\tau, \beta) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(s, \beta) ds, \quad f(\tau, \beta) = y(\tau, \beta) + \tau \frac{\partial y(\tau, \beta)}{\partial \tau}$$

or

$$f(\tau, \beta) = (\tau\beta_0(\tau))' + \beta_1(t) \exp(-\gamma\tau) + \beta_2(t) \gamma\tau \exp(-\gamma\tau) + \beta_3(t) \delta\tau \exp(-\delta\tau) + \beta_4(t) \exp(-\delta\tau), \quad (34)$$

which leads to the fact that function (34) also differs from (4) only by one additional term.

Since the result is an affine model of the time structure with a constant volatility matrix, the state variables are a four-dimensional stochastic process with a Gaussian distribution. We note that a detailed analysis of the properties of the Nelson–Siegel–Svensson model and its connection with affine Gaussian models is presented in [8] and [9].

Before proceeding to the conclusions, we cite an extensive quotation from [4. P. 89] which relates to the subject under consideration:

“The Filipović [10] critique of NS (Nelson–Siegel), namely that it would not be arbitrage-free if dynamized, also applies to the four-factor DNSS (Dynamic Nelson–Siegel–Svensson) model just introduced. One would hope that, in parallel to AFNS (ArbitrageFree Nelson–Siegel) and DNS (Dynamic Nelson–Siegel), one could derive an arbitrage-free approximation to DNSS. However, as the mechanics of Proposition AFNS of Chapter 3 make clear, an arbitrage-free Gaussian version of DNSS cannot exist, because it would require that each curvature factor be paired with a slope factor with the same rate of mean reversion, which is impossible with the single slope factor present in DNSS. (It is technically possible, however, to create an arbitrage-free version of DNSS if one leaves the Gaussian class, as in the model of Sharef and Filipovic [11], which has Cox et al. [12] square-root volatility.) Hence in the next subsection we add a second slope factor to match Svensson’s second curvature factor, and we ask whether risk-neutral restrictions can be found that make the five-factor model arbitrage-free.”

The results described above do not fully coincide with the statements contained in this quote.

Conclusion

The following conclusions can be drawn from the text of the paper:

- The yield curve of the ECB (1) does not satisfy the no arbitrage conditions.
- To construct a no arbitrage yield curve, we need to add one more term in the same way as in the formula (22).
- As the state variables, it is necessary to choose factors $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$, which form a four-dimensional diffusion Gaussian process (30).
- The factor $\beta_0(\tau)$ is determined from the no arbitrage condition (28).
- Application of no arbitrage conditions to the Duffie–Kan model (with a square-root volatility), into which the Vasiček and Cox–Ingersoll–Ross models are being embedded, gives preference to the four-factor Vasiček model.

REFERENCES

1. Bank for International Settlements. (2005) Zero-Coupon Yield Curves: Technical Documentation. *BIS papers*. 25. pp. 1–55.
2. European Central Bank (2017) *Euro area yield curves*. [Online] Available from: <https://www.ecb.europa.eu/stats/money/yc/html/index.en.html>.

3. European Central Bank. (n.d.) *General description of ECB yield curve methodology*. https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/technical_notes.pdf?update=20160513
4. Diebold, F.X. & Rudebusch, G.D. (2013) *Yield curve modeling and forecasting: the dynamic Nelson-Siegel approach*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
5. Diebold, F.X. & Li, C. (2006) Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields. *Journal of Econometrics*. 130. pp. 337–364. DOI: 10.1016/j.jeconom.2005.03.005
6. Vasiček, O.A. (1977) An Equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*. 5. pp. 177–188. DOI: 10.1016/0304-405X(77)90016-2
7. Duffie, D. & Kan, R. (1996) A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*. 6. pp. 379–406. DOI: 10.1111/j.1467-9965.1996.tb00123.x
8. Medvedev, G.A. (2015) On the Nelson-Siegel-Svensson no-arbitrage yield curve models. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 44–55. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/32/5
9. Medvedev, G.A. (2015) The Nelson-Siegel-Svensson yields. Probability properties and estimation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(33). pp. 38–45. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/33/5
10. Filipovic, D. (1999) A Note on the Nelson-Siegel Family. *Mathematical Finance*. 9. pp. 349–359. DOI: 10.1111/1467-9965.00073
11. Sharif, E. & Filipovic, D. (2004) Conditions for Consistent Exponential-Polynomial Forward Rate Processes with Multiple Nontrivial Factors. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 7. pp. 685–700. DOI: 10.1142/S0219024904002608
12. Cox, J.C., Ingersoll, J.E. & Ross, S.A. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*. 53. pp. 385–407.

Medvedev Gennady Alexeevich, Dr. Sc., Professor. E-mail: MedvedevGA@bsu.by
 Belarusian State University, Belarus.

Поступила в редакцию 23 июня 2017 г.

Медведев Геннадий Алексеевич (Белорусский государственный университет, Беларусь).

О кривых доходности Европейского центрального банка.

Ключевые слова: кривые доходности; форвардные кривые; модель Нельсона–Зигеля–Свенссона; условия отсутствия арбитража.

DOI: 10.17223/19988605/41/5

Показано, что кривые доходности Европейского центрального банка не удовлетворяют условиям отсутствия арбитража. Чтобы сконструировать безарбитражную кривую доходности, необходимо добавить еще одно слагаемое к существующему выражению кривой доходности. Что касается переменных состояния, необходимо использовать четырехмерный гауссовский диффузионный процесс. Пятый фактор определяется из условий отсутствия арбитража. Предлагаемая версия модификации кривой доходности отличается от похожих модификаций, ранее предложенных в литературе, для гарантирования отсутствия арбитражных возможностей. Применение условий отсутствия арбитража к модели Даффи–Кана (с волатильностью с квадратным корнем), в которую вложены модели Васичека и Кокса–Ингерсолла–Росса, отдает предпочтение четырехфакторной модели Васичека.

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.652.8

DOI: 10.17223/19988605/41/6

А.М. Бабанов, А.В. Петров**РЕАЛИЗАЦИЯ РЕПОЗИТОРИЯ ERM-МОДЕЛИ В CASE-СИСТЕМЕ ORACLE DESIGNER**

Описаны основные принципы и архитектурные особенности реализации прототипа CASE-репозитория, созданного для апробации постулатов и идей ERM-модели. В ходе анализа базовых средств в качестве платформы для создания репозитория ERM-схем была взята CASE-система Oracle Designer. Этот выбор позволил в сжатые сроки разработать исследовательский прототип репозитория, позволяющий развернуть тестирование и отладку реальной работы многих других подсистем исследовательского CASE-инструмента для ERM-модели.

Ключевые слова: ERM-модель; репозиторий; CASE; Oracle Designer.

Развитию инструментальных средств, методов и методик разработки информационных систем (ИС) всегда уделялось и уделяется большое внимание. В конце прошлого столетия появились и активно использовались преимущественно при создании систем баз данных (БД) так называемые CASE-системы (CASE – Computer Aided System Engineering) – программные инструменты автоматизации процесса разработки ИС. Методы системного анализа и проектирования, использующиеся в таких инструментах, требуют высокой математической и мировоззренческой культуры, а также определенных самодисциплины и пунктуальности. Это обстоятельство, наряду с большой стоимостью таких средств, привело к тому, что широкого распространения они не получили. Что касается системных методов анализа и проектирования, то их упрощенные варианты с успехом используются при «ручной» разработке.

Однако исследователи методов анализа и проектирования не прекратили своих усилий в решении задачи автоматизировать труд разработчиков ИС [1–4]. Они идут по пути увеличения отдачи CASE-систем в плане повышения степени автоматизации, производительности труда, а также качества результата [1, 5]. Для достижения поставленных перед этими исследованиями целей необходимо совершенствовать используемые модели анализа и проектирования, а также инструменты межмодельного преобразования и окончательной генерации исполняемых артефактов. Тестирование и отладка вновь предлагаемых средств невозможны без создания исследовательского прототипа будущей CASE-системы, что само по себе представляет достаточно сложную задачу. Настоящая статья посвящена разработке ядра такой системы – репозитория. Отличительной особенностью статьи является ориентация на использование для информационного моделирования семантической модели данных «Сущность – Связь – Отображение» [2].

1. Назначение репозитория в CASE-системах и требования к разрабатываемому репозиторию

Webster's Dictionary определяет термин «репозиторий» как «предмет или человек, воспринимаемый в качестве центра аккумуляции информации или хранилища» [6. С. 181]. «Еще в недавней истории разработки программного обеспечения (ПО) роль репозитория мог играть лишь человек – программист, который должен был помнить расположение всей информации, относящейся к проекту разработки ПО, знать еще нигде не записанную информацию и восстанавливать потерянную информацию. Использование человека в качестве “центра аккумуляции информации и хранилища” не давало хороших результатов. Сегодня репозиторий является предметом – базой данных, которая служит и центром аккумуляции информации, и хранилищем информации о разработке ПО. Ролью человека (разработчика ПО) теперь

является взаимодействие с репозиторием посредством CASE-средства, интегрированного с этим репозиторием» [6. С. 182].

Репозиторий CASE-системы – это множество инструментов и структур данных, с помощью которых достигают интеграции данных и диалоговых средств, а также данных различных инструментов между собой. Он обеспечивает очевидные функции БД, но дополнительно репозиторий выполняет или способствует выполнению следующих функций [6]:

- 1) поддержка целостности данных, которая в случае репозитория представляет собой обеспечение непротиворечивости схем ИС;
- 2) распределение информации между несколькими разработчиками, специализирующимися на создании различных артефактов проекта;
- 3) взаимодействие данных репозитория и диалоговых инструментов;
- 4) взаимодействие данных репозитория, созданных в различных инструментах;
- 5) поддержка определенной методики анализа и проектирования;
- 6) стандартизация документации (графической и текстовой);
- 7) хранение и управление данными сложной структуры в условиях нормализованной схемы БД;
- 8) обеспечение высокоуровневого (большей частью – графического) интерфейса с пользователями;
- 9) управление процессом разработки;
- 10) трассировка требований на объекты репозитория;
- 11) поддержка версии данных репозитория;
- 12) поиск зависимостей в данных и управление изменениями;
- 13) аудит изменений.

Конечно, исследовательский прототип репозитория не обязан обеспечивать выполнение всех указанных функций, большая часть которых связана с поддержкой непосредственной работы по проектам. Однако если многие из этих функций будут реализованы в базовых инструментах разработки, это будет полезно.

Наряду с указанными функциональными требованиями у исследовательского прототипа репозитория есть ряд важных нефункциональных требований:

- система должна иметь программный интерфейс, позволяющий работать со схемами ИС посредством внешних приложений. Таковыми будут являться графический редактор ERM-схем, генератор реляционных схем и другие инструменты, которые в последующем будут реализованы;
- система должна иметь универсальный пользовательский интерфейс, предоставляющий диалоговый доступ ко всем объектам репозитория. Информацию о текущем состоянии репозитория, объектах, ассоциациях, свойствах хранимых элементов зачастую удобнее получать посредством некоторого встроенного диалогового инструмента;
- поскольку ERM-модель (для поддержки которой в первую очередь создается репозиторий) активно развивается, ее метасхема будет часто изменяться. Следовательно, архитектура прототипа должна быть гибкой и предоставлять возможность повторного использования ранее разработанных компонентов.

2. Варианты создания ERM-репозитория

Поскольку разрабатываемая система ориентирована на хранение и предоставление доступа к аналитической и проектной информации, а также должна осуществлять взаимодействие многочисленных разработчиков и других приложений, можно выделить два альтернативных способа ее реализации. Первый способ заключается в создании собственного репозитория «с нуля» на основе долговременного хранилища данных. В качестве хранилища данных может выступать, например, реляционная СУБД. Второй способ заключается в расширении какого-либо уже имеющегося CASE-средства.

В первом случае предстоит решать все задачи репозитория, кроме управления данными. Да и последнее придется осуществлять не в терминах метамодели репозитория, и уж тем более не в терминах ERM-модели, а с использованием понятий, структур и языков, поддерживаемых базовой (как правило, реляционной) СУБД. Пожалуй, единственным неоспоримым преимуществом этого способа является

потенциальная возможность создания максимально эффективного (по расходам памяти и скорости реакции) репозитория.

Второй подход предполагает наличие некоторого готового репозитория, в схеме которого уже, как правило, реализованы метасхемы ER-модели и реляционной модели. Последняя необходима в любом CASE-репозитории, поскольку именно реляционная модель поддерживается большинством СУБД и поэтому является целевой для исполняемой схемы БД. Кроме того, в этом репозитории уже могут быть решены многие (если не все) универсальные задачи, упомянутые ранее и стоящие перед любым репозиторием, какую бы семантическую модель данных он ни поддерживал.

Второй вариант является более предпочтительным для исследовательского прототипа, поскольку многие функции, необходимые репозиторию, уже имеются в базовом инструменте, остается только реализовать в нем поддержку дополнительной метасхемы ERM-модели. Действительно, если существует такой инструмент, который при небольших доработках удовлетворит поставленным ранее требованиям, процесс разработки будет значительно сокращен. А проигрыш в эффективности, неизбежно сопутствующий такому решению, не играет существенной роли для исследовательского прототипа.

3. Описание репозитория Oracle Designer

В качестве базовой платформы для создания репозитория ERM-схем была взята CASE-система Oracle Designer (OD) [7]. Центральной частью этой системы является репозиторий, содержащий спецификации проекта на всех его этапах и обеспечивающий согласованную работу всех его участников, какие бы роли они ни играли в проекте. Для доступа к репозиторию и управления им кроме специализированных диалоговых инструментов имеется универсальное средство – навигатор по объектам репозитория (Repository Object Navigator – RON), позволяющий просматривать и модифицировать практически все объекты, хранящиеся в репозитории [7].

Основным достоинством данного CASE-инструмента в контексте решаемой задачи является возможность изменения структуры его репозитория, причем для этого не требуется писать какой-либо плагин – механизм предоставляется в готовом виде и работает в диалоговом режиме. Результатом его работы являются пользовательские расширения (user extensions) – дополнительные свойства или типы, которые добавляются в существующий репозиторий [Там же].

Репозиторий OD, как и любой другой репозиторий, имеет свое метаописание (или метасхему) – совокупность описаний типов, их свойств, а также связей между объектами этих типов [8]. Все структуры данных, находящихся в репозитории, можно разделить на три основных типа (метатипа), составляющих метамодель OD.

1. Элементные типы (англ. element types) – типы возможных объектов, которые могут содержаться в репозитории. Стандартными элементными типами OD являются функции, модули, сущности, таблицы, колонки и пр. Каждый элементный тип состоит из набора свойств – дискретных характеристик данного типа.

2. Ассоциативные типы (англ. association types) – типы возможных бинарных отношений между объектами тех или иных элементных типов. Стандартными ассоциативными типами OD являются использование сущностей в функциях, использование модулей организационными единицами и пр. Так же как и элементные типы, они состоят из набора определенных свойств.

3. Текстовые типы (англ. text types) – структуры данных для больших текстовых свойств элементного или ассоциативного типа. Стандартными текстовыми типами OD являются такие типы как описание, примечание и др. В диалоге текстовый тип представляет собой одну область, содержащую несколько строк с текстом. Текстовые типы отображаются в RON как свойства элементов и ассоциаций, но концептуально это отдельные типы [7].

Еще одним плюсом CASE-системы Oracle Designer является то, что при создании пользовательских расширений автоматически генерируется механизм доступа к их экземплярам. В данной CASE-системе эти механизмы носят название API. OD API – это набор представлений базы данных и пакетов языка программирования PL/SQL в схеме владельца репозитория, которые обеспечивают возможность безопасного доступа к данным репозитория. Тот факт, что OD API доступен для внесения изменений, в

последующем позволит внедрить на уровне этого интерфейса механизм проверки ERM-схем на непротиворечивость. Стоит отметить, что пакеты API – это единственный способ записи информации в репозиторий, и все инструментальные средства используют их независимо от того, входят эти средства в состав OD или нет [7].

4. Реализация ERM-репозитория как расширения OD-репозитория

Прежде чем определять в метасхеме OD-репозитория ERM-метасхему, решено было сначала реализовать ее в виде реляционной БД и проверить работоспособность полученных структур на реальных примерах ERM-схем и типичных транзакциях их изменения. Проектирование и реализация этой тестовой БД осуществлялись в соответствии с методикой разработки, реализованной в OD, – создание ER-схемы в нотации Баркера (рис. 1), автоматическая трансформация ее в реляционную схему, генерация и выполнение команд языка определения данных SQL. При этом в ходе реализации учитывались особенности механизма пользовательских расширений, в частности поддержка ассоциативных типов, имеющих атрибуты (аналоги в ER-модели Баркера – множества связей, атрибутов не имеют). В процессе построения ER-диаграммы такие структуры преобразовывались во множества сущностей.

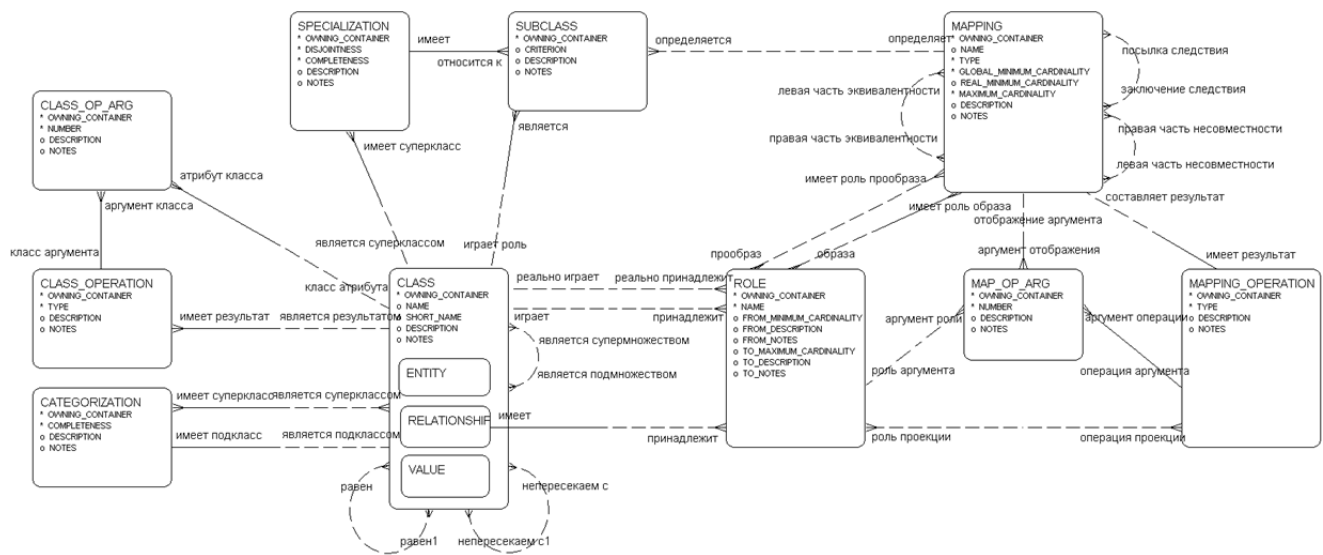


Рис. 1. ERM-метасхема в нотации Баркера

Полученные в ходе тестовой реализации отношения были преобразованы в наборы элементарных и ассоциативных типов и успешно добавлены в метасхему репозитория с помощью утилиты Maintain User Extensions инструмента Repository Administration Utility [7]. Вновь созданные типы репозитория сразу же стали доступны в диалоге RON (рис. 2), что позволило заносить в репозиторий отладочные ERM-схемы. Автоматически сгенерированный API позволил сделать это в пакетном режиме массовой загрузки.

Как было отмечено ранее, при определении пользовательских расширений автоматически создаются API доступа к объектам этих типов. Одно из требований, предъявляемых к разрабатываемой системе, заключается в том, что должна быть обеспечена возможность работы с репозиторием ряда других, внешних приложений. Теоретически эти приложения могут работать и посредством стандартного генерируемого OD API, однако есть ряд недостатков, возникающих при этом подходе.

Первый недостаток заключается в том, что стандартный OD API имеет достаточно сложную структуру. Перед совершением непосредственно операции над объектом необходимо выполнить ряд вспомогательных действий, таких как указание текущего контекста, инициализация сессии, проверка транзакции и обработка ошибок. Все эти действия должны будут производиться внешним приложением. К тому же представления, через которые читаются данные об объектах, имеют достаточно сложные и запутанные связи с описаниями прикладных систем, в рамках которых они созданы. Все эти обстоятельства существенно усложняют процесс разработки нового или интеграции уже существующего стороннего приложения. Длительность разработки такого приложения также будет увеличена.

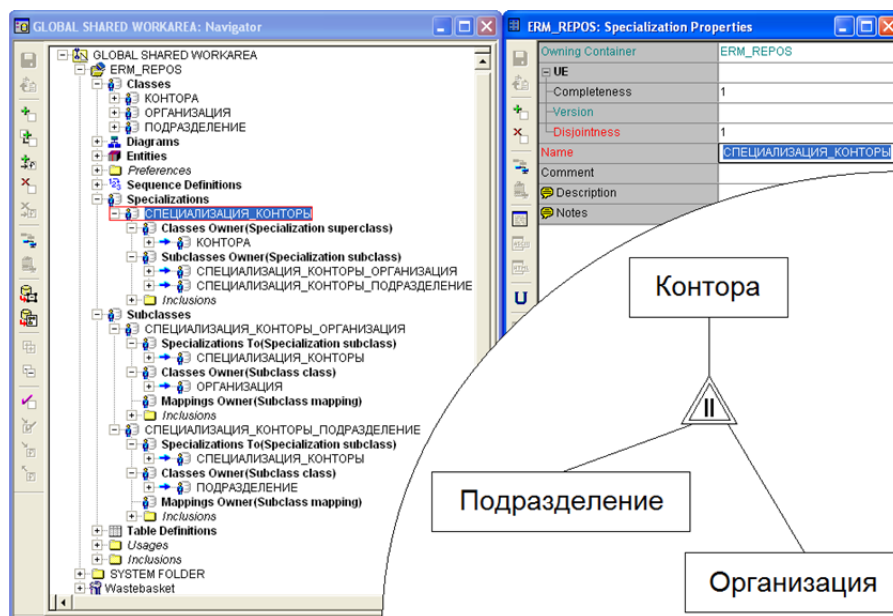


Рис. 2. Диалог RON по созданию показанного фрагмента ERM-схемы

Второй недостаток заключается в том, что логика работы с некоторыми сложными структурными сущностями ERM-модели выходит далеко за рамки простого добавления, изменения или удаления какого-либо объекта репозитория. Например, ассоциация множества сущностей с множеством связей с точки зрения графической нотации ERM-модели сопровождается соединением одним ребром соответствующих вершин графа. Однако в репозитории для каждого множества сущностей будут дополнительно созданы объект элементного типа «роль», который будет хранить соответствующие минимальные и максимальные кардинальные числа, и два объекта ассоциативных типов. Если внешнее приложение будет использовать генерируемое API, ответственность за создание и своевременное удаление всех этих объектов ляжет именно на него. Таким образом, логика работы со структурными объектами ERM-модели будет существенно усложнена и к тому же разбита по нескольким архитектурным слоям.

Третий недостаток заключается в том, что в условиях, когда логика зависимостей между структурными элементами ERM-модели распределена по разным слоям системы, существенно усложняется возможность внесения в эту логику каких-либо коррективов. При изменении семантики некоторого структурного элемента ERM-модели (а такое не исключается в условиях эволюции модели) соответствующим изменениям подвергнется его обработка как на уровне репозитория, так и на уровне всех внешних приложений, его использующих, что усложнит процесс поддержки системы.

Учитывая вышесказанное, было принято решение обособить логику работы со структурными сущностями ERM-модели в отдельный пакет процедур и функций (ERM_API), осуществляющих добавление, изменение, удаление и выборку объектов этой модели. Механизм доступа инкапсулирует в себе обращение к репозиторию через OD API. Каждый вызов той или иной процедуры или функции механизма порождает один или более вызовов сгенерированного OD API, предварительную подготовку к ним, а также последующую обработку и возврат результатов (рис. 3).

Как уже было сказано, механизм доступа представляет собой пакет процедур и функций. Для каждого типа структурных сущностей ERM-модели есть четыре обязательные операции – добавление, изменение, удаление и выборка данных. Для некоторых типов структурных объектов созданы операции, предоставляющие доступ к дополнительной информации, связанной с объектом (например, для операции над классами – список классов-операндов и др.). Также в пакете присутствует ряд процедур, локализующих обращение к сгенерированному OD API.

Одной из ключевых в рамках работ по созданию репозитория является задача реализации механизма проверки ERM-схем на непротиворечивость. Необходимо, чтобы в любой момент времени аналитические и проектные данные, хранимые в репозитории, были целостными и непротиворечивыми.

Важным вопросом является расположение механизма проверки в системе. Для обеспечения целостности хранимой в репозитории информации проверка должна производиться при работе с любыми инструментами, осуществляющими изменения хранимых в репозитории данных. Работа внешних ERM-приложений осуществляется путем обращения к функциям созданного механизма доступа ERM_API, а вот инструмент RON обращается непосредственно к OD API. Напомним, что именно этот компонент OD применяется для диалоговой работы с ERM-репозиторием. Следовательно, расположение механизма проверки схем на непротиворечивость должно быть не выше уровня OD API.

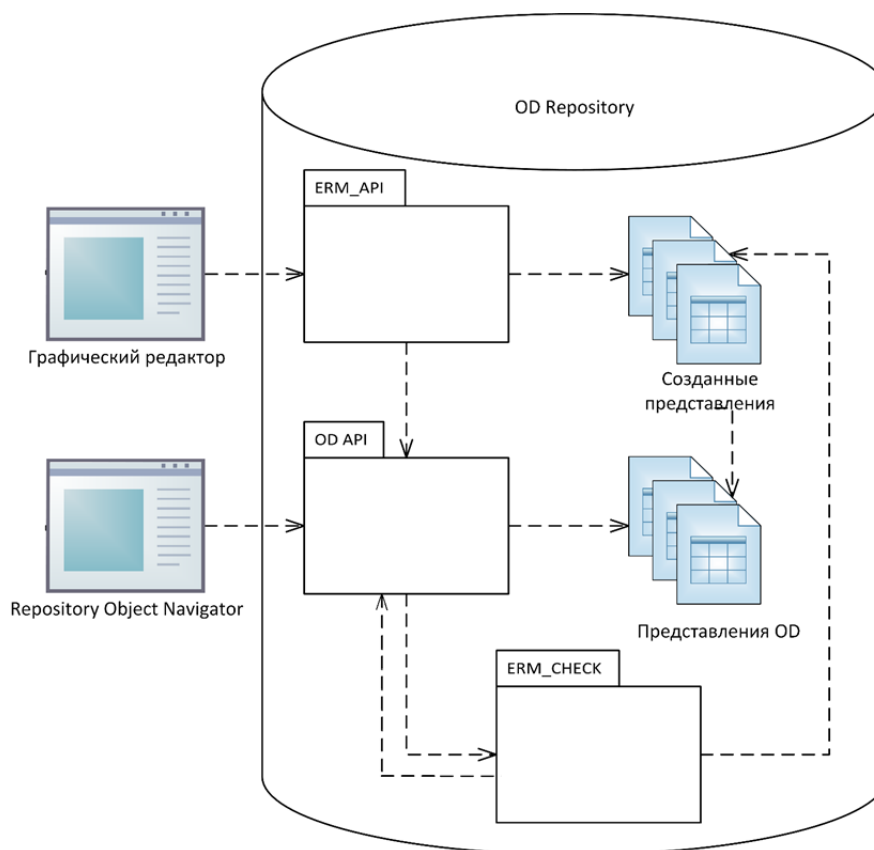


Рис. 3. Архитектура ERM-репозитория

Вышеуказанные обстоятельства заставили реализовать пакет функций проверок ERM-схем на непротиворечивость (ERM_CHECK) как расширение пакета OD API. Доступность исходного кода последнего позволила добавить в него обращения к функциям верификации схем репозитория. Таким образом, механизм проведет проверку изменений, совершенных как во внешнем инструменте, использующем OD API, так и в стандартных инструментах OD, таких как RON.

Подробнее о решении проблемы непротиворечивости схем данных в ERM-репозитории речь пойдет в последующих статьях авторов.

Заключение

В статье описаны принципы, архитектура и реализация прототипа ERM-репозитория. Его создание позволило развернуть тестирование и отладку реальной работы многих других подсистем исследовательского CASE-инструмента для ERM-модели, который должен стать практическим доказательством актуальности и работоспособности последней. Важнейшими из них являются графический редактор ERM-схем, реализующий методику ERM-моделирования, и максимально эффективный транслятор ERM-схем в реляционную модель, генерирующий помимо команд CREATE TABLE команды создания представлений и триггеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Halpin T., Morgan T. Information Modeling and Relational Databases, Second Edition. Morgan Kaufman, 2008.
2. Бабанов А.М. Семантическая модель «Сущность – Связь – Отображение» // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2007. № 1. С. 77–91.
3. Agarwal B., Tayal S., Gupta M. Software Engineering and Testing. Jones & Bartlett Learning, 2010.
4. Hamid B. A model-driven approach for developing a model repository: Methodology and tool support // Future Generation Computer Systems. 2017. № 68. P. 453–490.
5. Бабанов А.М. Перспективы проектирования БД, открывающиеся с применением современных семантических моделей данных // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 2. С. 73–80.
6. Welke R. The case repository: more than another database application // Challenges and strategies for research in systems development. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1992. P. 181–218.
7. Колетски П., Дорси П. Oracle Designer. Настольная книга пользователя. М. : Лори, 1999.
8. Welke R. The case repository: more than another database application. Meta Systems, Ltd., 1988.

Бабанов Алексей Михайлович, канд. техн. наук, доцент. E-mail: babanov2000@mail.ru

Петров Александр Викторович. E-mail: flamingcode@mail.ru

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 20 апреля 2017 г.

Babanov Alexey M., Petrov Alexander V. (National Research Tomsk State University, Russian Federation).

Implementation of the ERM-model repository in CASE-system Oracle Designer.

Keywords: ERM-model; repository; CASE-system; Oracle Designer.

DOI: 10.17223/19988605/41/6

Recently researchers of the automated means for information system development pursue the goal to increase of automation degree, developer labor productivity, and also quality of the result received by means of CASE-systems. For achievement of these purposes it is necessary to improve analysis and design models, tools of intermodel transformation and final generation of executed artifacts. Testing and debugging of the newly proposed means are inconceivable without creation of a research prototype of the future CASE-system. This article is devoted to development of a kernel of such system - a repository. Distinctive feature of this development is orientation to use the semantic data model «Entity - Relationship - Mapping» (ERM-model) for information modeling.

Along with the traditional functional requirements demanded for automated development tools, the research prototype of a repository has a number of important nonfunctional requirements:

- the system should have the program interface allowing to work with schemes by means of external applications, such as the graphic editor of ERM-schemes, generator of relational schemes and other tools which will be realized in the future;
- the system should have the user interface giving dialogue access to objects of a repository;
- as the ERM-model actively develops, its metascheme will be frequently changed, hence, the architecture of a prototype should be flexible and give possibility to reuse of earlier developed components.

It is possible to distinguish two alternative ways of the ERM-repository realization. The first way consists in creation of own repository «from scratch» based on of permanent data store. Relational DBMS can acts as data store, for example. The second way consists in expansion of any already available CASE-mean. During the analysis of base means CASE-system Oracle Designer (OD) is taken as a platform for creation of the ERM-scheme repository.

The central part of this system is the repository containing project specifications at all its stages and providing coordinated work of all its participants, whatever roles they played in the project. For access to the repository and management of it Repository Object Navigator is available as well as specialized dialogue tools. It is a universal instrument, allowing looking through and modifying almost all objects stored in a repository.

Before defining the ERM-metascheme in the metascheme of an OD-repository, it has been decided to realize this metascheme in the form of a relational database at first, to check up working capacity of the received structures on real examples of the ERM-schemes and typical transactions of their change. The relations received during test realization have been transformed to sets of element and association types and successfully added in the metascheme of a repository by means of Maintain User Extensions utility of Repository Administration Utility tool.

During repository designing the decision to isolate logic of work with structural ERM-model entities in a separate package (ERM_API) was accepted. Its procedures and functions carry out adding, modifying, deleting and retrieving objects of this model. The access mechanism encapsulates calls to a repository through standard OD API. Each call of any procedure or function generates one or more calls of OD API, preliminary preparation for them, and the subsequent processing and return of results.

The problem of realization of the ERM-scheme checks on consistency is one of key on repository creation. It is important, that at any moment the analytical and design data, stored in the repository, were complete and consistent. For maintenance of check inevitability at any changes it has been decided to realize a package of the ERM-scheme check functions (ERM_CHECK) as expansion of package OD API, in appropriate way having changed the last.

Timely creation of the ERM-repository has allowed developing, testing and debugging of many other subsystems of the research CASE tool for ERM-model which should become the practical proof of an urgency and working capacity of the last. Major of these subsystems are the graphic editor of ERM-schemes realizing a technique of ERM-modeling, and as much as possible effective compiler of ERM-schemes in the relational model, generating besides CREATE TABLE commands of view and trigger creation.

REFERENCES

1. Halpin, T. & Morgan, T. (2008) *Information Modeling and Relational Databases*. 2nd ed. Morgan Kaufman.
2. Babanov, A. M. (2007) Semanticheskaya model' "Sushchnost' – Svyaz' – Otobrazhenie" [Semantic model 'Entity – Relationship – Mapping']. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(1). pp. 77–91.
3. Agarwal, B., Tayal, S. & Gupta, M. (2010) *Software Engineering and Testing*. Jones & Bartlett Learning.
4. Hamid, B. (2017) A model-driven approach for developing a model repository: Methodology and tool support. *Future Generation Computer Systems*. 68. pp. 453–490. DOI: 10.1016/j.future.2016.04.018
5. Babanov, A. M. (2015) Database design prospects opening with application of modern semantic data models. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2. pp. 73–80. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/31/8
6. Welke, R. (1992) The case repository: more than another database application. In: Cotterman, W.W. & Senn, J.A. (eds) *Challenges and strategies for research in systems development*. New York: John Wiley & Sons. pp. 181–218.
7. Koletzke, P. & Dorsey, P. (1999) *Oracle Designer. Nastol'naya kniga pol'zovatelya* [Oracle Designer. Handbook]. Moscow: Lory.
8. Welke, R. (1988) *The case repository: more than another database application*. Meta Systems, Ltd.

УДК 004.75

DOI: 10.17223/19988605/41/7

М.К. Павликов**МЕТОД АВТОРИЗАЦИИ КЛИЕНТСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ В ГЕТЕРОГЕННОЙ
РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЕ, ПОСТРОЕННОЙ
НА ОСНОВЕ ПРОТОКОЛА HDP**

Предложен метод авторизации приложений в распределенной программной системе, построенной на основе протокола HDP. Данный метод позволил получить централизованное управление авторизацией для программной системы, построенной из микросервисов. Использование метода позволило повысить безопасность защищенных данных, приобрести толерантность системы к изменению механизма авторизации и снизить временные затраты на разработку микросервисов. Даны описание метода и его сравнение с другими подходами к авторизации клиентских приложений в распределенной программной системе.

Ключевые слова: HDP; распределенная программная система; авторизация в программной системе; OAuth.

Авторизация – это предоставление прав на выполнение определенной операции и проверка таких прав при выполнении операции. В программных системах авторизация необходима для доступа к защищенной информации или методам получения, агрегации защищенной информации. В случае монолитного приложения трудностей в реализации авторизации обычно не возникает, так как существует достаточно много готовых решений данной задачи. В различных языках программирования и фреймворках накопилось достаточно много библиотек, которые расширяют языковые возможности по авторизации клиента.

В случае с высоконагруженными проектами, часто построенными по микросервисной архитектуре, одно приложение разносится по многочисленным узлам программной системы, причем процедуру авторизации необходимо получать к большинству таких сервисов. Реализация стандартных решений по авторизации приводит к катастрофическому дублированию кода, реализующего однотипную логику. В случае потребности внесения изменений в данную логику этот процесс невозможно реализовать мгновенно, так как в один момент времени обновить все микросервисы без выключения системы из эксплуатации невозможно. Также возникают вопросы отзыва прав у пользователя, которые должны вступить в силу на всех микросервисах в данной системе, и возникают проблемы назначения определенному пользователю прав на несколько операций, которые выполняют различные микросервисы.

1. Протокол авторизации OAuth и особенности его применения

На сегодняшний день самый популярный протокол авторизации между двумя приложениями – это OAuth. Данный протокол позволяет приложению получить авторизацию у микросервиса, используя HTTP запросы. Основное преимущество подхода состоит в том, что клиент не передает доверенному приложению логин и пароль от своего аккаунта, а лишь назначает определенные права, которые отражаются в получаемом токене.

Как видно из рис. 1, OAuth использует взаимодействие через браузер пользователя и прямое взаимодействие между программными системами, чтобы выполнить полный процесс авторизации. Это приводит к тому, что необходимый для авторизации токен должен быть получен вручную, в протоколе не заложено возможности авторизации получения с целью обеспечения безопасности пользователя, так как последний должен подтвердить свое намерение передать определенные права определенному приложению. Это допустимо, когда пользователь хочет предоставить права своему доверенному приложению, но использование OAuth становится невозможным для автоматизации взаимодействия двух или

более приложений. Ко всему прочему, для взаимодействия по протоколу OAuth требуется наличие постоянно запущенного сервера авторизации на некоем узле программной системы.



Рис. 1. Принцип взаимодействия приложений при авторизации с помощью протокола OAuth

Стоит упомянуть про механизм аутентификации OpenID, который, в свою очередь, является отдельным протоколом, не связанным с OAuth, тем не менее в случае с OpenID пользователь удостоверяет приложение, что выдает себя за того, кем и является, но данный протокол не позволяет назначать определенные права и контролировать их. Помимо отсутствия автоматизированной авторизации из недостатков OAuth стоит отметить то, что безопасность OAuth основана на SSL, а это серьезно повышает требования к ресурсам и порой становится препятствием к использованию протокола в высоконагруженных системах. Несмотря на то, что OAuth 2.0 был принят в 2006 г., в спецификацию еще вносятся изменения, поэтому невозможно быть уверенным, что в будущем не произойдет изменений без поддержки обратной совместимости.

2. Метод авторизации клиентских приложений в HDP

HDP (Heterogenous Data Protocol) представляет собой протокол для обмена гетерогенными данными в распределенной программной среде. HDP использует жестко структурированные данные в формате JSON со специальными служебными метками согласно спецификации протокола.

Узел в распределенной системе, который желает предоставить доступ остальным узлам по HDP, обязан сформировать файл HDP-сервиса, в котором будут перечислены доступные клиентам функции с указанием входных параметров и выходной схемы данных. По каждому входному параметру допустимо указывать значения по умолчанию, правила проверки данных этого параметра и др.

Протокол позволяет гетерогенным программным системам осуществить обмен данными с гарантией целостности данных, возможностью их проверки, построения распределенной сервисной архитек-

туры на стороне провайдера данных. Протокол имеет собственную спецификацию, поэтому обмен данными между различными приложениями не вызывает противоречий. Допускается произвольное количество форматов сериализации данных, предлагая JSON как основной. Но независимо от протокола и его спецификации провайдер данных может выбрать желаемый формат сериализации данных, в котором он будет получать данные от клиентов.

Метод авторизации клиентских приложений в распределенной программной системе, построенной на основе протокола HDP, представляет собой заложенную в ядро протокола возможность хранения и проверки токена: уникальная строка, идентифицирующая заданный набор доступных ролей. Согласно спецификации протокола HDP вся функциональность провайдера данных делится на отдельные функции микросервисов. Каждый микросервис вправе самостоятельно генерировать и выдавать токены с учетом их срока жизни. При запросе к функции сервиса, которая требует авторизации, HDP сначала проверяет наличие такого токена в уже используемых и сравнивает его со сроком годности. В случае если действительный токен найден, запрос будет направлен к микросервису, иначе будет выдан ответ с HTTP заголовком 401 и запрос на микросервис отправлен не будет.

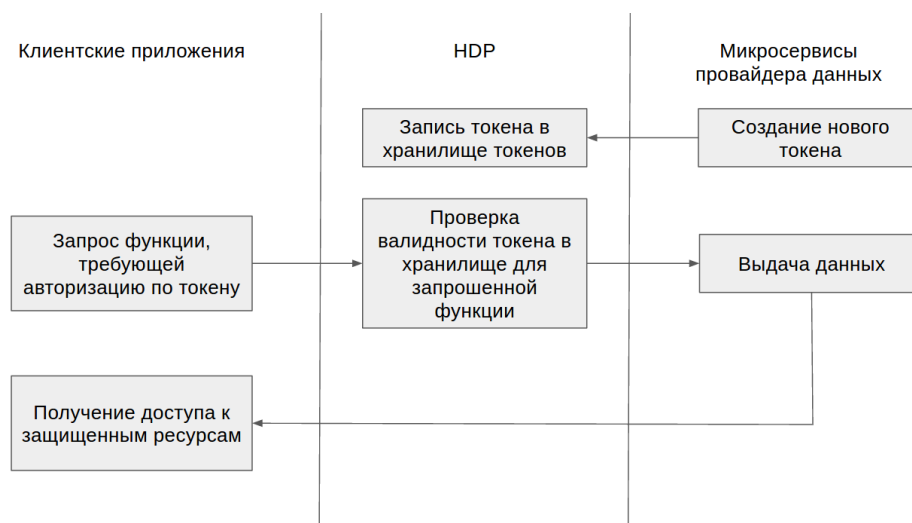


Рис. 2. Принцип взаимодействия приложений при авторизации с помощью метода авторизации HDP Auth

Как видно из рис. 2, каждый микросервис в произвольный момент может заносить и управлять токенами в хранилище сервиса HDP, для этого необходимо отправить токен с указанием срока годности на определенный протоколом адрес. HDP, получая данный запрос, складывает поступивший токен в свое хранилище, и последующие от клиентов запросы с данными токенами признаются корректными.

Данная логика позволяет снизить вычислительные сложности, объемы и количество HTTP запросов к микросервисам, что положительным образом сказывается на общей нагрузке, которую испытывает программная система. Пользователь полностью отсутствует в данном методе авторизации, что позволяет автоматизировать добавление и удаление новых микросервисов. Каждый токен может быть выдан на ограниченный или неограниченный срок действия как для одной, так и для нескольких функций, что привнесет гибкость в данный метод авторизации. Микросервис, выдавший токен в любой момент, может отозвать его, даже если его срок годности не изменился; допустимо менять и срок годности для токена, который уже находится в хранилище токенов.

Описание метода взаимодействия программных узлов при авторизации через HDP авторизационный модуль.

1. Поставщик данных регистрирует правила соответствия токена на сервере HDP.
2. Микросервис поставщика данных создает специальный токен для выбранного клиента или группы клиентов и / или пользователей.
3. Микросервис поставщика данных регистрирует данный токен на сервере HDP посредством отправки POST запроса на адрес /hdpauth/setToken.

4. Модуль авторизации, получив токен, проводит его проверку, согласно правилам, зарегистрированным в пункте 1.

4.1. В случае если проверка была успешно пройдена, HDP Auth выдает HTTP ответ с кодом 200 и уведомляет о том, что токен был успешно зарегистрирован.

4.2. Иначе HDP Auth выдает HTTP ответ с кодом 400 и уведомляет о том, что токен не был зарегистрирован. В этом случае микросервис заново генерирует токен согласно правилам, зарегистрированным в рамках пункта 1, и далее действует аналогично, начиная с пункта 2.

5. Каждый поступающий клиентский запрос к защищенным токенами ресурсам HDP Auth выполняет проверку:

5.1. Если пришедший токен найден в хранилище токенов и у данного токена не истек срок годности, запрос считается корректным и продолжается его обработка согласно спецификации протокола HDP.

5.2. Если пришедший токен не был найден в хранилище токенов или у него истек срок годности, то HDP прекращает обработку запроса, убирает истекший токен из хранилища и возвращает HTTP ответ с кодом 401.

В любой момент эксплуатации системы микросервис имеет возможность запросить список всех действующих токенов по некой защищенной функции и удалить токен, который утратил необходимость в нахождении в хранилище.

Пример регистрации корректного токена:

```
POST /hdpauth/setToken HTTP/1.1
Host: auth.hdpexample.com
Content-Type: application/x-www-form-urlencoded
token=8un1847d5jyy5m0guf5pqk4l0ljg5ab953l7&function=f&expires_in=0
```

Ответ

```
HTTP/1.1. 200 OK
Content-Type: application/json
{
  "status" : "ok"
}
```

Пример регистрации некорректного токена:

```
POST /hdpauth/setToken HTTP/1.1
Host: auth.hdpexample.com
Content-Type: application/x-www-form-urlencoded
token=17&function=f&expires_in=0
```

Ответ

```
HTTP/1.1. 400 Bad request
Content-Type: application/json
{
  "status" : "error",
  "message" : "Insufficient token length, must be greater than 10"
}
```

Пример отзыва токена:

```
POST /hdpauth/removeToken HTTP/1.1
Host: auth.hdpexample.com
Content-Type: application/x-www-form-urlencoded
token=8un1847d5jyy5m0guf5pqk4l0ljg5ab9wc4r53l7&function=f
```

Ответ

```
HTTP/1.1. 200 OK
Content-Type: application/json
{
  "status" : "ok"
}
```

Ответ, если данный токен не был найден

HTTP/1.1. 404 OK

Content-Type: application/json

Пример запроса токенов по функции:

POST /hdpauth/getToken HTTP/1.1

Host: auth.hdpexample.com

Content-Type: application/x-www-form-urlencoded
function=f

Ответ

HTTP/1.1. 200 OK

Content-Type: application/json

```
{  
  "status" : "ok",  
  "tokens" : ["8un1847d5jyy5m0guf5pqk4l0ljg5ab9wc4r53l7",  
    "dwq83d5jyy5m0guf5pqk4l0ljg5ab9wc4r53l1"]  
}
```

Пример клиентского запроса к функции в случае корректного токена:

POST /authclosed/function HTTP/1.1

Host: clientapp.com

Content-Type: application/x-www-form-urlencoded
updatedparam=newvalue&token=8un1847d5jyy5m0guf5pqk4l0ljg5abc4r53l7

Ответ

HTTP/1.1. 200 OK

Content-Type: application/json

```
{  
  "status" : "ok",  
}
```

Пример клиентского запроса к функции в случае некорректного токена:

POST /authclosed/function HTTP/1.1

Host: clientapp.com

Content-Type: application/x-www-form-urlencoded
updatedparam=newvalue&token=8u0ljg5ab9wc4r53l7

Ответ

HTTP/1.1. 401 Unauthorized

Заключение

В работе был проведен анализ проблемы авторизации клиентских приложений в распределенной высоконагруженной программной системе, указаны достоинства и недостатки существующих методов, предложен метод централизованного управления авторизационной функциональностью. Данный метод позволяет предоставить всем запущенным микросервисам единую входную точку авторизации, что положительным образом сказывается на скорости разработки высоконагруженной системы, снижает возможное число ошибок в авторизационной функциональности и повышает толерантность системы к изменению авторизационной логики. В будущем данный метод может подстраиваться под новые требования к механизму авторизации, например, различные усовершенствования для повышения уровня безопасности при доступе к данным. Предложенный метод разумно использовать в распределенных высоконагруженных системах, построенных на основе протокола HDP, где имеется внушительный объем защищенной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павликов М.К. Протокол HDP // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2016. № 8. С. 52–56.
2. Richer J., Sanso A. OAuth 2 in Action. Manning Publications, 2017. 375 p.

3. Bihis C. *Mastering OAuth 2.0*. Packt Publishing, 2015. 238 p.
4. Siriwardena P. *Advanced API Security*. Apress, 2014. 230 p.
5. Spasovski M. *OAuth 2.0 Identity and Access Management Patterns*. Packt Publishing, 2013. 128 p.
6. Parecki A. *OAuth 2.0: The Definitive Guide*. O'Reilly Media, 2014. 400 p.

Павликов Максим Константинович. E-mail: severemax@yandex.ru
Московский авиационный институт

Поступила в редакцию 14 апреля 2017 г.

Pavlikov Maxim K. (Moscow Aviation Institute, Russian Federation).

Authorization method of client applications in a heterogeneous distributed software system built on the basis of the HDP protocol.

Keywords: HDP; a distributed software system; the authorization system in distributed software system; OAuth.

DOI: 10.17223/19988605/41/7

In this paper, the authorization of client applications in a software system built on the basis of the HDP protocol is considered. Authorization is the granting of rights to perform a certain operation and checking such rights when performing an operation. In computer systems, authorization is necessary to access protected information or methods of obtaining, aggregating secure information. In the case of a monolithic application, there are usually no difficulties in implementing authorization, because there are many ready-made solutions to this problem. In various programming languages and frameworks, a lot of libraries have accumulated, which expand the language capabilities for client authorization.

To date, the most popular authentication protocol between two applications is OAuth. This protocol allows the application to get authorization from the service using HTTP requests. The main advantage of the approach is that the client does not transfer the login and password from its account to the trusted application, but only assigns certain rights that are reflected in the received token. OAuth uses interaction through the user's browser and direct interaction between the software systems to perform the full authorization process. This leads to the fact that the token necessary for authorization must be received manually, the protocol does not provide for the possibility of authorization of receipt in order to ensure the security of the user, as the latter must confirm its intention to transfer certain rights to a particular application. This is acceptable when the user wants to grant rights to his trusted application, but using OAuth becomes impossible to automate the interaction of two or more applications. In addition, OAuth requires a constantly running authorization server on a certain node of the software system.

The method of authorization of client applications in a distributed system built on the basis of the HDP protocol is the possibility of storing and checking a token embedded in the core of the protocol. According to the specification of the HDP protocol, all the functionality of the data provider is divided into separate functions of the microservices. Each microservice may independently generate and issue tokens with regard to their lifetime. When requesting a service function that requires authentication, HDP first checks the availability of such a token in the ones already used and compares it to the expiration date. In the event that a valid token is found, the request will be forwarded to the microservice, otherwise a response will be issued with the HTTP header 401 and the request for the microservice will not be sent.

REFERENCES

1. Pavlikov, M.K. (2016) HDP protocol. *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologiy – Herald of Computer and Information Technologies*. 8. pp.52–56. (In Russian). DOI: 10.14489/vkit.2016.08.pp.052-056
2. Richer, J. & Sanso, A. (2017) *OAuth 2 in Action*. Manning Publications.
3. Bihis, C. (2015) *Mastering OAuth 2.0*. Packt Publishing.
4. Siriwardena, P. (2014) *Advanced API Security*. Apress.
5. Spasovski, M. (2013) *OAuth 2.0 Identity and Access Management Patterns*. Packt Publishing.
6. Parecki, A. (2014) *OAuth 2.0: The Definitive Guide*. O'Reilly Media.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 681.5.09

DOI: 10.17223/19988605/41/8

A.Yu. Matrosova, S.A. Ostanin, I.E. Kirienko, E.A. Nikolaeva

A FAULT-TOLERANT SEQUENTIAL CIRCUIT DESIGN FOR STUCK-AT FAULTS AND PATH DELAY FAULTS

The reported study was supported by Russian Science Foundation, research project № 14-19-00218.

This paper presents a fault-tolerant synchronous sequential circuit design based on self-checking system with low overhead. The scheme has only one self-checking sequential circuit, normal (unprotected) sequential circuit and not self-testing checker. It is proved the reliability properties of the suggested scheme both for single stuck-at faults (SAFs) at gate poles and path delay faults (PDFs), transient and intermittent. It is supposed that each next fault appears when a previous one has disappeared. Estimations of the schemes complexity are discussed.

Keywords: fault-tolerant scheme; sequential circuit; self-checking circuit; stuck-at fault; path delay fault; soft error.

In modern military, space, medical, etc. computer systems requirements for hardware reliability are increased. Continuous improvements in CMOS technology entering the nanometer scale has resulted into quantum mechanical effects creating many technological challenges for further scaling of CMOS devices. Nano-scale devices are limited by higher defect rates and increased susceptibility to soft errors (transient or intermittent).

High performance integrated circuits have to be protected not only for single stuck-at faults (SAFs) (transient or intermittent) at gate poles but also for delays that arise in a circuit operation. Delays may be caused by a high level of circuit integration, low voltages and high frequency operation. One of the most widespread and useful in practice delay models is a model of a path delay fault (PDF). In this model, it is considered that for small delays in path elements and connections between its elements a delay in propagating a change in a signal value may exceed an admissible level for a circuit as a whole. This leads to incorrect operation of an entire circuit.

One of the approaches to increase reliability of the system is fault tolerance. A fault-tolerant system is one that can continue the correct performance of its specified tasks in the presence of faults. Fault tolerance is assumed to add some of the redundancy: hardware redundancy, software redundancy, information redundancy or time redundancy.

One of the most common techniques providing the fault-tolerant property is triple modular redundancy (TMR) [1–4]. The basic idea of TMR is to triplicate the circuit and perform a majority vote to determine the output of the system. The main difficulties with TMR are the voter (if the voter fails, the complete system fails) and high area overhead.

In the paper [5] a finite state machine (FSM) based fault tolerance technique for sequential circuits is proposed. The technique is connected with adding redundant equivalent states to protect states with high probability of occurrence. The added states guarantee that all single faults appearing in the states variables of highly occurring states or in their combinational logic are tolerated.

In [6] the use of duplication with self-checking for one-hot encoding FSM is suggested. This approach ensures that any single error will not lead to an incorrect next state. However, it might lead to an erroneous output. The area overhead of this approach is large as two sets of selectors are used and each selector set has N flip-flops, where N is the number of states.

In the work [7] the synthesis of totally self-checking synchronous sequential circuits that are able to recover after an occurrence of soft errors is proposed.

A fault-tolerant system that is based on two replicas of a self-checking circuit and on error-masking interface has been suggested in [8]. They use two checkers and rather complicate error-masking interface containing flip-flops.

In the paper [9] was suggested a fault-tolerant sequential circuit design also based on two self-checking circuits for soft Path Delay Faults (PDFs) of the circuit. It includes two self-checking circuits, one self-testing checker and more simple error-masking interface than one in [8].

In [10] a fault-tolerant scheme based on totally self-checking system with low overhead in comparison with architectures suggested in [9] is considered. In contrast with these schemes it has only one self-checking combinational circuit and another circuit is conventional one. Such scheme implements the correct behavior of a combinational circuit when any permissible (among SAFs) soft fault (transient or intermittent) occurs. The reliability of the proposed scheme is higher than TMR systems or fault-tolerant systems based on two self-checking circuits.

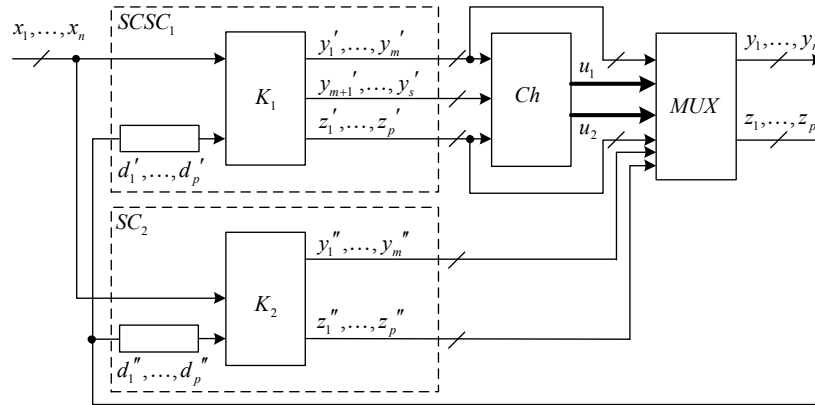


Fig. 1. Fault-tolerant scheme

In this paper we propose a fault-tolerant sequential circuit design based on architecture suggested in [10]. The scheme consists of one self-checking sequential circuit, one normal (unprotected) sequential circuit, not self-testing checker and multiplexor. Such scheme implements the correct behavior of a sequential circuit when any permissible (among SAFs and PDFs) transient or intermittent fault occurs.

This paper is structured as follows. In Section 1 the fault-tolerant scheme construction is described. Section 2 gives the analysis of the fault-tolerant properties for suggested scheme. In section 3 some estimations of the scheme complexity are discussed.

1. Fault-tolerant architecture

We have the State Transition Graph (STG) description of a synchronous finite state machine behavior. It is necessary to derive sequential circuit masking single stuck-at faults at gate poles of the circuit and delay faults.

We assume that each fault is transient or intermittent, and a next fault appears after a previous one has disappeared, and only one module of the fault-tolerant architecture can be faulty.

We suggest applying the architecture of fault-tolerant scheme [10] for sequential circuits. The architecture is based on using only one self-checking circuit.

The implementation of a fault-tolerant sequential circuit shown in Fig. 1.

Here $SCSC_1$ is a self-checking sequential circuit. Assume that all outputs (primary output lines and next state lines) of combinational part (K_1) of sequential circuit are under observation.

We may use any technique providing the unidirectional error manifestation for combinational part of sequential circuit. Single stuck-at faults in combinational part of sequential circuit can be detected if results in unidirectional errors at the outputs and the outputs are encoded using a unidirectional error detecting code, for

example, (k, l) -code (here l – length of code word and k – weight of code word) or Berger code. One of that technique is suggested in [11].

Here we consider the technique described in [12]. We encode FSM states with (k, l) -code words and then change each 0 value in a code word for don't care. As symbols of an output alphabet have already been encoded we add output variables to encode sequential circuit outputs also by the proper (k, l) -code words.

This encoding provides the unidirectional manifestation of single stuck-at faults at gate poles of a combinational part of sequential circuit when using the proper circuit design.

Let we have STG description of FSM represented by Table 1.

Table 1

STG description of FSM

$x_1x_2x_3$ (input cubes)	q (current state)	q' (next state)	$y_1y_2y_3y_4y_5$ (output vectors)
0 – –	1	1	0 0 0 1 0
– 0 –	1	1	0 0 0 1 0
1 1 –	1	2	1 0 0 1 0
– – 0	2	2	0 0 1 1 0
– – 1	2	3	1 0 1 1 0
1 0 –	3	3	0 1 0 0 0
0 – –	3	4	1 1 0 0 0
– 1 –	3	4	1 1 0 0 0
– – 0	4	4	0 1 0 0 1
– – 1	4	1	1 1 0 0 1

After encoding states ((1, 4)-code) and outputs ((3, 7)-code) we get Table 2 representing the system of incompletely specified Boolean functions.

Table 2

System of incompletely specified Boolean functions

$x_1x_2x_3$	$z_1z_2z_3z_4$	$z'_1z'_2z'_3z'_4$	$y_1y_2y_3y_4y_5y_6y_7$
0 – –	1 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 1 0 1 1
– 0 –	1 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 1 0 1 1
1 1 –	1 0 0 0	0 1 0 0	1 0 0 1 0 1 0
– – 0	0 1 0 0	0 1 0 0	0 0 1 1 0 0 1
– – 1	0 1 0 0	0 0 1 0	1 0 1 1 0 0 0
1 0 –	0 0 1 0	0 0 1 0	0 1 0 0 0 1 1
0 – –	0 0 1 0	0 0 0 1	1 1 0 0 0 0 1
– 1 –	0 0 1 0	0 0 0 1	1 1 0 0 0 0 1
– – 0	0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 0 0 1 1 0
– – 1	0 0 0 1	1 0 0 0	1 1 0 0 1 0 0

Changing 0 values for don't cares we get minimized system of Boolean functions (Table 3). This changing keeps FSM behavior and originates partially monotonous system of Boolean functions [12].

Table 3

Representation of partially monotonous system of Boolean functions

$x_1x_2x_3$	$z_1z_2z_3z_4$	$z'_1z'_2z'_3z'_4$	$y_1y_2y_3y_4y_5y_6y_7$
0 – –	1 – – –	1 0 0 0	0 0 0 1 0 1 1
– 0 –	1 – – –	1 0 0 0	0 0 0 1 0 1 1
1 1 –	1 – – –	0 1 0 0	1 0 0 1 0 1 0
– – 0	– 1 – –	0 1 0 0	0 0 1 1 0 0 1
– – 1	– 1 – –	0 0 1 0	1 0 1 1 0 0 0
1 0 –	– – 1 –	0 0 1 0	0 1 0 0 0 1 1
0 – –	– – 1 –	0 0 0 1	1 1 0 0 0 0 1
– 1 –	– – 1 –	0 0 0 1	1 1 0 0 0 0 1
– – 0	– – – 1	0 0 0 1	0 1 0 0 1 1 0
– – 1	– – – 1	1 0 0 0	1 1 0 0 1 0 0

Derive from Table 3 the system F of partially monotonous (on state variables) functions. For that include cubes of Table 3 marked with 1 value in the same column in the sum of products (SoP) of the corresponding function. The system F for example from Table 3:

$$\begin{aligned}
z'_1 &= \overline{x_1}z_1 \vee \overline{x_2}z_1 \vee x_3z_4, \\
z'_2 &= x_1x_2z_1 \vee \overline{x_3}z_2, \\
z'_3 &= x_3z_2 \vee x_1x_2z_3, \\
z'_4 &= \overline{x_1}z_3 \vee x_2z_3 \vee \overline{x_3}z_4, \\
y_1 &= x_1x_2z_1 \vee x_3z_2 \vee \overline{x_1}z_3 \vee x_2z_3 \vee x_3z_4, \\
y_2 &= x_1x_2z_3 \vee \overline{x_1}z_3 \vee x_2z_3 \vee \overline{x_3}z_4 \vee x_3z_4, \\
y_3 &= \overline{x_3}z_2 \vee x_3z_2, \\
y_4 &= \overline{x_1}z_1 \vee \overline{x_2}z_1 \vee x_1x_2z_1 \vee \overline{x_3}z_2 \vee x_3z_2, \\
y_5 &= \overline{x_3}z_4 \vee x_3z_4, \\
y_6 &= \overline{x_1}z_1 \vee \overline{x_2}z_1 \vee x_1x_2z_1 \vee \overline{x_1}x_2z_3 \vee \overline{x_3}z_4, \\
y_7 &= \overline{x_1}z_1 \vee \overline{x_2}z_1 \vee \overline{x_3}z_2 \vee x_1x_2z_3 \vee \overline{x_1}z_3 \vee x_2z_3.
\end{aligned}$$

We apply a multilevel synthesis method from [13]:

1. It is based on dividing of SoPs (system F) to get more simple system F^* .
2. Each function (it is presented as SoP in general case) of system F^* is represented by sub-circuit from two inputs NAND gates and NOT gates. All these sub-circuits form virtual circuit named Subject graph.
3. Subject graph may be covered by sub-graphs corresponding to gates of any real gate basis during technology mapping.

It is proved that any single stuck-at fault at gate pole of the Subject graph and also at gate pole of the circuit in any real gate basis obtained in above mentioned way from system F manifests itself on circuit outputs as unidirectional one. This means that the fault changes the values of a sub-set of circuit outputs from 0 to 1 (from 1 to 0) on a test pattern. (If one circuit output changes its value from 1 to 0 then another output cannot change its value from 0 to 1.) Thus we get from table like Table 3 self-checking combinational part of sequential circuit.

Considering sequential circuit as a whole (Fig. 1) we admit single stuck-at faults on flip-flop poles. These faults also manifest themselves as unidirectional ones. Actually, as we use above mentioned synthesis method we get circuit keeping the system F . We mean that if we move from the circuit outputs to inputs substituting instead of internal circuit variables the proper gate functions (depending on gate inputs), so that any simplification of Boolean algebra is forbidden, we get exactly system F . As F is partially monotonous on state variables stuck-at 1 fault at a pole of flip-flop originates increasing on-sets of some functions from F , single stuck-at 0 fault at pole of flip-flop originates decreasing on-sets of some functions from F . Thus the considered faults manifest themselves as unidirectional one. It means that $SCSC_1$ is self-checking sequential circuits for single stuck-at faults at gate poles of its combinational part and the same faults at flip-flop poles.

SC_2 is a sequential circuit realizing STG description of FSM. It has the same encoding states (like $SCSC_1$), but has no additional outputs that are used for providing unidirectional error detection. In the example considered (Table 3) the additional outputs are marked with y_6, y_7 . K_2 is a combinational part of sequential circuit SC_2 , implementing the system of partially monotonous Boolean functions (without functions corresponding to additional outputs). The circuit is derived by using any method that provides low cost realization. For increasing reliability properties of the system it is desirable applying different synthesis methods for $SCSC_1$ and SC_2 . Such approach allows decreasing a probability of appearance of identical faults [14].

Variables $y'_1, \dots, y'_m, (y''_1, \dots, y''_m)$ correspond to outputs of sequential circuits; variables $y'_{m+1}, \dots, y'_{m+s}$ correspond to additional outputs for $SCSC_1$ providing (k, l) -code words; variables $z'_1, \dots, z'_p$ are state ones, and $d'_1, \dots, d'_p, (d''_1, \dots, d''_p)$ are flip-flops corresponding to these variables.

Ch is an arbitrary (k, l) -code checker. It may be not self-testing. It is supposed that each next fault appears when a previous one has disappeared. If checker fault manifests itself, it is masked by correct outputs of SC_2 . This fault does not effect on any next transient or intermittent fault.

The checker detects erroneous code words on outputs of K_1 : $y'_1, \dots, y'_m, y'_{m+1}, \dots, y'_{m+s}, z'_1, \dots, z'_p$.

Here we suggest using not self-testing monotonous checker that has low cost realization. The checker has two outputs (u_1, u_2) : “10” if both $SCSC_1$ and Ch are error-free; “00”, “01” and “11” if an error in one of these circuits is detected.

MUX is a multiplexor with control inputs u_1, u_2 and data inputs $y'_1, \dots, y'_m, z'_1, \dots, z'_p, y''_1, \dots, y''_m, z''_1, \dots, z''_p$. The MUX connects lines $y'_1, \dots, y'_m, z'_1, \dots, z'_p$ with lines $y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p$ when checker outputs have “10” values otherwise the MUX connects lines $y''_1, \dots, y''_m, z''_1, \dots, z''_p$ with lines $y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p$.

2. Fault-tolerance analysis

We consider single stuck-at faults at gate poles of the combinational parts of sequential circuit $SCSC_1$ and its flip-flops, and single path delay faults of $SCSC_1$. As for SC_2 and Ch their faults may be arbitrary but any fault keeps circuit as combinational one. All above mentioned faults must be transient or intermittent, and a fault occurs one at a time and a next fault from permissible set can appear only after a forgoing fault has disappeared. Only one circuit among $SCSC_1, SC_2, Ch, MUX$ may be faulty.

2.1. Stuck-at faults

Notice as V_{SCSC_1} a set of permissible faults of $SCSC_1$. V_{SCSC_1} consists of single stuck-at faults at gate poles and single stuck-at faults at inputs and outputs of flip-flops. All these faults manifest themselves as unidirectional ones on outputs of sub-circuit K_1 . In the presence of any fault from V_{SCSC_1} circuit $SCSC_1$ may produce non-code word at the outputs of combinational part K_1 that will be detected by checker and multiplexer will use erroneous free outputs from K_2 .

Let V_{CV} be a set of arbitrary faults of the checker. The fault-free checker for code words on inputs generates signals “10”, for non-code words – “00”, “01”, “11”. In presence of any fault from V_{CV} the checker can produce arbitrary signals (“00”, “11”, “01”, “10”) at the outputs that drives multiplexer switching between error free outputs from K_1 or K_2 .

Let V_{SC_2} be a set of arbitrary faults of circuit SC_2 . It is supposed only one module of the system may be faulty. This means that other modules are fault-free and the multiplexer uses error free outputs from K_1 .

Let V_{MUX} be a set of permissible faults of the multiplexer. These faults can change connection of some lines $y'_1, \dots, y'_m, z'_1, \dots, z'_p$ for corresponding lines $y''_1, \dots, y''_m, z''_1, \dots, z''_p$. In this case K_1 and K_2 are fault free and both have error free outputs.

Faults on primary inputs $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ and primary outputs $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ are not considered.

Note $V = V_{SCSC_1} \cup V_{Ch} \cup V_{SCSC_2} \cup V_{MUX}$.

Proposal 1. The scheme of Fig. 1 keeps correct functioning in the presence of any fault from V .

2.2. Path delay faults

Consider a combinational circuit in which at time moment t vector v_1 of values of input variables of a circuit is replaced by another vector v_2 . Let τ be a maximal admissible path delay in the circuit. If in time peri-

od τ after the time moment t , the expected value of vector v_2 on the circuit output does not appear, we say that the circuit has path delay faults for some paths. We say that a pair (v_1, v_2) detects such fault, and the fault manifests itself on this pair.

Take into consideration, that path delays for opposite (inverse) changes of signal values on outputs of path gates may be different.

We call a pair that detects a delay of a signal on a circuit output changing from 0 to 1 as a test for a rising transition; a delay of a signal on the circuit output changing from 1 to 0 as a test for a falling transition.

They distinguish single and multiple path delay faults, meaning faults of one or several paths, but we consider only single PDFs.

If a test pair detects the path delay fault regardless of delay faults of other paths of a circuit, we call this pair a robust test for this fault and the fault itself is called robust testable.

If a test pair detects the path delay fault in the considered path only on the assumption that other paths of a circuit are fault-free, this pair is called a non-robust test for the fault, and the fault itself is called non robust testable.

It's possible to reduce construction of a test pair for a PDF to testing the constant fault in the corresponding literal of the equivalent normal form (ENF) originated by the sub-circuit that contains the path considered. Dealing with a single literal fault we mean either turning the literal to constant 1 which leads to this literal disappearing from ENF products (*bp*-fault) or turning the literal to constant 0 which leads to disappearing all products that contain the literal (*ap*-fault).

A test pattern for this literal is vector v_2 of a test pair. Note that a PDF manifests itself on this test pattern only if previous vector v_1 differs from v_2 by a value of the variable marking the beginning of this path and possibly values of other variables. Otherwise this PDF does not manifest itself on the circuit output.

Note that only vector v_1 in a test pair indicates if the test pair is robust or non-robust. This vector does not directly affect PDF manifestation; it only provides manifestation of the PDF on vector v_2 .

Thus a PDF (robust and non-robust testable) differs from the corresponding literal constant fault by manifestation not on each test pattern for the literal.

Take into consideration that disappearing of literal from ENF products increases on-set of the sub-circuit function, and disappearing of ENF products decreases on-set of the sub-circuit function. This means that a literal constant fault manifests itself in a combinational part K_1 of the scheme as a single stuck-at fault of this sub-circuit, but on the only sub-circuit output.

Masking PDFs we don't need to know what path is fault. That is why we do not differ robust testable and non-robust testable PDFs and, consequently, we have to pay attention only to the literal originated by the path.

Note that for any path opposite delays of signals are feasible at the same time. Test patterns for constant 1 and constant 0 fault of the proper ENF literal are different. Consequently, opposite delays of the same path manifest themselves on different input vectors.

Thus when PDF of a falling transition occurs, we observe 1 value instead of 0 value on the certain test pattern for *bp*-fault, and for a rising transition – 0 value instead of 1 value on the certain pattern for *ap*-fault.

As we consider transient or intermittent PDFs we may observe these faults only during time T , $T \geq \tau$. During time T path delay may manifest itself several times both for rising and falling transitions, but only on the same circuit output.

Let $V_{PDF} = V_{SCSC_1}^{PDF} \cup V_{Others}^{PDF}$. Here $V_{SCSC_1}^{PDF}$ is a set of single path delay faults in $SCSC_1$. These faults manifest themselves changing only one output of the combinational part K_1 , and a non-code word appears on inputs of the checker. V_{Others}^{PDF} is a set of path delay faults in checker (Ch) and K_2 . If Ch has a PDF then combinational parts K_1 and K_2 are fault free. If K_2 has a PDF then K_1 is fault free. Both cases provide correct outputs.

Proposal 2. The scheme of Fig. 1 keeps correct functioning in the presence of any fault from V_{PDF} .

3. Experimental results

For experimental results we use MCNC sequential benchmarks [15, 16]. Appreciating a complexity of the schemes we do not consider complexities of MUXs, voting circuits and flip-flops.

For state assignment of the TMR scheme we use the encoding with the shortest code words. For encoding states of the FSMs ($SCSC_1$ and SC_2) is used one-hot encoding.

Encoding outputs of a self-checking sequential circuit we add minimal number of output variables to get the proper (k, l) -code.

For deriving structural realization of the circuits (K_1 and K_2) we use a multilevel synthesis method [13] based on dividing of SoPs and using two inputs NAND gates and NOT gates. For synthesis of the not self-checking monotonous two inputs AND and OR gates are used. The complexity of schemes and their sub-circuits are estimated by the number of NOT gates and two inputs gates.

Table 4 illustrates the area overhead reduction of the proposed scheme as compared to TMR scheme and scheme from [9]. Use the following notations:

Table 4

An estimation of the complexity of different fault-tolerant schemes

Name	n	m	s	L_{TMR}	L_{2SC}	L_{1SC}	HR_{TMR} (%)	HR_{2SC} (%)
bbara	4	2	10	714	449	418	41,46	6,9
bbtas	2	2	6	300	325	242	19,33	25,54
beecount	3	4	7	471	427	405	14,01	5,15
dk14	3	5	7	1149	992	891	22,45	10,18
dk16	2	3	27	2202	1510	1198	45,59	20,66
dk17	2	3	8	567	436	368	35,1	15,6
dk27	1	2	7	216	142	110	49,07	22,54
dk512	1	3	15	558	323	255	54,3	21,05
donfile	2	1	24	1965	917	867	55,88	5,45
ex2	2	2	19	1209	794	618	48,88	22,17
ex3	2	2	10	483	474	350	27,54	26,16
ex5	2	2	9	414	370	298	28,02	19,46
ex6	5	8	8	1032	786	644	37,6	18,07
ex7	2	2	10	528	420	332	37,12	20,95
s1	8	6	20	2754	2213	1876	31,88	15,23
s1494	8	19	48	8121	7311	8635	9,98	15,33
s208	11	2	18	2091	1696	1451	30,61	14,45
s420	19	2	18	2124	1758	1452	31,64	17,41
s510	19	7	47	2244	2275	1857	17,25	18,37
s820	18	19	25	4371	3956	3397	22,28	14,13
s832	18	19	25	4929	4458	3794	23,03	14,89
shiftreg	1	1	8	288	150	118	59,03	21,33
tma	7	6	20	1290	1293	1072	16,9	17,09
train11	2	1	11	501	281	241	51,9	14,23
Average							33,79	16,76

Note. Name – the name of benchmark circuit; n – the number of inputs; m – the number of outputs; s – the number of states; L_{TMR} – the number of gates for TMR scheme; L_{2SC} – the number of gates for fault-tolerant scheme based on two self-checking sequential circuits, L_{1SC} – the number of gates for the proposed fault-tolerant scheme; HR_{TMR} – the area overhead reduction of the proposed scheme as compared to TMR; HR_{2SC} – the area overhead reduction of the proposed scheme as compared to scheme from [9].

As seen from the last two columns, the proposed method provides an average saving of 33,79% concerning TMR implementation and 16,76% concerning method described in [Ibid.].

Conclusion

In this paper we have proposed a fault-tolerant sequential circuit design based on a self-checking system with low overhead. The suggested scheme masks not only transient (intermittent) single stuck-at faults at gate

poles but path delay faults as well. The experimental results show that the proposed technique provides an average saving of 33,79% overhead concerning TMR implementation and 16,76% overhead concerning previous technique based on two self-checking modules.

REFERENCES

1. Von Neumann, J. (1958) Probabilistic logics and the synthesis of reliable from unreliable components. In: Shannon, C. (ed.) *Automata Studies*. Princeton, NJ: Princeton University Press. pp. 43–98.
2. Pradhan, D.K. (1996) *Fault-tolerant computer system design*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall PTR.
3. Abramovici, M., Breuer, M.A. & Friedman, A.D. (1994) *Digital systems testing and testable design*. New York: IEEE Press.
4. Lyons, R.E. & Vanderkulk, W. (1962) The Use of Triple-Modular Redundancy to Improve Computer Reliability. *IBM Journal of Research and Development*. 2(6). pp. 200–209. DOI: 10.1147/rd.62.0200
5. El-Maleh, A.H. & Al-Qahtani, A.S. (2014) A finite state machine based fault tolerance technique for sequential circuits. *Microelectron. Rel.* 54(3). pp. 654–661. DOI: 10.1049/iet-cdt.2016.0085
6. Cassel, M. & Kastensmidt, F.L. (2006) Evaluating one-hot encoding finite state machines for SEU reliability in SRAM-based FPGAs. IOLTS'2006. Lake of Como, Italy, July. *Proc. of the 12th IEEE Int. On-line Testing Symp.* pp. 139–44.
7. Levin, I., Matrosova, A. & Ostanin, S. (2001) Survivable Self-checking Sequential Circuits. DFT'2001. *Proc. of the IEEE Int. Symp. Defect and Fault Tolerance in VLSI Systems*. San Francisco, USA, October 2001. pp. 395–402.
8. Lubaszewski, M. & Courtois, B. (1998) A reliable fail-safe system. *IEEE Tran. On Comp.* 47(2). pp. 236–241.
9. Matrosova, A., Ostanin, S., Kirienko, I. & Nikolaeva, E. (2015) Fault-tolerant High Performance Scheme Design. EWDTS'2015. *Proc. of IEEE East-West Design & Test Symp.* Batumi, Georgia, Sept. 2015. pp. 286–289.
10. Ostanin, S., Kirienko, I. & Lavrov, V. (2015) Fault-Tolerant Combinational Circuit Design. EWDTS'2015. *Proc. of IEEE East-West Design & Test Symp.* Batumi, Georgia, Sept. pp. 302–305.
11. Busaba, F. & Lala, P. (1994) Self-Checking Combinational Circuit Design for Single and Unidirectional Multibit Error. *JETTA*. 5. pp. 19–28.
12. Matrosova, A. Yu. & Ostanin, S.A. (1998) Self-Checking Synchronous FSM network Design. *Proc. of the 4th IEEE Int. On-line Testing Workshop*. IOLTS'1998. Capri, Italy, July 1998. pp. 162–166.
13. Murgai, R., Brayton, R. & Sangiovanni-Vincentelli, A. (1995) *Logic Synthesis for Field Programmable Gate Arrays*. Boston, Mass.: Kluwer Academic Publishers.
14. Mitra, S., Saxena, N.R. & McCluskey, E.J. (2002) A Design Diversity Metric and Analysis of Redundant Systems. *IEEE Trans. Comput.* 51(5). pp. 498–510.
15. Yang, S. (1991) *Logic Synthesis and Optimization Benchmarks User Guide Version 3.0*.
16. Berkeley Logic Synthesis and Verification Group. (2017) *ABC: A System for Sequential Synthesis and Verification*. [Online] Available from: <http://www.eecs.berkeley.edu/~alanmi/abc/>.

Matrjsova Anjela Yurievna, Dr. Sc., Professor. E-mail: mau11@yandex.ru

Ostanin Sergey Alexandrovich, Cand. Sc., Associate Professor. E-mail: sergeiostanin@yandex.ru

Kirienko Irina Evgenievna. E-mail: irina.kirienko@sibmail.com

Nikolaeva Ekaterina Alexandrovna, Cand. Sc. E-mail: nikolaeev-ea@yandex.ru

National Research Tomsk State University

Поступила в редакцию 12 июня 2017 г.

Матросова Анжела Юрьевна, Останин Сергей Александрович, Кириенко Ирина Евгеньевна, Николаева Екатерина Александровна (Томский государственный университет, Российская Федерация).

Проектирование отказоустойчивых последовательностных схем для константных неисправностей и неисправностей задержек путей.

Ключевые слова: отказоустойчивая схема; последовательностная схема; самопроверяемая схема; константная неисправность; неисправность задержки пути; нерегулярная ошибка.

Предлагается метод синтеза отказоустойчивых последовательностных схем, основанный на использовании самопроверяемой схемы и схемы без дополнительных свойств, реализующей основную функциональность, для одиночных константных неисправностей и неисправностей задержек путей, кратковременных или перемежающихся. Отказоустойчивые свойства предложенной архитектуры обеспечиваются в предположении, что в текущий момент времени может быть неисправен только один функциональный блок. Рассматриваются кратковременные и перемежающиеся неисправности, причем допускается появление очередной неисправности только после исчезновения последствий от предыдущей неисправности. Доказывается, что проявление одиночных константных неисправностей и неисправностей задержек путей в предложенной архитектуре маскируется в рамках заданных ограничений, т.е. схема является отказоустойчивой. Экспериментальные результаты показали, что предложенный метод позволяет сократить аппаратную избыточность в среднем на 33,79% по сравнению с методом тройного резервирования модулей и на 16,76% по сравнению с отказоустойчивыми схемами, основанными на использовании двух самопроверяемых модулей.

УДК 681.518.5:004.052.32

DOI: 10.17223/19988605/41/9

В.В. Сапожников, Вл.В. Сапожников, Д.В. Ефанов, Д.В. Пивоваров**СИНТЕЗ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО КОНТРОЛЯ
МНГОВЫХОДНЫХ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ
НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЛОГИЧЕСКОГО ДОПОЛНЕНИЯ**

Рассматриваются особенности организации систем функционального контроля комбинационных схем на основе метода логического дополнения по равновесным кодам. Проанализированы способы технической реализации неизменяемых частей схем контроля, синтезированных по методу логического дополнения для логических схем с произвольным количеством выходов. Предложен эффективный метод синтеза систем функционального контроля многвыходных комбинационных схем, основанный на выделении подмножеств контролируемых выходов и контроле каждого из них по равновесному коду с тестером с небольшой сложностью технической реализации и малым количеством тестовых комбинаций, необходимых для полной проверки исправности. Установлено, что разбиение выходов контролируемой схемы на четырехэлементные подмножества с контролем каждого из них на основе равновесного кода «2 из 4» или самопроверяемого модуля сжатия парафазных сигналов дает минимальную по сложности неизменяемую часть схемы контроля.

Ключевые слова: комбинационная схема; система контроля; метод логического дополнения; равновесные коды; код «1 из 3»; код «1 из 4»; код «2 из 4»; самопроверяемость.

При синтезе надежных дискретных систем автоматики и вычислительной техники используют разнообразные подходы, основанные на внесении аппаратной и программной избыточности [1–3]. Это позволяет на практике оперативно обнаруживать дефекты и неверные результаты вычислений, а также парировать их до реализации ответственных технологических процессов [4–6]. Например, указанными особенностями обладают управляющие комплексы систем обеспечения движения поездов на микропроцессорной основе [7–9].

Одним из подходов к обеспечению надежности работы дискретных устройств является использование самопроверяемых схем встроенного контроля, или систем функционального контроля [10, 11]. Они позволяют обнаруживать дефекты в структурах объектов диагностирования, выдавать контрольные сигналы о наличии неисправности и создавать условия для предотвращения использования неверно вычисленных данных в задачах управления.

При организации систем функционального контроля могут быть использованы две основные структурные схемы, основанные на применении помехоустойчивых кодов с высокой кодовой скоростью и ориентированные, как правило, на обнаружение искажений, а не на их исправление [12–14]. Первая структурная схема синтезируется на основе метода вычисления контрольных разрядов и позволяет дополнить информационный вектор, формируемый на выходах объекта диагностирования, до кодового слова заранее выбранного помехоустойчивого кода [15, 16]. Например, часто в задачах организации систем функционального контроля используют коды с повторением, коды Бергера, коды паритета и модифицированные коды с суммированием [17–22]. Характеристики системы функционального контроля полностью определяются свойствами кода, выбранного в качестве ее основы. Вторая структурная схема системы функционального контроля позволяет преобразовывать информационный вектор, формируемый на выходах объекта диагностирования, в кодовое слово заранее выбранного кода путем логического дополнения [23].

Целью данной работы является изложение результатов исследования принципов организации систем функционального контроля многвыходных комбинационных схем на основе метода логического дополнения.

1. Структурная схема системы функционального контроля на основе метода логического дополнения

В структурной схеме системы функционального контроля на основе метода логического дополнения выделяется четыре блока (рис. 1). Блок основной логики $F(x)$, или исходная комбинационная схема, является объектом диагностирования и вычисляет значения разрядов информационного вектора $\langle f_m f_{m-1} \dots f_2 f_1 \rangle$. В процессе эксплуатации системы функционального контроля неисправности в блоке основной логики $F(x)$ проявляются в виде искажений разрядов информационного вектора, что фиксируется с помощью схемы контроля. В схему контроля входит три блока: блок контрольной логики $G(x)$, блок логического дополнения и самопроверяемый тестер TSC . Блок контрольной логики вычисляет систему специальных контрольных функций $g_1, g_2, \dots, g_{m-1}, g_m$, преобразовывающих в блоке логического дополнения значения разрядов информационного вектора $\langle f_m f_{m-1} \dots f_2 f_1 \rangle$ в значения разрядов кодового слова заранее выбранного кода. Блок логического дополнения образован линией сумматоров по модулю два, на выходе каждого из которых формируется значение функции $h_j = f_j \oplus g_j, j = \overline{1, m}$. Тестер TSC проверяет факт принадлежности поступающего кодового слова заранее выбранному коду и в случае наличия указанного соответствия формирует парафазный контрольный сигнал $z^0 z^1 = \langle 01 \rangle$ или $\langle 10 \rangle$. Нарушение парафазности на контрольных выходах свидетельствует о наличии неисправности в одном из блоков системы функционального контроля.

При организации системы функционального контроля по структурной схеме рис. 1 используют, как правило, какой-либо неразделимый код [24] либо же осуществляют преобразование рабочих функций в систему функций, наделенных, например, свойством самодвойственности, и контролируют наличие этого свойства специальным тестером самодвойственных сигналов [25]. Особенности организации системы функционального контроля с преобразованием сигналов в сигналы специального вида хорошо изучены и представлены в большом количестве работ [26–31]. Вопросы же организации систем функционального контроля по методу логического дополнения на основе неразделимых кодов в настоящее время исследованы не полностью и представляют интерес для разработчика дискретных систем.

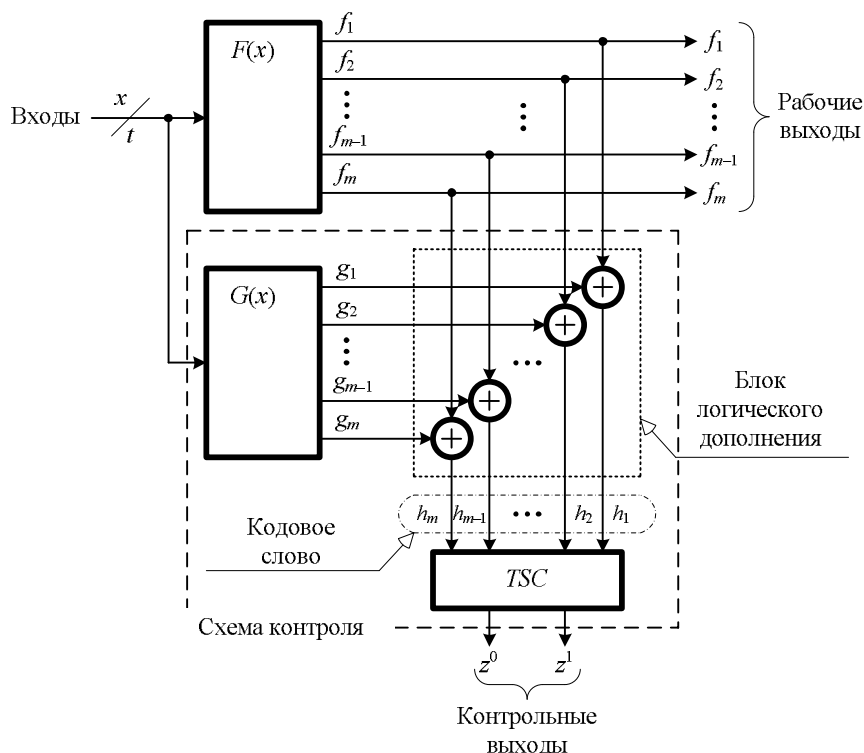


Рис. 1. Структурная схема системы функционального контроля

В качестве неразделимого кода может быть использован любой равновесный код (код « r из m », или r/m -код, где r – вес кодового слова, а m – общее количество разрядов), но гораздо проще синтезировать самопроверяемую схему контроля при разбиении выходов схемы на подмножества и организации подсхем контроля групп выходов на основе равновесных кодов с небольшим количеством кодовых слов и простыми структурами тестеров. Более того, в блоке логического дополнения не потребуется преобразования всех рабочих функций. Широко известны базовые подходы, использующие в качестве основы такие равновесные коды, как 1/3-код, 1/4-код и 2/4-код [32–41]. Кроме этих кодов, как альтернатива может использоваться контроль групп выходов на основе модулей сжатия парафазных сигналов TRC [42, 43].

2. Особенности применения равновесных кодов при организации систем функционального контроля

Система функционального контроля комбинационной схемы с m выходами может быть организована на основе любого равновесного r/m -кода. При этом существует два подхода к реализации системы функционального контроля. Первый базируется на контроле всех выходов на основе r/m -кода. Данный способ подразумевает при реализации схемы контроля преобразование значений как минимум $m-r$ выходов контролируемой схемы. Отсюда следует, что блок контрольной логики будет иметь $m-r$ выходов, а блок логического дополнения – $m-r$ элементов сложения по модулю два. Выходы тестера будут являться и контрольными выходами системы функционального контроля. Второй подход к реализации системы функционального контроля требует разбиения выходов на подмножества и контроля каждой группы выходов на основе равновесных кодов с меньшей длиной кодового слова, чем длина вектора, формируемого на выходах контролируемой комбинационной схемы. Корректность вычислений в каждой группе выходов проверяется соответствующим тестером равновесного кода, а выходы отдельных тестеров объединяются на входах самопроверяемого компаратора, реализуемого на основе стандартных модулей сжатия парафазных сигналов.

Поскольку известно множество равновесных кодов, возникает естественный вопрос: при каком количестве контролируемых групп выходов и с помощью каких равновесных кодов будет реализована полностью самопроверяемая система функционального контроля с минимальной сложностью технической реализации? Актуальность данного вопроса может быть проиллюстрирована двумя примерами организации систем функционального контроля, приведенными на рис. 2 и 3.

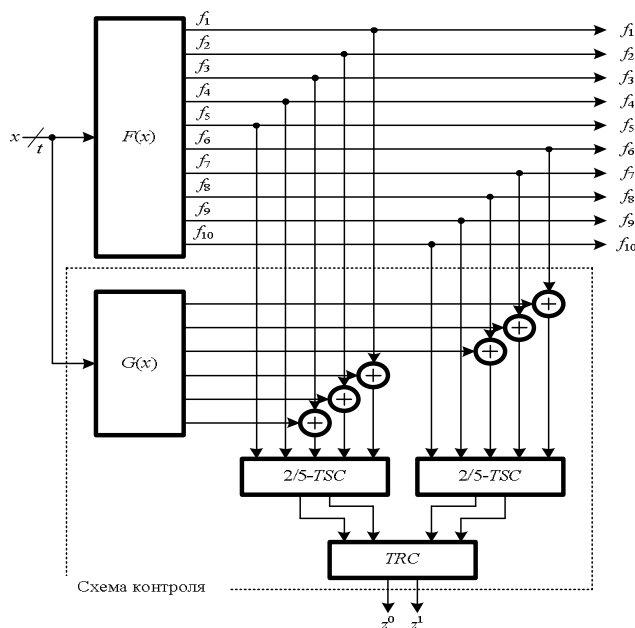


Рис. 2. Контроль схемы с $m = 10$ выходами на основе 2/5-кода

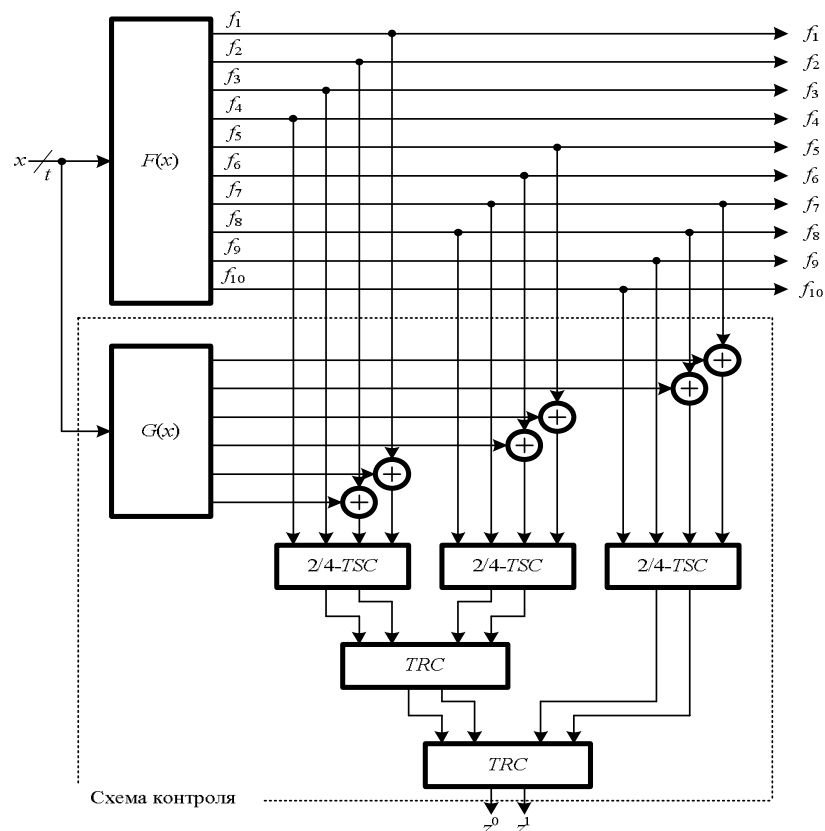


Рис. 3. Контроль схемы с $m = 10$ выходами на основе 2/4-кода

В первом случае при организации контроля схемы с $m = 10$ выходами было выделено два подмножества выходов по пять элементов в каждом, а контроль каждой полученной группы осуществлен на основе 2/5-кода. Выходы двух тестеров 2/5-TSC подключены ко входам одного модуля TRC. Блок логического дополнения при этом будет иметь 6 элементов сложения по модулю два. Во втором случае все выходы разбиты на три подмножества по четыре элемента в каждом, а контроль каждой группы осуществлен на основе 2/4-кода. Выходы трех тестеров 2/4-TSC объединены на входах самопроверяемого компаратора, реализованного с помощью каскадного подключения двух модулей сжатия парафазных сигналов. Блок логического дополнения включает в себя также 6 элементов сложения по модулю два. Таким образом, в обоих случаях блок контрольной логики $G(x)$ имеет одинаковое количество выходов. Сложность технической реализации схемы контроля определяется сложностью реализации блока $G(x)$ и сложностью реализации блока логического дополнения и системы тестеров (неизменяемой части схемы контроля).

Сложности реализации блоков контрольной логики в структурах рис. 2 и 3 могут существенно отличаться и определяются как топологией контролируемой схемы $F(x)$, так и способом доопределения функций логического дополнения с учетом обеспечения самопроверяемости блока логического дополнения [38, 39]. На сложность технической реализации системы функционального контроля влияет также и суммарная сложность тестеров и компаратора. Установим, какой из вариантов оказывается более предпочтительным.

На рис. 4 приведены структурные схемы функциональных элементов, с помощью которых реализовано контрольное оборудование систем функционального контроля из рассматриваемых примеров. Сложность технической реализации подобных структур принято оценивать количеством входов внутренних логических элементов – величиной L [44, 45]. Для тестеров равновесных кодов и стандартных элементов автоматики данные показатели сведены в табл. 1. Контрольная схема первой системы диагностирования (см. рис. 2) строится по формуле $2 \times 2/5-TSC + TRC$, а второй (см. рис. 3) – по формуле $3 \times 2/4-TSC + 2 \times TRC$. В обоих случаях требуется по шесть элементов сложения по модулю два ($6 \times XOR$) в блоке логического дополнения. Таким образом, реализация первой неизменяемой части схемы имеет

сложность 104, а второй неизменяемой части схемы – 60. Неизменяемая часть второй структурной схемы в 1,7 раза проще неизменяемой части первой схемы. Рассматривая другие показатели элементов автоматики (см. табл. 1), такие как быстродействие q , оцениваемое по количеству уровней внутренних логических элементов, а также контролепригодность, оцениваемую по количеству тестовых комбинаций, необходимых для полной проверки одиночных константных неисправностей устройства, отмечаем приоритет второй структурной схемы над первой: она имеет большее быстродействие и потребует меньшее количество тестовых комбинаций для полной проверки каждого тестера.

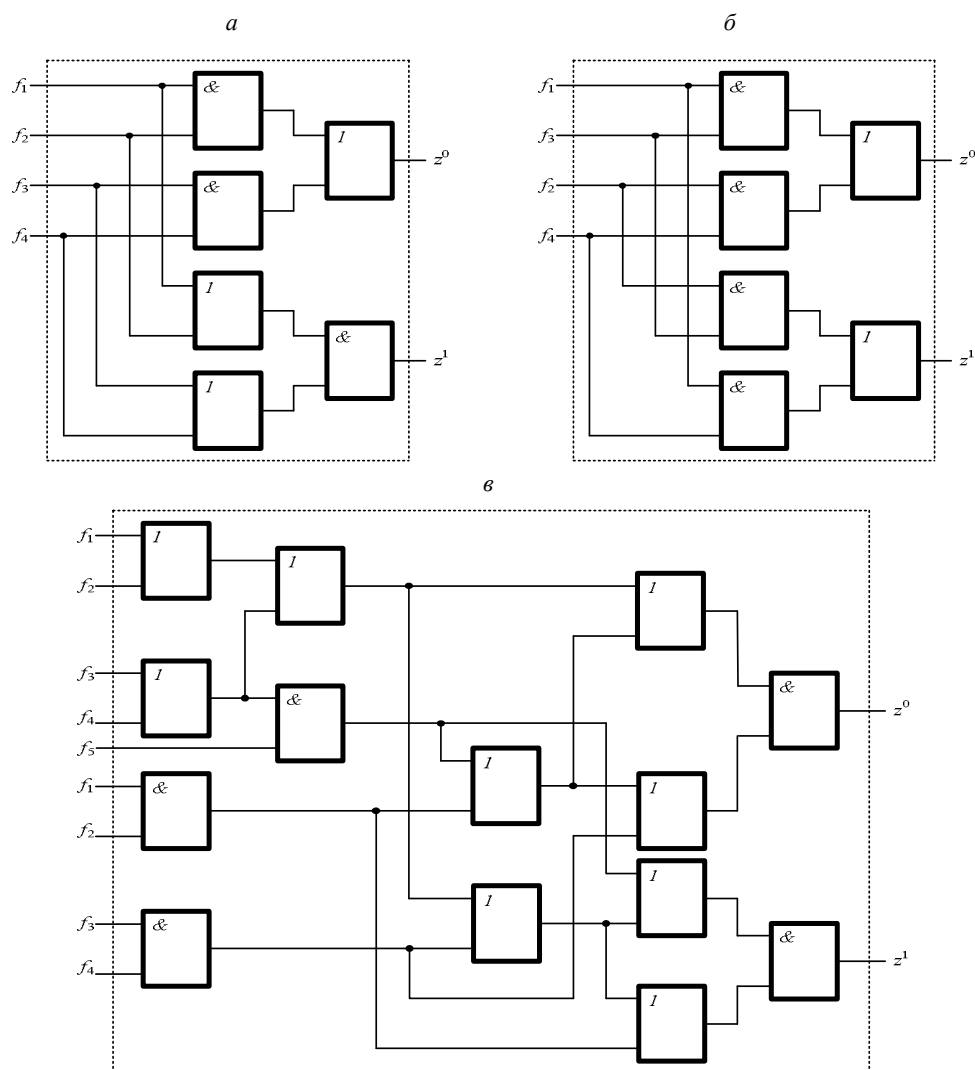


Рис. 4. Структурные схемы тестеров: а – 2/4-TSC; б – TRC; в – 2/5-TSC

Таблица 1

Характеристики функциональных элементов

Функциональный элемент	Тестовые комбинации	Сложность реализации, L	Быстродействие, q
XOR	{00; 01; 10; 11}	6	2
1/3-TSC	{001; 010; 100}	18	3
1/4-TSC	{0001; 0010; 0100; 1000}	14	3
2/4-TSC	{0011; 1100; 1001; 0110}	12	2
TRC	{0101; 0110; 1001; 1010}	12	2
1/5-TSC	{00001; 00010; 00100; 01000; 10000}	22	3
2/5-TSC	{10100; 01010; 01001; 00101; 11000; 00110}	28	5
1/6-TSC	{000001; 000010; 000100; 001000; 010000; 100000}	24	3

Если бы при организации контроля схемы с $m = 10$ выходами были применены другие равновесные коды, например коды «1 из m », это бы только усложнило блоки контрольной логики и логического дополнения. На рис. 5 приведены структурные схемы наиболее простых тестеров для часто используемых при организации систем функционального контроля равновесных кодов. При этом тестеры приведенных кодов имеют не столь большую сложность, а также требуют для своей полной проверки небольшое количество тестовых комбинаций (см. табл. 1). Следует отметить, что равновесные $1/m$ -коды могут эффективно применяться при организации контроля комбинационных схем, особенно, при малом количестве выходов [38, 41].

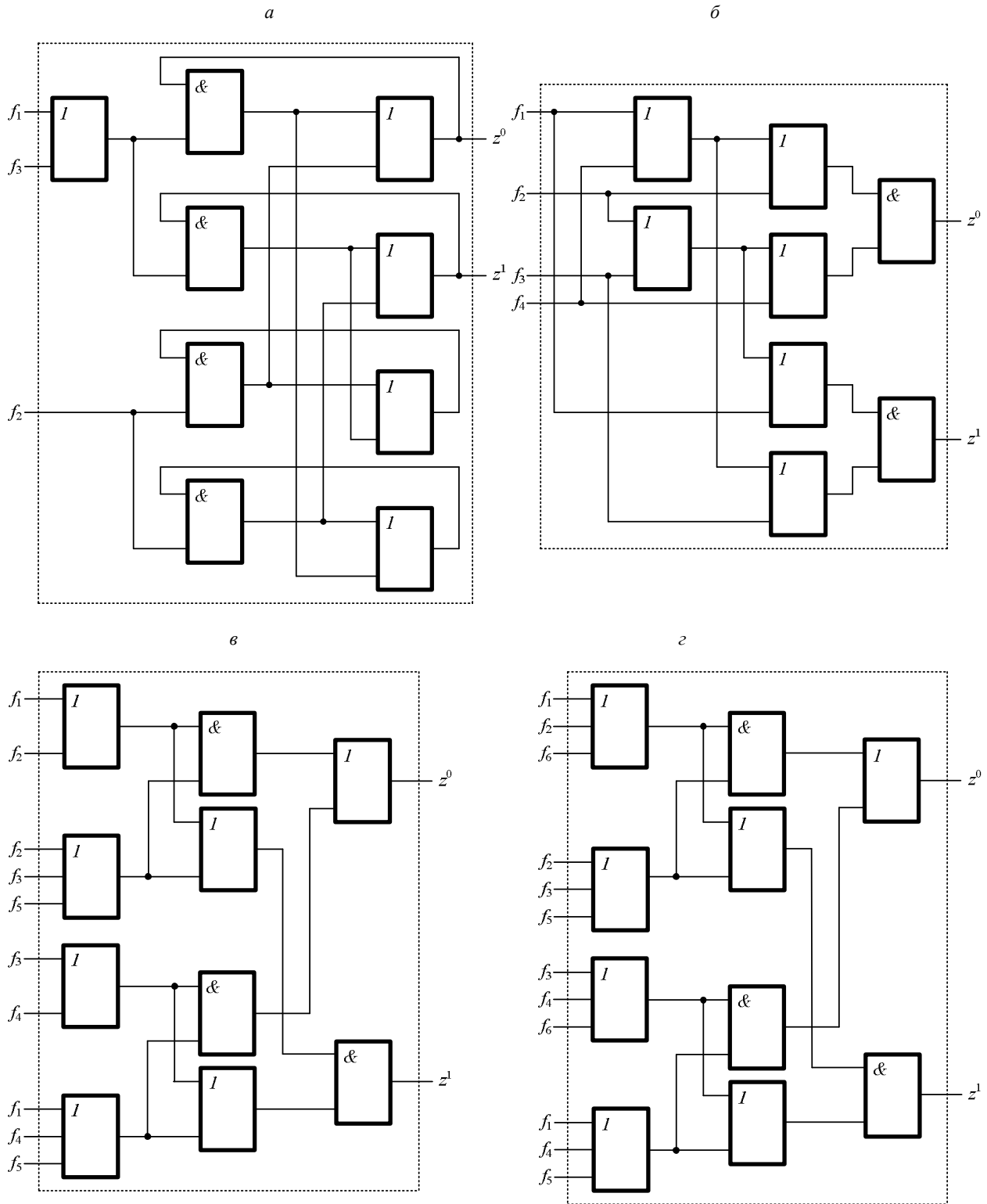


Рис. 5. Структурные схемы тестеров: $a - 1/3\text{-TSC}$; $б - 1/4\text{-TSC}$; $в - 1/5\text{-TSC}$; $г - 1/6\text{-TSC}$

В табл. 2 приведены описания разнообразных способов реализации неизменяемых частей схем контроля дискретных устройств с $m = 3\div 6$ выходами. Для каждого способа указана формула реализации, сложность неизменяемой части (с учетом сложности блока логического дополнения), а также доля сложности технической реализации неизменяемой части схемы от наилучшего способа (коэффициент γ , %).

Т а б л и ц а 2

Способы реализации неизменяемых частей схемы контроля

m	Формула реализации схемы контроля	Количество выходов блока $G(x)$	L	γ , %
3	$1/3\text{-}TSC$	2	30	100
4	$1/4\text{-}TSC$	3	32	228,571
4	$2/4\text{-}TSC$	2	24	100
4	TRC	2	24	100
4	$2 \times 1/3\text{-}TSC + TRC$	4	60	250
5	$1/5\text{-}TSC$	4	46	100
5	$2/5\text{-}TSC$	3	46	100
5	$3 \times TRC$	4	60	130,435
5	$2 \times 2/4\text{-}TSC + TRC$	4	60	130,435
5	$1/4\text{-}TSC + 2/4\text{-}TSC + TRC$	5	68	147,826
5	$2 \times 1/4\text{-}TSC + TRC$	6	76	165,217
5	$2 \times 1/3\text{-}TSC + TRC$	4	72	156,522
6	$1/6\text{-}TSC$	5	54	100
6	$3 \times TRC$	4	60	111,111
6	$2 \times 2/4\text{-}TSC + TRC$	4	60	111,111
6	$1/4\text{-}TSC + 2/4\text{-}TSC + TRC$	5	68	125,926
6	$2 \times 1/4\text{-}TSC + TRC$	6	76	140,741
6	$2 \times 1/3\text{-}TSC + TRC$	4	72	133,333

При малых значениях m эффективен контроль схем в виде полной группы выходов и одного тестера равновесного r/m -кода. Однако с увеличением длины информационного вектора приоритетнее оказывается использование контроля выходов по группам. Это возникает потому, что с увеличением значения m растет сложность тестера равновесного кода для контроля всех выходов, а также увеличивается количество выходов блока контрольной логики и количество элементов XOR в блоке логического дополнения.

В табл. 3 приведены наилучшие способы реализации неизменяемых частей схем контроля для различных значений m .

Т а б л и ц а 3

Варианты реализации неизменяемых частей схемы контроля с наименьшей сложностью

m	Формула тестера	Количество выходов блока $G(x)$
3	$1/3\text{-}TSC$	2
4	$2/4\text{-}TSC, TRC$	2
5	$2/5\text{-}TSC$	3
6	$1/6\text{-}TSC$	5
7	$3 \times TRC, 2 \times 2/4\text{-}TSC + TRC, 2/4\text{-}TSC + 2 \times TRC$	4
8	$3 \times TRC, 2 \times 2/4\text{-}TSC + TRC, 2/4\text{-}TSC + 2 \times TRC$	4
9	$2/5\text{-}TSC + 2/4\text{-}TSC + TRC, 2/5\text{-}TSC + 2 \times TRC$	5
≥ 10	$\left\lceil \frac{m}{4} \right\rceil \times 2/4\text{-}TSC + \left(\left\lceil \frac{m}{4} \right\rceil - 1 \right) \times TRC, \dots, \left(2 \left\lceil \frac{m}{4} \right\rceil - 1 \right) \times TRC$	$2 \left\lceil \frac{m}{4} \right\rceil$

Оказывается, наилучшим вариантом при количестве выходов $m \geq 10$ является разбиение их на группы по четыре выхода в каждой и контроль каждой группы либо на основе $2/4$ -кода, либо на основе модуля TRC . Сложности реализации для случаев количества выходов схем $m = p + 1, p + 2, p + 3$ и $p + 4$, где p – число, кратное четырем, равны. При каждом увеличении на «четверку» сложность реализации возрастает на величину сложности подсхемы реализации $2/4\text{-}TSC + TRC + 2 \times XOR = 36$ (рис. 6).

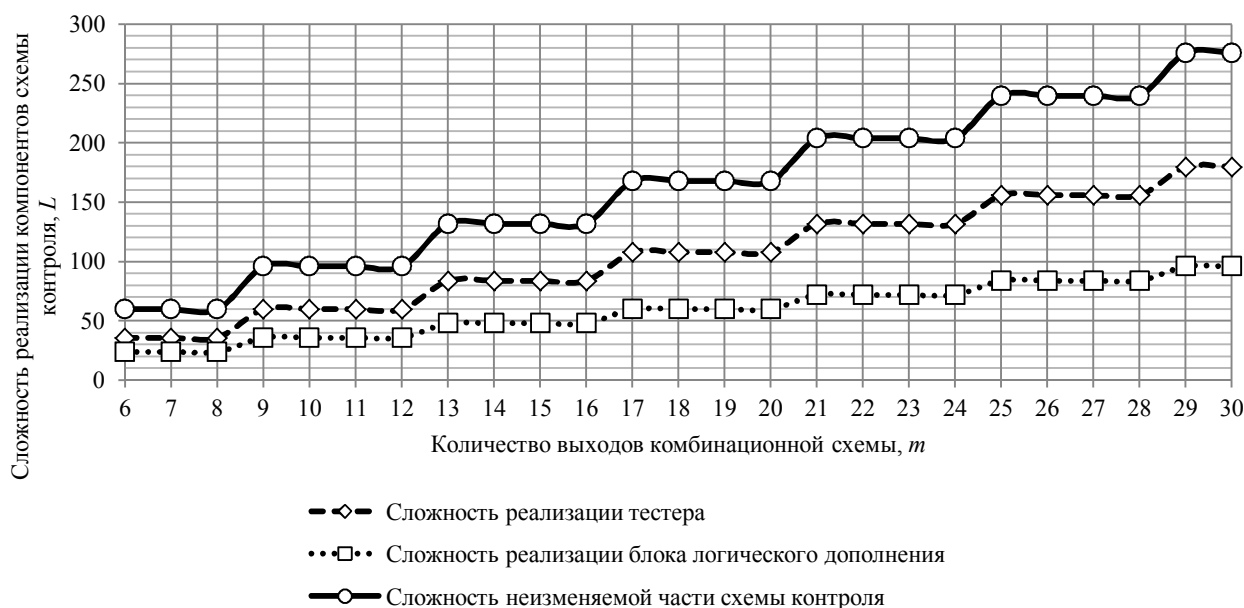


Рис. 6. Сложность технической реализации неизменяемых компонентов схемы контроля при разбиении их на группы контроля по четыре выхода

Заключение

При организации контроля многовыходных комбинационных схем на основе метода логического дополнения с точки зрения сложности технической реализации схем контроля и простоты обеспечения свойства полной самопроверяемости их структур эффективно использовать равновесные коды с малой длиной кодовых слов ($m \leq 6$). Для схем с небольшим количеством выходов удобно применять коды r/m и контролировать все выходы как одну группу. Для многовыходных схем целесообразно при организации контроля разбивать выходы на четырехэлементные подмножества и контролировать каждую полученную группу на основе 2/4-кода или модуля сжатия парафазных сигналов, выходы же тестеров при этом следует объединять на входах самопроверяемого компаратора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каравай М.Ф., Согомонян Е.С. Анализ надежностных характеристик самопроверяемых избыточных структур // Автоматика и телемеханика. 1979. № 8. С. 105–119.
2. Гавзов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Методы обеспечения безопасности дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 8. С. 3–50.
3. Скляр В.В., Харченко В.С. Отказоустойчивые компьютерные системы управления с версионно-пороговой адаптацией: способы адаптации, оценка надежности, выбор архитектур // Автоматика и телемеханика. 2002. № 6. С. 131–145.
4. Дрозд А.В. Нетрадиционный взгляд на рабочее диагностирование вычислительных устройств // Проблемы управления. 2008. № 2. С. 48–56.
5. Рабочее диагностирование безопасных информационно-управляющих систем / А.В. Дрозд, В.С. Харченко, С.Г. Антошук, Ю.В. Дрозд, М.А. Дрозд, Ю.Ю. Сулима ; под ред. А.В. Дрозда, В.С. Харченко. Харьков : Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2012. 614 с.
6. Kharchenko V., Kondratenko Yu., Kacprzyk J. Green IT Engineering: Concepts, Models, Complex Systems Architectures // Springer Book series "Studies in Systems, Decision and Control". 2017. V. 74. 305 p. DOI: 10.1007/978-3-319-44162-7.
7. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Христов Х.А., Гавзов Д.В. Методы построения безопасных микросистем железнодорожной автоматики / под ред. Вл.В. Сапожникова. М. : Транспорт, 1995. 272 с.
8. Микропроцессорная централизация стрелок и сигналов EBILock 950 / Г.А. Казимов, В.Н. Алешин, А.Е. Деревянко, С.В. Золотарева, Г.Ф. Лекута, С.Б. Платунов, А.В. Сураев, С.А. Хохлов, К.Д. Хромушкин ; под. ред. Г.Д. Казиева. М. : ТРАНСИЗДАТ, 2008. 368 с.
9. Theeg G., Vlasenko S. Railway Signalling & Interlocking – International Compendium. Eurailpress, 2009. 448 p.
10. Пархоменко П.П., Согомонян Е.С. Основы технической диагностики (оптимизация алгоритмов диагностирования, аппаратные средства). М. : Энергоатомиздат, 1981. 320 с.
11. Согомонян Е.С., Слабаков Е.В. Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы. М. : Радио и связь, 1989. 207 с.

12. Piestrak S.J. Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes. Wrocław : Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1995. 111 p.
13. Das D., Touba N.A. Weight-Based Codes and Their Application to Concurrent Error Detection of Multilevel Circuits // Proceedings of the 17th IEEE VLSI Test Symposium, USA, CA, Dana Point. 1999. April 25–29. P. 370–376.
14. Das D., Touba N.A. Synthesis of Circuits with Low-Cost Concurrent Error Detection Based on Bose-Lin Codes // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1999. V. 15. Issue 1–2. P. 145–155.
15. Nicolaidis M., Zorian Y. On-Line Testing for VLSI – a Compendium of Approaches // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1998. V. 12. Issue 1–2. P. 7–20.
16. Mitra S., McCluskey E.J. Which Concurrent Error Detection Scheme to Choose? // Proceedings of International Test Conference, 2000, USA, Atlantic City, NJ. 2000. 03–05 October. P. 985–994. DOI: 10.1109/TEST.2000.894311.
17. Аксёнова Г.П. Необходимые и достаточные условия построения полностью проверяемых схем свертки по модулю 2 // Автоматика и телемеханика. 1979. № 9. С. 126–135.
18. Слабаков Е.В., Согомонян Е.С. Самопроверяемые вычислительные устройства и системы (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1981. № 11. С. 147–167.
19. Аксёнова Г.П. О функциональном диагностировании дискретных устройств в условиях работы с неточными данными // Проблемы управления. 2008. № 5. С. 62–66.
20. Блюдов А.А., Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. О кодах с суммированием единичных разрядов в системах функционального контроля // Автоматика и телемеханика. 2014. № 8. С. 131–145.
21. Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Применение модульных кодов с суммированием для построения систем функционального контроля комбинационных логических схем // Автоматика и телемеханика. 2015. № 10. С. 152–169.
22. Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Условия обнаружения неисправности логического элемента в комбинационном устройстве при функциональном контроле на основе кода Бергера // Автоматика и телемеханика. 2017. № 5. С. 152–165.
23. Гессель М., Морозов А.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Логическое дополнение – новый метод контроля комбинационных схем // Автоматика и телемеханика. 2003. № 1. С. 167–176.
24. Freiman C.V. Optimal Error Detection Codes for Completely Asymmetric Binary Channels // Information and Control. 1962. V. 5, Issue 1. P. 64–71. DOI: 10.1016/S0019-9958(62)90223-1.
25. Гессель М., Мошанин В.И., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Обнаружение неисправностей в самопроверяемых комбинационных схемах с использованием свойств самодвойственных функций // Автоматика и телемеханика. 1997. № 12. С. 193–200.
26. Saposhnikov V.I., Dmitriev A., Goessel M., Saposhnikov V.V. Self-Dual Parity Checking – a New Method for on Line Testing // Proceedings of 14th IEEE VLSI Test Symposium, USA, Princeton, 1996. P. 162–168.
27. Saposhnikov V.I., Moshanin V., Saposhnikov V.V., Goessel M. Self-Dual Multi-Output Combinational Circuits with Output Data Compaction // Compendium of Papers IEEE European Test Workshop (ETW'97). Cagliari, Italy. 1997. May 28–30. P. 107–111.
28. Saposhnikov V.I., Saposhnikov V.V., Dmitriev A., Goessel M. Self-Dual Duplication for Error Detection // Proceedings of 7th Asian Test Symposium. Singapore, 1998. P. 296–300.
29. Saposhnikov V.I., Moshanin V., Saposhnikov V.V., Goessel M. Experimental Results for Self-Dual Multi-Output Combinational Circuits // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1999. V. 14. Issue 3. P. 295–300.
30. Гессель М., Дмитриев А.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Самотестируемая структура для функционального обнаружения отказов в комбинационных схемах // Автоматика и телемеханика. 1999. № 11. С. 162–174.
31. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Гёссель М. Самодвойственные дискретные устройства. СПб. : Энергоатомиздат (Санкт-Петербургское отделение), 2001. 331 с.
32. Goessel M., Saposhnikov V.I., Saposhnikov V.V., Dmitriev A. A New Method for Concurrent Checking by Use of a 1-out-of-4 Code // Proceedings of the 6th IEEE International On-line Testing Workshop. 3–5 July. Palma de Mallorca, Spain, 2000. P. 147–152.
33. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Дмитриев А.В., Морозов А.В., Гессель М. Организация функционального контроля комбинационных схем методом логического дополнения // Электронное моделирование. 2002. Т. 24, № 6. С. 51–66.
34. Saposhnikov V.V., Saposhnikov V.I., Morozov A., Osadtchi G., Gossel M. Design of Totally Self-Checking Combinational Circuits by Use of Complementary Circuits // Proceedings of East-West Design & Test Workshop. Yalta, Ukraine, 2004. P. 83–87.
35. Гессель М., Морозов А.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Контроль комбинационных схем методом логического дополнения // Автоматика и телемеханика. 2005. № 8. С. 161–172.
36. Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D. New Methods of Concurrent Checking. Ed. 1. Dordrecht : Springer Science + Business Media B.V., 2008. 184 p.
37. Das D.K., Roy S.S., Dmitriev A., Morozov A., Gössel M. Constraint Don't Cares for Optimizing Designs for Concurrent Checking by 1-out-of-3 Codes // Proceedings of the 10th International Workshops on Boolean Problems. Freiburg, Germany, September, 2012. P. 33–40.
38. Efanov D., Sapozhnikov V., Sapozhnikov V.I. Methods of Organization of Totally Self-Checking Concurrent Error Detection System on the Basis of Constant-Weight «1-out-of-3»-Code // Proceedings of 14th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2016). Yerevan, Armenia, 2016. October 14–17. P. 117–125.
39. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Метод функционального контроля комбинационных логических устройств на основе кода «2 из 4» // Известия вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 7. С. 524–533. DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-7-524-533.

40. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Построение самопроверяемых структур систем функционального контроля на основе равновесного кода «2 из 4» // Проблемы управления. 2017. № 1. С. 57–64.
41. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Пивоваров Д.В. Метод логического дополнения на основе равновесного кода «1 из 4» для построения полностью самопроверяемых структур систем функционального контроля // Электронное моделирование. 2017. Т. 39, № 2. С. 15–34.
42. Huches J.L.A., McCluskey E.J., Lu D.J. Design of Totally Self-Checking Comparators with an Arbitrary Number of Inputs // IEEE Transactions on Computers. 1984. V. C-33, No. 6. P. 546–550.
43. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Организация систем функционального контроля с обеспечением полной самопроверяемости структуры на основе модулей сжатия парафазных сигналов // Известия вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 5. С. 404–411. DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-5-404-411.
44. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Самопроверяемые дискретные устройства. СПб. : Энергоатомиздат, 1992. 224 с.
45. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Самопроверяемые тестеры для равновесных кодов // Автоматика и телемеханика. 1992. № 3. С. 3–35.

Сапожников Валерий Владимирович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: port.at.pgups1@gmail.com

Сапожников Владимир Владимирович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: at.pgups@gmail.com

Ефанов Дмитрий Викторович, канд. техн. наук, доцент. E-mail: TrES-4b@yandex.ru

Пивоваров Дмитрий Вячеславович. E-mail: pivovarov.d.v.spb@gmail.com

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I (г. Санкт-Петербург)

Поступила в редакцию 3 мая 2017 г.

Sapozhnikov Valery V., Sapozhnikov Vladimir V., Efanov Dmitry V., Pivovarov Dmitry V. (Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, St. Petersburg, Russian Federation).

Synthesis of concurrent error detection systems of multioutput combinational circuits based on Boolean complement method.

Keywords: combinational circuit; concurrent error detection system; Boolean complement method; constant-weight code; «1-out-of-3»-code; «1-out-of-4»-code; «2-out-of-4»-code; self-checking.

DOI: 10.17223/19988605/41/9

One of approaches to the logical combinational circuits reliability increase is addition of fault detection means and organization of concurrent error detection systems. Two basic structures are often used for this purpose. First, one realizes the idea of check bits calculation: outputs of diagnostic object correspond to the data vector; test circuit is built by the principle to add the data vector with the check vector of previously chosen error detection code. Second, one realizes the idea of logical complement of the vector formed on the outputs of diagnostic object to the code word of previously chosen non-separable code. The second structure has an advantage: it allows transformation of any number of the original vector bits; thereby it gives the possibility to minimize the structural redundancy of diagnostic system and achieve the self-checking property simpler.

The paper is devoted to the features of synthesis of concurrent error detection systems of multioutput combinational circuits based on Boolean complement method. The features of technical implementation of unchangeable test circuit parts are analyzed; they are synthesized using Boolean complement method for combinational circuits with any number of outputs. It is shown that the most effective approach for the circuits with lot of outputs is distribution of them by groups with subsequent check using constant-weight codes with small code vector lengths ($m \leq 6$). It is determined that the way of technical implementation with minimal redundancy of unchangeable test circuit part is the distribution of outputs on four-element subsets; every subset is checked using constant-weight code “2-out-of-4” or self-checking two-rail checker. Features of technical implementation of concurrent error detection system based on constant-weight codes are stated.

REFERENCES

1. Karavai, M.F. & Sogomonyan, E.S. (1979) Analysis of Reliability Characteristics of Self-Checkable Redundant Structures. *Automation and Remote Control*. 40(8). pp. 1186–1197.
2. Gavzov, D.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, V.I.V. (1994) Methods for Providing Safety in Discrete Systems. *Automation and Remote Control*. 55(8). pp. 3–50.
3. Sklyar, V.V. & Kharchenko, V.S. (2002) Fault-Tolerant Computer-Aided Control Systems with Multiversion-Threshold Adaptation: Adaptation Methods, Reliability Estimation, and Choice of an Architecture. *Automation and Remote Control*. 63(6). pp. 991–1003.
4. Drozd, A.V. (2008) An Untraditional View on Operational Diagnostics of Computing Devices. *Control Sciences*. 2. pp. 48–56. (In Russian).
5. Drozd, A.V., Kharchenko, V.S., Antoshchuk, S.G., Drozd, Ju.V., Drozd, M.A. & Sulima, Yu.Yu. (2012) *Rabochee diagnostirovanie bezopasnykh informatsionno-upravlyayushchikh sistem* [Objects and Methods of On-Line Testing for Safe Instrumentation and Control Systems]. Kharkov: National Aerospace University.
6. Kharchenko, V., Kondratenko, Yu. & Kacprzyk, J. (2017) Green IT Engineering: Concepts, Models, Complex Systems Architectures. *Studies in Systems, Decision and Control*. 74. DOI: 10.1007/978-3-319-44162-7.
7. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I.V., Khristov, H.A. & Gavzov, D.V. (1995) *Metody postroeniya bezopasnykh mikroelektronnykh sistem zheleznodorozhnoy avtomatiki* [Methods for Constructing Safe Microelectronic Systems for Railway Automation]. Moscow: Transport.

8. Kazimov, G.A., Aleshin, V.N., Derevyanko, A.E., Zolotarev, S.V., Lekuta, G.F., Platunov, S.B., Suraev, A.V., Khokhlov, S.A., Khromushkin, K.D. (2008) *Mikroprotssornaya tsentralizatsiya strelok i signalov EBILock 950* [Microprocessor Interlocking System EBILock 950]. Moscow: TRANSIZDAT.
9. Theeg, G. & Vlasenko, S. (2009) *Railway Signalling & Interlocking – International Compendium*. Eurailpress in DVV Media Group.
10. Parkhomenko, P.P. & Sogomonyan, E.S. (1981) *Osnovy tekhnicheskoy diagnostiki (optimizatsiya algoritmov diagnostirovaniya, apparaturnye sredstva)* [Technical Diagnosis Fundamentals (Diagnostic Algorithm Optimization, Apparatus Means)]. Moscow: Energoatomizdat.
11. Sogomonyan, E.S. & Slabakov, E.V. (1989) *Samoproveryaemye ustroystva i otkazoustoychivye sistemy* [Self-Checking Devices and Fault-Tolerant Systems]. Moscow: Radio i svyaz'.
12. Piestrak, S.J. (1995) *Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes*. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.
13. Das, D. & Touba, N.A. (1999) Weight-Based Codes and Their Application to Concurrent Error Detection of Multilevel Circuits. *Proceedings of the 17th IEEE VLSI Test Symposium*. USA, CA, Dana Point. April 25–29, 1999. pp. 370–376.
14. Das, D. & Touba, N.A. (1999) Synthesis of Circuits with Low-Cost Concurrent Error Detection Based on Bose-Lin Codes. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 15(1-2). pp. 145–155. DOI: 10.1023/A:1008344603814
15. Nicolaidis, M. & Zorian, Y. (1998) On-Line Testing for VLSI – A Compendium of Approaches. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 12(1-2). pp. 7–20.
16. Mitra, S. & McCluskey, E.J. (2000) Which Concurrent Error Detection Scheme to Choose? *Proceedings of International Test Conference*. USA, Atlantic City, NJ. October 3–5, 2000. pp. 985–994. DOI: 10.1109/TEST.2000.894311.
17. Aksyonova, G.P. (1979) Necessary and Sufficient Conditions for Design of Completely Checkable Modulo 2 Convolution Circuits. *Automation and Remote Control*. 40(9). pp. 1362–1369.
18. Slabakov, E.V. & Sogomonyan, E.S. (1981) Self-Checking Computing Devices and Systems (Review). *Automation and Remote Control*. 11. pp. 147–167.
19. Aksyonova, G.P. (2008) On Functional Diagnosis of Discrete Devices under Imperfect Data Processing Conditions. *Control Sciences*. 5. pp. 62–66.
20. Blyudov, A.A., Efanov, D.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, VI.V. (2014) On Codes with Summation of Unit Bits In Concurrent Error Detection Systems. *Automation and Remote Control*. 75(8). pp. 1460–1470. DOI: 10.1134/S0005117914080098
21. Efanov, D.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, VI.V. (2015) Application of Modular Summation Codes to Concurrent Error Detection Systems for Combinational Boolean Circuits. *Automation and Remote Control*. 76(10). pp. 1834–1848. DOI: 10.1134/S0005117915100112
22. Efanov, D.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, VI.V. (2017) Conditions for Detecting a Logical Element Fault in a Combination Device under Concurrent Checking Based on Berger's Code. *Automation and Remote Control*. 78(5). pp. 892–902. DOI: 10.1134/S0005117917050113
23. Goessel, M., Morozov, A.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, VI.V. (2003) Logic Complement, a New Method of Checking the Combinational Circuits. *Automation and Remote Control*. 64(1). pp. 153–161. DOI: 10.1023/A:1021884727370
24. Freiman, C.V. (1962) Optimal Error Detection Codes for Completely Asymmetric Binary Channels. *Information and Control*. 5(1). pp. 64–71. DOI: 10.1016/S0019-9958(62)90223-1
25. Gössel, M., Moshanin, V.I., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, VI.V. (1997) Fault Detection in Self-Test Combination Circuits Using the Properties of Self-Dual Functions. *Automation and Remote Control*. 12. pp. 193–200.
26. Sapozhnikov, VI.V., Dmitriev, A., Gössel, M. & Sapozhnikov, V.V. (1996) Self-Dual Parity Checking – a New Method for on Line Testing. *Proceedings of 14th IEEE VLSI Test Symposium*. USA, Princeton. pp. 162–168.
27. Sapozhnikov, VI.V., Moshanin, V., Sapozhnikov, V.V. & Gössel, M. (1997) Self-Dual Multi-Output Combinational Circuits with Output Data Compaction. *Compendium of Papers IEEE European Test Workshop (ETW'97)*. Cagliari, Italy. May 28–30, 1997. pp. 107–111.
28. Sapozhnikov, VI.V., Sapozhnikov, V.V., Dmitriev, A. & Gössel, M. (1998) Self-Dual Duplication for Error Detection. *Proceedings of 7th Asian Test Symposium*, Singapore. pp. 296–300.
29. Sapozhnikov, VI.V., Moshanin, V., Sapozhnikov, V.V. & Gössel, M. (1999) Experimental Results for Self-Dual Multi-Output Combinational Circuits. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 14(3). pp. 295–300. DOI: 10.1023/A:1008370405607
30. Gössel, M., Dmitriev, A.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, VI.V. (1999) A Functional Fault-Detection Self-Test for Combinational Circuits. *Automation and Remote Control*. 60(11). pp. 1653–1663.
31. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, VI.V. & Gössel, M. (2001) *Self-Dual Discrete Devises*. St. Petersburg: Energoatomizdat.
32. Gössel, M., Sapozhnikov, VI.V., Sapozhnikov, V. & Dmitriev, A. (2000) A New Method for Concurrent Checking by Use of a 1-out-of-4 Code. *Proceedings of the 6th IEEE International On-line Testing Workshop*. July 3–5, 2001. Palma de Mallorca. pp. 147–152.
33. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, VI.V., Dmitriev, A.V., Morozov, A.V. & Gössel, M. (2002) Organization of Functional Checking of Combinational Circuits by the Logic Complement Method. *Electronic Modeling*. 24(6). pp. 51–66.
34. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, VI.V., Morozov, A., Osadtchi, G. & Gössel, M. (2004) Design of Totally Self-Checking Combinational Circuits by Use of Complementary Circuits. *Proceedings of East-West Design & Test Workshop*. Yalta, Ukraine. pp. 83–87.
35. Gössel, M., Morozov, A.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, VI.V. (2005) Checking Combinational Circuits by the Method of Logic Complement. *Automation and Remote Control*. 66(8). pp. 1336–1346. DOI: 10.1007/s10513-005-0174-2
36. Gössel, M., Ocheretny, V., Sogomonyan, E. & Marienfeld, D. (2008) *New Methods of Concurrent Checking: Edition 1*. Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V.

37. Das, D.K., Roy, S.S., Dmitiriev, A., Morozov, A. & Gössel, M. (2012) Constraint Don't Cares for Optimizing Designs for Concurrent Checking by 1-out-of-3 Codes. *Proceedings of the 10th International Workshops on Boolean Problems*. Freiberg, Germany. September. pp. 33–40.
38. Efanov, D., Sapozhnikov, V. & Sapozhnikov, VI. (2016) Methods of Organization of Totally Self-Checking Concurrent Error Detection System on the Basis of Constant-Weight “1-out-of-3”-Code. *Proceedings of 14th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2016)*. Yerevan, Armenia. October 14–17, 2016. pp. 117–125.
39. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, VI.V. & Efanov, D.V. (2016) Method of Operation Control Over Combinatory Logic Device Based on 2-out-of-4 Code. *Journal of Instrument Engineering*. 59(7). pp. 524–533. DOI 10.17586/0021-3454-2016-59-7-524-533
40. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, VI.V. & Efanov, D.V. (2017) Design of Self-Checking Concurrent Error Detection Systems Based on “2-out-of-4” Constant-Weight Code. *Control Sciences*. 1. pp. 57–64.
41. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, VI.V. Efanov, D.V. & Pivovarov, D.V. (2017) Boolean Complement Method Based on Constant-Weight Code “1-Out-Of-4” for Formation of Totally Self-Checking Concurrent Error Detection Systems. *Electronic Modeling*. 39(2). pp. 15–34.
42. Huches, J.L.A., McCluskey, E.J. & Lu, D.J. (1984) Design of Totally Self-Checking Comparators with an Arbitrary Number of Inputs. *IEEE Transactions on Computers*. C-33(6). pp. 546–550.
43. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, VI.V. & Efanov, D.V. (2017) Organization of Concurrent Error Detection System Ensuring Totally Self-Checking of Structure Based on Two-Rail Checkers. *Journal of Instrument Engineering*. 60(5). pp. 404–411. DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-5-404-411.
44. Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, VI.V. (1992) *Self-Checking Digital Devices*. St. Petersburg: Energoatomizdat.
45. Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, VI.V. (1992) Self-Checking Checkers for Constant-Weight Codes. *Automation and Remote Control*. 53(3). pp. 321–348.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АКИНИНА Наталья Викторовна – аспирант кафедры космических технологий факультета вычислительной техники Рязанского государственного радиотехнического университета. E-mail: natalya.akinina@gmail.com

БАБАНОВ Алексей Михайлович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии факультета информатики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: babanov2000@mail.ru

БЕРЕЗИН Дмитрий Владимирович – аспирант факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: berezin14@mail.ru

ВЕРЕТЕЛЬНИКОВА Ирина Викторовна – аспирант кафедры теоретической и прикладной информатики факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: ira-veterok@mail.ru

ЕФАНОВ Дмитрий Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации и телемеханики на железных дорогах Петербургского государственного университета путей сообщения (г. Санкт Петербург). E-mail: TrES-4b@yandex.ru

КИРИЕНКО Ирина Евгеньевна – аспирант кафедры программирования факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: irina.kirienko@sibmail.com

КОЛЕСЕНКОВ Александр Николаевич – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры космических технологий факультета вычислительной техники Рязанского государственного радиотехнического университета. E-mail: sk62@mail.ru

ЛЕМЕШКО Борис Юрьевич – профессор, доктор технических наук, главный научный сотрудник кафедры теоретической и прикладной информатики факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: Lemesenko@ami.nstu.ru

ЛЕМЕШКО Станислав Борисович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник кафедры теоретической и прикладной информатики факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: skyer@mail.ru

ЛЕТУНОВИЧ Юлия Евгеньевна – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономической кибернетики и теории вероятностей Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины (Беларусь). E-mail: yletunovich@gmail.com

МАТРОСОВА Анжела Юрьевна – профессор, доктор технических наук, заведующая кафедрой программирования факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: mau11@yandex.ru

МЕДВЕДЕВ Геннадий Алексеевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета (г. Минск, Беларусь). E-mail: MedvedevGA@bsu.by

НЕЖЕЛЬСКАЯ Людмила Алексеевна – доцент, доктор физико-математических наук, доцент кафедры исследования операций факультета прикладной математики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ludne@mail.ru

НИКОЛАЕВА Екатерина Александровна – кандидат технических наук, доцент кафедры программирования факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: nikolaeva-ea@yandex.ru

ОСТАНИН Сергей Александрович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры программирования факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: sergeiostanin@yandex.ru

ПАВЛИКОВ Максим Константинович – аспирант кафедры программной математики и программирования Московского авиационного института. E-mail: severemax@yandex.ru

ПЕТРОВ Александр Викторович – магистрант кафедры программной инженерии факультета информатики Томского государственного университета. E-mail: flamingcode@mail.ru

ПИВОВАРОВ Дмитрий Вячеславович – аспирант Петербургского государственного университета путей сообщения (г. Санкт Петербург). E-mail: pivovarov.d.v.spb@gmail.com

ПСОЯНЦ Владимир Григорьевич – аспирант кафедры космических технологий факультета вычислительной техники Рязанского государственного радиотехнического университета. E-mail: psioians@mail.ru

САПОЖНИКОВ Валерий Владимирович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры Автоматики и телемеханики на железных дорогах Петербургского государственного университета путей сообщения (г. Санкт Петербург). E-mail: kat@pgups.edu

САПОЖНИКОВ Владимир Владимирович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры автоматики и телемеханики на железных дорогах Петербургского государственного университета путей сообщения (г. Санкт Петербург). E-mail: kat@pgups.edu

ТАГАНОВ Александр Иванович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой космических технологий факультета вычислительной техники Рязанского государственного радиотехнического университета. E-mail: sk62@mail.ru

ЯКУБОВИЧ Оксана Владимировна – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономической кибернетики и теории вероятностей Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины (Беларусь). E-mail: yakubovich@gsu.by

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2017. № 41

Редактор Н.А. Афанасьева
Корректор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 18.12.2017 г. Формат 60x84¹/₈.
Гарнитура Times. Печ. л. 10,5; усл. печ. л. 9,7.
Тираж 250 экз. Заказ № 2905. Цена свободная.

Дата выхода в свет 26.12.2017 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru