ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.17

О МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ 1-РАСШИРЕНИЯХ ОРИЕНТАЦИЙ ЦЕПЕЙ

М. Б. Абросимов*, О. В. Моденова**

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия
**Научно-образовательный центр «Эрудит», г. Саратов, Россия

Исследуются верхняя и нижняя оценки числа дополнительных дуг $ec(P_n)$ минимального вершинного 1-расширения ориентации цепи P_n. Если ориентация цепи $\overrightarrow{P}_n$ имеет концы разного типа и отлична от гамильтоновой, то $\lceil (n+1)/6 \rceil + 2 \leqslant ec(P_n) \leqslant n+3$. Если ориентация цепи $\overrightarrow{P}_n$ имеет концы одинакового типа, то $\lceil (n+1)/4 \rceil + 2 \leqslant ec(P_n) \leqslant n+3$.

Ключевые слова: *минимальное вершинное 1-расширение, вершинная отказоустойчивая реализация, ориентация цепи.*

DOI 10.17223/20710410/38/6

ON MINIMAL VERTEX 1-EXTENSIONS OF PATH ORIENTATION

M. B. Abrosimov*, O. V. Modenova**

*Saratov State University, Saratov, Russia
**SEC "Erudit", Saratov, Russia

E-mail: oginiel@rambler.ru

In 1976, J. Hayes proposed a graph theoretic model for the study of system fault tolerance by considering faults of nodes. In 1993, the model was expanded to the case of failures of links between nodes. A graph G^* is a k-vertex extension of a graph G if every graph obtained by removing k vertex from G^* contains G. A k-vertex extension G^* of graph G is said to be minimal if it contains $n+k$ vertices, where n is the number of vertices in G, and G^* has the minimum number of edges among all k-vertex extensions of graph G with $n+k$ vertices. In the paper, the upper and lower bounds for the number of additional arcs $ec(\overrightarrow{P}_n)$ of a minimal vertex 1-extension of an oriented path $\overrightarrow{P}_n$ are obtained. For the oriented path $\overrightarrow{P}_n$ with ends of different types which is not isomorphic to Hamiltonian path, we have $\lceil (n+1)/6 \rceil + 2 \leqslant ec(\overrightarrow{P}_n) \leqslant n+3$. For the oriented path $\overrightarrow{P}_n$ with ends of equal types, we have $\lceil (n+1)/4 \rceil + 2 \leqslant ec(\overrightarrow{P}_n) \leqslant n+3$.

Keywords: *minimal vertex extension, node fault tolerance, path orientation.*

Введение

Для изучения отказов элементов технической системы предложено понятие вершинной отказоустойчивой реализации (вершинного расширения) [1, 2], а для изучения отказов связей между элементами — понятие рёберной отказоустойчивой реализации (рёберного расширения) [3]. В [4] доказано, что задача проверки вершинного или рёберного расширения графа является NP-полной. В общем виде задачу описания вершинных расширений произвольного графа решить не удаётся. Основное направление работ в этой области продолжает следовать подходу [1–3], при котором описывается частное решение для графов определённого вида: цепей, циклов, деревьев. Основное внимание уделяется неориентированным графам.

В некоторых работах получены результаты для частных случаев ориентированных графов: функциональных графов [5] и контуров [6]. В данной работе исследуются ориентации цепей. Под цепью понимается дерево, степени вершин которого не больше 2. Две вершины степени 1 называются концами цепи. Под ориентацией цепи понимается орграф, получающийся из цепи заданием ориентации каждого ребра. n-Вершинную цепь будем обозначать P_n, а ориентацию цепи — $\overrightarrow{P}_n$. Очевидно, что цепь и её ориентация содержат $n-1$ рёбер и дуг соответственно. Среди важных частных случаев ориентаций цепи выделим гамильтонову цепь (все рёбра ориентируются в одну сторону) и цепь, состоящую из чередующихся источников и стоков (все рёбра ориентируются поочередно в разные стороны).

Через $d^+(v)$ и $d^-(v)$ будем обозначать степени (полустепени) исхода и захода вершины v соответственно. Для вершины v будем указывать пару степеней исхода и захода в порядке $(d^+(v), d^-(v))$. Степенью вершины в орграфе называется число дуг, имеющих эту вершину своим началом или концом: $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$. Если в ориентации цепи концы имеют одинаковые полустепени исхода и захода, то будем говорить о цепи с концами одинакового типа, в противном случае — о цепи с концами разного типа. Будем использовать основные понятия теории графов, опираясь преимущественно на работу [7].

Дадим далее основные определения по работе [8].

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* (МВ-kР, k — натуральное) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G, то есть граф G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;
2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Через $ec(G)$ обозначается количество дополнительных рёбер минимального вершинного расширения по сравнению с числом рёбер графа G.

Некоторые результаты могут быть полезны при переходе от неориентированных графов к ориентированным.

Лемма 1 [9]. Пусть $\overrightarrow{G}^*$ — минимальное вершинное k-расширение орграфа $\overrightarrow{G}$. Тогда симметризация $\overrightarrow{G}^*$ является вершинным k-расширением симметризации $\overrightarrow{G}$.

Напомним, что симметризацией орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ называется граф

$$G = (V, (\alpha \cup \alpha^{-1}) \backslash \Delta),$$

то есть симметризация орграфа получается заменой дуг рёбрами и удалением петель.

Одним из наиболее простых результатов для неориентированных графов является утверждение о том, что минимальным вершинным 1-расширением цепи P_n является цикл C_{n+1}, который имеет два дополнительных ребра [1]. Однако перенос этой задачи на случай ориентированных графов, за исключением случая, когда все рёбра ориентируются в одну сторону, оказывается нетривиальной задачей (рис. 1). В данной работе исследуются оценки числа дополнительных дуг минимального вершинного 1-расширения ориентации цепи. В [10] доказан следующий результат.

Рис. 1. Гамильтонова ориентация цепи и её МВ-1Р

Теорема 1 [10]. Среди всех ориентаций произвольной цепи P_n только гамильтонова ориентация имеет МВ-1Р с двумя дополнительными дугами.

В [11] результат удалось улучшить.

Теорема 2 [11]. Не существует ориентаций цепей с числом вершин больше четырёх, таких, что МВ-1Р имеет три дополнительных дуги.

1. Основные результаты

Заметим достаточно очевидный факт, который можно использовать для получения верхней оценки числа дополнительных дуг.

Теорема 3. Неориентированный цикл C_{n+1} при $n > 1$ является вершинным 1-расширением для любой ориентации цепи P_n.

Из теоремы получается оценка

$$ec(P_n) \leqslant n + 3.$$

Лемма 2. Если у ориентации цепи $\overrightarrow{P}_n$ концы имеют одинаковый тип, то в её МВ-1Р не может быть двух смежных вершин степени 2.

Доказательство. Заметим, что ориентация цепи из условия теоремы не может быть гамильтоновой, так как у гамильтоновой ориентации цепи концы имеют разный тип.

Предположим, что утверждение теоремы неверно. Пусть в МВ-1Р ориентации цепи $\overrightarrow{P}_n$ есть две смежные вершины u_1 и u_2 степени 2. Не теряя общности, ориентируем ребро между u_1 и u_2 таким образом, чтобы получилась дуга из u_1 в u_2 (рис. 2).

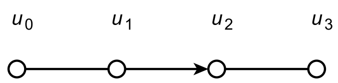

Рис. 2. Ориентация ребра между двумя смежными вершинами степени 2

Если удалим вершину u_0, то u_1 будет иметь полустепени (1,0). Если удалим вершину u_3, то u_2 будет иметь полустепени (0,1). Получили противоречие, так как по условию концы ориентации цепи должны иметь одинаковый тип. ■

Лемма 3. Если у негамильтоновой ориентации цепи $\overrightarrow{P}_n$ концы имеют разный тип, то в её МВ-1Р не может быть вершины степени 2, смежной с двумя вершинами степени 2.

Доказательство. От противного. Пусть в МВ-1Р ориентации цепи $\overrightarrow{P}_n$ есть вершина u_2, смежная с вершинами u_1 и u_3, причём $d(u_1) = d(u_2) = d(u_3) = 2$. Рассмотрим различные способы ориентации рёбер между этими вершинами.

1. Пусть дуга из u_1 идёт в u_2, из u_2 — в u_3 (рис. 3).

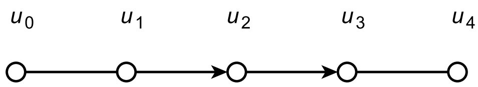

Рис. 3. Случай 1

а) Удалим вершину u_0. Тогда в цепи будет участок, состоящий из двух дуг, направленных в одну сторону (рис. 4), причём он начинается с вершины, имеющей полустепени (1,0).

б) Удалим вершину u_1. Тогда вершина u_2 имеет полустепени (1,0). По п. а получается, что дуга из u_3 должна идти в u_4 (рис. 5).

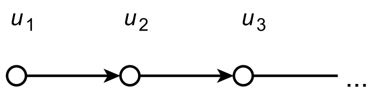

Рис. 4. Случай 1, *а*

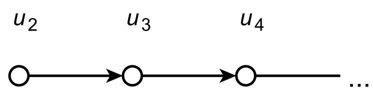

Рис. 5. Случай 1, *б*

Продолжая эти рассуждения, получаем, что все дуги ориентированы в одну сторону, то есть ориентация цепи является гамильтоновой, что противоречит условию теоремы.

2. Пусть в ориентации дуги из u_1 и u_3 идут в u_2 (рис. 6).

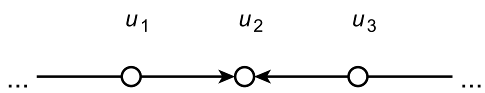

Рис. 6. Случай 2

а) Удалим вершину u_2. По условию концы цепи должны иметь разный тип. Тогда есть либо дуги (u_0, u_1) и (u_3, u_4) (рис. 7), либо дуги (u_1, u_0) и (u_4, u_3) (рис. 8).

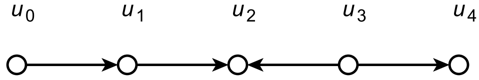

Рис. 7. Случай 2, *а*: дуги (u_0, u_1) и (u_3, u_4)

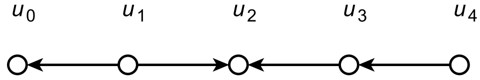

Рис. 8. Случай 2, *а*: дуги (u_1, u_0) и (u_4, u_3)

б) Пусть есть дуги (u_0, u_1) и (u_3, u_4). Если удалить u_1, то u_2 — конечная вершина ориентации цепи, т. е. после вершины со степенью (0,1) должна идти вершина степени (2,0) (рис. 9).

в) Если удалить вершину u_3, то получим противоречие с п. б — после конца ориентации цепи u_2 степени (0,1) идёт вершина степени (1,1) (рис. 10).

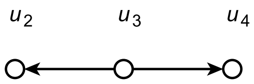

Рис. 9. Случай 2, *б*

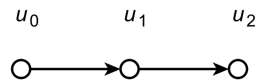

Рис. 10. Случай 2, *в*

Для второго случая (дуги (u_1, u_0) и (u_4, u_3)) доказательство аналогичное.

Для двух других способов ориентации рёбер между вершинами u_1, u_2 и u_3 доказательство проводится аналогично. ■

Теорема 4. Число дополнительных дуг МВ-1Р негамильтоновой ориентации цепи $\overrightarrow{P}_n$, имеющей концы разного типа, удовлетворяет неравенствам

$$\left\lceil \frac{n+1}{6} \right\rceil + 2 \leqslant ec(P_n) \leqslant n+3.$$

Доказательство. Докажем нижнюю оценку.

Учитывая лемму 3, получаем, что в МВ-1Р ориентации цепи $\overrightarrow{P}_n$ из условия теоремы вершина степени 2 не может быть смежна с двумя вершинами степени 2. Таким образом, чтобы построить МВ-1Р негамильтоновой ориентации цепи $\overrightarrow{P}_n$, требуется:

1. Две дуги, которые соединят добавленную вершину с концами цепи.
2. На каждые три вершины должно приходиться минимум по одной дуге.

Вершин в МВ-1Р $n+1$. Отсюда получается нижняя оценка. Верхняя оценка следует из теоремы 3. ■

Теорема 5. Число дополнительных дуг МВ-1Р ориентации цепи $\overrightarrow{P}_n$, имеющей концы одинакового типа, удовлетворяет неравенствам

$$\left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil + 2 \leqslant ec(P_n) \leqslant n+3.$$

Доказательство. Докажем нижнюю оценку.

Учитывая лемму 2, получаем, что в МВ-1Р ориентации цепи из условия теоремы не может быть двух смежных вершин степени 2. Таким образом, чтобы построить МВ-1Р негамильтоновой ориентации цепи $\overrightarrow{P}_n$, требуется:

1. Две дуги, которые соединят добавленную вершину с концами цепи.
2. На каждые две вершины должно приходиться минимум по одной дуге.

Вершин в МВ-1Р $n+1$. Отсюда получается нижняя оценка. Верхняя оценка следует из теоремы 3. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
2. *Harary F. and Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.
3. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
4. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.

5. *Киреева А. В.* Отказоустойчивость в функциональных графах // Упорядоченные множества и решетки. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1995. Вып. 11. С. 32–38.
6. *Sung T. Y., Lin C. Y., Chuang Y. C., and Hsu L. H.* Fault tolerant token ring embedding in double loop networks // Inform. Process. Lett. 1998. V. 66. P. 201–207.
7. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997. 368 с.
8. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
9. *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения направленных звезд // Дискретная математика. 2011. Т. 23. № 2. С. 93–102.
10. *Абросимов М. Б., Моденова О. В.* Характеризация орграфов с малым числом дополнительных дуг минимального вершинного 1-расширения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2013. Т. 13. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 2. Ч. 2. С. 3–9.
11. *Абросимов М. Б., Моденова О. В.* Характеризация орграфов с тремя дополнительными дугами в минимальном вершинном 1-расширении // Прикладная дискретная математика. 2013. № 3. С. 68–75.

REFERENCES

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system. IEEE Trans. Comput., 1976, vol. C.25, no. 9, pp. 875–884.
2. *Harary F. and Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs. Networks, 1996, vol. 27, pp. 19–23.
3. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs. Networks, 1993, vol. 23, pp. 135–142.
4. *Abrosimov M. B.* On the complexity of some problems related to graph extensions. Math. Notes, 2010, no. 5–6(88), pp. 619–625.
5. *Kireeva A. V.* Otkazoustojchivost' v funkcional'nyh grafah [Fault tolerance of functional graphs]. Uporyadochennye mnozhestva i reshetki. Saratov, SSU Publ., 1995, iss. 11, pp. 32–38. (in Russian)
6. *Sung T. Y., Lin C. Y., Chuang Y. C., and Hsu L. H.* Fault tolerant token ring embedding in double loop networks. Inform. Process. Lett., 1998, vol. 66, pp. 201–207.
7. *Bogomolov A. M. and Salii B. H.* Algebraicheskie osnovy teorii diskretnyh sistem [Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 368 p. (in Russian)
8. *Abrosimov M. B.* Grafovye modeli otkazoustojchivosti [Graph Models for Fault Tolerance]. Saratov, SSU Publ., 2012. 192 p. (in Russian)
9. *Abrosimov M. B.* Minimal'nye vershinnye rasshireniya napravlennyh zvezd [Minimal vertex extensions of directed stars]. Diskr. Math., 2011, vol. 23, no. 2, pp. 93–102. (in Russian)
10. *Abrosimov M. B. and Modenova O. V.* Harakterizaciya orgrafov s malym chislom dopolnitel'nyh dug minimal'nogo vershinnogo 1-rasshireniya [Characterization of graphs with a small number of additional arcs in a minimal 1-vertex extension]. Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2013, vol. 13, iss. 2, part. 2, pp. 3–9. (in Russian)
11. *Abrosimov M. B. and Modenova O. V.* Harakterizaciya orgrafov s tremya dopolnitel'nymi dugami v minimal'nom vershinnom 1-rasshirenii [Characterization of graphs with three additional edges in a minimal 1-vertex extension]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2013, no. 3, pp. 68–75. (in Russian)