

УДК 512.55

О ПОЧТИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ
АНТИКОММУТАТИВНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР

О. В. Шулежко*, Н. П. Панов**

* Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова,
г. Ульяновск, Россия

** Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, Россия

Представлены новые результаты, касающиеся многообразий антикоммутативных метабелевых алгебр над полем нулевой характеристики. Получены числовые характеристики многообразия всех антикоммутативных метабелевых алгебр. Для любого целого $m \geq 2$ доказано существование почти нильпотентного многообразия экспоненты m . Определены и изучены два почти нильпотентных многообразия подэкспоненциального роста, доказано, что других таких многообразий в исследуемом классе алгебр нет. Все результаты получены с помощью комбинаторных методов.

Ключевые слова: многообразие линейных алгебр, нильпотентность, рост ко-размерностей.

DOI 10.17223/20710410/38/2

ON ALMOST NILPOTENT VARIETIES OF ANTICOMMUTATIVE
METABELIAN ALGEBRAS

O. V. Shulezhko*, N. P. Panov**

* Ilya Ulyanov State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia

** Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia

E-mail: ol.shulezhko@gmail.com, nppanov@yandex.ru

Let Φ be a field of characteristic zero. We consider variety of anticommutative metabelian algebras, denoted $\mathbf{MA}$, in which the anticommutativity identity $x_1x_2 \equiv -x_2x_1$ and the metabelian identity $(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0$ are satisfied. The associativity of multiplication is not assumed. Numerical invariants of the variety of all anticommutative metabelian algebras are obtained: the sequence of codimensions is $c_n(\mathbf{MA}) = n!/2$. An algorithm for computing the multiplicities of $m_\lambda(\mathbf{MA})$ for $n > 2$ is presented. We define a series of anticommutative metabelian algebras C_m for any integer $m \geq 2$ and prove the existence of almost nilpotent variety with PI-exponent of m . Moreover, two almost nilpotent varieties of subexponential growth are studied. The first variety is the well-known variety of all metabelian Lie algebras, denoted $\mathbf{A}^2$, the second — the almost nilpotent variety $\mathbf{V}_{\text{anti}}$ generated by the anticommutative metabelian algebra G , $\mathbf{V}_{\text{anti}} = \text{var}(G)$, which is defined in our investigation. In case of varieties of anticommutative metabelian algebras, it is shown that there are only two almost nilpotent varieties of subexponential growth: $\mathbf{A}^2$ and $\mathbf{V}_{\text{anti}}$. The proofs are based on the theory of irreducible modules, Young diagram and tableau, and some basic notions of the representation theory for the symmetric group. All results are obtained by means of combinatorial methods.

Keywords: polynomial identity, variety, almost nilpotent, codimension growth.

Введение

На протяжении всей работы основное поле Φ имеет нулевую характеристику. Линейной алгеброй, или алгеброй над полем, называют векторное пространство, на котором задана бинарная билинейная операция. Многообразие алгебр — совокупность линейных алгебр, удовлетворяющих фиксированному набору тождественных соотношений. Дополнительные сведения о теории алгебр с тождествами, а также все неопределяемые далее понятия и обозначения можно найти в [1, 2].

Обозначим через $F(X)$ свободную алгебру со счётным множеством образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Далее свободные образующие будем обозначать также другими латинскими буквами. В работе исследуются алгебры, в которых выполняется тождество антикоммутативности

$$x_1 x_2 \equiv -x_2 x_1 \quad (1)$$

и (по аналогии с алгебрами Ли) тождество метабелевости

$$(x_1 x_2)(x_3 x_4) \equiv 0. \quad (2)$$

Так как ассоциативность умножения не предполагается, в произведениях необходимо следить за расстановкой скобок. Договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, например $(xy)z = xyz$. В алгебре A умножение справа на образующую a обозначим с помощью оператора $R_a : A \rightarrow A$, например $abR_c^2 = abcc$. Умножение справа на свободную образующую обозначим соответствующей заглавной буквой, например $xyY = xyY$. Условимся также помечать образующие с помощью специальных символов, например черты, для обозначения кососимметризации. Например,

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n = \sum_{p \in S_n} (-1)^p x_{p(1)} x_{p(2)} \dots x_{p(n)},$$

где S_n — симметрическая группа и $(-1)^p$ равно ± 1 в зависимости от чётности подстановки p .

В относительно свободной алгебре $F(X, \mathbf{V}) = F(X)/\text{Id}(\mathbf{V})$ многообразия $\mathbf{V}$ рассмотрим так называемую полилинейную часть $P_n(\mathbf{V})$ — пространство полилинейных элементов степени n , $n \geq 1$, от образующих $x_1, \dots, x_n$. Известно, что над основным полем нулевой характеристики любое тождество эквивалентно некоторой системе полилинейных тождеств, поэтому исследование строения полилинейных частей $P_n(\mathbf{V})$ позволяет получить информацию о многообразии $\mathbf{V}$. Пространство $P_n(\mathbf{V})$ как ΦS_n -модуль симметрической группы S_n имеет единственное с точностью до изоморфизма разложение в прямую сумму неприводимых подмодулей, соответствующих диаграммам Юнга разбиений $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $1 \leq l \leq n$, числа n , $\lambda \vdash n$. При этом кохарактер $\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V}))$ равен сумме неприводимых характеров χ_λ , $\lambda \vdash n$, взятых с кратностями $m_\lambda(\mathbf{V})$:

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}) \chi_\lambda.$$

Число слагаемых в этой сумме называют кодлинной многообразия $\mathbf{V}$ и обозначают $l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})$.

Асимптотическое поведение последовательности коразмерностей $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$ определяет рост многообразия $\mathbf{V}$. Рост называют подэкспоненциальным, если для любого действительного $\alpha > 1$ найдётся такое натуральное n_0 , что для всех $n \geq n_0$ выполнено неравенство $c_n(\mathbf{V}) < \alpha^n$. Говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный

рост, если коразмерности $c_n(\mathbf{V})$, $n \geq 1$, удовлетворяют ограничению $c_n(\mathbf{V}) \leq \gamma n^t$ для некоторых действительных чисел $\gamma, t \geq 0$. Если рост многообразия $\mathbf{V}$ выше подэкспоненциального, но последовательность коразмерностей экспоненциально ограничена, то оно экспоненциального роста. При этом предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})} = \beta > 1$, в случае его существования, называют экспонентой многообразия $\mathbf{V}$, $\exp(\mathbf{V}) = \beta$. Многообразие $\mathbf{V}$ является нильпотентным, если найдётся такое натуральное n_0 , что для всех $n \geq n_0$ выполняется равенство $c_n(\mathbf{V}) = 0$. Говорят, что нильпотентное многообразие имеет нулевой рост. Ненильпотентное многообразие, все собственные подмногообразия которого нильпотентные, называют почти нильпотентным.

Известно, что единственным почти нильпотентным многообразием ассоциативных алгебр является многообразие $\mathbf{AC}$ всех коммутативных ассоциативных алгебр. В случае алгебр Ли почти нильпотентным является многообразие $\mathbf{A}^2$ всех метабелевых алгебр Ли. При изучении алгебр Лейбница были найдены два примера почти нильпотентных многообразий и доказано, что других нет [3]. Следует отметить, что все перечисленные многообразия имеют незначительный полиномиальный рост. В общем случае оказалось, что существуют достаточно экзотические примеры почти нильпотентных многообразий. В работе [4] впервые удалось построить почти нильпотентное многообразие экспоненты два. В случае нулевой характеристики основного поля доказано существование почти нильпотентных коммутативных метабелевых многообразий любой целой экспоненты, а именно: для любого натурального числа $m \geq 2$ существует почти нильпотентное многообразие, экспонента которого равна m [5]. В этом же классе алгебр оказалось только два почти нильпотентных многообразия подэкспоненциального роста [6]. В [7] дано описание всех почти нильпотентных многообразий подэкспоненциального роста в классе левонильпотентных ступени два алгебр, то есть алгебр, в которых выполнено тождество $x(yz) \equiv 0$. Обзор известных почти нильпотентных многообразий в этих классах алгебр выполнен в работе [8]. Удалось также установить существование континуального множества метабелевых почти нильпотентных многообразий полиномиального роста [9].

Настоящая работа является логическим продолжением серии исследований, посвящённых почти нильпотентным многообразиям в различных классах алгебр над полем нулевой характеристики. В ней представлены числовые характеристики многообразия всех антикоммутативных метабелевых алгебр. В данном классе алгебр для любого натурального $m \geq 2$ докажем существование почти нильпотентного многообразия экспоненты m , а также определим ровно два почти нильпотентных многообразия подэкспоненциального роста. Многообразие алгебр, удовлетворяющих тождествам (1) и (2), обозначим через $\mathbf{MA}$ и перейдём к изложению полученных результатов.

1. Числовые характеристики многообразия антикоммутативных метабелевых алгебр

При помощи определения множества антикоммутативных метабелевых алгебр A_n , $n = 2, 3, \dots$, получим значения коразмерностей $c_n(\mathbf{MA})$. Пусть алгебра A_n задана образующими z_{ij} , e_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, и следующими определяющими соотношениями. Для любых i, j, k, l , $1 \leq i, j, k, l \leq n$,

- 1) $e_{ij}e_{kl} = 0$;
- 2) $z_{ij}z_{kl} = 0$;
- 3) $z_{ij}e_{kl} = -e_{kl}z_{ij} = \delta_{jk}z_{il}$, где δ_{jk} — символ Кронекера.

Теорема 1. Базис пространства $P_n(\mathbf{MA})$, $n \geq 2$, образуют элементы вида

$$x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}, \quad i_1 > i_2, \quad (3)$$

и выполняется равенство

$$c_n(\mathbf{MA}) = \frac{n!}{2}. \quad (4)$$

Доказательство. С помощью тождеств (1) и (2) любой полилинейный моном степени n , $n \geq 2$, может быть записан в виде (3). Следовательно, каждый элемент пространства $P_n(\mathbf{MA})$ является линейной комбинацией $n!/2$ мономов вида (3). Докажем от противного их линейную независимость. Пусть имеет место тождество

$$\sum_{i=1}^{n!/2} \alpha_i x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \equiv 0, \quad i_1 > i_2,$$

в котором не все коэффициенты $\alpha_i \in \Phi$ равны нулю. Проверим его справедливость в алгебре A_n . Пусть для некоторого s , $1 \leq s \leq n!/2$, $\alpha_s \neq 0$, тогда выполним подстановку $x_{s_1} = z_{11}$, $x_{s_2} = e_{12}$, $\dots$, $x_{s_n} = e_{(n-1)n}$ и получим равенство $\alpha_s z_{1n} = 0$, откуда $\alpha_s = 0$. Таким образом, все мономы вида (3) в пространстве $P_n(\mathbf{MA})$ линейно независимы и образуют базис размерности $n!/2$. ■

Заметим очевидное равенство $c_1(\mathbf{MA}) = 1$ и для $n \geq 2$ рассмотрим разложение ΦS_n -модуля $P_n(\mathbf{MA})$ в прямую сумму неприводимых подмодулей с кратностями $m_\lambda(\mathbf{MA})$, $\lambda \vdash n$. В силу тождества антикоммутативности $m_{(n)}(\mathbf{MA}) = 0$. Следовательно, модуль $P_2(\mathbf{MA})$ является одномерным и неприводимым, $m_{(1,1)}(\mathbf{MA}) = 1$ и $\chi_2(\mathbf{MA}) = \chi_{(1,1)}$. В следующей теореме сформулируем алгоритм вычисления кратностей $m_\lambda(\mathbf{MA})$ для $n > 2$ и диаграмм Юнга $\lambda \vdash n$ из двух и более строк.

Теорема 2. Зафиксируем $n > 2$. Выберем диаграмму Юнга, соответствующую разбиению $\lambda \vdash n$, которая содержит две или более строк. Из двух разных строк диаграммы λ удалим по одной клетке так, чтобы в результате удаления получилась диаграмма μ разбиения числа $n - 2$, $\mu \vdash n - 2$. Для всех таких диаграмм μ по формуле крюков найдем соответствующие значения размерностей d_μ . Тогда кратность $m_\lambda(\mathbf{MA})$ определяется как сумма всех значений d_μ .

Доказательство. Пусть H — подгруппа симметрической группы S_n , состоящая из тождественной подстановки и цикла $(n - 1 \ n)$. Обозначим через G подгруппу S_n , $n > 2$, $G = HS_{n-2} \cong H \times S_{n-2}$. Определим пространство полилинейных многочленов $Q_n = \text{span}\{x_n x_{n-1} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n-2)} : \sigma \in S_{n-2}\}$ и рассмотрим ΦG -модуль

$$Q_n(\mathbf{MA}) = \frac{Q_n}{Q_n \cap \text{Id}(\mathbf{MA})}.$$

Заметим, что в относительно свободной алгебре $F(X, \mathbf{MA})$ ΦH -модуль, порождённый мономом $x_n x_{n-1}$, является неприводимым, одномерным и соответствует диаграмме Юнга разбиения $(1, 1) \vdash 2$. При этом известно, что регулярный модуль ΦS_n разлагается в прямую сумму неприводимых подмодулей с кратностями, совпадающими с размерностями соответствующих неприводимых подмодулей. Из конструкции ΦG -модуля $Q_n(\mathbf{MA})$ получим индуцированный ΦS_n -модуль $P_n(\mathbf{MA})$, который разлагается в прямую сумму неприводимых подмодулей с диаграммами Юнга, заданными по правилу Литтлвуда — Ричардсона. В разложении модуля $P_n(\mathbf{MA})$ каждая диаграмма

$\lambda \vdash n$ каждого неприводимого подмодуля получена присоединением клеток диаграммы $(1, 1) \vdash 2$ к двум различным строкам некоторых диаграмм $\mu \vdash n - 2$, причём за счёт присоединения двух новых клеток диаграммы μ расширяются вправо или вниз. Следовательно, в разложении $P_n(\mathbf{MA})$ кратность $m_\lambda(\mathbf{MA})$ определяется как сумма значений размерностей d_μ модулей с диаграммами $\mu \vdash n - 2$, которые получены удалением двух клеток из разных строк диаграммы λ . В частности, $m_{(1^n)}(\mathbf{MA}) = d_{(1^{n-2})} = 1$. Теорема доказана. ■

Пример 1. Для $n = 4$ вычислим $m_\lambda(\mathbf{MA})$ и d_λ , $\lambda \vdash n$,

$$\begin{aligned} m_{(4)} &= 0, & d_{(4)} &= 1, \\ m_{(3,1)} &= d_{(2)} = 1, & d_{(3,1)} &= 3, \\ m_{(2,2)} &= d_{(1,1)} = 1, & d_{(2,2)} &= 2, \\ m_{(2,1,1)} &= d_{(2)} + d_{(1,1)} = 2, & d_{(2,1,1)} &= 3, \\ m_{(1,1,1,1)} &= d_{(1,1)} = 1, & d_{(1,1,1,1)} &= 1. \end{aligned}$$

Сложим выписанные значения и получим равенство (4):

$$c_4(\mathbf{MA}) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 12 = 4!/2.$$

2. Почти нильпотентные многообразия экспоненциального роста

При помощи построения серии антикоммутативных метабелевых алгебр C_m , $m \geq 2$, докажем, что в данном классе алгебр для любого целого $m \geq 2$ существует почти нильпотентное многообразие экспоненты m . Для каждого $m \geq 2$ определим алгебру C_m образующими $z_1, z_2, c_1, \dots, c_m$ и следующими определяющими соотношениями:

- 1) $uv + vu = 0$, $u, v \in C_m$;
- 2) $c_i c_j = 0$, $1 \leq i, j \leq m$;
- 3) $z_i c_j = 0$, $i = 1, 2$, $1 \leq j \leq m$;
- 4) $z_1 z_2 w(R_{c_1}, \dots, R_{c_m}) z_i = 0$, $i = 1, 2$, $\deg w \geq 0$;
- 5) $(z_1 z_2 w(R_{c_1}, \dots, R_{c_m}))(z_1 z_2 w'(R_{c_1}, \dots, R_{c_m})) = 0$, $\deg w \geq 0$, $\deg w' \geq 0$;
- 6) $z_1 z_2 (R_{c_1} \dots R_{c_m})^k c_{i_1} \dots c_{i_s} c_{i_{s+1}} \dots c_{i_t} + z_1 z_2 (R_{c_1} \dots R_{c_m})^k c_{i_1} \dots c_{i_{s+1}} c_{i_s} \dots c_{i_t} = 0$,
 $k \geq 0$, $1 \leq s < t \leq m$, $1 \leq i_1, \dots, i_t \leq m$,

где слова w, w' — ассоциативные мономы от операторов R_{c_j} , $1 \leq j \leq m$. Заметим, что последнее определяющее соотношение влечёт равенство

$$z_1 z_2 (R_{c_1} \dots R_{c_m})^k w(R_{c_1}, \dots, R_{c_m}) = 0,$$

в котором $k \geq 0$ и ассоциативный моном $w(R_{c_1}, \dots, R_{c_m})$, $2 \leq \deg w \leq m$, содержит по меньшей мере два одинаковых R_{c_i} , $1 \leq i \leq m$. Таким образом, базис алгебры C_m представлен левонормированными элементами

$$z_1, z_2, c_1, \dots, c_m, z_1 z_2 (R_{c_1} \dots R_{c_m})^k, z_1 z_2 (R_{c_1} \dots R_{c_m})^k c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_t}$$

для всех $k \geq 0$, $1 \leq t < m$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq m$.

Нетрудно проверить, что в алгебре C_m , как и в коммутативной метабелевой алгебре B_m из работы [5], выполняются тождественные соотношения

$$x_0 y_0 X^3 \equiv 0; \tag{5}$$

$$x_0 y_0 X^2 Z_1 \dots Z_s Y^2 \equiv 0, \tag{6}$$

где остаток от деления s на m отличен от $m-2$. Так как основное поле Φ имеет нулевую характеристику, алгебра C_m удовлетворяет следующим линеаризациям тождеств (5) и (6):

$$x_0 y_0 X_1 X X_1 \equiv -x_0 y_0 X_1 X_1 X - x_0 y_0 X X_1 X_1; \quad (7)$$

$$x_0 y_0 X X_1 w Y^2 \equiv -x_0 y_0 X_1 X w Y^2; \quad (8)$$

$$x_0 y_0 X^2 w Y Y_1 \equiv -x_0 y_0 X^2 w Y_1 Y; \quad (9)$$

$$x_0 y_0 X X_1 w Y Y_1 \equiv -x_0 y_0 X_1 X w Y Y_1 - x_0 y_0 X X_1 w Y_1 Y - x_0 y_0 X_1 X w Y_1 Y, \quad (10)$$

где $w = Z_1 \dots Z_s$ и s отлично от $m-2$ по модулю m .

Утверждение 1. Пусть $w = w(X_1, \dots, X_m)$ — ассоциативный моном с условием

$$\deg w - \min_{1 \leq i \leq m} \{\deg_{X_i} w\} \cdot m \geq 2m - 1. \quad (11)$$

Тогда в алгебре C_m выполняется тождество $x_0 y_0 w(X_1, \dots, X_m) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть w зависит не от всех X_i , $1 \leq i \leq m$. Без потери общности примем $\deg_{X_m} w = 0$ и из (11) получим неравенство $\deg w \geq 2m - 1$. Тогда среди первых m букв слова w найдутся две одинаковые, например пара X_{m-1} , между которыми расположено не более $m-2$ других букв. С помощью тождеств (10) и (7) представим $x_0 y_0 w$ в виде линейной комбинации мономов, в каждом из которых выбранные буквы X_{m-1} размещены на соседних позициях. Так как $\deg w \geq 2m - 1$, в каждом из полученных мономов справа от X_{m-1}^2 находится по меньшей мере $m-1$ букв. Если в некотором мономе среди них найдётся X_{m-1} , то, применив, возможно несколько раз, тождество (9), получим три подряд одинаковые буквы и соответственно (5) равный нулю элемент. Иначе среди данных $m-1$ букв общее число различных не превышает $m-2$ и найдутся две одинаковые. В силу кососимметричности перестановки букв (9) все такие мономы также равны нулю.

Для удобства обозначим $\theta = \min_{1 \leq i \leq m} \{\deg_{X_i} w\}$. Пусть теперь $\theta \geq 1$, $\deg w \geq 3m - 1$. В слове w в любой последовательности букв X_i , $1 \leq i \leq m$, длины $m+1$ найдутся две одинаковые буквы, между которыми расположено не более $m-1$ других букв. Аналогично предыдущему случаю выберем пару таких букв и с помощью тождеств (10) и (7) запишем $x_0 y_0 w$ в виде линейной комбинации мономов, содержащих выбранные буквы на соседних позициях. С помощью приведённых выше рассуждений отбросим из полученной линейной комбинации все нулевые мономы. В оставшихся мономах с помощью тождеств (8), (9) упорядочим буквы X_i , $1 \leq i \leq m$, следующим образом.

При $\theta > 1$ получим мономы вида

$$x_0 y_0 w'(X_1 \dots X_m)^{r_1} (X_1 \dots \widehat{X_s} \dots X_m X_s^2 X_1 \dots \widehat{X_s} \dots X_m) (X_1 \dots X_m)^{r_2} w'', \quad (12)$$

где $r_1, r_2 \geq 0$, $r_1 + r_2 + 2 \leq \theta$, обозначение $\widehat{X_s}$ значит пропуск X_s и w' , w'' — ассоциативные мономы, зависящие не от всех X_i , $1 \leq i \leq m$. По условию (11) хотя бы одно из слов w' , w'' имеет длину не менее m и поэтому среди любых m букв содержит две одинаковые. То есть в силу тождеств (8), (9) все полученные мономы также равны нулю.

Если $\theta = 1$, аналогичные рассуждения приводят к линейной комбинации одночленов вида

$$x_0 y_0 w_1 X_1 \dots \widehat{X_s} \dots X_m X_s^2 w_2; \quad (13)$$

$$x_0 y_0 w_3 X_s^2 X_1 \dots \widehat{X_s} \dots X_m w_4, \quad (14)$$

в которых слова $w_1, \dots, w_4$ зависят не от всех X_i , $1 \leq i \leq m$. Покажем равенство нулю мономов вида (13). Если слово w_1 (или w_2) длины не менее m , то с помощью тождества (8) (или (9)) в слове w_1 (или w_2) разместим подряд две одинаковые буквы и в силу (6) получим, что моном (13) равен нулю. Пусть теперь $n = 3m - 1$ и каждое из слов w_1, w_2 длины $m - 1$. Возможны следующие два случая: если $\deg_{X_s} w_2 \geq 1$ (в частности, при $m = 2$), то в силу (9), (5) моном (13) равен нулю. Так как $\theta = 1$, при $\deg_{X_s} w_2 = 0$ среди $m - 1$ букв слова w_2 найдутся две одинаковые, и в силу тождества (9) моном (13) равен нулю. Равенство нулю мономов вида (14) получим в результате аналогичных рассуждений. ■

Пусть $L_n = \text{span}\{x_0 y_0 x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_n\}$ — пространство полилинейных левонормированных мономов с фиксированным произведением $x_0 y_0$ во внутренних скобках, $\mathbf{W}_m = \text{var}(C_m)$ — многообразие, порождённое алгеброй C_m , $m \geq 2$. Тогда рассмотрим ΦS_n -модуль

$$L_n(\mathbf{W}_m) = \frac{L_n}{L_n \cap \text{Id}(\mathbf{W}_m)}$$

с кохарактером $\chi_n^L(\mathbf{W}_m)$, который разлагается в сумму неприводимых характеров с кратностями m_λ^L , $\lambda \vdash n$.

Так как характеристика поля Φ равна нулю, то, используя условие эквивалентности полилинейных и соответствующих полиоднородных тождеств, докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. Если $m_\lambda^L \neq 0$, $n \geq 3m - 1$, то $\lambda \vdash n$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\lambda'_1 = m$;
- 2) $n - \lambda_m \cdot m < 2m - 1$;
- 3) $\lambda_1 - \lambda_m \leq 2$.

Доказательство. Зафиксируем стандартную таблицу Юнга T_λ , $\lambda \vdash n \geq 3m - 1$, и обозначим соответственно R_{T_λ} , C_{T_λ} стабилизаторы строк и столбцов таблицы T_λ . Обозначим через

$$f = e_{T_\lambda}(x_0 y_0 x_1 \dots x_n) = \sum_{p \in R_{T_\lambda}} p \sum_{q \in C_{T_\lambda}} (-1)^q q(x_0 y_0 x_1 \dots x_n)$$

полилинейный элемент, порождающий неприводимый подмодуль модуля $L_n(\mathbf{W}_m)$. Пусть полиоднородный элемент h получен из f в результате отождествления свободных образующих, индексы которых находятся в одних и тех же строках таблицы T_λ .

Докажем первое условие. Пусть сначала $\lambda'_1 < m$, тогда каждый моном в h удовлетворяет условиям утверждения 1, где $\min_{1 \leq i \leq m} \{\deg_{X_i} w\} = 0$, $\deg w \geq 3m - 1$. Следовательно, в алгебре C_m выполняется тождество $h \equiv 0$ и $m_\lambda^L = 0$ при $\lambda'_1 < m$. Пусть теперь $\lambda'_1 > m$. Тогда f равен сумме полилинейных элементов, кососимметрических по более чем m образующим x_i , $1 \leq i \leq m$, и, следовательно, тождественно равных нулю в алгебре C_m . Таким образом, $m_\lambda^L = 0$ при $\lambda'_1 > m$, и первое условие доказано.

Второе условие является прямым следствием утверждения 1.

Докажем третье условие. По доказательству утверждения 1 ненулевой полиоднородный элемент h полистепени $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ по образующим $x_1, \dots, x_m$ по модулю тождеств многообразия $\mathbf{W}_m$ равен линейной комбинации ненулевых мономов $x_0 y_0 w$ вида (12), в которых по условию 2 мономы w' , w'' , зависящие не от всех X_i , $1 \leq i \leq m$, удовлетворяют неравенствам $\deg w' \leq m - 1$, $\deg w'' \leq m - 1$. В силу тождеств (8)

и (9) каждое из слов w', w'' не может содержать повторяющиеся буквы. Так как буквы в словах w', w'' могут совпадать, то выполняется неравенство $\lambda_1 - \lambda_m \leq 2$. ■

Утверждение 3 [10]. Пусть T — таблица Юнга, соответствующая разбиению $\lambda \vdash n$, и $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ — ΦS_n -модуль, где M_i — изоморфные неприводимые подмодули с характером χ_λ . Тогда k равно максимальному числу линейно независимых элементов $g \in M$, таких, что $\sigma \cdot g = g$ для любого элемента $\sigma \in R_T$.

Утверждение 4. Существует такая константа $C = C(m)$, что для всех $\lambda \vdash n$, $n \geq 3m - 1$, выполняется неравенство $m_\lambda^L \leq C$.

Доказательство. Зафиксируем диаграмму $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\lambda \vdash n$. В разложении модуля $L_n(\mathbf{W}_m)$ не равная нулю кратность m_λ^L определяется как размерность пространства полилинейных элементов, удовлетворяющих условиям утверждения 3. В силу эквивалентности полилинейных и соответствующих полиоднородных тождеств и по условию 1 утверждения 2 для оценки данной размерности достаточно по модулю тождеств многообразия $\mathbf{W}_m$ оценить размерность пространства $L_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}$ полиоднородных элементов $x_0 y_0 w(X_1, \dots, X_m)$ полистепени $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ от образующих $x_1, \dots, x_m$. С помощью тождеств (5)–(10) любой ненулевой элемент пространства $L_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}$ может быть представлен линейной комбинацией ненулевых мономов вида (12), в которых каждое из слов w', w'' состоит из различных букв и имеет длину не более $m - 1$. Нетрудно убедиться, что с помощью тождеств (5)–(10) все такие мономы могут быть приведены к виду

$$x_0 y_0 w'(X_1 \dots X_m)(X_m X_1 \dots X_{m-1})(X_1 \dots X_m)^{r_1 + r_2} w'', \quad (15)$$

где буквы в словах w', w'' упорядочены.

Так как мономы (15), отличающиеся только порядком букв в соответствующих словах w', w'' , по модулю тождеств (8), (9) с точностью до знака равны, то для диаграммы $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ число различных мономов (15) равно количеству способов выбора различных букв в любом из слов w', w'' . В результате сравнения получим, что наибольшее число различных мономов (15), всего $2^m - 1$, соответствует прямоугольной диаграмме λ . То есть при $\lambda_1 = \dots = \lambda_m$ имеем

$$m_\lambda^L \leq \dim L_{\lambda_1, \dots, \lambda_m} \leq \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} = 2^m - 1.$$

Утверждение доказано. ■

Обозначим $c_n^L(\mathbf{W}_m) = \dim L_n(\mathbf{W}_m)$ и установим связь между коразмерностями $c_n^L(\mathbf{W}_m)$ и $c_n(\mathbf{W}_m)$, $n \geq 1$.

Утверждение 5. Для любого $n \geq 1$ выполняется равенство

$$c_{n+2}(\mathbf{W}_m) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} c_n^L(\mathbf{W}_m).$$

Доказательство аналогично проведённому в работе [5] для коммутативного случая.

Теорема 3. Для любого целого $m \geq 2$ существует почти нильпотентное антикоммутативное метабелево многообразие экспоненты m .

Доказательство. Рассмотрим ΦS_n -модуль $L'_n(\mathbf{W}_m) \cong L_n(\mathbf{W}_m)$, $n \geq 3m - 1$, элементы которого вместо произведения $x_0 y_0$ содержат $x_{n+2} x_{n+1}$. Аналогично доказательству теоремы 2 из ΦS_n -модуля $L'_n(\mathbf{W}_m)$ получим индуцированный ΦS_{n+2} -модуль

$P_{n+2}(\mathbf{W}_m)$. В силу утверждений 2 и 4 в разложении кохарактера $\chi_{n+2}(\mathbf{W}_m)$ в сумму неприводимых характеров все ненулевые кратности $m_\lambda(\mathbf{W}_m)$ ограничены сверху константой и отвечают диаграммам $\lambda \vdash n+2$, у которых вне прямоугольника $m \times \lambda_m$ находится не более $2m$ клеток. Известно, что при достаточно больших n размерность d_λ с диаграммой $\lambda \vdash n$ такого вида удовлетворяет неравенствам $n^\beta m^n \leq d_\lambda \leq n^\alpha m^n$ для фиксированных α, β [11]. Следовательно, $\exp(\mathbf{W}_m) = m$. При этом полилинейные части всех нильпотентных подмногообразий многообразия $\mathbf{W}_m$ также удовлетворяют указанным ограничениям. Остаётся заметить, что в любом нильпотентном многообразии существует почти нильпотентное подмногообразие [4, теорема 1]. ■

3. Почти нильпотентные многообразия подэкспоненциального роста

Далее в исследуемом классе алгебр определим ровно два почти нильпотентных многообразия подэкспоненциального роста. Первое такое многообразие — это хорошо известное многообразие всех метабелевых алгебр Ли $\mathbf{A}^2$. Приведём необходимые в дальнейшем свойства многообразия $\mathbf{A}^2$. Полилинейная часть $P_n(\mathbf{A}^2)$, $n \geq 2$, имеет следующие числовые характеристики:

$$c_n(\mathbf{A}^2) = n - 1, \quad \chi_n(\mathbf{A}^2) = \chi_{(n-1,1)}, \quad l_n(\mathbf{A}^2) = 1.$$

Утверждение 6. Многообразие $\mathbf{A}^2$ не является подмногообразием многообразия $\mathbf{V} \subset \mathbf{MA}$ тогда и только тогда, когда в многообразии $\mathbf{V}$ для некоторого $k \geq 1$ выполнено тождество $x_0 X^k \equiv 0$.

Доказательство. Так как $x_0 X^k \notin \text{Id}(\mathbf{A}^2)$, $k \geq 1$, то остаётся доказать необходимость. Пусть $\mathbf{A}^2 \not\subset \mathbf{V}$, тогда из разложения полилинейной части $P_n(\mathbf{A}^2)$, $n \geq 2$, следует, что в многообразии $\mathbf{V}$ должно выполняться некоторое тождество, соответствующее диаграмме Юнга $(n-1, 1)$. Полиоднородные элементы, построенные по стандартным таблицам данной диаграммы, имеют вид $\bar{x}_1 X_1^i \bar{x}_2 X_1^{n-2-i}$, $i = 0, \dots, n-2$. Поэтому тождество в многообразии $\mathbf{V}$ может быть записано как

$$\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \bar{x}_1 X_1^i \bar{x}_2 X_1^{n-2-i} \equiv 0, \quad \alpha_i \in \Phi.$$

С помощью тождества антикоммутативности перепишем его в виде

$$\left(2\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \right) x_2 X_1^{n-1} \equiv 0.$$

При этом необходимо принять $2\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \neq 0$, иначе получим, что исходное тождество выполнено в многообразии $\mathbf{A}^2 \subset \mathbf{MA}$. Таким образом, для некоторого $n \geq 2$ тождество $x_2 X_1^{n-1} \equiv 0$ выполнено в многообразии $\mathbf{V}$. Заметим, что для $n = 1$ доказательство очевидно. ■

Второе почти нильпотентное многообразие подэкспоненциального роста $\mathbf{V}_{\text{anti}}$ порождается следующей антикоммутативной метабелевой алгеброй G , $\mathbf{V}_{\text{anti}} = \text{var}(G)$. Определим неассоциативную алгебру G бесконечным числом образующих $e_1, e_2, \dots$ и следующими определяющими соотношениями:

- 1) $w e_i = -e_i w$, $\deg w \geq 1$;
- 2) $w_1 w_2 = 0$, $\deg w_1 \geq 2$, $\deg w_2 \geq 2$;
- 3) $e_{i_{p(1)}} e_{i_{p(2)}} \dots e_{i_{p(n)}} = (-1)^p e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n}$, $p \in S_n$, $n \geq 2$.

Легко видеть, что в алгебре G в силу определяющего соотношения 3 любой базисный элемент степени два или более по образующей e_i , $i \geq 1$, равен нулю. Обозначим G^2 идеал алгебры G , который образован всеми произведениями её элементов. Заметим, что в силу тождества метабелевости G^2 является алгеброй с нулевым умножением.

Утверждение 7. В многообразии $\mathbf{V}_{\text{anti}}$ выполнены следующие тождества:

$$xyzt + xytz \equiv 0; \quad (16)$$

$$xyzt + zyxt + xtzy + ztxy \equiv 0. \quad (17)$$

Доказательство. Так как данные тождества являются полилинейными, достаточно доказать их справедливость для базисных элементов алгебры G . Если в первое тождество вместо z или t подставить базисный элемент G^2 , то при любых x, y оба слагаемых равны нулю. В результате подстановки элементов e_i получим верное равенство по определяющему соотношению 3.

В тождество (17) вместо одной из свободных образующих подставим базисный элемент $g \in G^2$, а вместо остальных — различные e_i , $i \geq 1$. В силу тождеств антикоммутативности и метабелевости останется пара ненулевых слагаемых, в каждом из которых g находится на первом месте, а перестановки образующих e_i отличаются на одну транспозицию, то есть имеют разную чётность. Из определяющего соотношения 3 полученная сумма равна нулю. Тождество (17) также обращается в верное равенство при подстановке различных e_i , $i \geq 1$. Достаточно заметить, что из монома $xyzt$ слагаемые $zyxt$, $xtzy$ получены одной транспозицией образующих, а одночлен $ztxy$ — двумя транспозициями. ■

С помощью утверждения 7 докажем следующие равенства для числовых характеристик полилинейной части $P_n(\mathbf{V}_{\text{anti}})$.

Утверждение 8. При $n \geq 3$ выполняются равенства

$$c_n(\mathbf{V}_{\text{anti}}) = n, \quad l_n(\mathbf{V}_{\text{anti}}) = 2, \quad \chi_n(\mathbf{V}_{\text{anti}}) = \chi_{(2,n-2)} + \chi_{(1^n)}.$$

Доказательство. Оценим значение коразмерности $c_n(\mathbf{V}_{\text{anti}})$, $n \geq 3$, сверху. Для этого покажем, что любой элемент пространства $P_n(\mathbf{V}_{\text{anti}})$ может быть записан в виде линейной комбинации n элементов двух видов:

$$x_{n-1}x_{n-2}x_nx_{n-3} \dots x_1; \quad (18)$$

$$x_nx_ix_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_{n-2}}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad i_1 > i_2 > \dots > i_{n-2}. \quad (19)$$

В любом мономе пространства $P_n(\mathbf{V}_{\text{anti}})$ в силу тождества (16) образующие, начиная с третьей позиции, могут быть упорядочены по убыванию индексов, поэтому возможны три случая записи остальных мономов:

- 1) $x_{n-1}x_ix_nx_{n-2} \dots$, $1 \leq i < n-2$;
- 2) $x_{n-2}x_ix_nx_{n-1} \dots$, $1 \leq i < n-2$;
- 3) $x_ix_jx_nx_{n-1} \dots$, $1 \leq j < i < n-2$.

Воспользуемся в каждом из случаев тождеством (17):

$$x_{n-1}x_ix_nx_{n-2} \dots \equiv -x_nx_ix_{n-1}x_{n-2} \dots - x_{n-1}x_{n-2}x_nx_i \dots - x_nx_{n-2}x_{n-1}x_i \dots,$$

$$x_{n-2}x_ix_nx_{n-1} \dots \equiv -x_nx_ix_{n-2}x_{n-1} \dots - x_{n-2}x_{n-1}x_nx_i \dots - x_nx_{n-1}x_{n-2}x_i \dots,$$

$$x_ix_jx_nx_{n-1} \dots \equiv -x_nx_jx_ix_{n-1} \dots - x_ix_{n-1}x_nx_j \dots - x_nx_{n-1}x_ix_j \dots$$

Получили линейные комбинации элементов вида (18) и (19), и в третьем разложении слагаемое $x_i x_{n-1} x_n x_j \dots$ соответствует первому случаю. Таким образом, имеем неравенство $c_n(\mathbf{V}_{\text{anti}}) \leq n$. Оценим $c_n(\mathbf{V}_{\text{anti}})$ снизу. Для этого рассмотрим полиоднородные элементы $h_{(2,1^{n-2})}$ и $h_{(1^n)}$, линейаризации которых порождают неприводимые подмодули с диаграммами $(2,1^{n-2})$ и (1^n) . Пусть $h_{(2,1^{n-2})} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{n-1} x_1$, тогда вместо x_1 подставим сумму $g + e_1$, $g \in G^2$, а вместо x_i подставим e_i , $i \geq 2$. Из определяющих соотношений алгебры G получим ненулевой элемент

$$\overline{(g + e_1)} \bar{e}_2 \dots \bar{e}_{n-1} (g + e_1) = \bar{g} \bar{e}_2 \dots \bar{e}_{n-1} e_1 = 2g \bar{e}_2 \dots \bar{e}_{n-1} e_1.$$

Следовательно, соответствующий неприводимый подмодуль не является нулевым и $m_{(2,1^{n-2})}(\mathbf{V}_{\text{anti}}) \geq 1$.

В многочлен $h_{(1^n)} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n$ вместо x_i , $1 \leq i \leq n$, подставим e_i . Результат подстановки равен $n! e_1 e_2 \dots e_n$, и неприводимый подмодуль с диаграммой (1^n) также не является нулевым, $m_{(1^n)}(\mathbf{V}_{\text{anti}}) = 1$. Таким образом, для $c_n(\mathbf{V}_{\text{anti}})$ имеем следующую оценку снизу:

$$c_n(\mathbf{V}_{\text{anti}}) \geq m_{(2,1^{n-2})}(\mathbf{V}_{\text{anti}}) d_{(2,1^{n-2})} + m_{(1^n)}(\mathbf{V}_{\text{anti}}) d_{(1^n)} = (n-1) m_{(2,1^{n-2})}(\mathbf{V}_{\text{anti}}) + 1 \geq n.$$

Так как $c_n(\mathbf{V}_{\text{anti}}) \leq n$, то $c_n(\mathbf{V}_{\text{anti}}) = n$, $m_{(2,1^{n-2})}(\mathbf{V}_{\text{anti}}) = 1$, и получили искомые равенства. ■

Отметим очевидные равенства для $n = 1, 2$:

$$\begin{aligned} c_1(\mathbf{V}_{\text{anti}}) &= 1, & l_1(\mathbf{V}_{\text{anti}}) &= 1, & \chi_1(\mathbf{V}_{\text{anti}}) &= \chi_{(1)}, \\ c_2(\mathbf{V}_{\text{anti}}) &= 1, & l_2(\mathbf{V}_{\text{anti}}) &= 1, & \chi_2(\mathbf{V}_{\text{anti}}) &= \chi_{(1,1)}. \end{aligned}$$

Утверждение 9. Многообразие $\mathbf{V}_{\text{anti}}$ не является подмногообразием многообразия $\mathbf{V} \subset \mathbf{MA}$ тогда и только тогда, когда в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество $x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_m \equiv 0$ для некоторого $m \geq 2$.

Доказательство. Так как $x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_m \notin \text{Id}(G) = \text{Id}(\mathbf{V}_{\text{anti}})$, $m \geq 1$, то остаётся доказать необходимость. Из доказанного в утверждении 8 разложения характера $\chi_n(\mathbf{V}_{\text{anti}})$ в сумму неприводимых характеров следует, что в многообразии $\mathbf{V}_{\text{anti}}$ выполняется некоторое тождество, соответствующее одной из диаграмм (1^n) , $(2,1^{n-2})$ при $n \geq 3$. Пусть в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \equiv 0$. Тогда, заменив образующую x_1 на произведение $x_0 x_1$, получим следствие $x_0 x_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \equiv 0$. Запишем кососимметризацию данного следствия по образующим $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\sum_{\sigma \in H_n} (-1)^\sigma x_0 \bar{x}_{\sigma(1)} \bar{x}_{\sigma(2)} \dots \bar{x}_{\sigma(n)} \equiv 0.$$

Здесь H_n — группа всех подстановок, которые оставляют на месте единицу. Из соотношения

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n = (-1)^\theta \bar{x}_{\theta(1)} \bar{x}_{\theta(2)} \dots \bar{x}_{\theta(n)}, \quad \theta \in S_n,$$

получим в многообразии $\mathbf{V}$ тождество $(n-1)! x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \equiv 0$.

Для диаграммы $(2,1^{n-2})$ тождество может быть записано от $n-1$ образующих $x_1, \dots, x_{n-1}$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \bar{x}_1 \dots \bar{x}_i x_1 \bar{x}_{i+1} \dots \bar{x}_{n-1} \equiv 0,$$

где последнее слагаемое имеет вид $\alpha_{n-1}\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n-1}x_1$. С помощью тождества антикоммутативности перепишем полилинейный элемент при $i = 1$:

$$\bar{x}_1x_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_{n-1} \equiv \sum_{j=2}^{n-1} (-1)^j x_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_jx_1\bar{x}_{j+1} \dots \bar{x}_{n-1}.$$

В исходное тождество вместо x_1 подставим сумму $x_0x_1 + x_n$ и по модулю тождеств многообразия **МА** получим

$$\sum_{i=2}^{n-1} ((-1)^i \alpha_1 + 2\alpha_i) x_0x_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_ix_n\bar{x}_{i+1} \dots \bar{x}_{n-1} \equiv 0.$$

К данному тождеству применим кососимметризацию по $x_1, \dots, x_n$. Для удобства обозначим через $\tilde{H}_n$ группу всех подстановок, которые оставляют на месте 1 и n , и рассмотрим результат кососимметризации слагаемого с коэффициентом $(-1)^k \alpha_1 + 2\alpha_k$, $2 \leq k \leq n-1$:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \tilde{H}_n} (-1)^\sigma x_0\bar{x}_{\sigma(1)}\bar{x}_{\sigma(2)} \dots \bar{x}_{\sigma(k)}\bar{x}_{\sigma(n)}\bar{x}_{\sigma(k+1)} \dots \bar{x}_{\sigma(n-1)} = \\ & = \sum_{\sigma \in \tilde{H}_n} x_0\bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_k\bar{x}_n\bar{x}_{k+1} \dots \bar{x}_{n-1} = (-1)^{n-1-k} (n-2)! x_0\bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_n. \end{aligned}$$

Таким образом, тождество в многообразии **V** для диаграммы $(2, 1^{n-2})$ может быть записано как

$$\left((-1)^{n-1} (n-2) \alpha_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-1-i} 2\alpha_i \right) x_0\bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \equiv 0,$$

где сумма коэффициентов в скобках отлична от нуля, так как иначе оно выполнено в многообразии $\mathbf{V}_{\text{anti}} \subset \mathbf{MA}$. То есть для некоторого $n \geq 3$ в многообразии **V** выполняется тождество $x_0\bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \equiv 0$. Доказательства в случаях $n = 1, 2$ очевидны. Утверждение доказано. ■

Следствие 1. Многообразие $\mathbf{V}_{\text{anti}}$ является почти нильпотентным.

Доказательство. По утверждению 9 в любом собственном подмногообразии многообразия $\mathbf{V}_{\text{anti}}$ выполнено тождество $x_0\bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_m \equiv 0$. Подставим в него вместо x_0 произведение x_0y_0 и воспользуемся тождеством (16). Получим $m!x_0y_0x_1 \dots x_m \equiv 0$. ■

Главную роль в доказательстве основного результата играет следующая теорема.

Теорема 4 [12]. Пусть действительное число $\alpha > 1$ и $\{\lambda^{(n)}\}_{n \geq 1}$ — последовательность разбиений, $\lambda^{(n)} \vdash n$, таких, что $\lambda_1^{(n)}, \lambda_1'^{(n)} \leq n/\alpha$. Тогда для любого действительного β , $1 < \beta < \alpha$, найдётся такое натуральное число n_0 , что $d_{\lambda^{(n)}} \geq \beta^n$ для всех $n \geq n_0$.

Сформулируем и докажем основной результат.

Теорема 5. Если рост многообразия $\mathbf{V} \subset \mathbf{MA}$ не выше подэкспоненциального, то или $\mathbf{A}^2 \subseteq \mathbf{V}$, или $\mathbf{V}_{\text{anti}} \subseteq \mathbf{V}$, или многообразие $\mathbf{V}$ является нильпотентным.

Доказательство. Пусть многообразие $\mathbf{V} \subset \mathbf{MA}$ не является нильпотентным, $\mathbf{A}^2 \not\subseteq \mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_{\text{anti}} \not\subseteq \mathbf{V}$. Тогда в силу утверждений 6 и 9 в многообразии **V** выполняются тождества $x_0X^k \equiv 0$ и $x_0\bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_m \equiv 0$ для некоторых $k \geq 1$ и $m \geq 2$. Так как многообразие **V** не является нильпотентным, то ΦS_n -модуль $P_n(\mathbf{V})$, $n \geq 1$, содержит ненулевой неприводимый подмодуль $M_{\lambda^{(n)}}$, соответствующий разбиению $\lambda^{(n)} \vdash n$.

Докажем, что последовательность разбиений $\{\lambda^{(n)}\}_{n \geq 1}$ удовлетворяет условиям теоремы 4. Для этого рассмотрим общий вид мономов в записи полиоднородного элемента $g_{\lambda^{(n)}}$, линейаризация которого порождает $M_{\lambda^{(n)}}$. Так как $\deg_{x_1} g_{\lambda^{(n)}} = \lambda_1^{(n)}$, то ненулевые мономы могут быть следующих двух видов:

$$y_1 X_1^{\gamma_1} y_2 X_1^{\gamma_2} \dots y_i X_1^{\gamma_i} \dots y_s X_1^{\gamma_s}, \quad x_1 X_1^{\gamma_0} y_1 X_1^{\gamma_1} \dots y_i X_1^{\gamma_i} \dots y_s X_1^{\gamma_s},$$

где через y_i обозначены необязательно различные образующие x_j , $j > 1$; $s = n - \lambda_1^{(n)}$, $\gamma_i \geq 0$, $\sum_i \gamma_i = \lambda_1^{(n)}$. В многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество $x_0 X^k \equiv 0$, поэтому $\gamma_i < k$ для всех $0 \leq i \leq s$. Следовательно, для одночленов первого вида имеем неравенство $\lambda_1^{(n)} < ks = k(n - \lambda_1^{(n)})$, откуда $\lambda_1^{(n)} < n/\alpha_1$ для $\alpha_1 = (k+1)/k$. Во втором случае для оценки $\lambda_1^{(n)}$ достаточно принять $s \geq 1$, тогда $\lambda_1^{(n)} < k(s+1) \leq 2ks$. Значит, $\lambda_1^{(n)} < n/\alpha_2$ для $\alpha_2 = (2k+1)/(2k)$.

В многочлене $g_{\lambda^{(n)}}$ рассмотрим кососимметрический набор из $\lambda_1'^{(n)}$ различных образующих, где $\lambda_1'^{(n)}$ — длина первого столбца диаграммы $\lambda^{(n)}$. Для удобства обозначим все остальные образующие через y_j , $1 \leq j \leq s$, тогда $g_{\lambda^{(n)}}$ равен линейной комбинации многочленов вида $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{\theta_0} y_1 \bar{x}_{\theta_0+1} \dots \bar{x}_{\theta_0+\theta_1} y_2 \dots y_s \bar{x}_{(\theta_0+\dots+\theta_{s-1}+1)} \dots \bar{x}_{(\theta_0+\dots+\theta_s)}$, где $s = n - \lambda_1'^{(n)}$, $\theta_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^s \theta_i = \lambda_1'^{(n)}$. В силу тождества $x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_m \equiv 0$ имеем неравенства $\theta_i < m+1$, $0 \leq i \leq s$. Аналогично рассмотренному случаю достаточно принять $s \geq 1$, тогда $\lambda_1'^{(n)} < (s+1)(m+1) < 4sm$, поэтому $\lambda_1'^{(n)} < n/\alpha_3$ для $\alpha_3 = (4m+1)/(4m)$.

Таким образом, последовательность разбиений $\{\lambda^{(n)}\}_{n \geq 1}$ удовлетворяет неравенствам $\lambda_1^{(n)}, \lambda_1'^{(n)} \leq n/\alpha$ для $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha > 1$, и по теореме 4 найдутся такое действительное β , $1 < \beta < \alpha$, и натуральное число n_0 , что $c_n(\mathbf{V}) \geq d_{\lambda^{(n)}} \geq \beta^n$ для всех $n \geq n_0$. Получили противоречие, так как по условию рост многообразия $\mathbf{V}$ не выше подэкспоненциального. ■

Описание всех почти нильпотентных многообразий подэкспоненциального роста в классе антикоммутативных метабелевых алгебр получим в качестве следствия из теоремы 5.

Следствие 2. Пусть многообразие $\mathbf{V} \subset \mathbf{MA}$ является почти нильпотентным подэкспоненциального роста, тогда или $\mathbf{V} = \mathbf{A}^2$, или $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{anti}}$.

Авторы выражают благодарность профессору С. П. Мищенко за постоянное внимание к работе, поддержку и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985. 448 с.
2. Giambruno A. and Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Providence, RI: AMS, 2005. 352 p.
3. Фролова Ю. Ю., Шулежко О. В. Почти нильпотентные многообразия алгебр Лейбница // Прикладная дискретная математика. 2015. № 2(28). С. 30–36.
4. Mishchenko S. and Valenti A. An almost nilpotent variety of exponent 2 // Israel J. Mathematics. 2014. V. 199. No. 1. P. 241–257.
5. Мищенко С. П., Шулежко О. В. О почти нильпотентных многообразиях в классе коммутативных метабелевых алгебр // Вестник Самарского государственного университета. Естественнаучная серия. 2015. № 3(125). С. 21–28.
6. Чанг Н. Т. К., Фролова Ю. Ю. Почти нильпотентные коммутативные метабелевы многообразия, рост которых не выше экспоненциального // Международная конф. Мальцевские чтения: тез. докл. Новосибирск, 2014. С. 119.

7. *Mishchenko S. and Valenti A.* On almost nilpotent varieties of subexponential growth // J. Algebra. 2015. V. 423. No. 1. P. 902–915.
8. *Шулежко О. В.* О почти нильпотентных многообразиях в различных классах линейных алгебр // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. № 1. С. 67–88.
9. *Мищенко С. П.* Метабелевы почти нильпотентные многообразия полиномиального роста // Материалы Междунар. конф. по алгебре, анализу и геометрии. Казань: Изд-во Академии наук ТР, 2016. С. 247–248.
10. *Зайцев М. В., Мищенко С. П.* О кодлинге многообразий линейных алгебр // Математические заметки. 2006. Т. 79. № 4. С. 553–559.
11. *Рацеев С. М.* Рост многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом // Математические заметки. 2007. Т. 82. № 1. С. 108–117.
12. *Giambruno A. and Mishchenko S.* Degrees of irreducible characters of the symmetric group and exponential growth // Proc. AMS. 2016. V. 144. No. 3. P. 943–953.

REFERENCES

1. *Bakhturin Yu. A.* Tozhdestva v algebrakh Li [Identities of Lie Algebras]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 448 p. (in Russian)
2. *Giambruno A. and Zaicev M.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Providence, RI, AMS, 2005. 352 p.
3. *Frolova Yu. Yu. and Shulezhko O. V.* Pochti nil'potentnye mnogoobraziya algebr Leybnitsa [Almost nilpotent varieties of Leibniz algebras]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2015, no. 2(28), pp. 30–36. (in Russian)
4. *Mishchenko S. and Valenti A.* An almost nilpotent variety of exponent 2. Israel J. Mathematics, 2014, vol. 199, no. 1, pp. 241–257.
5. *Mishchenko S. P. and Shulezhko O. V.* O pochtii nil'potentnykh mnogoobraziyakh v klasse kommutativnykh metabelevykh algebr [On almost nilpotent varieties in the class of commutative metabelian algebras]. Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya, 2015, no. 3(125), pp. 21–28. (in Russian)
6. *Chang N. T. K. and Frolova Yu. Yu.* Pochti nil'potentnye kommutativnye metabelevy mnogoobraziya, rost kotorykh ne vyshe eksponentsial'nogo [Almost nilpotent commutative metabelian varieties with not greater than exponential growth rate]. Proc. Intern. Conf. "Mal'tsevskie Chteniya", Novosibirsk, 2014, p. 119. (in Russian)
7. *Mishchenko S. and Valenti A.* On almost nilpotent varieties of subexponential growth. J. Algebra, 2015, vol. 423, no. 1, pp. 902–915.
8. *Shulezhko O. V.* O pochtii nil'potentnykh mnogoobraziyakh v razlichnykh klassakh lineynykh algebr [On almost nilpotent varieties in different classes of linear algebras]. Chebyshevskiy Sbornik, 2015, vol. 16, no. 1, pp. 67–88. (in Russian)
9. *Mishchenko S. P.* Metabelevy pochtii nil'potentnye mnogoobraziya polinomial'nogo rosta [Almost nilpotent metabelian varieties of polynomial growth]. Proc. Intern. Conf., Kazan, 2016, pp. 247–248. (in Russian)
10. *Zaycev M. V. and Mishchenko S. P.* Colength of varieties of linear algebras. Mathematical Notes, 2006, vol. 79, no. 4, pp. 511–517.
11. *Ratseev S. M.* The growth of varieties of Leibniz algebras with nilpotent commutator subalgebra. Mathematical Notes, 2007, vol. 82, no. 1, pp. 96–103.
12. *Giambruno A. and Mishchenko S.* Degrees of irreducible characters of the symmetric group and exponential growth. Proc. AMS, 2016, vol. 144, no. 3, pp. 943–953.