

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УДК 519.8

ИССЛЕДОВАНИЕ L -СТРУКТУРЫ МНОГОГРАННИКА СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЫПОЛНИМОСТИ¹

А. В. Адельшин, А. К. Кучин

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Омск, Россия

Исследуется смешанная задача максимальной выполнимости на основе моделей целочисленного линейного программирования и метода регулярных разбиений. Установлена зависимость мощности произвольного L -комплекса многогранника указанной смешанной задачи с мощностью L -комплекса соответствующей задачи выполнимости, использование которой позволяет создавать и анализировать алгоритмы решения смешанной задачи, основанные на методе перебора L -классов.

Ключевые слова: логические ограничения, смешанная задача максимальной выполнимости, целочисленное программирование, L -разбиение.

DOI 10.17223/20710410/38/9

ANALYSIS OF L -STRUCTURE OF POLYHEDRON IN THE PARTIAL MAX SAT PROBLEM

A. V. Adelshin, A. K. Kuchin

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia***E-mail:** adelshin@ofim.oscsbras.ru, dr-on@yandex.ru

In many decision-making problems, related to design, planning, management etc., the logical constraints are used. These constraints are often described in the terms of mathematical logic and lead to the satisfiability problem (SAT) and its generalizations. Most known problems are the maximum satisfiability problem (MAX SAT) and the partial maximum satisfiability problem. The latter problem includes two types of constraints that are used: the “hard” constraints (that should be satisfied anyway) and the “soft” constraints (that can be violated under certain conditions). In this paper, we analyze the partial maximum satisfiability problem as discrete optimization problem based on integer linear programming models and L -partition approach. In previous papers, estimates of the cardinality of L -complexes of polyhedrons of the SAT and the MAX SAT problems were obtained. In this paper, we prove a new property of the polyhedron of the partial MAX SAT problem, namely a relation of cardinality of the L -complexes of the indicated problem and the corresponding SAT problem is obtained. Using this result, it is possible to obtain theoretical estimates of the cardinality of the L -complex of the polyhedron of the partial MAX SAT problem

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 16-01-00740.

on the basis of similar estimates for the SAT and the MAX SAT problems. In particular, it is established that if hard constraints form an instance of 2-SAT problem, then the cardinality of any L -complex of the partial MAX SAT problem does not exceed $n - 1$. In addition, we can construct families of logical formulas for which the cardinality of L -complex of the polyhedron of partial MAX SAT problem grows exponentially with increasing number of variables in the formulas.

Keywords: *logical constraints, partial maximum satisfiability problem, integer programming, L -partition.*

Введение

Учёт логических ограничений необходим во многих задачах дискретной оптимизации и криптографических приложениях [1–5]. Данные ограничения могут описываться с помощью логических формул и приводить к задаче выполнимости, одной из центральных в теории сложности, а также к её известным обобщениям — задаче максимальной выполнимости или смешанной задаче максимальной выполнимости. Практическая значимость задач с логическими ограничениями и соответствующих им задач выполнимости стимулирует разработку различных методов для их анализа и решения [6–11]. Одним из известных подходов является использование моделей целочисленного линейного программирования (ЦЛП) и L -разбиения [12]. В рамках этого подхода исследованы некоторые структурные свойства многогранников рассматриваемых задач и предложены семейства труднорешаемых задач для определённых классов алгоритмов [13–15]. В работе продолжены исследования в данном направлении. Получено новое свойство, которое отражает зависимость структуры многогранника указанной смешанной задачи со структурой многогранника соответствующей задачи выполнимости. Полученное свойство позволяет создавать и анализировать алгоритмы решения смешанной задачи, основанные на методе перебора L -классов, в частности оценивать их трудоёмкость.

Рассмотрим постановку задачи выполнимости (SAT). Пусть $x_1, \dots, x_n$ — переменные, принимающие значение *истина* или *ложь*. Под литералом понимается либо переменная x_j , $j = 1, \dots, n$, либо её отрицание. Пусть логическая формула F представляет собой конъюнкцию формул (скобок) D_k , $k = 1, \dots, l$, каждая из которых является дизъюнкцией литералов. Требуется определить, выполнима ли формула F , т.е. существует ли такой набор значений переменных, при котором F принимает значение *истина*.

Важным обобщением задачи SAT является задача максимальной выполнимости (MAX SAT). Пусть логическая формула F представляет собой конъюнкцию формул (скобок) C_i , $i = 1, \dots, m$, и каждой скобке C_i соответствует неотрицательный вес c_i . Задача MAX SAT состоит в отыскании набора значений логических переменных, при котором суммарный вес выполненных скобок будет наибольшим. Особенностью смешанной задачи является наличие так называемых «жёстких» и «мягких» логических ограничений. «Жёсткие» ограничения обязательны для выполнения и формируют некоторую задачу SAT. Выполнимость или невыполнимость «мягких» ограничений влияет на значение целевой функции и приводит к некоторой задаче MAX SAT. Такие постановки, в которых логические ограничения обоих типов присутствуют одновременно, представляют большой теоретический и практический интерес.

1. Модели ЦЛП для задач с логическими ограничениями

Перейдем к рассмотрению моделей ЦЛП рассматриваемых задач. Приведем сначала модель для задачи выполнимости. Введем булевы переменные $y_1, \dots, y_n$, такие, что y_j соответствует переменной x_j , а $(1 - y_j)$ — её отрицанию, т.е. $y_j = 1$ тогда и только тогда, когда переменная x_j принимает значение *истина*, $j = 1, \dots, n$. Нетрудно показать, что условие выполнимости логической формулы F эквивалентно существованию решения следующей системы:

$$\sum_{j \in D_k^+} y_j - \sum_{j \in D_k^-} y_j \geq 1 - |D_k^-|, \quad i = 1, \dots, l; \quad (1)$$

$$0 \leq y_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$y_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Здесь D_k^- и D_k^+ — множества индексов переменных, входящих в скобку D_k с отрицанием и без него соответственно; $|D_k^-|$ — мощность множества D_k^- .

Для формулировки задачи SAT в терминах ЦЛП необходимо ввести целевую функцию. В качестве такой функции может быть выбрана, например, $f(y) = y_1 \rightarrow \max$ или $f(y) = \sum_{j=1}^n y_j \rightarrow \max$, где $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Определим множества C_i^- и C_i^+ аналогично множествам D_k^- и D_k^+ . Тогда модель ЦЛП для задачи MAX SAT будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{i=1}^m c_i z_i \rightarrow \max;$$

$$\sum_{j \in C_i^-} y_j - \sum_{j \in C_i^+} y_j + z_i \leq |C_i^-|, \quad i = 1, \dots, m; \quad (3)$$

$$0 \leq y_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n; \quad (4)$$

$$0 \leq z_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, m; \quad (5)$$

$$y_j, z_i \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m.$$

Здесь каждой скобке C_i поставлена в соответствие переменная z_i , причём в любом допустимом целочисленном решении $z_i = 1$ только в том случае, когда C_i выполнена. Таким образом, оптимальное значение целевой функции равно наибольшему суммарному весу выполненных скобок. Заметим, что если в последнюю модель добавить ограничения вида (1), то получится модель ЦЛП для смешанной задачи с «жёсткими» ограничениями (1) и «мягкими» ограничениями (3). В результате модель ЦЛП для смешанной задачи MAX SAT будет иметь следующий вид:

$$\sum_{i=1}^m c_i z_i \rightarrow \max; \quad (6)$$

$$\sum_{j \in C_i^-} y_j - \sum_{j \in C_i^+} y_j + z_i \leq |C_i^-|, \quad i = 1, \dots, m; \quad (7)$$

$$\sum_{j \in D_k^-} y_j - \sum_{j \in D_k^+} y_j \leq |D_k^-| - 1, \quad k = 1, \dots, l; \quad (8)$$

$$0 \leq y_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n; \quad (9)$$

$$0 \leq z_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, m; \quad (10)$$

$$y_j, z_i \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m. \quad (11)$$

Далее в п. 3 проводится анализ структуры многогранника смешанной задачи MAX SAT на основе модели ЦЛП (6)–(11).

2. О методе регулярных разбиений

Для исследования структуры задач целочисленного программирования, построения и анализа алгоритмов их решения был предложен метод регулярных разбиений [12], получивший развитие в большом количестве работ А. А. Колоколова и его учеников. Идея данного подхода заключается в выделении семейства специальных разбиений релаксационного множества задачи.

Приведём необходимые определения и обозначения. В первую очередь нам потребуется понятие лексикографического порядка. Для этого рассмотрим функцию

$$\eta(x, y) = \min\{i : x_i \neq y_i, i = 1, \dots, n\}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq y.$$

Вектор x лексикографически больше (меньше) вектора y , т. е. $x \succ y$ ($x \prec y$), если $x \neq y$ и $x_w > y_w$ ($x_w < y_w$) для $w = \eta(x, y)$. Отношение $\succ$ представляет собой отношение строгого линейного порядка. Запись $x \succeq y$ означает, что либо $x \succ y$, либо $x = y$. Аналогично понимается $x \preceq y$.

Для множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ полагаем: $X \succ Y$ ($X \prec Y$), если $x \succ y$ ($x \prec y$) для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $x \succ y$. Будем говорить, что точки x и y *отделимы*, если найдётся точка $z \in \mathbb{Z}^n$, для которой выполняется $x \succeq z \succeq y$. Точку z назовём *отделяющей*.

Далее рассмотрим L -разбиение, которое является наиболее изученным среди разбиений. Точки $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($x \succ y$) называются *L -эквивалентными*, если не существует отделяющей их точки $z \in \mathbb{Z}^n$. Это отношение эквивалентности порождает разбиение любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ на непересекающиеся *L -классы*. Фактор-множество X/L называется *L -разбиением* множества X . Отметим основные свойства L -разбиения, применяемые при разработке и исследовании алгоритмов целочисленного программирования:

- 1) каждая точка $z \in \mathbb{Z}^n$ образует отдельный L -класс, остальные классы состоят из нецелочисленных точек и называются *дробными*;
- 2) если X — ограниченное множество, то фактор-множество X/L конечно;
- 3) любой дробный L -класс $V \in X/L$ можно представить в виде

$$V = X \cap \{x : x_1 = a_1, \dots, x_{r-1} = a_{r-1}, a_r < x_r < a_r + 1\},$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 1, \dots, r$), $1 \leq r \leq n$.

Рангом L -класса $V \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$r(V) = \begin{cases} \min\{i : x_i \neq [x_i], i = 1, \dots, n, x \in V\}, & \text{если } V \text{ — дробный,} \\ n + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Подмножество K дробных L -классов из X/L называется *L -комплексом*, если для любых $V, V' \in K$, $V \succ V'$, не существует точки $z \in X \cap \mathbb{Z}^n$, отделяющей V и V' , т. е. $V \succ z \succ V'$. Говорят, что множество X имеет *альтернирующую L -структуру*, если мощность любого её L -комплекса не превосходит 1, а лексикографически максимальный и минимальный L -классы являются целочисленными.

Далее рассмотрим лексикографическую задачу ЦЛП следующего вида: найти лексикографически максимальную точку y^* множества $(M \cap \mathbb{Z}^n)$, т. е.

$$\text{найти } y^* = \text{lexmax}(M \cap \mathbb{Z}^n), \quad (12)$$

где M — некоторый выпуклый многогранник. Важную роль в исследовании задачи (12) и методов её решения играет множество

$$M_* = \{y \in M : \forall z \in M \cap \mathbb{Z}^n (y \succ z)\},$$

которое называется *дробным накрытием* задачи (12). Фактор-множество M_*/L называется *L -накрытием* задачи.

Выделение этой части релаксационного множества задачи связано с тем, что в некоторых методах ЦЛП (отсечения, перебора L -классов) происходит последовательное исключение точек из M_* , т. е. эти методы можно рассматривать как определённые способы «снятия» дробных накрытий.

С использованием метода регулярных разбиений получен ряд теоретических результатов при исследовании задач с логическими условиями [10, 13, 14]. Проведён анализ L -структуры многогранников (1)–(2) и (3)–(5) задач выполнимости и максимальной выполнимости. Построены семейства логических формул, для которых мощности L -накрытий задач выполнимости и максимальной выполнимости растут экспоненциально с увеличением числа переменных. Получены оценки числа итераций некоторых алгоритмов ЦЛП при решении задач из построенных семейств. Новизна результатов исследований, представленных в данной работе, состоит в применении указанного подхода к смешанной задаче максимальной выполнимости и получении свойств L -структуры соответствующего многогранника (7)–(10).

3. Анализ L -структуры многогранника смешанной задачи максимальной выполнимости

Рассмотрим модель ЦЛП смешанной задачи максимальной выполнимости (6)–(11). Пусть ограничения (8) и (9) задают многогранник D задачи выполнимости в пространстве $\mathbb{R}^n$, а релаксационный многогранник всей задачи обозначим через M . Покажем, как связаны L -структуры многогранников M и D .

Определим два отображения ψ и φ следующего вида. Пусть отображение $\psi : c \rightarrow P$, $c = (c_1, \dots, c_n) \in D \cap \mathbb{Z}^n$, $P = \{(c_1, \dots, c_n, p_{n+1}, \dots, p_m) \in M : 0 \leq p_i \leq 1, i = n+1, \dots, m\}$ задаёт грань многогранника M . Отображение $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ для множеств

$$V = \{(v_1, \dots, v_n) : 0 < v_k < 1, 0 \leq v_j \leq 1, j = k+1, \dots, n\} \in D/L,$$

$$\bar{V} = \{(v_1, \dots, v_{n+m}) : 0 < v_k < 1, 0 \leq v_j \leq 1, j = k+1, \dots, n+m\} \in M/L$$

связывает между собой L -классы многогранников D и M , $k \leq n$.

Далее будем говорить, что отображение $f : X \rightarrow Y$ сохраняет лексикографический порядок, если для любых $x_1, x_2 \in X$ выполняется $x_1 \prec x_2$ тогда и только тогда, когда $f(x_1) \prec f(x_2)$.

Лемма 1. Отображения ψ и φ взаимно-однозначны и сохраняют лексикографический порядок.

Доказательство данного свойства очевидно. Кроме этого, для отображения ψ верно следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть отображение $\psi : c \rightarrow P$, $c = (c_1, \dots, c_n) \in D \cap \mathbb{Z}^n$, $P = \{(c_1, \dots, c_n, p_{n+1}, \dots, p_m) \in M : 0 \leq p_i \leq 1, i = n+1, \dots, m\}$. Тогда множество P имеет альтернирующую L -структуру.

Доказательство. Заметим, что $(c_1, \dots, c_n, 0, \dots, 0) \in M$, а значит, множество P не пусто. Пусть $c = (c_1, \dots, c_n) \in D \cap \mathbb{Z}^n$, $P = \psi(c)$.

Очевидно, что $\text{lexmin}(P) = (c_1, \dots, c_n, 0, \dots, 0)$. Докажем, что $\text{lexmax}(P)$ — целочисленная точка. Допустим, $\text{lexmax}(P) = (c_1, \dots, c_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m})$ — нецелочисленная точка. Нетрудно показать, что $(c_1, \dots, c_n, \lceil v_{n+1} \rceil, \dots, \lceil v_{n+m} \rceil) \in P$ и лексикографически больше $(c_1, \dots, c_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m})$. Противоречие.

Рассмотрим два различных дробных L -класса

$$V = \{(c_1, \dots, c_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m}) : 0 \leq v_i \leq 1, i = n+1, \dots, m\},$$

$$W = \{(c_1, \dots, c_n, w_{n+1}, \dots, w_{n+m}) : 0 \leq w_i \leq 1, i = n+1, \dots, m\},$$

принадлежащих P/L . Будем считать, что $V \prec W$. Докажем, что существует целочисленная точка из P , отделяющая эти два L -класса:

1) Если $n < r(V) < r(W)$, то точка

$$(c_1, \dots, c_n, w_1, \dots, w_{r(W)-1}, \lfloor w_{r(W)} \rfloor, \dots, \lfloor w_{n+m} \rfloor)$$

является отделяющей.

2) Если $n < r(W) \leq r(V)$, то точка

$$(c_1, \dots, c_n, v_1, \dots, v_{r(V)-1}, \lceil v_{r(V)} \rceil, \dots, \lceil v_{n+m} \rceil)$$

является отделяющей.

Таким образом, в силу произвольности V и W , множество P имеет альтернирующую L -структуру. ■

Лемма 3. Для любого целочисленного L -класса $V \in D/L$ и любого дробного L -класса $W \in D/L$, таких, что $V \prec W$ ($V \succ W$), справедливо $\psi(V) \prec \varphi(W)$ ($\psi(V) \succ \varphi(W)$).

Доказательство. Пусть $V = \{(v_1, \dots, v_n)\} \in D/L$, где $v_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, n$; $W = \{(w_1, \dots, w_n) : 0 \leq w_j \leq 1, j = r+1, \dots, n, 0 < w_r < 1\} \in D/L$, где $w_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, r-1$, $r \leq n$, и известно, что $V \prec W$ ($V \succ W$). Тогда

$$\psi(V) = \{(v_1, \dots, v_n, \bar{v}_{n+1}, \dots, \bar{v}_{n+m}) \in M : 0 \leq \bar{v}_j \leq 1, j = n+1, \dots, n+m\},$$

$$\varphi(W) = \{(w_1, \dots, w_{r-1}, \bar{w}_r, \dots, \bar{w}_{n+m}) \in M : 0 \leq \bar{w}_j \leq 1, j = r+1, \dots, n+m, 0 < \bar{w}_r < 1\}.$$

Видно, что $\psi(V) \prec \varphi(W)$ (соответственно $\psi(V) \succ \varphi(W)$). ■

Леммы 1–3 использованы при анализе L -структуры многогранника смешанной задачи максимальной выполнимости, результаты представлены в теоремах 1 и 2.

Теорема 1. Пусть мощность любого L -комплекса многогранника (8)–(9) не превосходит величины $t(n)$. Тогда мощность любого L -комплекса многогранника (7)–(10) также не превосходит $t(n)$.

Доказательство. Используем те же обозначения: D — многогранник (8)–(9), M — многогранник (7)–(10).

Рассмотрим L -комплекс $\Omega = \{V_1, \dots, V_k\}$ многогранника D , где $V_1, \dots, V_k \notin \mathbb{Z}^n$, $V_1 \prec \dots \prec V_k$, $k \leq t(n)$. Из леммы 1 получаем $\varphi(V_1) \prec \dots \prec \varphi(V_k)$. Предположим, что существует $\bar{V} \in M/L$, такое, что $\varphi(V_i) \prec \bar{V} \prec \varphi(V_{i+1})$, $1 \leq i \leq k-1$. Если $r(\bar{V}) \leq n$, то по лемме 1 $V_i \prec \varphi^{-1}(\bar{V}) \prec V_{i+1}$; если $r(\bar{V}) > n$, то $V_i \prec \psi^{-1}(\bar{V}) \prec V_{i+1}$. Противоречие.

Пусть существует $V_0 \in D \cap \mathbb{Z}^n$, такое, что $V_0 \prec V_1$ ($V_k \prec V_0$) и между ними нет других L -классов. Из леммы 3 известно, что $\psi(V_0) \prec \varphi(V_1)$ ($\varphi(V_k) \prec \psi(V_0)$). Предположим,

что существует $\bar{V} \in M/L$, для которого $\psi(V_0) \prec \bar{V} \prec \varphi(V_1)$ ($\varphi(V_k) \prec \bar{V} \prec \psi(V_0)$). Если $r(\bar{V}) \leq n$, то $V_0 \prec \varphi^{-1}(\bar{V}) \prec V_1$ ($V_k \prec \varphi^{-1}(\bar{V}) \prec V_0$); если $r(\bar{V}) > n$, то $V_0 \prec \psi^{-1}(\bar{V}) \prec V_1$ ($V_k \prec \psi^{-1}(\bar{V}) \prec V_0$). Противоречие. Для случая, когда L -класса V_0 не существует, справедливы аналогичные рассуждения.

Таким образом, L -комплексу $\Omega = \{V_1, \dots, V_k\}$ многогранника D соответствует L -комплекс $\bar{\Omega} = \{\varphi(V_1), \dots, \varphi(V_k)\}$ многогранника M той же мощности. По лемме 2 множество $\varphi(V_0)$, где $V_0 \in D \cap \mathbb{Z}^n$, имеет альтернирующую L -структуру, а значит, мощность любого L -комплекса из $\varphi(V_0)$ не превосходит 1. Следовательно, размер любого L -комплекса множества M не превосходит $t(n)$. ■

Используя аналогичные рассуждения, можно доказать также следующую теорему.

Теорема 2. Пусть многогранник (8)–(9) содержит L -комплекс мощности не меньше $t(n)$. Тогда многогранник (7)–(10) также содержит L -комплекс мощности не меньше $t(n)$.

Таким образом, структура многогранника D является определяющей для L -структуры смешанной задачи максимальной выполнимости. В [13, 14] построены семейства задач выполнимости, у которых мощность L -накрытия растёт экспоненциально с увеличением числа переменных в формуле. Это дало возможность генерировать семейства труднорешаемых задач для определённого класса алгоритмов, основанных на непрерывной оптимизации (методы ветвей и границ, отсечения, перебора L -классов). На основе указанных результатов и теоремы 2 нетрудно построить такие смешанные задачи максимальной выполнимости, мощности L -накрытий которых также будут экспоненциальными от числа переменных. С другой стороны, в [15] показано, что мощность любого L -комплекса многогранника задачи 2-выполнимости с выполнимой формулой не превосходит $n - 1$. В некоторых прикладных задачах (например, задачах проектирования [10]) набор логических ограничений представляет собой задачу 2-выполнимости, а значит, теорема 1 гарантирует, что многогранник указанной задачи содержит L -комплексы, мощности которых ограничены полиномом от числа переменных в формуле. Таким образом, переход от одного допустимого решения задачи к следующему в лексикографическом порядке осуществляется достаточно быстро. В связи с этим для смешанной задачи MAX SAT возможно построение эффективных алгоритмов, основанных на методе перебора L -классов, позволяющих применять указанный подход для некоторых постановок прикладных задач с логическими ограничениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колоколов А. А., Ярош А. В. Автоматизация проектирования сложных изделий с использованием дискретной оптимизации и информационных технологий // Омский научный вестник. 2010. № 2(90). С. 234–238.
2. Посыпкин М. А., Заикин О. С., Беспалов Д. В., Семенов А. А. Решение задач криптоанализа поточных шифров в распределенных вычислительных средах // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 46. С. 119–137.
3. Massacci F. and Marraro L. Logical cryptanalysis as a SAT problem // J. Automated Reasoning. 2000. No. 24. P. 165–203.
4. Marathe M. V. and Ravi S. S. On approximation algorithms for the minimum satisfiability problem // Inform. Proc. Lett. 1996. V. 58. P. 23–29.
5. Заикин О. С., Отпущенников И. В., Семенов А. А. Применение SAT-подхода к решению квадратичной задачи о назначениях // XV Байкальская Междунар. школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск, 2011. С. 111–116.

6. Колоколов А. А., Адельшин А. В., Ягофарова Д. И. Решение задачи выполнимости с использованием метода перебора L -классов // Информационные технологии. 2009. № 2. С. 54–59.
7. Gu J., Purdom P., Franco J., and Wah B. Algorithms for the satisfiability (SAT) problem: a survey // DIMACS Series in Discr. Math. and Theor. Comput. Sci. 1996. V. 35. P. 19–152.
8. Hamadi Y., Jabbour S., and Sais L. ManySAT: a parallel SAT solver // J. Satisfiability, Boolean Modeling and Computation. 2009. No. 6. P. 245–262.
9. Thornton J., Bain S., Sattar A., and Pham D. N. A two level local search for MAX-SAT problems with hard and soft constraints // Proc. 15th Australian Joint Conf. on Artificial Intelligence, AustAI-2002. Canberra, Australia, 2002. P. 603–614.
10. Колоколов А. А., Адельшин А. В., Ягофарова Д. И. Исследование задач дискретной оптимизации с логическими ограничениями на основе метода регулярных разбиений // Прикладная дискретная математика. 2013. № 1(19). С. 99–109.
11. Адельшин А. В., Кучин А. К. Разработка алгоритмов решения смешанной задачи максимальной выполнимости // V Всерос. конф. «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2012. С. 99.
12. Колоколов А. А. Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сиб. журнал исследования операций. 1994. № 2. С. 18–39.
13. Адельшин А. В. Исследование задач максимальной и минимальной выполнимости с использованием L -разбиения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 1. С. 35–42.
14. Kolokolov A., Adelshin A., and Yagofarova D. Analysis and solving SAT and MAX-SAT problems using an L -partition approach // J. Math. Modeling. Algorithms. 2013. No. 12(2). P. 201–212.
15. Колоколов А. А., Адельшин А. В. Анализ и решение задач дискретной оптимизации с логическими ограничениями на основе L -разбиения // Прикладная дискретная математика. 2015. № 4(30). С. 100–108.

REFERENCES

1. Kolokolov A. A. and Yarosh A. V. Avtomatizatsiya proyektirovaniya slozhnykh izdeliy s ispol'zovaniyem diskretnoy optimizatsii i informatsionnykh tekhnologiy [Automation of designing complex products using discrete optimization and information technology]. Omsk Scientific Bulletin, 2010, no. 2(90), pp. 234–238. (in Russian)
2. Posypkin M. A., Zaikin O. S., Bespalov D. V., and Semenov A. A. Resheniye zadach kriptanaliza potochnykh shifrov v raspredelennykh vychislitel'nykh sredakh [Solving the problems of cryptanalysis of stream ciphers in distributed computing environments]. Proc. ISA RAS, 2009, vol. 46, pp. 119–137. (in Russian)
3. Massacci F. and Marraro L. Logical cryptanalysis as a SAT problem. J. Automated Reasoning, 2000, no. 24, pp. 165–203.
4. Marathe M. V. and Ravi S. S. On approximation algorithms for the minimum satisfiability problem. Inform. Proc. Lett., 1996, vol. 58, pp. 23–29.
5. Zaikin O. S., Otpushchennikov I. V., and Semenov A. A. Primeneniye SAT-podkhoda k resheniyu kvadrachnoy zadachi o naznacheniya [Application of the SAT approach to the solution of the quadratic assignment problem]. 15th Baikal Intern. School-Seminar on Optimization Methods and their Applications, Irkutsk, 2011, pp. 111–116. (in Russian)
6. Kolokolov A. A., Adelshin A. V., and Yagofarova D. I. Resheniye zadachi vypolnimosti s ispol'zovaniyem metoda perebora L -klassov [Solving the SAT problem using the L -partition approach]. Information Technologies, 2009, no. 2. pp. 54–59. (in Russian)
7. Gu J., Purdom P., Franco J., and Wah B. Algorithms for the satisfiability (SAT) problem: a survey. DIMACS Series in Discr. Math. and Theor. Comput. Sci., 1996, vol. 35, pp. 19–152.

8. Hamadi Y., Jabbour S., and Sais L. ManySAT: a parallel SAT solver. J. Satisfiability, Boolean Modeling and Computation, 2009, no. 6, pp. 245–262.
9. Thornton J., Bain S., Sattar A., and Pham D. N. A two level local search for MAX-SAT problems with hard and soft constraints. Proc. 15th Australian Joint Conf. on Artificial Intelligence, AustAI-2002. Canberra, Australia, 2002, pp. 603–614.
10. Kolokolov A. A., Adelshin A. V., and Yagofarova D. I. Issledovaniye zadach diskretnoy optimizatsii s logicheskimi ogranicheniyami na osnove metoda regul'yarnykh razbiyeniy [Study of discrete optimization problems with logical constraints based on regular partitions]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2013, no. 1(19), pp. 99–109. (in Russian)
11. Adelshin A. V. and Kuchin A. K. Razrabotka algoritmov resheniya smeshannoy zadachi maksimal'noy vypolnimosti [Development of algorithms for solving the partial MAX SAT problem]. V Russian Conf. "Optimization Problems and their Economical Applications", Omsk, 2012, pp. 99. (in Russian)
12. Kolokolov A. A. Regul'yarnye razbieniya i otsecheniya v tselochislennom programmirovanii [Regular partitions and cuts in integer programming]. Siberian J. Operations Research, 1994, no. 2, pp. 18–39. (in Russian)
13. Adel'shin A. V. Investigation of maximum and minimum satisfiability problems using L -partition. Automation and Remote Control, 2004, vol. 65, no. 3, pp. 388–395.
14. Kolokolov A., Adelshin A., and Yagofarova D. Analysis and solving SAT and MAX-SAT problems using an L -partition approach. J. Math. Modeling. Algorithms, 2013, no. 12(2), pp. 201–212.
15. Kolokolov A. A. and Adelshin A. V. Analiz i reshenie zadach diskretnoy optimizatsii s logicheskimi ogranicheniyami na osnove L -razbieniya [Analysis and solving discrete optimization problems with logical constraints on the basis of the L -partition approach]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2015, no. 4(30), pp. 100–108. (in Russian)