

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.714.5

ОДИН ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ТРАНЗИТИВНОГО МНОЖЕСТВА БЛОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

И. В. Чередник

Московский технологический университет (МИРЭА), г. Москва, Россия

Пусть Ω — произвольное конечное множество и $\mathcal{Q}(\Omega)$ — семейство всех бинарных квазигрупп, определённых на множестве Ω . Преобразование $\Omega^n \rightarrow \Omega^n$, $n \geq 2$, реализуемое сетью Σ с одной бинарной операцией F , будем обозначать Σ^F . В терминах строения сети Σ доказан критерий биективности всех преобразований из множества $\{\Sigma^F : F \in \mathcal{Q}(\Omega)\}$ и определено каноническое представление таких сетей. Вводится и разрабатывается аппарат разметки сетей, который позволяет сформулировать и обосновать необходимые и достаточные условия для транзитивности множества преобразований $\{\Sigma^F : F \in \mathcal{Q}(\Omega)\}$. Предложен эффективный способ проверки транзитивности множества преобразований $\{\Sigma^F : F \in \mathcal{Q}(\Omega)\}$. Изложен и обоснован алгоритм построения сетей Σ , для которых множество преобразований $\{\Sigma^F : F \in \mathcal{Q}(\Omega)\}$ является транзитивным.

Ключевые слова: *сети, квазигруппы, блочные преобразования, транзитивное множество блочных преобразований.*

DOI 10.17223/20710410/38/1

ONE APPROACH TO CONSTRUCTING A TRANSITIVE CLASS OF BLOCK TRANSFORMATIONS

I. V. Cherednik

*Moscow Technological University (MIREA), Moscow, Russia***E-mail:** p.n.v.k.s@mail.ru

In the paper, a new type of block transformations is determined and investigated. These transformations can be used to construct hash functions and block ciphers. Let Ω be an arbitrary finite set, and $\mathcal{Q}(\Omega)$ be the collection of all binary quasigroups defined on the set Ω . We consider the mappings $\Sigma^F : \Omega^n \rightarrow \Omega^n$ that are implemented by a network Σ of a width n with one binary operation $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$. The network Σ is called bijective for Ω if the mapping Σ^F is bijective for each $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$. We show that the network Σ is bijective for all finite sets iff the network Σ is bijective for some finite set Ω such that $|\Omega| \geq 2$. Therefore, we say that the network Σ is bijective if it is bijective for a nontrivial finite set. The networks Σ_1, Σ_2 are called equivalent for Ω if the map Σ_1^F coincides with the map Σ_2^F for each $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$. Moreover, we say that the networks Σ_1, Σ_2 are equivalent if the networks Σ_1, Σ_2 are equivalent for all finite sets. It is easy to define the elementary networks by analogy with the elementary matrices. We prove that every bijective network Σ is equivalent to a unique

product of elementary networks. This product is called the canonical representation of Σ and its length is denoted by $\|\Sigma\|$. We prove that bijective networks Σ_1, Σ_2 of equal width n are equivalent iff they are equivalent for some finite set Ω such that $|\Omega| \geq \|\Sigma_1\| + \|\Sigma_2\| + n$. A bijective network Σ is called transitive for Ω if the set $\{\Sigma^F : F \in \mathcal{Q}(\Omega)\}$ is transitive. We prove that the bijective network Σ is transitive for all sufficiently large finite sets iff Σ is transitive for some finite set Ω such that $|\Omega| \geq \|\Sigma\| + n$. In addition, we propose an effective method for verifying the network transitivity for all sufficiently large finite sets, namely the bijective network Σ is transitive for Ω such that $|\Omega| \geq \|\Sigma\| + n$ whenever it is transitive for some two-element subset of Ω . In the final section, we expound an algorithm for constructing transitive networks. For a given bijective network Σ of a width n , the algorithm adds $3n - 3$ elementary networks to the canonical representation of Σ without changing the existing contents. As a result of these modifications, we obtain a bijective network $\hat{\Sigma}$ that is transitive for every sufficiently large finite set Ω ($|\Omega| \geq \|\hat{\Sigma}\| + n$).

Keywords: *network, quasigroup, block transformation, transitive class of block transformations.*

Введение

Произвольная бинарная операция $F: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ называется квазигруппой на множестве Ω , если уравнения вида

$$F(x, b) = c, \quad F(a, y) = c$$

однозначно разрешимы при любых $a, b, c \in \Omega$ [1]. Множество всех квазигрупп, заданных на множестве Ω , будем обозначать $\mathcal{Q}(\Omega)$.

Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ — множество переменных и $*$ — символ бинарной операции. Множество всех формул в алфавите $\{x_1, \dots, x_n, *\}$ будем обозначать $\mathcal{W}$. При сопоставлении символу « $*$ » конкретной бинарной квазигруппы $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$ формула $w(x_1, \dots, x_n)$ реализует отображение $w^F: \Omega^n \rightarrow \Omega$, а набор формул $(w_1, \dots, w_m) \in \mathcal{W}^m$ — отображение $(w_1^F, \dots, w_m^F): \Omega^n \rightarrow \Omega^m$.

Определение 1. Пусть $(v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{W}^k$ и в наборе $(w_1, \dots, w_m) \in \mathcal{W}^m$ каждая из формул $w_j, j \in \{1, \dots, m\}$, либо имеет вид $v_{i_1} * v_{i_2}, i_1 \neq i_2, i_1, i_2 \in \{1, \dots, k\}$, либо является некоторой формулой $v_i, i \in \{1, \dots, k\}$. Тогда будем говорить, что набор формул $(w_1, \dots, w_m)$ является *результатом преобразования* набора формул $(v_1, \dots, v_k)$.

Один из способов построения произвольного набора формул $(w_1, \dots, w_m)$ заключается в последовательном преобразовании набора переменных $(x_1, \dots, x_n)$. Для исследования свойств отображений одного класса, соответствующего определённому набору формул, введём дополнительное представление процесса преобразований набора формул, которое отличается большей наглядностью.

Определение 2. Пусть $t, n_0, n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$ и

$$X_0 = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n_0}^{(0)}\}, X_1 = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}\}, \dots, X_t = \{x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_{n_t}^{(t)}\}$$

— семейство попарно непересекающихся конечных непустых множеств. Тогда *квазигрупповой сетью* (далее — просто *сетью*) *длины* t будем называть простой ориентированный граф Σ с множеством вершин $X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_t$, содержащий только рёбра вида $(x_i^{(s-1)}, x_j^{(s)})$, $s \in \{1, \dots, t\}$, с тем ограничением, что степень захода каждой вершины $x_j^{(s)}, s \in \{1, \dots, t\}$, равна 1 или 2. При этом если степень захода вершины $x_j^{(s)}$

равна 2, то рёбра $(x_{i_1}^{(s-1)}, x_j^{(s)})$ и $(x_{i_2}^{(s-1)}, x_j^{(s)})$ имеют различные метки из множества $\{l, r\}$. Число $\max\{n_0, \dots, n_t\}$ будем называть *шириной* сети Σ . Множества X_0 и X_t называются множествами начальных и конечных вершин соответственно. Подграф Σ_s сети Σ , основанный на множестве вершин $X_{s-1} \cup X_s$, будем называть *s-м слоем* сети Σ . Сеть Σ называется *однослойной*, если она имеет длину 1.

Определение 3. Пусть Σ и Σ' — сети с множествами вершин $X = X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_s$ и $X' = X'_0 \cup X'_1 \cup \dots \cup X'_t$ соответственно и $X \cap X' = X_s = X'_0$. Тогда естественным образом можно определить сеть длины $s + t$ с множеством вершин $X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_s \cup X'_1 \cup \dots \cup X'_t$, которую будем называть *произведением* сетей Σ и Σ' и обозначать $\Sigma \cdot \Sigma'$.

Непосредственно из определений 2 и 3 следует, что произвольная сеть Σ длины t является произведением однослойных сетей: $\Sigma = \Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t$.

Определение 4. Пусть $(v_1, \dots, v_n)$ — произвольный набор формул и Σ — однослойная сеть с множеством вершин $\{x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\} \cup \{x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}\}$. Тогда определим набор формул $(w_1, \dots, w_m)$ по следующим правилам:

- если вершине $x_j^{(1)}$ инцидентно единственное ребро $(x_i^{(0)}, x_j^{(1)})$, то полагаем $w_j = v_i$;
- если вершине $x_j^{(1)}$ инцидентны рёбра $(x_{i_1}^{(0)}, x_j^{(1)})$ и $(x_{i_2}^{(0)}, x_j^{(1)})$ с метками l и r соответственно, то полагаем $w_j = v_{i_1} * v_{i_2}$.

При этом будем говорить, что однослойная сеть Σ *описывает преобразование* набора формул $(v_1, \dots, v_n)$ в набор формул $(w_1, \dots, w_m)$. Произвольная сеть Σ является произведением однослойных сетей, являющихся её слоями, и потому естественным образом описывает последовательность преобразований набора формул.

Пусть $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$ — произвольная квазигруппа и сеть Σ описывает последовательность преобразований набора переменных $(x_1, \dots, x_n)$ в набор формул $(w_1, \dots, w_m)$. Тогда отображение $(w_1^F, \dots, w_m^F): \Omega^n \rightarrow \Omega^m$ будем обозначать Σ^F .

Нетрудно понять, что если $\Sigma = \Sigma_1 \cdot \Sigma_2$, то при выборе любой квазигруппы F справедливо соответствующее равенство отображений $\Sigma^F = \Sigma_1^F \cdot \Sigma_2^F$.

Определение 5. Будем говорить, что сети Σ и Σ' *эквивалентны для множества* Ω , если при выборе любой квазигруппы $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$ отображения Σ^F и Σ'^F совпадают. Будем говорить, что сети Σ и Σ' *эквивалентны*, если они эквивалентны для любого множества.

Замечание 1. Если сети Σ и Σ' описывают преобразование набора переменных $(x_1, \dots, x_n)$ в наборы формул $(w_1, \dots, w_m)$ и $(w'_1, \dots, w'_m)$ соответственно, то совпадение указанных наборов формул является достаточным условием для эквивалентности сетей Σ и Σ' .

Определение 6. Сеть Σ будем называть *биективной для множества* Ω , если при выборе любой квазигруппы $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$ отображение Σ^F является биективным. Сеть Σ будем называть *биективной*, если она биективна для любого множества.

Очевидно, что для биективности сети Σ с множеством вершин $X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_t$ необходимо, чтобы множества начальных и конечных вершин были равноможны, то есть выполнялось равенство $|X_0| = |X_t|$.

Определение 7. Сеть Σ с множеством вершин $X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_t$ будем называть *сетью постоянной ширины*, если $|X_0| = |X_1| = \dots = |X_t|$.

В данной работе рассматриваются только сети постоянной ширины, поэтому будем использовать термин «*сеть*», подразумевая при этом *сеть постоянной ширины*.

Поскольку любая сеть Σ биективна для произвольного одноэлементного множества Ω и, более того, в таком случае любые две сети Σ и Σ' одинаковой ширины представляют одно и то же единственное отображение $\Omega^n \rightarrow \Omega^n$, то в дальнейшем всегда будем полагать, что $|\Omega| \geq 2$.

1. Стрoение биективных сетей

Пусть Σ — сеть с множеством вершин $X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_t$. Тогда $\Sigma = \Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t$ и при выборе любой квазигруппы $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$ выполняется равенство $\Sigma^F = \Sigma_1^F \cdot \dots \cdot \Sigma_t^F$. Поэтому Σ биективна для множества Ω в том и только в том случае, когда каждый слой Σ_s , $s \in \{1, \dots, t\}$, биективен для множества Ω .

Для однослойной сети Σ с множеством вершин $\{x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\} \cup \{x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\}$ определим $(0, 1)$ -матрицу связности $A_\Sigma = (a_{ij})_{n \times n}$ по следующему правилу: $a_{ij} = 1$ в случае, если сеть Σ содержит ребро $(x_i^{(0)}, x_j^{(1)})$, и $a_{ij} = 0$ — в противном случае.

Напомним, что диагональю в матрице размера $n \times n$ называют всякую совокупность из n её попарно неколлинеарных элементов, при этом диагональ называется положительной, если все её элементы положительны [2, 3].

Теорема 1. Однослойная сеть Σ является биективной для множества Ω тогда и только тогда, когда матрица A_Σ обладает единственной положительной диагональю.

Доказательство. Доказательство критерия проведём индукцией по ширине сети. База для сети ширины 1 очевидна. В предположении, что критерий верен для любой однослойной биективной сети ширины строго меньше чем n , докажем его для произвольной однослойной биективной сети Σ ширины n .

Н е о б х о д и м о с т ь. По определению сети Σ каждый столбец матрицы A_Σ содержит хотя бы одну единицу. При этом если сеть Σ биективна для множества Ω , то в матрице A_Σ найдётся хотя бы один столбец, содержащий ровно одну единицу, так как в противном случае при выборе произвольной квазигруппы $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$ отображение Σ^F будет действовать следующим образом:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto (F(a_{i_1}, a_{j_1}), F(a_{i_2}, a_{j_2}), \dots, F(a_{i_n}, a_{j_n})).$$

Нетрудно понять, что при выборе квазигруппы $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$ со свойством $F(a, a) = b$ для всех $a \in \Omega$ и некоторого фиксированного $b \in \Omega$ (указанным квазигруппам соответствуют латинские квадраты, у которых на главной диагонали стоит только элемент b), система

$$(F(a, a), F(a, a), \dots, F(a, a)) = (b, b, \dots, b)$$

будет иметь $|\Omega| \geq 2$ решений, и отображение Σ^F не может быть биективным — противоречие. Значит, в матрице A_Σ существует столбец, содержащий одну единицу. Не ограничивая общности, можно считать, что это первый столбец, а единица в нём расположена на пересечении с первой строкой.

Пусть в первой строке матрицы A_Σ содержится r единиц; не ограничивая общности, будем считать, что они стоят на первых r местах. Тогда при выборе произвольной квазигруппы $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$ отображение Σ^F будет действовать следующим образом:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto (a_1, F'\{a_1, a_{i_2}\}, \dots, F'\{a_1, a_{i_r}\}, F'\{a_{i_{r+1}}, a_{j_{r+1}}\}, \dots, F'\{a_{i_n}, a_{j_n}\}),$$

где $\{i_2, \dots, i_n, j_{r+1}, \dots, j_n\} \subseteq \{2, \dots, n\}$, а запись $F'\{a_i, a_j\}$ означает либо $F(a_i, a_j)$, либо $F(a_j, a_i)$, либо просто a_i . Поскольку сеть Σ является биективной для множества Ω , очевидно, что действие отображения Σ^F можно уточнить:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto (a_1, F\{a_1, a_{i_2}\}, \dots, F\{a_1, a_{i_r}\}, F'\{a_{i_{r+1}}, a_{j_{r+1}}\}, \dots, F'\{a_{i_n}, a_{j_n}\}),$$

где запись $F\{a_i, a_j\}$ означает либо $F(a_i, a_j)$, либо $F(a_j, a_i)$. Биективность отображения Σ^F равносильна однозначной разрешимости при любых $b_1, \dots, b_n \in \Omega$ системы уравнений

$$(a_1, F\{a_1, a_{i_2}\}, \dots, F\{a_1, a_{i_r}\}, F'\{a_{i_{r+1}}, a_{j_{r+1}}\}, \dots, F'\{a_{i_n}, a_{j_n}\}) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

относительно $a_1, \dots, a_n \in \Omega$. Это, в свою очередь, равносильно однозначной разрешимости при любых $b_1, \dots, b_n \in \Omega$ следующей системы:

$$(F\{b_1, a_{i_2}\}, \dots, F\{b_1, a_{i_r}\}, F'\{a_{i_{r+1}}, a_{j_{r+1}}\}, \dots, F'\{a_{i_n}, a_{j_n}\}) = (b_2, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n),$$

которую можно переписать в эквивалентном виде

$$(a_{i_2}, \dots, a_{i_r}, F'\{a_{i_{r+1}}, a_{j_{r+1}}\}, \dots, F'\{a_{i_n}, a_{j_n}\}) = (F^{-1}\{b_1, b_2\}, \dots, F^{-1}\{b_1, b_r\}, b_{r+1}, \dots, b_n),$$

где запись $F^{-1}\{b_1, b_j\}$ означает либо решение уравнения $F(b_1, x) = b_j$, либо решение уравнения $F(x, b_1) = b_j$. Однозначная разрешимость последней системы при любых $b_1, \dots, b_n \in \Omega$ равносильна однозначной разрешимости системы

$$(a_{i_2}, \dots, a_{i_r}, F'\{a_{i_{r+1}}, a_{j_{r+1}}\}, \dots, F'\{a_{i_n}, a_{j_n}\}) = (b'_2, \dots, b'_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$$

при любых $b'_2, \dots, b'_r, b_{r+1}, \dots, b_n \in \Omega$.

Обозначим подграф сети Σ , основанный на множестве вершин $\{x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\} \cup \{x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\}$, через Σ' . Легко видеть, что Σ' является однослойной сетью ширины $(n-1)$ и однозначная разрешимость системы

$$(a_{i_2}, \dots, a_{i_r}, F'\{a_{i_{r+1}}, a_{j_{r+1}}\}, \dots, F'\{a_{i_n}, a_{j_n}\}) = (b'_2, \dots, b'_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$$

при любых $b'_2, \dots, b'_r, b_{r+1}, \dots, b_n \in \Omega$ на самом деле означает биективность отображения Σ'^F . Таким образом, показано, что при выборе любой квазигруппы $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$ биективность отображения Σ^F равносильна биективности отображения Σ'^F . Другими словами, сеть Σ является биективной для множества Ω в том и только в том случае, когда сеть Σ' является биективной для множества Ω .

По предположению индукции матрица $A_{\Sigma'} = A_{\Sigma} \begin{pmatrix} 2 & \dots & n \\ 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ содержит единственную положительную диагональ, которая однозначно продолжается до единственной положительной диагонали матрицы A_{Σ} .

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть матрица A_{Σ} имеет единственную положительную диагональ. Тогда в матрице A_{Σ} существует столбец, в котором содержится ровно одна единица, так как в противном случае в результате последовательного вычёркивания всех строк матрицы A_{Σ} , содержащих ровно одну единицу, вместе с соответствующими им столбцами останется подматрица $A_{\Sigma} \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_l \\ j_1 & \dots & j_l \end{pmatrix}$, $2 \leq l \leq n$, которая содержит в каждой строке не менее двух единиц и в каждом столбце ровно по две единицы. Нетрудно понять, что такая матрица содержит в каждой строке и в каждом столбце ровно две единицы и, следовательно, имеет не менее двух положительных диагоналей, которые продолжаются до различных положительных диагоналей матрицы A_{Σ} , — противоречие. Значит, в матрице A_{Σ} существует столбец, содержащий одну единицу, и, не ограничивая общности, можно считать, что это первый столбец, а единица в нём расположена на пересечении с первой строкой.

Пусть в первой строке матрицы A_{Σ} содержится r единиц, будем считать, что они стоят на первых r местах. Тогда, аналогично предыдущей части доказательства,

нетрудно показать, что сеть Σ является биективной для множества Ω в том и только в том случае, когда сеть Σ' является биективной для множества Ω . При этом матрица $A_{\Sigma'} = A_{\Sigma} \begin{pmatrix} 2 & \dots & n \\ 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ имеет единственную положительную диагональ, поскольку всякая положительная диагональ матрицы A_{Σ} содержит единственную единицу из первого столбца и является продолжением некоторой положительной диагонали матрицы $A_{\Sigma} \begin{pmatrix} 2 & \dots & n \\ 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, и по предположению индукции сеть Σ' является биективной для множества Ω . ■

Следствие 1. Следующие утверждения являются равносильными:

- 1) сеть Σ является биективной для некоторого множества Ω ;
- 2) сеть Σ является биективной.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Если сеть Σ с множеством вершин $X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_t$ является биективной для некоторого множества Ω , то каждый её слой Σ_s , $s \in \{1, \dots, t\}$, является биективным для данного множества. Из теоремы 1 следует, что биективность однослойных сетей Σ_s , $s \in \{1, \dots, t\}$, для множества Ω не зависит от природы этого множества и его мощности, а зависит только от строения указанных однослойных сетей. Значит, каждый слой Σ_s , $s \in \{1, \dots, t\}$, является биективным для всех множеств Ω , следовательно, сама сеть Σ является биективной для всех множеств.

$2 \Rightarrow 1$. Очевидно. ■

Ввиду следствия 1 в определении биективной сети достаточно требовать биективность только для одного множества, мощность которого больше чем 1.

Следствие 2. Пусть Σ — биективная однослойная сеть. Тогда:

- 1) сеть Σ содержит вершины со степенью захода 1;
- 2) сеть Σ содержит вершины со степенью исхода 1.

Доказательство.

1) Согласно теореме 1, матрица A_{Σ} имеет единственную положительную диагональ, и в доказательстве теоремы 1 показано, что существует столбец матрицы A_{Σ} , в котором содержится ровно одна единица.

2) Согласно критерию биективности однослойной сети, в матрице A_{Σ} отсутствуют нулевые строки. Кроме того, невозможно, чтобы каждая строка матрицы A_{Σ} содержала более одной единицы, так как в этом случае каждый столбец матрицы A_{Σ} будет содержать ровно две единицы, а сама матрица A_{Σ} будет иметь не менее двух положительных диагоналей, что противоречит биективности сети Σ . ■

Пример 1. Легко проверить, что преобразование набора переменных $(x_1, \dots, x_8)$ в набор формул $(x_2 * (x_4 * x_5), x_1, x_4 * x_5, x_2 * x_3, x_5, (x_2 * x_3) * (x_6 * x_7), x_7 * x_8, x_5 * x_6)$ может быть описано (при подходящей разметке дуг) сетью, приведённой на рис. 1. Также нетрудно убедиться, что это преобразование набора переменных может быть описано сетью, приведённой на рис. 2. Значит, эти сети эквивалентны.

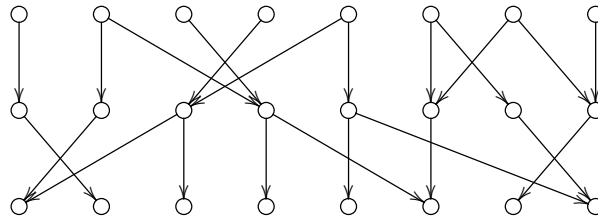


Рис. 1

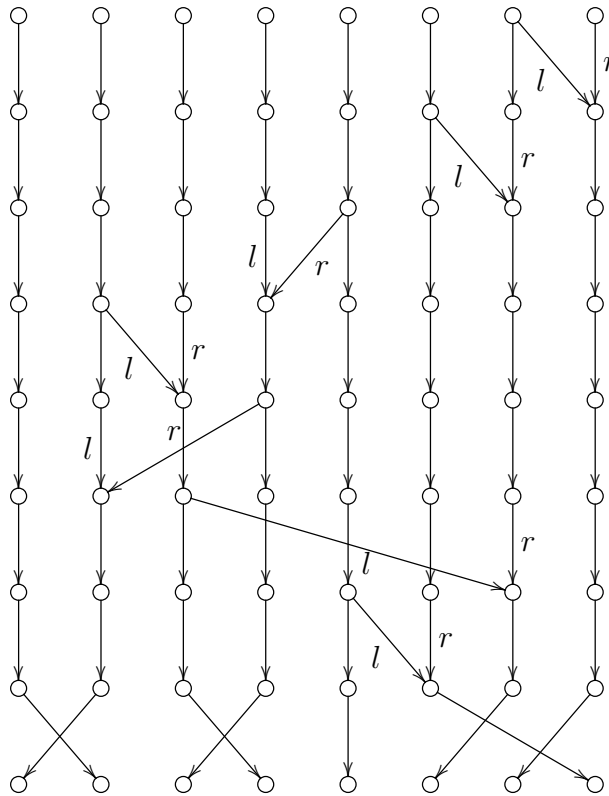


Рис. 2

Определение 8. Пусть Σ — однослойная сеть с множеством вершин $X_0 \cup X_1$. Вершину $x_i^{(0)} \in X_0$ сети Σ будем называть *неподвижной*, если Σ содержит ребро $(x_i^{(0)}, x_i^{(1)})$. Сеть Σ будем называть *элементарной*, если все вершины из множества X_0 неподвижны и ровно одна вершина из множества X_1 имеет степень захода 2.

Элементарную сеть с множеством вершин $X_0 \cup X_1$, которая содержит рёбра $(x_i^{(0)}, x_i^{(1)})$ и $(x_j^{(0)}, x_i^{(1)})$, будем обозначать $\Sigma_i^{\{i,j\}}$. В случае, когда ребро $(x_i^{(0)}, x_i^{(1)})$ имеет метку l , обозначение можно уточнить как $\Sigma_i^{(i,j)}$, а если оно имеет метку r — как $\Sigma_i^{(j,i)}$.

Произвольная элементарная сеть всегда является биективной. Ещё одним важным примером биективных сетей являются сети с множеством вершин $X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_t$, у которых степень захода каждой вершины $x_j^{(s)}$, $s \in \{1, \dots, t\}$, равна 1. Такие сети будем называть *перестановочными*. Произвольная перестановочная сеть определяет

отображение $\Omega^n \rightarrow \Omega^n$, не зависящее от выбора квазигруппы $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$ и действующее на множестве Ω^n как перестановка координат вектора. Отсюда следует, что любая перестановочная сеть эквивалентна однослойной перестановочной сети. Произвольная перестановочная сеть эквивалентна произведению перестановочных сетей, у каждой из которых ровно две вершины не являются неподвижными, — это следует из известного результата о представлении произвольной перестановки в виде произведения транспозиций.

Элементарные и перестановочные сети являются примерами простейших биективных сетей, однако, как показывает следующая теорема, этих примитивов достаточно для реализации произвольной биективной сети.

Теорема 2. Сеть Σ является биективной в том и только в том случае, когда она эквивалентна произведению

$$\Sigma_{R1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{Rt} \cdot \Pi_R \text{ (или } \Pi_L \cdot \Sigma_{L1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{Lt}),$$

где $\Sigma_{R1}, \dots, \Sigma_{Rt}$ ($\Sigma_{L1}, \dots, \Sigma_{Lt}$) — элементарные сети; Π_R (Π_L) — однослойная перестановочная сеть. При этом количество элементарных сетей в произведении равно количеству вершин сети Σ со степенью захода 2.

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости потребуются два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. Пусть Σ — произвольная биективная однослойная сеть, а Π_1, Π_2 — такие однослойные перестановочные сети, что корректно определить произведения $\Pi_1 \cdot \Sigma$ и $\Sigma \cdot \Pi_2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) сеть $\Pi_1 \cdot \Sigma$ эквивалентна однослойной сети;
- 2) сеть $\Sigma \cdot \Pi_2$ эквивалентна однослойной сети;
- 3) сеть Σ эквивалентна произведению $\Sigma_R \cdot \Pi_R$ однослойной биективной сети Σ_R , у которой все вершины неподвижны, и однослойной перестановочной сети Π_R ;
- 4) сеть Σ эквивалентна произведению $\Pi_L \cdot \Sigma_L$ однослойной биективной сети Σ_L , у которой все вершины неподвижны, и однослойной перестановочной сети Π_L .

Доказательство. Доказательство утверждений 1 и 2, с использованием замечания 1, очевидно.

Утверждение 3: согласно критерию биективности однослойной сети, матрица A_Σ обладает единственной ненулевой диагональю, расположенной на местах $(1, i_1), \dots, (n, i_n)$. Перестановка $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ определяет перестановочную сеть Π_R . Сеть $\Sigma \cdot \Pi_R^{-1}$ описывает преобразование формул, соответствующее некоторой однослойной сети Σ_R , у которой все вершины неподвижны. Таким образом, сети Σ и $\Sigma_R \cdot \Pi_R$ описывают преобразование набора переменных в один набор формул и, согласно замечанию 1, они эквивалентны.

Доказательство утверждения 4 аналогично. ■

Лемма 2. Пусть Σ — биективная однослойная сеть, у которой все вершины неподвижны и хотя бы одна имеет степень захода 2. Тогда сеть Σ эквивалентна произведению элементарных сетей $\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t$, где t — число вершин сети Σ со степенью захода 2.

Доказательство. Пусть Σ — однослойная биективная сеть ширины n , у которой все вершины неподвижны. Тогда количество вершин сети Σ со степенью захода 2 равно $\omega(A_\Sigma) - n$, где $\omega(A_\Sigma)$ — количество ненулевых элементов матрицы A_Σ .

Доказательство утверждения проведём индукцией по параметру $\omega(A_\Sigma) - n$. База при $\omega(A_\Sigma) - n = 1$ очевидна: Σ является элементарной сетью ширины n .

Предположим, что утверждение верно для любой однослойной биективной сети Σ ширины n при условии $\omega(A_\Sigma) - n < t$. Докажем утверждение для произвольной однослойной биективной сети Σ ширины n с условием $\omega(A_\Sigma) - n = t$.

Нетрудно понять, что $\omega(A_\Sigma) < 2n$, так как в противном случае каждый столбец матрицы A_Σ содержит ровно две единицы и в сети Σ отсутствуют вершины со степенью захода 1, что противоречит следствию 2. Таким образом, $t = \omega(A_\Sigma) - n < n$ и в матрице A_Σ в точности t столбцов содержат две единицы; не ограничивая общности, будем считать, что это первые t столбцов.

Поскольку все вершины сети Σ неподвижны, то элементы матрицы A_Σ , расположенные на местах $(1, 1), \dots, (n, n)$, очевидно, образуют положительную диагональ. При этом все $2t$ единиц, расположенных в первых t столбцах, не могут находиться на пересечении с первыми t строками, так как в противном случае матрица $A_\Sigma \begin{pmatrix} 1 & \dots & t \\ 1 & \dots & t \end{pmatrix}$ имеет две различные трансверсали, которые продолжаются до различных трансверсалей матрицы A_Σ , что противоречит биективности сети Σ . Значит, хотя бы одна из последних $(n - t)$ строк матрицы A_Σ содержит не менее двух единиц; не ограничивая общности, будем считать, что это строка с номером $(t + 1)$.

Пусть в $(t + 1)$ -й строке матрицы A_Σ присутствует единица на месте $s \in \{1, \dots, t\}$. Тогда обозначим через Σ' однослойную сеть, полученную из сети Σ удалением ребра $(x_{t+1}^{(0)}, x_s^{(1)})$. Очевидно, что $A_{\Sigma'} = A_\Sigma - E_{(t+1)s}$, где $E_{(t+1)s} = (0, 1)$ -матрица, у которой единственная единица стоит на пересечении $(t + 1)$ -й строки и s -го столбца. Поскольку матрица A_Σ обладает единственной трансверсалью, а её главная диагональ не содержит нулей, матрица $A_{\Sigma'}$ также обладает единственной трансверсалью, расположенной на главной диагонали. Последнее означает, что сеть Σ' является биективной.

При выборе подходящей элементарной сети $\Sigma_s^{\{s, t+1\}}$ произведение $\Sigma' \cdot \Sigma_s^{\{s, t+1\}}$ описывает такое же преобразование набора переменных $(x_1, \dots, x_n)$, что и сеть Σ . Значит, согласно замечанию 1, сети Σ и $\Sigma' \cdot \Sigma_s^{\{s, t+1\}}$ являются эквивалентными. При этом $\omega(A_{\Sigma'}) - n = \omega(A_\Sigma) - 1 - n = t - 1$ и по предположению индукции однослойная сеть Σ' эквивалентна произведению элементарных сетей $\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_{t-1}$.

Таким образом, доказали, что однослойная биективная сеть Σ ширины n эквивалентна произведению элементарных сетей $\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_{t-1} \cdot \Sigma_s^{\{s, t+1\}}$, длина которого удовлетворяет равенству $t = \omega(A_\Sigma) - n$. ■

Теперь, для завершения доказательства теоремы, остаётся воспользоваться представлением сети Σ в виде произведения собственных слоёв и применить к ним доказанные леммы. ■

Количество вершин сети Σ со степенью захода 2 будем называть *весом сети* Σ или её *сложностью* и обозначать $\|\Sigma\|$.

2. Разметка биективных сетей

Введём понятие разметки сети — инструмента, который позволяет обнаруживать особенности биективной сети, нарушающие её транзитивность, и докажем критерий эквивалентности биективных сетей и единственность указанного в теореме 2 представления.

Учитывая результаты, полученные в п. 1, не ограничивая общности, будем считать, что произвольная биективная сеть Σ представляет собой произведение $\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t \cdot \Pi$

с множеством вершин $X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_t \cup X_{t+1}$, где $\Sigma_1, \dots, \Sigma_t$ — элементарные сети; Π — однослойная перестановочная сеть. Также, не ограничивая общности, будем считать, что $\Omega \subset \mathbb{N}$.

Определение 9. Если для элементов $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N}$ и частично определённого отображения $F: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ выполняется соотношение $F(y_1, y_2) = y_3$, то будем говорить, что элементы y_1 и y_2 *содержатся в области определения отображения F* , а элемент y_3 *содержится в области значений отображения F* .

Определение 10. Частично определённое отображение $F: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, удовлетворяющее условию

$$(F(y_1, y_2) = F(y'_1, y'_2)) \implies ((y_1, y_2) = (y'_1, y'_2)) \text{ или } (y_1 \neq y'_1, y_2 \neq y'_2)$$

при всех допустимых $y_1, y_2, y'_1, y'_2 \in \mathbb{N}$, будем называть *частично определённым отображением без противоречий* (или *частично определённым непротиворечивым отображением*).

Определение 11. Разметкой сети $\Sigma = \Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t \cdot \Pi$ будем называть произвольное отображение $\mu: X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_t \cup X_{t+1} \rightarrow \mathbb{N}$. Пусть $F: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — частично определённое отображение. Тогда разметку μ сети Σ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- для всех $s \in \{1, \dots, t\}$ и $i \in \{1, \dots, n\}$:
 - если $\deg^- x_i^{(s)} = 1$, то $\mu(x_i^{(s)}) = \mu(x_i^{(s-1)})$;
 - если $\deg^- x_i^{(s)} = 2$ и рёбра $(x_i^{(s-1)}, x_i^{(s)})$, $(x_j^{(s-1)}, x_i^{(s)})$ имеют метки l и r соответственно, то $\mu(x_i^{(s)}) = F(\mu(x_i^{(s-1)}), \mu(x_j^{(s-1)}))$;
 - если $\deg^- x_i^{(s)} = 2$ и рёбра $(x_i^{(s-1)}, x_i^{(s)})$, $(x_j^{(s-1)}, x_i^{(s)})$ имеют метки r и l соответственно, то $\mu(x_i^{(s)}) = F(\mu(x_j^{(s-1)}), \mu(x_i^{(s-1)}))$;
- если перестановочная сеть Π содержит рёбра $(x_{i_k}^{(t)}, x_k^{(t+1)})$, $k \in \{1, \dots, n\}$, то выполняются равенства $\mu(x_k^{(t+1)}) = \mu(x_{i_k}^{(t)})$, $k \in \{1, \dots, n\}$,

будем называть *правильной относительно F* . При этом само отображение F будем называть *правилом разметки μ* .

Определение 12. Пусть μ — разметка сети Σ с правилом F и при этом никакое сужение частичного отображения F не является правилом разметки μ . Тогда будем говорить, что F является *минимальным правилом разметки μ* . Нетрудно понять, что минимальное правило разметки μ определено однозначно. Правильную разметку μ будем называть *непротиворечивой*, если её минимальное правило является непротиворечивым отображением.

Определение 13. Если для разметки μ сети Σ выполняется система равенств $\{\mu(x_{i_j}^{(s_j)}) = v_j : j \in J\}$, то будем говорить, что μ — *разметка сети Σ с условиями $\{\mu(x_{i_j}^{(s_j)}) = v_j : j \in J\}$* . Система равенств $\mu(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \mu(x_n^{(0)}) = v_n$ называется *начальным условием* разметки μ , при этом говорят, что μ — *разметка с начальным условием $(v_1, \dots, v_n)$* .

Каждая правильная разметка сети Σ однозначно определяется своим начальным условием и правилом. В тех случаях, когда при некоторой разметке вершин $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ сети Σ для полного задания правильной разметки не хватает области определения частично определённого отображения F , можно непротиворечивым образом расширить область определения F и тем самым определить разметку с правилом F . Поясним это подробнее.

Пусть задана начальная разметка $\mu(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \mu(x_n^{(0)}) = v_n$ сети Σ и $\mathbb{N} \setminus \{v_1, \dots, v_n\} \supset \{y_1, y_2, \dots\}$ — счётное множество меток, которые не содержатся ни в области определения, ни в области значений правила F (при этом возможно, что метки $v_1, \dots, v_n$ также не содержатся ни в области определения, ни в области значений правила F). Тогда продолжим разметку μ сети Σ по следующему правилу:

- для всех $s \in \{1, \dots, t\}$ при $\Sigma_s = \Sigma_i^{\{i,j\}}$ положим $\mu(x_i^{(s)}) = \mu(x_i^{(s-1)})$, если $l \neq i$, а для разметки вершины $x_i^{(s)}$ возможны следующие варианты:
 - если $\Sigma_s = \Sigma_i^{(i,j)}$ и значение $F(\mu(x_i^{(s-1)}), \mu(x_j^{(s-1)}))$ определено, то пометим вершину $x_i^{(s)}$ меткой $F(\mu(x_i^{(s-1)}), \mu(x_j^{(s-1)}))$, в противном случае пометим вершину $x_i^{(s)}$ ранее не использованной меткой y_s и определим $F(\mu(x_i^{(s-1)}), \mu(x_j^{(s-1)})) = y_s$;
 - если $\Sigma_s = \Sigma_i^{(j,i)}$ и значение $F(\mu(x_j^{(s-1)}), \mu(x_i^{(s-1)}))$ определено, то пометим вершину $x_i^{(s)}$ меткой $F(\mu(x_j^{(s-1)}), \mu(x_i^{(s-1)}))$, в противном случае пометим вершину $x_i^{(s)}$ ранее не использованной меткой y_s и определим $F(\mu(x_j^{(s-1)}), \mu(x_i^{(s-1)})) = y_s$;
- если перестановочная сеть Π содержит рёбра $(x_{i_k}^{(t)}, x_k^{(t+1)})$, $k \in \{1, \dots, n\}$, то положим $\mu(x_k^{(t+1)}) = \mu(x_{i_k}^{(t)})$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

При проведении разметки μ сети Σ описанным способом частично определённое (непротиворечивое) отображение F корректным образом продолжается до частично определённого (непротиворечивого) отображения, которое будем обозначать $F_{\Sigma, \mu}$, при этом построенная разметка μ является правильной относительно $F_{\Sigma, \mu}$.

Определение 14. Описанную процедуру продолжения разметки μ и расширения области определения F будем называть *свободным продолжением начальной разметки* $\mu(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \mu(x_n^{(0)}) = v_n$ и её правила F относительно сети Σ .

Пусть η и μ — разметки сети Σ и для отображения $\sigma_\mu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ справедливо соотношение $\sigma_\mu \circ \eta = \mu$, то есть при всех $s \in \{0, \dots, t+1\}$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется равенство $\sigma_\mu(\eta(x_i^{(s)})) = \mu(x_i^{(s)})$. Тогда будем обозначать это условие как $\sigma_\mu: \eta \rightarrow \mu$.

Определение 15. Правильную разметку η сети Σ с начальным условием $(v_1, \dots, v_n)$ будем называть *свободной*, если для любой правильной разметки μ сети Σ с начальным условием $(v_1, \dots, v_n)$ существует отображение σ_μ , удовлетворяющее условию $\sigma_\mu: \eta \rightarrow \mu$.

Непосредственно из определения свободной разметки следует, что при условии существования свободная разметка сети Σ с начальным условием $(v_1, \dots, v_n)$ определена однозначно с точностью до обратимого переобозначения меток.

Теорема 3. Пусть разметка η получена в результате свободного продолжения начальной разметки $\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n$ и пустого правила G относительно сети Σ . Тогда η — свободная разметка сети Σ с начальным условием $(v_1, \dots, v_n)$, а отображение $G_{\Sigma, \eta}$ — её минимальное правило.

Доказательство. Из определения процедуры свободного продолжения начальной разметки $\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n$ и её пустого правила G относительно сети Σ следует, что разметка η является непротиворечивой и её минимальное правило $G_{\Sigma, \eta}$ удовлетворяет условию

$$(G_{\Sigma, \eta}(z_1, z_2) = G_{\Sigma, \eta}(z'_1, z'_2)) \implies ((z_1, z_2) = (z'_1, z'_2)) \quad (1)$$

при всех допустимых $z_1, z_2, z'_1, z'_2 \in \mathbb{N}_0$. Пусть μ — произвольная правильная разметка сети Σ с теми же начальными условиями, что и разметка η . Тогда для доказательства существования отображения $\sigma_\mu: \eta \rightarrow \mu$ достаточно показать, что при совпадении меток $\eta(x_i^{(s)}) = \eta(x_j^{(r)})$ также выполняется равенство $\mu(x_i^{(s)}) = \mu(x_j^{(r)})$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\Sigma = \Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t$. Докажем утверждение индукцией по длине произведения $\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t$. База индукции при $t = 1$ очевидна.

Пусть теперь $\Sigma = \Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_{t-1} \cdot \Sigma_t$ — сеть длины $t > 1$ и $\Sigma_t = \Sigma_k^{\{k,l\}}$. Рассмотрим все возможные варианты для пары вершин $x_i^{(s)}$ и $x_j^{(r)}$:

- 1) Если $r, s < t$, то истинность утверждения следует из предположения индукции.
 - 2) Если $r < t, s = t$ и $k \neq i$, то выполняется равенство $\eta(x_i^{(s-1)}) = \eta(x_j^{(r)})$, и остаётся воспользоваться предположением индукции.
 - 3) Если $r = t, s < t$ и $k \neq j$, то выполняется равенство $\eta(x_i^{(s)}) = \eta(x_j^{(r-1)})$, и остаётся воспользоваться предположением индукции.
 - 4) Если $r = s = t$ и $k \notin \{i, j\}$, то выполняется равенство $\eta(x_i^{(s-1)}) = \eta(x_j^{(r-1)})$, и остаётся воспользоваться предположением индукции.
 - 5) В случае, когда $s = t$ и $\Sigma_t = \Sigma_i^{\{i,l\}}$, не ограничивая общности, будем считать, что $\Sigma_t = \Sigma_i^{(i,l)}$. Из определения процедуры свободного продолжения разметки следует, что $\eta(x_i^{(s)}) \notin \{v_1, \dots, v_n\}$, а минимальное правило разметки η удовлетворяет условию (1). Значит, равенство меток $\eta(x_i^{(s)}) = \eta(x_j^{(r)})$ влечёт за собой совпадение упорядоченных наборов меток $(\eta(x_i^{(s-1)}), \eta(x_l^{(s-1)}))$ и $(\eta(x_j^{(r')}), \eta(x_{l'}^{(r')}))$, где $r' \in \{0, \dots, r-1\}$ — наибольшее со свойством $\eta(x_j^{(r')}) \neq \eta(x_j^{(r)})$. По предположению индукции упорядоченные наборы меток $(\mu(x_i^{(s-1)}), \mu(x_l^{(s-1)}))$ и $(\mu(x_j^{(r')}), \mu(x_{l'}^{(r')}))$ также совпадают и, следовательно, выполняются равенства $\mu(x_i^{(s)}) = \mu(x_j^{(r'+1)}) = \mu(x_j^{(r)})$.
 - 6) Доказательство случая, когда $r = t$ и $\Sigma_t = \Sigma_j^{\{j,l\}}$, аналогично доказательству 5.
- Теорема доказана. ■

Замечание 2. Поскольку свободная разметка сети Σ с начальным условием $(v_1, \dots, v_n)$ определена однозначно с точностью до обратимого переобозначения меток, то, не ограничивая общности, можно считать, что произвольная свободная разметка η сети Σ может быть получена при помощи свободного продолжения соответствующей начальной разметки $\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n$ и её пустого правила G относительно сети Σ .

Следующая теорема фактически оправдывает название свободной разметки.

Теорема 4. Пусть η — свободная разметка сети Σ , μ — правильная разметка сети Σ , и возможно определить отображение σ_μ по правилу $\sigma_\mu(\eta(x_i^{(0)})) = \mu(x_i^{(0)})$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда отображение σ_μ допускает продолжение, удовлетворяющее условию $\sigma_\mu: \eta \rightarrow \mu$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 4 достаточно показать, что при совпадении меток $\eta(x_i^{(s)}) = \eta(x_j^{(r)})$ также выполняется равенство $\mu(x_i^{(s)}) = \mu(x_j^{(r)})$. Это устанавливается индукцией по длине сети Σ аналогично доказательству теоремы 3. ■

Следствие 3. В условиях теоремы 4, если G и F — минимальные правила разметок η и μ соответственно, то при всех допустимых $z_i, z_j \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\sigma_\mu(G(z_i, z_j)) = F(\sigma_\mu(z_i), \sigma_\mu(z_j))$.

Среди множества всех свободных разметок сети Σ особым образом выделяются два типа свободной разметки.

Определение 16. Свободную разметку сети Σ с начальным условием $(v_1, \dots, v_1)$ будем называть *минимальной свободной разметкой сети* Σ и обозначать $\eta_{\min}$. Свободную разметку сети Σ с начальным условием $(v_1, \dots, v_n)$ будем называть *максимальной свободной разметкой сети* Σ , если все метки $v_1, \dots, v_n$ — различны, и обозначать $\eta_{\max}$.

Следствие 4. Для произвольной свободной разметки η сети Σ существует отображение $\sigma_\eta: \eta \rightarrow \eta_{\min}$.

Следствие 5. Для произвольной свободной разметки η сети Σ существует отображение $\sigma_\eta: \eta_{\max} \rightarrow \eta$.

Замечание 3. На множестве всех свободных разметок фиксированной сети Σ можно естественным образом ввести отношение эквивалентности $\sim$: класс $[\eta]_\sim$ содержит все свободные разметки сети Σ , которые могут быть получены из свободной разметки η с помощью обратимого переобозначения меток. При этом фактор-множество всех свободных разметок по данному отношению эквивалентности является частично упорядоченным множеством с единственными минимальным и максимальным элементами $[\eta_{\min}]_\sim$ и $[\eta_{\max}]_\sim$ соответственно.

В п. 1 доказано, что произвольная биективная сеть эквивалентна произведению элементарных и перестановочной сетей. Однако открытым остался вопрос об однозначности такого представления:

- во-первых, какие элементарные сети в указанном произведении допустимо менять местами?
- во-вторых, однозначен ли состав представления биективной сети в виде произведения элементарных и перестановочной сетей?

Ответ на первый вопрос дает следующее очевидное утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\Sigma_{i_1}^{\{i_1, j_1\}}$ и $\Sigma_{i_2}^{\{i_2, j_2\}}$ — различные элементарные сети одной ширины. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) сети $\Sigma_{i_1}^{\{i_1, j_1\}} \cdot \Sigma_{i_2}^{\{i_2, j_2\}}$ и $\Sigma_{i_2}^{\{i_2, j_2\}} \cdot \Sigma_{i_1}^{\{i_1, j_1\}}$ описывают одинаковые преобразования набора переменных;
- 2) сети $\Sigma_{i_1}^{\{i_1, j_1\}} \cdot \Sigma_{i_2}^{\{i_2, j_2\}}$ и $\Sigma_{i_2}^{\{i_2, j_2\}} \cdot \Sigma_{i_1}^{\{i_1, j_1\}}$ эквивалентны;
- 3) $i_1 \neq i_2$, $i_1 \neq j_2$ и $i_2 \neq j_1$.

Если для элементарных сетей $\Sigma_{i_1}^{\{i_1, j_1\}}$ и $\Sigma_{i_2}^{\{i_2, j_2\}}$ выполняются условия утверждения 1, то будем говорить, что для них допустима перестановка.

Введённый аппарат разметки позволяет доказать однозначность состава произведения элементарных и перестановочной сетей, представляющего биективную сеть. Для этого потребуется результат, известный как гипотеза Эванса [4] и в общем случае независимо доказанный в работах [5, 6].

Теорема 5 (В. Smetaniuk, 1981). Если частично определённое непротиворечивое отображение $F: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ определено не более чем на $|\Omega| - 1$ наборах, то оно продолжается до квазигруппы на множестве Ω .

Теорема 6. Если сети $\Sigma = \Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t \cdot \Pi$ и $\Sigma' = \Sigma'_1 \cdot \dots \cdot \Sigma'_s \cdot \Pi'$ эквивалентны, то $\Pi = \Pi'$, а произведения элементарных сетей $\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t$ и $\Sigma'_1 \cdot \dots \cdot \Sigma'_s$ имеют одинаковый состав и могут отличаться только допустимой перестановкой множителей. В частности, эквивалентные сети имеют одинаковую сложность.

Доказательство. Пусть Σ — сеть ширины n с множеством вершин $X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_t \cup X_{t+1}$ и максимальная свободная разметка η сети Σ с начальным условием $(v_1, \dots, v_n)$ получена в результате свободного продолжения начальной разметки $\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n$ и пустого правила относительно сети Σ . Тогда, согласно определению свободного продолжения разметки, в свободной разметке η используется множество меток $\Omega = \{v_1, \dots, v_n, y_1, \dots, y_t\}$, а её минимальное правило $G: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ определено на t различных наборах. Далее будем считать, что разметка η сети Σ удовлетворяет условиям

$$\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n, \quad \eta(x_1^{(t+1)}) = y_{i_1}, \dots, \eta(x_n^{(t+1)}) = y_{i_n},$$

где $\{y_{i_1}, \dots, y_{i_n}\} \subset \{y_1, \dots, y_t\}$.

Пусть Σ' — сеть с множеством вершин $X'_0 \cup X'_1 \cup \dots \cup X'_s \cup X'_{s+1}$ и разметка η' сети Σ' получена в результате свободного продолжения начальной разметки $\eta'(x'_1{}^{(0)}) = v_1, \dots, \eta'(x'_n{}^{(0)}) = v_n$ и её правила G относительно сети Σ' ; для удобства непротиворечивое правило $G_{\Sigma', \eta'}$ будем обозначать G' . Тогда, согласно определению свободного продолжения разметки, в разметке η' используются метки из множества $\Omega' = \{v_1, \dots, v_n, y_1, \dots, y_t, \dots, y_d\}$, а её правило $G': \Omega' \times \Omega' \rightarrow \Omega'$ определено на d различных наборах. Далее будем считать, что разметка η' сети Σ' удовлетворяет условиям

$$\eta'(x'_1{}^{(0)}) = v_1, \dots, \eta'(x'_n{}^{(0)}) = v_n, \quad \eta'(x'_1{}^{(s+1)}) = y_{j_1}, \dots, \eta'(x'_n{}^{(s+1)}) = y_{j_n},$$

где $\{y_{j_1}, \dots, y_{j_n}\} \subset \{y_1, \dots, y_t, \dots, y_d\}$.

Согласно гипотезе Эванса, непротиворечивое отображение G' продолжается до квазигруппы $\bar{G} \in \mathcal{Q}(\Omega')$, и для эквивалентных сетей Σ и Σ' справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \Sigma^{\bar{G}}(v_1, \dots, v_n) &= \Sigma^G(v_1, \dots, v_n) = (\eta(x_1^{(t+1)}), \dots, \eta(x_n^{(t+1)})) = (y_{i_1}, \dots, y_{i_n}), \\ \Sigma'^{\bar{G}}(v_1, \dots, v_n) &= \Sigma'^{G'}(v_1, \dots, v_n) = (\eta'(x'_1{}^{(s+1)}), \dots, \eta'(x'_n{}^{(s+1)})) = (y_{j_1}, \dots, y_{j_n}). \end{aligned}$$

Поскольку отображения $\Sigma^{\bar{G}}$ и $\Sigma'^{\bar{G}}$ совпадают, то $(y_{i_1}, \dots, y_{i_n}) = (y_{j_1}, \dots, y_{j_n})$. Последнее равенство означает, что на самом деле при свободном продолжении начальной разметки $\eta'(x'_1{}^{(0)}) = v_1, \dots, \eta'(x'_n{}^{(0)}) = v_n$ и её правила G относительно сети Σ' дополнительные метки $y_{t+1}, \dots, y_d$ не возникают и правило G' совпадает с G . Другими словами, разметка η' сети Σ' является G -правильной.

Далее потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 3. Пусть η — максимальная свободная разметка сети $\Sigma = \Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t$ с минимальным правилом G , а η' — G -правильная разметка сети $\Sigma' = \Sigma'_1 \cdot \dots \cdot \Sigma'_s$ с тем же начальным условием. Тогда из равенства $\{\eta(x_1^{(t)}), \dots, \eta(x_n^{(t)})\} = \{\eta'(x'_1{}^{(s)}), \dots, \eta'(x'_n{}^{(s)})\}$ следует, что $t = s$, а произведения элементарных сетей $\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t$ и $\Sigma'_1 \cdot \dots \cdot \Sigma'_s$ отличаются лишь допустимой перестановкой множителей.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по t . База при $t = 1$ очевидна.

Пусть теперь $t > 1$. Не ограничивая общности, будем считать, что максимальная свободная разметка η сети Σ получена в результате свободного продолжения начальной разметки $\eta(x_1^{(0)}) = y_{-1}, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = y_{-n}$ и пустого правила относительно сети Σ . Согласно определению свободного продолжения разметки, минимальное правило G свободной разметки η удовлетворяет условию

$$(G(y_i, y_j) = G(y_d, y_m)) \implies ((y_i, y_j) = (y_d, y_m))$$

при всех допустимых $y_i, y_j, y_d, y_m \in \{y_{-n}, \dots, y_{-1}, y_1, \dots, y_t\}$; при этом если выполняется равенство $G(y_i, y_j) = y_m$, то $m > \max\{i, j\}$.

Используя указанные свойства отображения G , индукцией по длине сети Σ' можно показать (аналогично доказательству теоремы 3), что для правильной G -разметки η' сети Σ' выполняется свойство

$$\left(\eta'(x_i^{(d)}) = \eta'(x_j^{(m)}) \right) \implies (i = j). \quad (2)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $\Sigma_t = \Sigma_1^{(1,2)}$ и соответственно выполняются равенства

$$y_t = \eta(x_1^{(t)}) = G(\eta(x_1^{(t-1)}), \eta(x_2^{(t-1)})) = G(y_l, y_r).$$

Из условия леммы следует, что $y_t = \eta(x_1^{(t)}) = \eta'(x_{i_1}'^{(s)})$ и $y_r = \eta(x_2^{(t)}) = \eta'(x_{i_2}'^{(s)})$. Согласно (2), метку y_r могут иметь только вершины из множества $\{x_{i_2}'^{(0)}, \dots, x_{i_2}'^{(s)}\}$, а метку y_t — только вершины из множества $\{x_{i_1}'^{(1)}, \dots, x_{i_1}'^{(s)}\}$. Выберем наименьшее $l \in \{1, \dots, s\}$ со свойством $\eta'(x_{i_1}'^{(l)}) = \dots = \eta'(x_{i_1}'^{(s)}) = y_t$. Тогда для метки $\eta'(x_{i_1}'^{(l)}) = y_t$ в правильной G -разметке η' справедливы равенства

$$\eta'(x_{i_1}'^{(l)}) = y_t = G(y_l, y_r) = G(\eta(x_{i_1}'^{(l-1)}), \eta(x_{i_2}'^{(l-1)})).$$

Таким образом, $\eta'(x_{i_1}'^{(l)}) = \dots = \eta'(x_{i_1}'^{(s)}) = y_t$, $\eta'(x_{i_2}'^{(l)}) = \dots = \eta'(x_{i_2}'^{(s)}) = y_r$, при этом все вершины $x_{i_1}'^{(l)}, \dots, x_{i_1}'^{(s-1)}$ имеют степень исхода 1, поскольку их метка не содержится в области определения правила G . Значит, согласно утверждению 1, произведение $\Sigma_1' \dots \Sigma_s'$ эквивалентно произведению $\Sigma_1' \dots \Sigma_{l-1}' \cdot \Sigma_{l+1}' \dots \Sigma_s' \cdot \Sigma_l'$, и легко видеть, что для сетей $\Sigma_1 \dots \Sigma_{t-1}$ и $\Sigma_1' \dots \Sigma_{l-1}' \cdot \Sigma_{l+1}' \dots \Sigma_s'$ выполняется предположение индукции: разметка η является максимальной свободной разметкой сети $\Sigma_1 \dots \Sigma_{t-1}$, её минимальное правило также является правилом для разметки η' сети $\Sigma_1' \dots \Sigma_{l-1}' \cdot \Sigma_{l+1}' \dots \Sigma_s'$ и выполняется равенство

$$\{\eta(x_1^{(t-1)}), \dots, \eta(x_n^{(t-1)})\} = \{\eta'(x_1'^{(s-1)}), \dots, \eta'(x_n'^{(s-1)})\}.$$

Значит, по предположению индукции $t-1 = s-1$, а произведения элементарных сетей $\Sigma_1 \dots \Sigma_{t-1}$ и $\Sigma_1' \dots \Sigma_{l-1}' \cdot \Sigma_{l+1}' \dots \Sigma_s'$ отличаются лишь допустимой перестановкой множителей. В таком случае $\Sigma_t = \Sigma_l'$. ■

Из условия $(\eta(x_1^{(t+1)}), \dots, \eta(x_n^{(t+1)})) = (y_{i_1}, \dots, y_{i_n}) = (\eta'(x_1'^{(s+1)}), \dots, \eta'(x_n'^{(s+1)}))$ следует, что $\{\eta(x_1^{(t)}), \dots, \eta(x_n^{(t)})\} = \{y_{i_1}, \dots, y_{i_n}\} = \{\eta'(x_1'^{(s)}), \dots, \eta'(x_n'^{(s)})\}$, и при этом минимальное правило G максимальной свободной разметки η сети $\Sigma_1 \dots \Sigma_t$ с начальным условием $(v_1, \dots, v_n)$ также является правилом разметки η' сети $\Sigma_1' \dots \Sigma_s'$ с начальным условием $(v_1, \dots, v_n)$.

Согласно лемме 3, произведения элементарных сетей $\Sigma_1 \dots \Sigma_t$ и $\Sigma_1' \dots \Sigma_s'$ имеют одинаковый состав и могут отличаться лишь допустимой перестановкой множителей. Значит, для правильных G -разметок η и η' выполняется равенство $(\eta(x_1^{(t)}), \dots, \eta(x_n^{(t)})) = (\eta'(x_1'^{(s)}), \dots, \eta'(x_n'^{(s)}))$. Поскольку выполняется также равенство $(\eta(x_1^{(t+1)}), \dots, \eta(x_n^{(t+1)})) = (\eta'(x_1'^{(s+1)}), \dots, \eta'(x_n'^{(s+1)}))$, очевидно, что $\Pi = \Pi'$. Теорема 6 доказана. ■

Следствие 6. Пусть Σ и Σ' — биективные сети ширины n . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) сети Σ и Σ' эквивалентны для множества Ω , $|\Omega| \geq \|\Sigma\| + \|\Sigma'\| + n$;
- 2) сети Σ и Σ' эквивалентны.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $\Sigma = \Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t \cdot \Pi$ и $\Sigma' = \Sigma'_1 \cdot \dots \cdot \Sigma'_s \cdot \Pi'$. Тогда, как видно из доказательства теоремы 6, эквивалентности сетей Σ и Σ' для множества Ω , $|\Omega| \geq \|\Sigma\| + \|\Sigma'\| + n$, достаточно для того, чтобы произведения $\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t \cdot \Pi$ и $\Sigma'_1 \cdot \dots \cdot \Sigma'_s \cdot \Pi'$ имели одинаковый состав и отличались лишь допустимой перестановкой множителей.

$2 \Rightarrow 1$. Очевидно. ■

Теперь можно уточнить результат теоремы 2 следующим образом.

Следствие 7. Сеть Σ является биективной в том и только в том случае, когда она эквивалентна произведению

$$\Sigma_{R1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{Rt} \cdot \Pi_R \text{ (или } \Pi_L \cdot \Sigma_{L1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{Lt}),$$

где $\Sigma_{R1}, \dots, \Sigma_{Rt}$ ($\Sigma_{L1}, \dots, \Sigma_{Lt}$) — элементарные сети, а Π_R (Π_L) — однослойная перестановочная сеть. При этом произведение определено однозначно с точностью до возможной перестановки элементарных сетей, а количество элементарных сетей в произведении равно количеству вершин сети Σ со степенью захода 2.

Ранее мы отмечали и неоднократно пользовались тем, что две сети Σ и Σ' одинаковой ширины, которые описывают преобразование набора переменных в один и тот же набор формул, являются эквивалентными. Теперь можно доказать обратное утверждение.

Теорема 7. Эквивалентные сети Σ и Σ' описывают преобразование набора переменных в один и тот же набор формул.

Доказательство. Из теоремы 6 следует, что представления

$$\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t \cdot \Pi \text{ и } \Sigma'_1 \cdot \dots \cdot \Sigma'_s \cdot \Pi'$$

эквивалентных сетей Σ и Σ' имеют одинаковый состав и произведение $\Sigma'_1 \cdot \dots \cdot \Sigma'_s$ может быть получено из произведения $\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t$ путём конечного числа допустимых перестановок элементарных сетей. Согласно утверждению 1, если в произведении элементарных сетей произведена допустимая перестановка множителей, то полученное произведение описывает такое же преобразование набора переменных, что и исходное произведение. ■

3. Транзитивность сетей

Продолжим развивать аппарат разметки и сформулируем на новом языке условия, достаточные для транзитивности сети.

Определение 17. Биективную сеть Σ будем называть *транзитивной для множества Ω* , если множество отображений $\{\Sigma^F : F \in \mathcal{Q}(\Omega)\}$ является транзитивным.

Нетрудно понять, что сама природа множества Ω в данном определении не играет никакой роли, и поэтому будет корректным говорить, что биективная сеть Σ является транзитивной для множеств мощности q . По-прежнему будем считать, что $\Omega \subset \mathbb{N}$, а для множества $\{1, \dots, q\}$ будем использовать обозначение Ω_q .

Поскольку действие перестановочной сети не зависит от выбора квазигруппы $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$, представляется очевидным следующее

Утверждение 2. Пусть Σ — произвольная транзитивная для множества Ω сеть, Π_1, Π_2 — произвольные перестановочные сети, для которых корректно определить произведения $\Pi_1 \cdot \Sigma$ и $\Sigma \cdot \Pi_2$. Тогда сети $\Pi_1 \cdot \Sigma$ и $\Sigma \cdot \Pi_2$ также являются транзитивными для множества Ω .

Далее, не ограничивая общности, будем считать, что произвольная биективная сеть Σ представляет собой произведение элементарных сетей $\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t$ с множеством вершин $X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_t$.

Определение 18. Разметку μ сети Σ с условиями

$$\mu(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \mu(x_n^{(0)}) = v_n, \mu(x_1^{(t)}) = w_1, \dots, \mu(x_n^{(t)}) = w_n$$

будем называть *разметкой сети Σ с ограничениями* $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$. При этом будем говорить, что сеть Σ *допускает* разметку μ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$.

Если биективная сеть Σ транзитивна для некоторого множества Ω , то для любых $(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n) \in \Omega^n$ существует такая квазигруппа $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$, что $\Sigma^F(v_1, \dots, v_n) = (w_1, \dots, w_n)$. В таком случае квазигруппа F определяет правильную и непротиворечивую разметку сети Σ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$. Другими словами, существование правильной непротиворечивой разметки сети Σ при произвольных ограничениях $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из множества Ω является необходимым условием для того, чтобы сеть Σ была транзитивной для множества Ω .

С другой стороны, известно, что не каждое частично определённое непротиворечивое отображение $F: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ может быть продолжено до квазигруппы на множестве Ω . Поэтому в общем случае условие существования правильных непротиворечивых разметок сети Σ со всеми возможными ограничениями из множества Ω^n не является гарантией транзитивности сети Σ для множества Ω . Однако связь между существованием правильных непротиворечивых разметок сети Σ и её транзитивностью существует.

Теорема 8. Пусть Σ — биективная сеть ширины n и Ω — множество мощности строго больше чем $\|\Sigma\|$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) сеть Σ является транзитивной для множества Ω ;
- 2) сеть Σ допускает правильную непротиворечивую разметку элементами множества Ω при любых ограничениях $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из множества Ω .

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Очевидно.

$2 \Rightarrow 1$. Каждой правильной непротиворечивой разметке сети Σ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из множества Ω соответствует непротиворечивое правило, определённое не более чем на $\|\Sigma\| \leq |\Omega| - 1$ наборах. Согласно гипотезе Эванса, данное правило продолжается до квазигруппы на множестве Ω . ■

Следствие 8. Пусть Σ — биективная сеть ширины n и Ω — множество мощности не менее чем $\|\Sigma\| + n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) сеть Σ является транзитивной для множества Ω ;

- 2) сеть Σ допускает правильную непротиворечивую разметку элементами множества Ω при любых ограничениях $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из множества Ω ;
- 3) сеть Σ допускает правильную непротиворечивую разметку при любых ограничениях $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из множества $\mathbb{N}$;
- 4) сеть Σ является транзитивной для любого множества, мощность которого не менее чем $\|\Sigma\| + n$.

Замечание 4. В общем случае утверждение теоремы 8 нельзя усилить, поскольку гипотеза Эванса также не допускает усиления оценки в общем случае.

Пусть η — произвольная разметка сети $\Sigma = \Sigma_1 \dots \Sigma_t$. Тогда с разметкой η свяжем отношение $G \subset \mathbb{N}^3$, определённое следующим образом: отношение G содержит тройку (y_l, y_r, y_q) в том и только в том случае, когда для некоторого $s \in \{1, \dots, t\}$ выполняются равенства $\Sigma_s = \Sigma_m^{(i,j)}$ и $(\eta(x_i^{(s-1)}), \eta(x_j^{(s-1)}), \eta(x_m^{(s)})) = (y_l, y_r, y_q)$.

Если в отношении G содержатся две тройки, отличающиеся только в одной координате, например (y_l, y_r, y_q) и $(y_l, y_r, y_{q'})$, то, заменив в разметке η все метки $y_{q'}$ на y_q , получим разметку η_1 , в которой используется на одну метку меньше, чем в разметке η . Если в отношении G_1 , соответствующем разметке η_1 , присутствуют две тройки, отличающиеся только в одной координате, то повторим эти действия, и так далее.

Таким образом построим последовательность разметок $\eta = \eta_0, \eta_1, \dots$ сети Σ , в которой каждая следующая разметка использует на одну метку меньше, чем предыдущая. Поэтому указанная последовательность разметок оборвётся на некотором конечном шаге, например с номером k , в том смысле, что в отношении G_k , соответствующем разметке η_k , не найдётся двух троек, отличающихся только в одной координате. Такая разметка η_k будет правильной и непротиворечивой разметкой сети Σ .

Описанную процедуру будем называть *устранением противоречий в разметке η* . При этом будем говорить, что разметка η_d , $d \in \{0, 1, \dots, k\}$, получена из разметки η *устранением противоречий*.

Лемма 4. Пусть η — произвольная разметка сети Σ , μ — правильная непротиворечивая разметка сети Σ , и при этом существует отображение $\sigma_\mu: \eta \rightarrow \mu$. Тогда для любой разметки $\tilde{\eta}$, полученной из разметки η устранением противоречий, выполняется условие $\sigma_\mu: \tilde{\eta} \rightarrow \mu$.

Доказательство. Пусть $\eta = \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k = \tilde{\eta}$ — последовательность разметок сети Σ , полученная в результате последовательного устранения противоречий в разметке η . Для доказательства утверждения методом математической индукции достаточно показать, что для разметки η_1 также выполняется условие $\sigma_\mu: \eta_1 \rightarrow \mu$.

При построении разметки η_1 в отношении G , соответствующем разметке η , выбираются две тройки, отличающиеся только в одной координате. Рассмотрим все возможные случаи:

- 1) Если выбранная пара имеет вид (y_l, y_r, y_q) и $(y_l, y_r, y_{q'})$, то $\sigma_\mu(y_q) = \sigma_\mu(y_{q'})$, поскольку разметка μ является правильной. Значит, для разметки η_1 , полученной из разметки η заменой всех меток $y_{q'}$ на y_q , также выполняется условие $\sigma_\mu: \eta_1 \rightarrow \mu$.
- 2) Если выбранная пара имеет вид (y_l, y_r, y_q) и $(y_l, y_{r'}, y_q)$, то $\sigma_\mu(y_r) = \sigma_\mu(y_{r'})$, поскольку разметка μ является непротиворечивой. Тогда при замене в разметке η всех меток $y_{r'}$ на y_r получается разметка η_1 , для которой, очевидно, выполняется условие $\sigma_\mu: \eta_1 \rightarrow \mu$.

- 3) Если выбранная пара имеет вид (y_l, y_r, y_q) и $(y_{l'}, y_r, y_q)$, то $\sigma_\mu(y_l) = \sigma_\mu(y_{l'})$, поскольку разметка μ является непротиворечивой. Тогда при замене в разметке η всех меток $y_{l'}$ на y_l получается разметка η_1 , для которой, очевидно, выполняется условие $\sigma_\mu: \eta_1 \rightarrow \mu$.

Лемма доказана. ■

Следствие 9. Пусть η — произвольная разметка сети Σ . Тогда правильная непротиворечивая разметка $\tilde{\eta}$, полученная из разметки η устранением противоречий, определена однозначно с точностью до обратимого переобозначения меток.

Доказательство. Пусть $\tilde{\eta}$ и $\hat{\eta}$ — две правильные непротиворечивые разметки, полученные из разметки η устранением противоречий. Тогда существуют отображения $\sigma_{\tilde{\eta}}$ и $\sigma_{\hat{\eta}}$, удовлетворяющие условиям $\sigma_{\tilde{\eta}}: \eta \rightarrow \tilde{\eta}$ и $\sigma_{\hat{\eta}}: \eta \rightarrow \hat{\eta}$. Согласно лемме 4, отображения $\sigma_{\tilde{\eta}}$ и $\sigma_{\hat{\eta}}$ также удовлетворяют условиям $\sigma_{\tilde{\eta}}: \hat{\eta} \rightarrow \tilde{\eta}$ и $\sigma_{\hat{\eta}}: \tilde{\eta} \rightarrow \hat{\eta}$, что и доказывает утверждение следствия. ■

Определение 19. Правильную непротиворечивую разметку η сети Σ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ будем называть *свободной разметкой сети Σ с ограничениями*, если для любой правильной непротиворечивой разметки μ сети Σ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ существует отображение $\sigma_\mu: \eta \rightarrow \mu$.

Из определения следует, что, при условии существования, свободная разметка сети Σ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ определена однозначно с точностью до обратимого переобозначения меток.

Пример 2. Рассмотрим биективную сеть Σ ширины 2

$$\Sigma = \Sigma_1^{(2,1)} \cdot \Sigma_1^{(1,2)} \cdot \Sigma_2^{(1,2)}.$$

Частично определённое правило F

$$F(1, 2) = 1, \quad F(2, 1) = 3, \quad F(3, 2) = 1$$

определяет правильную, но противоречивую разметку μ сети Σ с ограничениями $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. При этом свободная разметка η сети Σ с теми же ограничениями $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ определяется правилом G :

$$G(1, 2) = 1, \quad G(2, 1) = 1.$$

Пример показывает, что в определении свободной разметки с ограничениями нельзя отказаться от условия непротиворечивости правильной разметки μ . Другими словами, свободная разметка с ограничениями не является «свободной» в классе всех правильных разметок с теми же ограничениями.

Теорема 9. Если сеть Σ допускает правильную непротиворечивую разметку с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$, то существует свободная разметка сети Σ с указанными ограничениями.

Доказательство. Для удобства дальнейшего изложения будем считать, что $\mathbb{N} \setminus \{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\} = \{y_1, y_2, \dots\}$. Пусть η_0 — свободная разметка сети Σ с начальным условием $(v_1, \dots, v_n)$, полученная в результате свободного продолжения начальной разметки $\eta_0(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta_0(x_n^{(0)}) = v_n$ с использованием меток $y_1, y_2, \dots$

Тогда, согласно теореме 3, для любой правильной непротиворечивой разметки μ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ существует отображение σ_μ , удовлетворяющее условию $\sigma_\mu: \eta_0 \rightarrow \mu$. Продолжим указанное отображение σ_μ по правилу $\sigma_\mu(w_i) = w_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, и заменим в разметке η_0 метки $\eta_0(x_1^{(t)}), \dots, \eta_0(x_n^{(t)})$ на $w_1, \dots, w_n$ соответственно. Таким образом, мы построили разметку η_1 сети Σ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ и при этом для любой правильной непротиворечивой разметки μ с этими ограничениями существует отображение σ_μ , удовлетворяющее условию $\sigma_\mu: \eta_1 \rightarrow \mu$.

Проведём процедуру устранения противоречий в разметке η_1 с двумя уточнениями:

- если при устранении противоречия требуется отождествить метки v_i и y_j , то будем заменять метку y_j на v_i ;
- если при устранении противоречия требуется отождествить метки w_i и y_j , то будем заменять метку y_j на w_i .

Пусть $\tilde{\eta}$ — правильная непротиворечивая разметка сети Σ , полученная из разметки η_1 устранением противоречий. Тогда, согласно уточнениям, все метки $\tilde{\eta}(x_1^{(0)}), \dots, \tilde{\eta}(x_n^{(0)})$, $\tilde{\eta}(x_1^{(t)}), \dots, \tilde{\eta}(x_n^{(t)})$ содержатся в множестве $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}$. При этом, согласно лемме 4, для любой правильной непротиворечивой разметки μ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ соответствующее отображение σ_μ удовлетворяет условию $\sigma_\mu: \tilde{\eta} \rightarrow \mu$. Значит, на самом деле разметка $\tilde{\eta}$ является свободной разметкой сети Σ с указанными ограничениями. ■

Следствие 10. Если биективная сеть Σ ширины n является транзитивной для множества Ω_q при $q \geq 2n$, то при любых $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{N}$ существует свободная разметка сети Σ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$.

Следующая теорема фактически оправдывает название свободной разметки с ограничениями.

Теорема 10. Пусть η — свободная разметка сети Σ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$, μ — правильная непротиворечивая разметка сети Σ с ограничениями $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \\ \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_n \end{pmatrix}$, при которых возможно определить отображение σ_μ по правилу $\sigma_\mu(v_i) = \bar{v}_i$, $\sigma_\mu(w_i) = \bar{w}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда отображение σ_μ допускает продолжение, удовлетворяющее условию $\sigma_\mu: \eta \rightarrow \mu$.

Доказательство. Для удобства дальнейшего изложения будем считать, что $\mathbb{N} \setminus \{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\} = \{y_1, y_2, \dots\}$. Пусть η_0 — свободная разметка сети Σ с начальным условием $(v_1, \dots, v_n)$, полученная в результате свободного продолжения начальной разметки $\eta_0(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta_0(x_n^{(0)}) = v_n$ с использованием меток $y_1, y_2, \dots$. Тогда, согласно теореме 4, для любой правильной непротиворечивой разметки μ с ограничениями $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \\ \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_n \end{pmatrix}$, при которых возможно определить отображение σ_μ по правилу $\sigma_\mu(v_i) = \bar{v}_i$, $\sigma_\mu(w_i) = \bar{w}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, указанное отображение σ_μ продолжается таким образом, что удовлетворяет условию $\sigma_\mu: \eta_0 \rightarrow \mu$. Заменив в разметке η_0 метки $\eta_0(x_1^{(t)}), \dots, \eta_0(x_n^{(t)})$ на $w_1, \dots, w_n$ соответственно, получим разметку η_1 сети Σ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$, при этом для любой правильной непротиворечивой разметки

ки μ с ограничениями $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \\ \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_n \end{pmatrix}$, при которых возможно определить отображение σ_μ по правилу $\sigma_\mu(v_i) = \bar{v}_i$, $\sigma_\mu(w_i) = \bar{w}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, отображение σ_μ продолжается таким образом, что удовлетворяет условию $\sigma_\mu: \eta_1 \rightarrow \mu$.

Проведём процедуру устранения противоречий в разметке η_1 с двумя уточнениями:

- если при устранении противоречия требуется отождествить метки v_i и y_j , то будем заменять метку y_j на v_i ;
- если при устранении противоречия требуется отождествить метки w_i и y_j , то будем заменять метку y_j на w_i .

В доказательстве теоремы 9 показано, что правильная непротиворечивая разметка сети Σ , полученная из разметки η_1 устранением противоречий, является свободной разметкой сети Σ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$. Без потери общности можно считать, что при устранении противоречий в разметке η_1 получается свободная разметка η . Поскольку для любой правильной непротиворечивой разметки μ с ограничениями $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \\ \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_n \end{pmatrix}$, при которых возможно определить отображение σ_μ по правилу $\sigma_\mu(v_i) = \bar{v}_i$, $\sigma_\mu(w_i) = \bar{w}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, отображение σ_μ допускает продолжение, удовлетворяющее условию $\sigma_\mu: \eta_1 \rightarrow \mu$, то, согласно лемме 4, данное продолжение также удовлетворяет условию $\sigma_\mu: \eta \rightarrow \mu$. ■

Следствие 11. В условиях теоремы 10, если G и F — минимальные правила разметок η и μ соответственно, то при всех допустимых $z_i, z_j \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\sigma_\mu(G(z_i, z_j)) = F(\sigma_\mu(z_i), \sigma_\mu(z_j))$.

Достаточным условием для существования правильных непротиворечивых разметок сети Σ при всех возможных ограничениях из $\mathbb{N}$ является существование правильных непротиворечивых разметок сети Σ при всех возможных ограничениях из Ω_{2n} . Справедливо и более сильное утверждение.

Теорема 11. Сеть Σ допускает правильные непротиворечивые разметки при всех возможных ограничениях $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из $\mathbb{N}$ в том и только в том случае, когда сеть Σ допускает правильные непротиворечивые разметки при всех возможных ограничениях $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \\ \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_n \end{pmatrix}$ из Ω_2 .

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Пусть $\mathbb{N} \setminus \{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\} = \{y_1, y_2, \dots\}$ и η_0 — свободная разметка сети Σ с начальным условием $(v_1, \dots, v_n)$, полученная в результате свободного продолжения начальной разметки $\eta_0(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta_0(x_n^{(0)}) = v_n$ с использованием меток $y_1, y_2, \dots$. Тогда, согласно теореме 4, для любой правильной непротиворечивой разметки μ с ограничениями $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \\ \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_n \end{pmatrix}$ из Ω_2 , при которых возможно определить отображение σ_μ по правилу $\sigma_\mu(v_i) = \bar{v}_i$, $\sigma_\mu(w_i) = \bar{w}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, отображение σ_μ продолжается таким образом, что удовлетворяет условию $\sigma_\mu: \eta_0 \rightarrow \mu$. Заменяя в разметке η_0 метки $\eta_0(x_1^{(t)}), \dots, \eta_0(x_n^{(t)})$ на $w_1, \dots, w_n$ соответственно, получим разметку η_1 сети Σ с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$, при этом для любой правильной непротиворечивой разметки μ с ограничениями $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \\ \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_n \end{pmatrix}$ из Ω_2 , при которых возможно определить

отображение σ_μ по правилу $\sigma_\mu(v_i) = \bar{v}_i$, $\sigma_\mu(w_i) = \bar{w}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, отображение σ_μ продолжается таким образом, что удовлетворяет условию $\sigma_\mu: \eta_1 \rightarrow \mu$.

Проведём процедуру устранения противоречий в разметке η_1 с двумя уточнениями:

- если при устранении противоречия требуется отождествить метки v_i и y_j , то будем заменять метку y_j на v_i ;
- если при устранении противоречия требуется отождествить метки w_i и y_j , то будем заменять метку y_j на w_i .

Пусть $\tilde{\eta}$ — правильная непротиворечивая разметка сети Σ , полученная из разметки η_1 устранением противоречий. Тогда, согласно уточнениям, все метки $\tilde{\eta}(x_1^{(0)}), \dots, \tilde{\eta}(x_n^{(0)})$, $\tilde{\eta}(x_1^{(t)}), \dots, \tilde{\eta}(x_n^{(t)})$ содержатся в множестве $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}$. При этом, согласно лемме 4, для любой правильной непротиворечивой разметки μ с ограничениями $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \\ \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_n \end{pmatrix}$ из Ω_2 , при которых возможно определить отображение σ_μ по правилу $\sigma_\mu(v_i) = \bar{v}_i$, $\sigma_\mu(w_i) = \bar{w}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, отображение σ_μ продолжается таким образом, что удовлетворяет условию $\sigma_\mu: \tilde{\eta} \rightarrow \mu$.

Методом от противного покажем, что правильная непротиворечивая разметка $\tilde{\eta}$ будет разметкой с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$. Согласно сделанным уточнениям, в ограничениях разметки $\tilde{\eta}$ могли появиться противоречия только следующих типов:

- $\tilde{\eta}(x_i^{(0)}) = v_j \neq v_i$;
- $\tilde{\eta}(x_i^{(0)}) = w_j \neq v_i$;
- $\tilde{\eta}(x_i^{(t)}) = v_j \neq w_i$;
- $\tilde{\eta}(x_i^{(t)}) = w_j \neq w_i$.

Разберём первый случай: $\tilde{\eta}(x_i^{(0)}) = v_j \neq v_i$. Согласно условию теоремы, существует правильная непротиворечивая разметка μ с ограничениями $(\delta_{v_1, v_j} + 1, \dots, \delta_{v_n, v_j} + 1)$, $(\delta_{w_1, v_j} + 1, \dots, \delta_{w_n, v_j} + 1) \in \Omega_2^n$ и при этом возможно определить отображение σ_μ по правилу $\sigma_\mu(v_i) = \delta_{v_i, v_j} + 1$, $\sigma_\mu(w_i) = \delta_{w_i, v_j} + 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Значит, отображение σ_μ продолжается таким образом, что удовлетворяет условию $\sigma_\mu: \tilde{\eta} \rightarrow \mu$. Получили противоречие, поскольку

$$\sigma_\mu(\tilde{\eta}(x_i^{(0)})) = \sigma_\mu(v_j) = 2 \neq 1 = \delta_{v_i, v_j} + 1 = \mu(x_i^{(0)}).$$

Отсутствие противоречий остальных типов устанавливается аналогичным образом. ■

Ввиду следствия 8 становится очевидным следующее утверждение.

Следствие 12. Пусть Σ — биективная сеть ширины n и Ω — множество мощности не менее чем $\|\Sigma\| + n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) сеть Σ является транзитивной для множества Ω ;
- 2) сеть Σ допускает правильную непротиворечивую разметку элементами множества Ω при любых ограничениях $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из множества Ω ;
- 3) сеть Σ допускает правильную непротиворечивую разметку элементами множества Ω при любых ограничениях $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \\ \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_n \end{pmatrix}$ из множества $\Omega_2 \subset \Omega$;
- 4) множество преобразований $\{\Sigma^F : F \in \mathcal{Q}(\Omega)\}$ действует транзитивным образом на подмножестве $\Omega_2^n \subset \Omega^n$.

Пример 3. На первый взгляд может показаться, что результат теоремы 11 можно усилить следующим образом: если сеть Σ допускает правильную непротиворечивую

разметку при всех возможных ограничениях $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из Ω_2 , то она допускает правильную непротиворечивую разметку с любыми ограничениями $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \\ \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_n \end{pmatrix}$ из Ω_2 и, как следствие, допускает правильную непротиворечивую разметку с любыми ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из $\mathbb{N}$. Однако такое предположение является неверным.

Рассмотрим биективную сеть $\Sigma = \Sigma_2^{(1,2)} \cdot \Sigma_2^{(2,1)} \cdot \Sigma_1^{(1,2)}$ ширины 2. Нетрудно проверить, что сеть Σ допускает правильные непротиворечивые разметки при всех возможных ограничениях $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$ из Ω_2 , но при этом не допускает правильной непротиворечивой разметки с ограничениями $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (рис. 3).

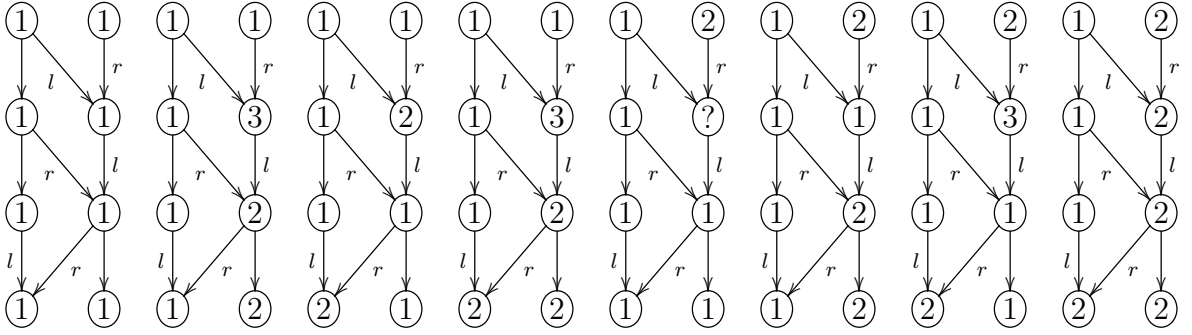


Рис. 3

На самом деле результат теоремы 11 можно усилить, воспользовавшись очевидным соображением: если сеть Σ допускает правильную непротиворечивую разметку с ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из Ω_2 и π — подстановка на множестве Ω_2 , то сеть Σ допус-

кает правильную непротиворечивую разметку с ограничениями $\begin{pmatrix} \pi(v_1) & \dots & \pi(v_n) \\ \pi(w_1) & \dots & \pi(w_n) \end{pmatrix}$.

Другими словами, для проверки того, что сеть Σ допускает правильную непротиворечивую разметку при любых ограничениях из Ω_2 , достаточно убедиться в существовании 2^{2n-1} правильных непротиворечивых разметок сети Σ с ограничениями из Ω_2 . Данное усиление результата теоремы 11 примечательно тем, что оно не улучшаемо в общем случае — сеть Σ допускает правильную непротиворечивую разметку при любых ограничениях $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}$ из Ω_2 , за исключением $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

В дальнейшем нам потребуются естественные обобщения понятия свободной разметки с ограничениями и соответствующих результатов.

Определение 20. Правильную непротиворечивую разметку η сети Σ будем называть *свободной разметкой сети Σ с условиями*

$$\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n, \eta(x_{i_1}^{(t)}) = w_{i_1}, \dots, \eta(x_{i_k}^{(t)}) = w_{i_k},$$

если для любой правильной непротиворечивой разметки μ сети Σ с аналогичными условиями $\mu(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \mu(x_n^{(0)}) = v_n, \mu(x_{i_1}^{(t)}) = w_{i_1}, \dots, \mu(x_{i_k}^{(t)}) = w_{i_k}$ существует такое отображение σ_μ , что $\sigma_\mu: \eta \rightarrow \mu$.

Аналогично теоремам 9 и 10 доказываются следующие утверждения.

Теорема 12. Если существует правильная непротиворечивая разметка μ сети Σ с условиями $\mu(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \mu(x_n^{(0)}) = v_n, \mu(x_{i_1}^{(t)}) = w_{i_1}, \dots, \mu(x_{i_k}^{(t)}) = w_{i_k}$, то существует единственная, с точностью до переобозначений, свободная разметка η сети Σ с теми же условиями $\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n, \eta(x_{i_1}^{(t)}) = w_{i_1}, \dots, \eta(x_{i_k}^{(t)}) = w_{i_k}$.

Теорема 13. Пусть для свободной разметки η с условиями

$$\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n, \eta(x_{i_1}^{(t)}) = w_{i_1}, \dots, \eta(x_{i_k}^{(t)}) = w_{i_k}$$

и правильной непротиворечивой разметки μ с условиями

$$\mu(x_1^{(0)}) = \bar{v}_1, \dots, \mu(x_n^{(0)}) = \bar{v}_n, \mu(x_{i_1}^{(t)}) = \bar{w}_{i_1}, \dots, \mu(x_{i_k}^{(t)}) = \bar{w}_{i_k}$$

возможно определить отображение σ_μ по правилу $\sigma_\mu(v_i) = \bar{v}_i, \sigma_\mu(w_i) = \bar{w}_i$. Тогда отображение σ_μ допускает продолжение, удовлетворяющее условию $\sigma_\mu: \eta \rightarrow \mu$.

Следствие 13. В условиях теоремы 13, если G и F — минимальные правила разметок η и μ соответственно, то при всех допустимых $z_i, z_j \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\sigma_\mu(G(z_i, z_j)) = F(\sigma_\mu(z_i), \sigma_\mu(z_j))$. В частности, если метка $\mu(x_i^{(s)})$ не содержится в области определения F , то метка $\eta(x_i^{(s)})$ не содержится в области определения G .

4. Построение транзитивных сетей

Здесь нам потребуется продолжение результата теоремы 2 о представлении биективной сети в виде произведения элементарных и перестановочной сетей.

Утверждение 3. Произвольная биективная сеть Σ эквивалентна произведению

$$\Pi_L (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1k_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{n1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{nk_n}) \Pi_R,$$

в котором Π_L, Π_R — перестановочные сети, а $\Sigma_{11}, \dots, \Sigma_{1k_1}, \dots, \Sigma_{n1}, \dots, \Sigma_{nk_n}$ — элементарные сети, удовлетворяющие следующему условию: при всех $s \in \{2, \dots, n\}$, $r \in \{1, \dots, k_s\}$ вершины $x_1^{(k_1+\dots+k_{s-1}+r)}, \dots, x_{s-1}^{(k_1+\dots+k_{s-1}+r)}$ сети Σ_{sr} имеют степень захода 1.

Доказательство. Согласно теореме 2, биективная сеть Σ эквивалентна произведению

$$\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t \cdot \Pi_R,$$

где $\Sigma_1, \dots, \Sigma_t$ — элементарные сети, а Π_R — перестановочная сеть. Пусть $i_1, \dots, i_n$ — такая последовательность номеров от 1 до n , что при всех $s \in \{2, \dots, n\}$ и $l \in \{1, \dots, t\}$ для вершин сети $\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t$ выполняется условие

$$(\deg^- x_{i_s}^{(l)} = \dots = \deg^- x_{i_s}^{(t)} = 1) \implies (\deg^- x_{i_{s-1}}^{(l)} = \dots = \deg^- x_{i_{s-1}}^{(t)} = 1).$$

Другими словами, $i_1, \dots, i_n$ — порядок «окончания преобразований» вершин произведения $\Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t$. Нетрудно понять, что при выборе перестановочной сети Π_L , соответствующей подстановке $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$, произведение $\Pi_L^{-1} \cdot \Sigma_1 \cdot \dots \cdot \Sigma_t \cdot \Pi_L$ эквивалентно произведению элементарных сетей

$$(\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1k_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{n1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{nk_n}),$$

где $\Sigma_{11}, \dots, \Sigma_{1k_1}, \dots, \Sigma_{n1}, \dots, \Sigma_{nk_n}$ — элементарные сети, удовлетворяющие следующему условию: при всех $s \in \{2, \dots, n\}$, $r \in \{1, \dots, k_s\}$ вершины $x_1^{(k_1+\dots+k_{s-1}+r)}, \dots, x_{s-1}^{(k_1+\dots+k_{s-1}+r)}$ сети Σ_{sr} имеют степень захода 1.

Утверждение можно считать доказанным, поскольку исходная сеть Σ эквивалентна произведению $\Pi_L (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1k_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{n1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{nk_n}) (\Pi_L^{-1} \Pi_R)$. ■

Ввиду следствия 7 корректно дать следующее

Определение 21. Указанное в утверждении 3 произведение

$$\Pi_L (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1k_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{n1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{nk_n}) \Pi_R$$

будем называть *каноническим представлением* биективной сети Σ . При этом сети $\Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{sk_s}$, $s \in \{1, \dots, n\}$, будем называть *слоями* канонического представления биективной сети Σ . Слой $\Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{sk_s}$ называется *вырожденным*, если $k_s = 0$.

Замечание 5. В каноническом представлении произвольной биективной сети вырожденные слои присутствуют в том и только в том случае, когда для некоторого s все вершины $x_s^{(i)}$, $i \geq 0$, имеют степень захода 1. При этом пустыми могут быть только первые несколько подряд идущих слоев.

Не ограничивая общности, всюду далее будем считать, что произвольная биективная сеть Σ равна своему каноническому представлению

$$(\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1k_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{n1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{nk_n})$$

с множеством вершин $X_0 \cup X_{11} \cup \dots \cup X_{1k_1} \cup \dots \cup X_{n1} \cup \dots \cup X_{nk_n}$.

Далее предложен алгоритм модификации канонического представления произвольной биективной сети, в результате работы которого получается сеть, действующая транзитивным образом для всех достаточно больших множеств. Предварительно докажем вспомогательное утверждение о свойстве процедуры свободного продолжения разметки.

Лемма 5. Пусть $\Sigma = (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1k_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{n1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{nk_n})$ и μ — разметка сети

$$\Sigma_{s-1} = (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1k_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{(s-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(s-1)k_{s-1}})$$

с минимальным правилом $F_{\Sigma_{s-1}}$. Тогда если среди $x_s^{(k_1+\dots+k_{s-1})}, \dots, x_n^{(k_1+\dots+k_{s-1})}$ найдётся вершина $x_i^{(k_1+\dots+k_{s-1})}$, метка которой не содержится в области определения $F_{\Sigma_{s-1}}$, то при свободном продолжении разметки μ до разметки сети

$$\Sigma_s = (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1k_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{(s-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(s-1)k_{s-1}}) (\Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{sk_s})$$

среди $x_s^{(k_1+\dots+k_s)}, \dots, x_n^{(k_1+\dots+k_s)}$ найдётся вершина $x_j^{(k_1+\dots+k_s)}$, метка которой не содержится в области определения F_{Σ_s} — минимального правила разметки μ сети Σ_s .

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по длине слоя $(\Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{sk_s})$. База при $k_s = 0$ очевидна.

Пусть теперь $k_s \geq 1$ и $\Sigma_{sk_s} = \Sigma_l^{\{l,r\}}$, $l \in \{s, \dots, n\}$. Тогда по предположению индукции среди вершин $x_s^{(k_1+\dots+k_{s-1})}, \dots, x_n^{(k_1+\dots+k_{s-1})}$ найдётся вершина $x_j^{(k_1+\dots+k_{s-1})}$, метка которой не содержится в области определения $F_{\Sigma'_s}$ — минимального правила разметки μ сети $\Sigma'_s = (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1k_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{(s-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(s-1)k_{s-1}}) \cdot (\Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{s(k_s-1)})$. Рассмотрим два возможных случая:

- 1) Если одна из вершин $x_l^{(k_1+\dots+k_s-1)}$ или $x_r^{(k_1+\dots+k_s-1)}$ имеет метку, не содержащуюся в области определения $F_{\Sigma'_s}$, то, согласно определению процедуры свободного продолжения разметки, вершина $x_l^{(k_1+\dots+k_s)}$ будет иметь метку, не содержащуюся в области определения F_{Σ_s} .
- 2) Если метки обеих вершин $x_l^{(k_1+\dots+k_s-1)}$ и $x_r^{(k_1+\dots+k_s-1)}$ содержатся в области определения $F_{\Sigma'_s}$, то очевидно, что метка вершины $x_j^{(k_1+\dots+k_s-1)}$ отличается от меток вершин $x_l^{(k_1+\dots+k_s-1)}$ и $x_r^{(k_1+\dots+k_s-1)}$. Значит, вершина $x_j^{(k_1+\dots+k_s-1)}$ и соответственно вершина $x_j^{(k_1+\dots+k_s)}$ будут иметь метку, не содержащуюся в области определения F_{Σ_s} .

Лемма доказана. ■

Алгоритм построения транзитивной сети

Вход: произвольная биективная сеть $\Sigma = (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1k_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{n1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{nk_n})$.

Шаг $s \leq n - 2$. Пусть первые $(s - 1)$ слоев канонического представления сети Σ уже модифицированы таким образом, что сеть

$$\widehat{\Sigma}_{s-1} = (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1\widehat{k}_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{(s-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(s-1)\widehat{k}_{s-1}})$$

допускает свободную разметку η при любых условиях

$$\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n, \eta(x_1^{(\widehat{k}_1)}) = w_1, \dots, \eta(x_{s-1}^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1})}) = w_{s-1} \in \Omega_2$$

и при этом среди $x_s^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1})}, \dots, x_n^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1})}$ существует вершина $x_i^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1})}$, метка которой $\eta(x_i^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1})})$, независимо от условий $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_{s-1} \in \Omega_2$, не содержится в области определения $G_{\widehat{\Sigma}_{s-1}}$ — минимального правила разметки η сети $\widehat{\Sigma}_{s-1}$.

Пусть μ — свободная разметка сети $\widehat{\Sigma}_{s-1}$ с условиями

$$\mu(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \mu(x_n^{(0)}) = v_n, \mu(x_1^{(\widehat{k}_1)}) = v_1, \dots, \mu(x_{s-1}^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1})}) = v_1 \in \Omega_2.$$

Тогда, согласно сделанному предположению, метка $\mu(x_i^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1})})$ не содержится в области определения минимального правила $F_{\widehat{\Sigma}_{s-1}}$. Продолжим разметку μ сети $\widehat{\Sigma}_{s-1}$ свободным образом до разметки сети

$$\widehat{\Sigma}'_s = (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1\widehat{k}_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{(s-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(s-1)\widehat{k}_{s-1}}) \cdot (\Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{sk_s}).$$

Согласно лемме 5, среди вершин $x_s^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1}+k_s)}, \dots, x_n^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1}+k_s)}$ существует такая вершина $x_j^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1}+k_s)}$, что метка $\mu(x_j^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1}+k_s)})$ не содержится в области определения $F_{\widehat{\Sigma}'_s}$ — минимального правила разметки μ сети $\widehat{\Sigma}'_s$. Поскольку разметка μ по построению является свободной разметкой сети $\widehat{\Sigma}'_s$ с условиями

$$\mu(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \mu(x_n^{(0)}) = v_n, \mu(x_1^{(\widehat{k}_1)}) = v_1, \dots, \mu(x_{s-1}^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1})}) = v_1 \in \Omega_2,$$

то, согласно следствию 13, для любой свободной разметки η сети $\widehat{\Sigma}'_s$ с условиями

$$\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n, \eta(x_1^{(\widehat{k}_1)}) = w_1, \dots, \eta(x_{s-1}^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1})}) = w_{s-1} \in \Omega_2,$$

независимо от условий $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_{s-1} \in \Omega_2$, метка $\eta(x_j^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1}+k_s)})$ не содержится в области определения $G_{\widehat{\Sigma}'_s}$ — минимального правила разметки η сети $\widehat{\Sigma}'_s$.

Рассмотрим два возможных варианта модификации s -го слоя $\Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{sk_s}$:

- 1) Если $j = s$, то выберем произвольные $l, m \in \{s+1, \dots, n\}$, $l \neq m$, и модифицируем s -й слой $\Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{sk_s}$ следующим образом:

$$\Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{\widehat{sk_s}} = \Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{sk_s} \cdot \Sigma_l^{(s,l)} \cdot \Sigma_s^{(s,l)} \cdot \Sigma_m^{(l,m)}.$$

- 2) Если $j \neq s$, то выберем произвольный $m \in \{s+1, \dots, n\}$, $m \neq j$, и модифицируем s -й слой $\Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{sk_s}$ следующим образом:

$$\Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{\widehat{sk_s}} = \Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{sk_s} \cdot \Sigma_s^{(s,j)} \cdot \Sigma_m^{(s,m)} \cdot \Sigma_s^{(j,s)}.$$

В каждом из этих случаев свободная разметка η сети $\widehat{\Sigma}'_s$ с произвольными условиями $\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n$, $\eta(x_1^{(\widehat{k}_1)}) = w_1, \dots, \eta(x_{s-1}^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{s-1})}) = w_{s-1} \in \Omega_2$ продолжается до свободной разметки η сети

$$\widehat{\Sigma}_s = (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1\widehat{k}_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{(s-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(s-1)\widehat{k}_{s-1}}) (\Sigma_{s1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{s\widehat{k}_s})$$

с любым условием $\eta(x_s^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_s)}) = w_s \in \Omega_2$, при этом метка $\eta(x_m^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_s)})$, независимо от выбора условий $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_{s-1}, w_s \in \Omega_2$, не содержится в области определения $G_{\widehat{\Sigma}_s}$ — минимального правила разметки η сети $\widehat{\Sigma}_s$.

Шаг $n-1$. Пусть первые $(n-2)$ слоев канонического представления сети Σ уже модифицированы таким образом, что сеть

$$\widehat{\Sigma}_{n-2} = (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1\widehat{k}_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{(n-2)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(n-2)\widehat{k}_{n-2}})$$

допускает свободную разметку η при любых условиях

$$\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n, \eta(x_1^{(\widehat{k}_1)}) = w_1, \dots, \eta(x_{n-2}^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{n-2})}) = w_{n-2} \in \Omega_2$$

и при этом среди $x_{n-1}^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{n-2})}, x_n^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{n-2})}$ существует вершина $x_i^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{n-2})}$, метка которой $\eta(x_i^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{n-2})})$, независимо от условий $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_{n-2} \in \Omega_2$, не содержится в области определения $G_{\widehat{\Sigma}_{n-2}}$ — минимального правила разметки η сети $\widehat{\Sigma}_{n-2}$.

Пусть μ — свободная разметка сети $\widehat{\Sigma}_{n-2}$ с условиями

$$\mu(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \mu(x_n^{(0)}) = v_n, \mu(x_1^{(\widehat{k}_1)}) = v_1, \dots, \mu(x_{n-2}^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{n-2})}) = v_1 \in \Omega_2.$$

Тогда, согласно сделанному предположению, метка $\mu(x_i^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{n-2})})$ не содержится в области определения минимального правила $F_{\widehat{\Sigma}_{n-2}}$. Продолжим разметку μ сети $\widehat{\Sigma}_{n-2}$ свободным образом до разметки сети

$$\widehat{\Sigma}'_{n-1} = (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1\widehat{k}_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{(n-2)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(n-2)\widehat{k}_{n-2}}) \cdot (\Sigma_{(n-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(n-1)k_{n-1}}).$$

Согласно лемме 5, среди вершин $x_{n-1}^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{n-2}+k_{n-1})}, x_n^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{n-2}+k_{n-1})}$ существует такая вершина $x_j^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{n-2}+k_{n-1})}$, что метка $\mu(x_j^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{n-2}+k_{n-1})})$ не содержится в области определения минимального правила $F_{\widehat{\Sigma}'_{n-1}}$. Поскольку разметка μ по построению является свободной разметкой сети $\widehat{\Sigma}'_{n-1}$ с условиями

$$\mu(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \mu(x_n^{(0)}) = v_n, \mu(x_1^{(\widehat{k}_1)}) = v_1, \dots, \mu(x_{n-2}^{(\widehat{k}_1+\dots+\widehat{k}_{n-2})}) = v_1 \in \Omega_2,$$

то, согласно следствию 13, для любой свободной разметки η сети $\widehat{\Sigma}'_{n-1}$ с условиями

$$\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n, \eta(x_1^{(\widehat{k}_1)}) = w_1, \dots, \eta(x_{n-2}^{(\widehat{k}_1 + \dots + \widehat{k}_{n-2})}) = w_{n-2} \in \Omega_2,$$

независимо от условий $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_{n-2} \in \Omega_2$, метка $\eta(x_j^{(\widehat{k}_1 + \dots + \widehat{k}_{n-2} + k_{n-1})})$ не содержится в области определения минимального правила $G_{\widehat{\Sigma}'_{n-1}}$.

Рассмотрим два возможных варианта модификации слоя $\Sigma_{(n-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(n-1)k_{n-1}}$:

- 1) Если $j = n-1$, то модифицируем $(n-1)$ -й слой $\Sigma_{(n-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(n-1)k_{n-1}}$ следующим образом:

$$\Sigma_{(n-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(n-1)\widehat{k}_{n-1}} = \Sigma_{(n-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(n-1)k_{n-1}} \cdot \Sigma_n^{(n-1,n)} \cdot \Sigma_{n-1}^{(n-1,n)} \cdot \Sigma_n^{(n,n-1)}.$$

- 2) Если $j = n$, то модифицируем $(n-1)$ -й слой $\Sigma_{(n-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(n-1)k_{n-1}}$ следующим образом:

$$\Sigma_{(n-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(n-1)\widehat{k}_{n-1}} = \Sigma_{(n-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(n-1)k_{n-1}} \cdot \Sigma_{n-1}^{(n,n-1)} \cdot \Sigma_n^{(n,n-1)} \cdot \Sigma_{n-1}^{(n-1,n)}.$$

В каждом из указанных случаев свободная разметка η сети $\widehat{\Sigma}'_{n-1}$ с произвольными условиями

$$\eta(x_1^{(0)}) = v_1, \dots, \eta(x_n^{(0)}) = v_n, \eta(x_1^{(\widehat{k}_1)}) = w_1, \dots, \eta(x_{n-2}^{(\widehat{k}_1 + \dots + \widehat{k}_{n-2})}) = w_{n-2} \in \Omega_2$$

продолжается до свободной разметки η сети

$$\widehat{\Sigma} = (\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1\widehat{k}_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{(n-2)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(n-2)\widehat{k}_{n-2}}) \cdot (\Sigma_{(n-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(n-1)\widehat{k}_{n-1}})$$

с любыми условиями $\eta(x_{n-1}^{(\widehat{k}_1 + \dots + \widehat{k}_{n-1})}) = w_{n-1}, \eta(x_n^{(\widehat{k}_1 + \dots + \widehat{k}_{n-1})}) = w_n \in \Omega_2$.

Выход: модифицируя каноническое представление исходной сети Σ , мы построили «почти» каноническое представление

$$(\Sigma_{11} \cdot \dots \cdot \Sigma_{1\widehat{k}_1}) \cdot \dots \cdot (\Sigma_{(n-1)1} \cdot \dots \cdot \Sigma_{(n-1)\widehat{k}_{n-1}})$$

новой биективной сети $\widehat{\Sigma}$, сложность которой равна $\|\Sigma\| + 3n - 3$. При этом сеть $\widehat{\Sigma}$ допускает свободную разметку с произвольными ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из Ω_2 .

Теорема 14. Пусть Σ — произвольная биективная сеть ширины n . Тогда её модификация $\widehat{\Sigma}$ транзитивна для любого множества Ω , мощность которого не менее чем $\|\Sigma\| + 4n - 3$.

Доказательство. Модификация $\widehat{\Sigma}$ произвольной биективной сети Σ допускает свободную разметку с произвольными ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из Ω_2 . Значит, согласно теореме 11, модификация $\widehat{\Sigma}$ допускает свободную разметку при любых ограничениях $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из $\mathbb{N}$.

Поскольку выполняется соотношение $\|\widehat{\Sigma}\| = \|\Sigma\| + 3n - 3$, то для проведения свободной разметки сети $\widehat{\Sigma}$ с произвольными ограничениями $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из $\mathbb{N}$ требуется не более чем $\|\Sigma\| + 4n - 3$ различных меток, и при выборе любого множества Ω ,

мощность которого не менее чем $\|\Sigma\| + 4n - 3$, можно считать, что сеть $\widehat{\Sigma}$ допускает свободную разметку элементами множества Ω при произвольных ограничениях $\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ из Ω . Последнее утверждение, согласно следствию 8, равносильно транзитивности сети $\widehat{\Sigma}$ для множества Ω . ■

Следствие 14. Для любого $n \geq 2$ существует сеть $\widehat{\Sigma}$ ширины n и веса $3n - 3$, транзитивная для всех множеств, мощность которых не менее чем $4n - 3$.

Сеть на рис. 4 служит иллюстрацией к описанному алгоритму и следствию 14, её разметка при любых ограничениях $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$ из $\mathbb{N}$ является правильной и непротиворечивой.

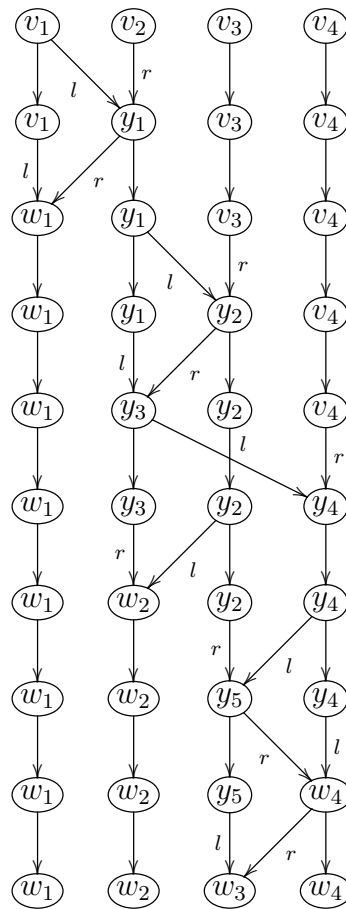


Рис. 4

Автор выражает благодарность профессору А. В. Черемушкину за постановку задачи и внимание к проводимым исследованиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.
2. Минк Х. Перманенты. М.: Мир, 1982.
3. Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Комбинаторика неотрицательных матриц. М.: ТВП, 2000. 448 с.

4. *Evans T.* Embedding incomplete latin squares // Amer. Math. Monthly. 1960. No.67. P.959–961.
5. *Smetaniuk B.* A new construction on latin squares I. A proof of the Evans conjecture // Ars Combinatoria. 1981. No.11. P.155–172.
6. *Anderson L. D. and Hilton A. J. W.* Thank Evans! // Proc. London Math. Soc. 1983. No.47. P.507–522.

REFERENCES

1. *Belousov V. D.* Osnovy teorii kvazigrupp i lup [Foundations of the Quasigroups and Loops theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967. (in Russian)
2. *Mink Kh.* Permanenty [Permanents]. Moscow, Mir Publ., 1982. (in Russian)
3. *Sachkov V. N., Tarakanov V. E.* Kombinatorika neotritsatel'nykh matrits [Combinatorics of Nonnegative Matrices]. Moscow, TVP Publ., 2000. 448 p. (in Russian)
4. *Evans T.* Embedding incomplete latin squares. Amer. Math. Monthly, 1960, no.67, pp.959–961.
5. *Smetaniuk B.* A new construction on latin squares I. A proof of the Evans conjecture. Ars Combinatoria, 1981, no. 11, pp.155–172.
6. *Anderson L. D. and Hilton A. J. W.* Thank Evans! Proc. London Math. Soc., 1983, no.47, pp.507–522.