

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2017

№ 50

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenschikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager, Nikolay R. Shcherbakov.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

H-index: <http://elibrary.ru>, <http://Math-Net.ru>

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Гулько С.П., Иванов А.В. О вполне замкнутых отображениях компактов Федорчука	5
Иванов Д.Ю. О решении плоских задач нестационарной теплопроводности коллокационным методом граничных элементов	9
Тагиев Р.К., Габиев В.М. Разностная аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для параболического уравнения с интегральным условием	30
Эргашев Т.Г. Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца	45

МЕХАНИКА

Афанасьев А.А., Горностаев К.К., Ковалёв А.В., Чеботарев А.С. О механическом поведении упрочняющегося упругопластического диска под действием источника тепла	57
Гамзаев Х.М. Численный метод решения коэффициентной обратной задачи для уравнения диффузии – конвекции – реакции	67
Ляхов А.А., Струнин В.И. Численный анализ кинетики химических реакций в аргон-силановой плазме тлеющего разряда	79
Пейгин С.В., Степанов К.А., Тимченко С.В. Технология оптимального проектирования аэродинамических конфигураций на основе решений полных уравнений Навье – Стокса	90
Порязов В.А., Крайнов А.Ю. Математическая модель и расчет нестационарной скорости горения металлизированных твердых ракетных топлив	99
Цыденов Б.О. Численное моделирование взаимодействия компонентов системы «нутриент – фитопланктон – зоопланктон – детрит» во время эволюции весеннего термобара	112
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	122

CONTENTS

MATHEMATICS

Gul'ko S.P., Ivanov A.V. On fully closed mappings of Fedorchuk compacta	5
Ivanov D.Yu. On solving plane problems of non-stationary heat conduction by the collocation boundary element method	9
Tagiev R.K., Gabibov V.M. Difference approximation and regularization of the optimal control problem for a parabolic equation with an integral condition	30
Ehrgashev T.G. The fourth double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation	45

MECHANICS

Afanas'ev A.A., Gornostaev K.K., Kovalev A.V., Chebotarev A.S. On mechanical behavior of the hardening elastoplastic disk affected by a heat source.....	57
Gamzaev Kh.M. A numerical method for solving the coefficient inverse problem for diffusion-convection-reaction equation.....	67
Lyakhov A.A., Strunin V.I. Numerical analysis of the kinetics of chemical reactions in an argon-silane plasma of the glow discharge	79
Peygin S.V., Stepanov K.A., Timchenko S.V. An optimal design technology for aerodynamic configurations based on the numerical solutions of the full Navier – Stokes equations	90
Poryazov V.A., Krainov A.Yu. Mathematical model and calculation of the unsteady combustion rate of the metallized solid rocket propellants.....	99
Tsydenov B.O. Numerical modeling of the interaction between nutrient – phytoplankton – zooplankton – detritus system components during the spring thermal bar	112
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	122

МАТЕМАТИКА

УДК 515.12
DOI 10.17223/19988621/50/1

С.П. Гулько, А.В. Иванов

О ВПОЛНЕ ЗАМКНУТЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ
КОМПАКТОВ ФЕДОРЧУКА¹

F -компактом или компактом Федорчука называется компактное хаусдорфово топологическое пространство, допускающее разложение в специальный вполне упорядоченный обратный спектр с вполне замкнутыми соседними проекциями. F -компакты спектральной высоты 3 – это в точности неметризуемые компакты, допускающие вполне замкнутое отображение на метрический компакт с метризуемыми слоями. Доказано, что такое вполне замкнутое отображение для F -компакта X спектральной высоты 3 определено почти однозначно. А именно, нетривиальные слои любых двух вполне замкнутых отображений X в метрические компакты с метризуемыми прообразами точек совпадают всюду, за исключением, может быть, счетного семейства элементов.

Ключевые слова: компакт Федорчука, обратный спектр, вполне замкнутое отображение.

Компактом Федорчука или F -компактом называется компактное хаусдорфово топологическое пространство, допускающее разложение в специальный вполне упорядоченный обратный спектр (F -спектр) с вполне замкнутыми соседними проекциями (см. [1]). Наименьшая длина такого спектра, дающего в пределе данный компакт X , называется спектральной высотой $\text{sh}(X)$ F -компакта X . Спектральная высота любого неметризуемого F -компакта больше либо равна 3. При этом $\text{sh}(X) = 3$ тогда и только тогда, когда существует вполне замкнутое отображение $f : X \rightarrow K$ на метрический компакт K с метризуемыми слоями $f^{-1}(t), t \in K$. (Такое вполне замкнутое отображение мы будем называть для краткости *допустимым*.) Таким образом, всякий F -компакт спектральной высоты 3 изначально связан с некоторым допустимым вполне замкнутым отображением. В работе доказано, что такое отображение для любого F -компакта X является почти единственным. А именно, если имеются два допустимых вполне замкнутых отображения $f_i : X \rightarrow K_i$, $i = 1, 2$, компакта X в метрические компакты K_i , то множество несовпадающих нетривиальных слоев этих отображений не более чем счетно:

$$\left| \left\{ f_1^{-1}(t) : |f_1^{-1}(t)| > 1, t \in K_1 \right\} \Delta \left\{ f_2^{-1}(t) : |f_2^{-1}(t)| > 1, t \in K_2 \right\} \right| \leq \omega_0$$

(через Δ обозначена симметрическая разность множеств).

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-51-18051

Примерами F -компактов спектральной высоты 3 являются, например, «две стрелки» D и лексикографический квадрат отрезка $[0, 1]_I^2$. Из основного результата данной статьи следует, что почти все нетривиальные слои любого допустимого вполне замкнутого отображения $f: D \rightarrow K$ являются двоечиями, которые склеиваются при стандартном проектировании D на отрезок. Аналогично, почти все нетривиальные слои любого допустимого вполне замкнутого отображения $f: [0, 1]_I^2 \rightarrow K$ обязательно совпадают с «вертикальными отрезками» лексикографического квадрата $[0, 1]_I^2$.

В дальнейшем рассматриваются только компактные хаусдорфовы топологические пространства. Непрерывное сюръективное отображение $f: X \rightarrow K$ является вполне замкнутым тогда и только тогда, когда для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств F_1 и F_2 в X пересечение $f(F_1) \cap f(F_2)$ конечно (см. [2], предложение 1.6, с. 124). Это характеристическое свойство примем здесь за определение вполне замкнутости.

Теорема. Пусть $f_i: X \rightarrow K_i, i = 1, 2$, – вполне замкнутые отображения компакта X на метрические компакты K_i с метризуемыми слоями $f_i^{-1}(t), t \in K_i$. Тогда

$$\left| \left\{ f_1^{-1}(t) : |f_1^{-1}(t)| > 1, t \in K_1 \right\} \Delta \left\{ f_2^{-1}(t) : |f_2^{-1}(t)| > 1, t \in K_2 \right\} \right| \leq \omega_0.$$

Доказательство. Рассмотрим множество $A = \{t : |f_2(f_1^{-1}(t))| > 1\}$ и докажем, что оно не более чем счетно. Предположим противное. Тогда в K_2 получим несчетное индексированное семейство неодноточечных замкнутых подмножеств $\{B_t = f_2(f_1^{-1}(t)) : t \in A\}$. Для этого семейства найдутся $n \in \mathbb{N}$ и несчетное подмножество $A_1 \subset A$, такие, что $\text{diam} B_t \geq \frac{1}{n}$ при $t \in A_1$. Множество $T = \{B_t : t \in A_1\}$ имеет в $\text{exr} K_2$ предельную точку B (здесь через $\text{exr} K_2$ обозначено пространство всех непустых замкнутых подмножеств в K_2 с метрикой Хаусдорфа). Ясно, что $\text{diam} B \geq \frac{1}{n}$. Возьмем в B две различные точки p_1, p_2 и их окрестности Op_1, Op_2 в K_2 с непересекающимися замыканиями. Поскольку B – предельная точка T , то, согласно определению метрики Хаусдорфа в $\text{exr} K_2$, множество

$$A_2 = \{t \in A_1 : B_t \cap Op_1 \neq \emptyset, B_t \cap Op_2 \neq \emptyset\}$$

бесконечно. Рассмотрим в X два непересекающихся замкнутых подмножества $F_i = f_2^{-1}(Cl(Op_i)), i = 1, 2$, где $Cl(Op_i)$ – замыкание множества Op_i . По построению имеем: $A_2 \subset f_1(F_1) \cap f_1(F_2)$, что противоречит вполне замкнутости отображения f_1 .

Итак доказано, что почти все слои отображения f_1 содержатся в слоях отображения f_2 . Аналогично, почти все слои f_2 содержатся в слоях f_1 .

Покажем теперь, что любой слой f_2 содержит не более чем счетное множество нетривиальных слоев f_1 . Предположим, что это не так и некоторый слой $f_2^{-1}(s), s \in K_2$, содержит несчетное множество слоев $f_1^{-1}(t)$, где $|f_1^{-1}(t)| > 1$,

$t \in E \subset K_1, |E| > \omega_0$. Рассмотрим отображение

$$f_1|_{f_2^{-1}(s)}: f_2^{-1}(s) \rightarrow f_1(f_2^{-1}(s)).$$

Это отображение вполне замкнуто (см. [2], предложение 1.14, с.128), и все его слои $f_1^{-1}(t)$ нетривиальны при $t \in E \subset f_1(f_2^{-1}(s)), |E| > \omega_0$, откуда следует ([2], предложение 3.10, с. 137) неметризуемость $f_2^{-1}(s)$. Получено противоречие.

Таким образом, доказано, что:

1) множество слоев отображения f_1 , которые не содержатся в слоях f_2 , не более чем счетно;

2) множество слоев отображения f_2 , не содержащихся в слоях f_1 , также не более чем счетно, и каждый такой слой содержит не более чем счетное множество нетривиальных слоев f_1 .

Следовательно, объединенное множество нетривиальных слоев f_1 , упомянутых в 1) и 2), не более чем счетно. Остальные нетривиальные слои f_1 содержатся в слоях f_2 , которые, в свою очередь, содержатся в слоях f_1 . Таким образом, все эти слои f_1 совпадают со слоями f_2 . Поменяв местами f_1 и f_2 , получим аналогичное утверждение о нетривиальных слоях f_2 . Теорема доказана.

Замечание. В формулировке теоремы речь идет только о нетривиальных слоях отображений, и это ограничение принципиально. Пусть $f: X \rightarrow K$ – допустимое вполне замкнутое отображение F -компакта X спектральной высоты 3, и пусть точка $t_0 \in K$ такова, что $|f^{-1}(t_0)| = 2^{\aleph_0}$. Рассмотрим следующее разбиение компакта X :

$$R = \{f^{-1}(t) : t \in K, t \neq t_0\} \cup \{\{x\} : x \in f^{-1}(t_0)\}.$$

Фактор-пространство X/R по этому разбиению является метрическим компактом, а факторное проектирование $\pi: X \rightarrow X/R$ есть допустимое вполне замкнутое отображение (см. [2], с. 124). Но при этом все (тривиальные) слои $\pi^{-1}(\{x\}), x \in f^{-1}(t_0)$, отличны от слоев отображения f .

В заключение приведем пример двух допустимых вполне замкнутых отображений $f_i: X \rightarrow K_i, i = 1, 2$, F -компакта X спектральной высоты 3, для которых

$$\left| \{f_1^{-1}(t) : |f_1^{-1}(t)| > 1, t \in K_1\} \Delta \{f_2^{-1}(t) : |f_2^{-1}(t)| > 1, t \in K_2\} \right| = \omega_0.$$

В качестве X возьмем компакт «две стрелки» D , и пусть $f_1: D \rightarrow I$ – стандартное проектирование D на отрезок. Возьмем любое счетное замкнутое подмножество $F \subset I$ и определим $g: I \rightarrow K$ как факторное отображение отрезка I , единственным нетривиальным слоем которого является F . Легко проверить, что композиция $f_2 = g \circ f_1$ является вполне замкнутым отображением, все слои которого метризуемы. При этом для отображений f_1 и f_2 выполняется равенство (1).

В связи с доказанной теоремой можно сформулировать общий вопрос о «степени однозначности» разложения F -компакта спектральной высоты α в F -спектр длины α .

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А.В. О наследственной нормальности F -бикомпактов // Математические заметки. 1986. Т. 39. Вып. 4. С. 606–611.
2. Федорчук В.В. Вполне замкнутые отображения и их приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2003. Т. 9. Вып. 4. С. 105–235.

Статья поступила 20.11.2017 г.

Gul'ko S.P., Ivanov A.V. (2017) ON FULLY CLOSED MAPPINGS OF FEDORCHUK COMPACTA. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 5–8

DOI 10.17223/19988621/50/1

An F -compactum or a Fedorchuk compactum is a compact Hausdorff topological space that admits a decomposition into a special fully ordered inverse spectrum with fully closed neighboring projections. F -compacta of spectral height 3 are exactly nonmetrizable compacta that admit a fully closed mapping onto a metric compactum with metrizable fibers.

In this paper, it is proved that such a fully closed mapping for an F -compactum X of spectral height 3 is defined almost uniquely. Namely, nontrivial fibers of any two fully closed mapping of X into metric compacts with metrizable inverse images of points coincide everywhere, with a possible exception of a countable family of elements.

Examples of F -compacta of spectral height 3 are, for example, Aleksandrov's "two arrows" and the lexicographic square of the segment. It follows from the main result of this paper that almost all non-trivial layers of any admissible fully closed mapping are colons that are glued together under the standard projection of D onto the segment. Similarly, almost all nontrivial fibers of any admissible fully closed mapping necessarily coincide with the "vertical segments" of the lexicographic square.

Keywords: Fedorchuk compactum, inverse spectra, fully closed mapping.

GUL'KO Sergey Porfiryevich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: gulko@math.tsu.ru

IVANOV Aleksandr Bladimirovich (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Applied Mathematics of Karelian Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, Russian Federation)
E-mail: alvliyanov@krc.karelia.ru

REFERENCES

1. Ivanov A.V. (1986) Hereditary normality of F -bicompacta. *Mathematical Notes*. 39(4). pp. 332–334.
2. Fedorchuk V.V. (2006) Fully closed mappings and their applications. *Journal of Mathematical Sciences*. 136(5). pp. 4201–4292.

УДК 519.642.4

DOI 10.17223/19988621/50/2

Д.Ю. Иванов

**О РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
КОЛЛОКАЦИОННЫМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Предлагается разновидность коллокационного метода граничных элементов с кубической скоростью сходимости, позволяющего получить решения начально-краевых задач с граничными условиями первого, второго и третьего рода для уравнения $\partial_t u = a^2 \Delta_2 u - pu$ с постоянными $a, p > 0$ в плоской пространственной области при нулевом начальном условии. Для того чтобы иметь возможность доказать сходимость метода с указанной скоростью, аппроксимация интегралов на сингулярных и околосингулярных граничных элементах осуществляется на основе аналитического интегрирования по расстоянию между точками границы. Такая аппроксимация практически и теоретически осуществима для любой аналитически заданной границы класса C^5 .

Ключевые слова: *граничное интегральное уравнение, метод граничных элементов, сингулярные граничные элементы, нестационарная теплопроводность, коллокация, оператор, аппроксимация, устойчивость.*

В настоящей работе предлагается полностью обоснованный коллокационный метод граничных элементов (КМГЭ) [1, с. 21], позволяющий получить численные решения внутренних и внешних начально-краевых задач (НКЗ) с граничными условиями первого, второго и третьего рода для уравнения $\partial_t u = a^2 \Delta_2 u - pu$ с постоянными $a, p > 0$ в плоской пространственной области при нулевом начальном условии. Решения ищутся в виде потенциала двойного слоя для задачи Дирихле и в виде потенциала простого слоя для задач Неймана и Робина с неизвестными функциями плотности, определяемыми из граничных интегральных уравнений (ГИУ) второго рода. Ранее обоснование коллокационных схем для решения ГИУ второго рода, возникающих в задачах нестационарной теплопроводности, выполнялось в работах [2–4]. В этих работах исследовалась задача Неймана и решение находилось в виде потенциала простого слоя. В работах [2, 4] доказательство сходимости метода было сделано на границах класса гладкости C^∞ , а в работе [3] – на негладких поверхностях, удовлетворяющих условию типа Липшица. В работе [4] разработана методика численного решения ГИУ с сингулярной правой частью на основе соответствующей замены переменной. Обоснование КМГЭ для плоской задачи Дирихле дано в работе [5], при этом используется ГИУ первого рода и решение ищется в виде потенциала простого слоя.

Во всех перечисленных работах, а также других работах, посвященных обоснованию КМГЭ, вопрос аппроксимации интегралов на пространственно-временных граничных элементах (ГЭ), которые образуются в результате кусочно-полиномиальной интерполяции функции плотности, считается чисто вычисли-

тельным и выносится за рамки доказательства сходимости методов, которое предполагает точное вычисление таких интегралов. При этом, как правило, в первую очередь осуществляется аналитическое интегрирование по временной переменной τ (при $p = 0$ это возможно). Затем выполняется интегрирование по длине дуги s (в плоском случае), причем в случае интегрального оператора двойного слоя интегралы вычисляются с помощью простых квадратурных формул Гаусса (ПКФГ) [1, с. 79; 4]. В случае интегрального оператора простого слоя на сингулярных ГЭ выделяется логарифмическая особенность, которая для простых геометрий интегрируется аналитически, а все остальные интегралы по s также вычисляются с помощью ПКФГ [5; 1, с. 172] (сингулярными называются ГЭ, содержащие точку с парой значений $\tau = 0$, $r = 0$; r – расстояние от граничной точки, в которой вычисляется интеграл как функция от параметра, до текущей граничной точки интегрирования). При таком подходе не учитывается неограниченное возрастание производных подынтегральной функции на определенной части около-сингулярных ГЭ при измельчении сетки, а также неограниченность таких производных на сингулярных ГЭ в случае интегрального оператора двойного слоя, что не позволяет в принципе применять ПКФГ без снижения порядка аппроксимации схемы в целом. Вместе с тем применение ПКФГ дает хорошие результаты, если точки, в которых вычисляются интегралы на ГЭ как функции от параметра, расположены на границе между ГЭ.

Не имея возможности ни обосновать применение ПКФГ теоретически, ни опровергнуть практически, автор предлагает для вычисления интегралов по длине дуги s на сингулярных и околосингулярных ГЭ аппроксимацию третьего порядка относительно шага по длине дуги, использующую осуществимое для любого аналитически заданного контура точное интегрирование по расстоянию r между точками границы. При таком интегрировании роль весовых функций играют функции переменной r , порожденные фундаментальным решением уравнения теплопроводности, а остальная часть подынтегральной функции аппроксимируется с помощью квадратичной интерполяции по r . Так вычисляются интегралы на сингулярных ГЭ, а также на околосингулярных ГЭ в некоторой фиксированной по длине дуги области, прилегающей к сингулярному ГЭ, а на остальных ГЭ интегралы по s вычисляются с помощью ПКФГ. Первоначальное интегрирование по τ проводится аналогично: множитель $e^{-p\tau}$ аппроксимируется с помощью кусочно-квадратичной интерполяции, и тогда интегралы вычисляются точно. Стоит отметить, что здесь при решении ГИУ не осуществляется кусочно-полиномиальная интерполяция функции плотности по времени, как это делается обычно в КМГЭ, а выполняется кусочно-квадратичная интерполяция временной C_0 -полугруппы, через которую выражаются ядра интегральных операторов. В целом получена схема с кубической скоростью сходимости относительно шагов по времени и длине дуги. Доказана сходимость в равномерной операторной топологии как сеточных операторов, аппроксимирующих разрешающие операторы ГИУ, так и сеточных функционалов, определяющих приближенное решение НКЗ в любой точке пространственно-временной области. Доказана устойчивость приближенных решений ГИУ и НКЗ к возмущениям граничных функций. Полученные результаты справедливы для границы с гладкостью C^5 . Приведены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие кубическую сходимость приближенных решений всех трех НКЗ в круговой пространственной области.

В заключение отметим, что в данном КМГЭ используется равномерная временная сетка. Благодаря этому разрешающие ГИУ сеточные операторы экономно вычисляются, так как имеют вид полиномов, образованных степенями оператора правого сдвига на временной сетке. Матричные коэффициенты таких полиномов рекуррентно находятся с помощью матричных коэффициентов прямого сеточного оператора ГИУ, имеющего аналогичный вид.

Предварительные замечания

Пусть $\overline{\Omega^+}$ – плоская открытая ограниченная односвязная область, и $\Omega^- \equiv \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega^+}$ ($\mathbf{R} \equiv (-\infty, +\infty)$). Кроме того, пусть $\partial\Omega$, граница области Ω^+ , является кривой класса гладкости C^2 , если не оговорено особо. Рассмотрим четыре краевые задачи (внутренние и внешние при $i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} a^2 \Delta_2 u_i^\pm - p u_i^\pm &= \mathbf{B} u_i^\pm \quad (\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega^\pm), \\ u_1^\pm &= w_1^\pm \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega), \quad \partial_n u_2^\pm - \eta u_2^\pm = w_2^\pm \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_i^\pm(\mathbf{x})$ и $w_i^\pm(\mathbf{x})$ – векторные функции со значениями в пространстве $L_2 \equiv L_2(I_T)$ ($I_T \equiv [0, T]$), заданные на множествах $\Omega^\pm$ и $\partial\Omega$ соответственно (все вводимые здесь пространства функций считаем комплексными); $\mathbf{n}$ – нормаль к кривой $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, направленная внутрь области Ω^+ ; $p > 0$, $\Delta_2 \equiv \partial_{x_1 x_1}^2 + \partial_{x_2 x_2}^2$ (непрерывность и дифференцируемость векторных функций предполагается здесь в норме пространства их значений, в данном случае – L_2), $a > 0$ – коэффициент теплопроводности, $\eta \geq 0$ – коэффициент теплообмена на боковой поверхности цилиндра (p, a, η – постоянные); $\mathbf{B}$ – замкнутый оператор в L_2 : $(\mathbf{B}f)(t) = f'(t)$, заданный на множестве $D(\mathbf{B})$ абсолютно непрерывных на промежутке I_T функций $f(t) \in L_2$, таких, что $f(0) = 0$. Заметим, что в настоящей работе рассматриваются только линейные пространства и операторы.

Пусть $C(\Omega')$ и $C^k(\Omega')$ – пространства непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых на некотором множестве $\Omega' \subset \mathbf{R}^2$ векторных функций со значениями в L_2 . Авторами [6, 7] доказана однозначная разрешимость задач (1) в классе $C(\overline{\Omega^\pm}) \cap C^2(\Omega^\pm)$ при любых $w_i^\pm \in C(\partial\Omega)$. Решения имеют вид векторных потенциалов – криволинейных интегралов первого рода:

$$u_1^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_1(\mathbf{x}) v_1^\pm, \quad u_2^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_0(\mathbf{x}) v_2^\pm \quad (\mathbf{x} \in \Omega^\pm), \quad (2a)$$

где функции $v_i^\pm \in C(\partial\Omega)$ находятся из соответствующих ГИУ:

$$(\mathbf{G}_i^\pm v_i^\pm)(\mathbf{x}) = w_i^\pm(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad i = 1, 2); \quad \mathbf{G}_1^\pm \equiv \pm 2^{-1} + \mathbf{G}_1, \quad \mathbf{G}_2^\pm \equiv \mp 2^{-1} + \mathbf{G}_2 - \eta \mathbf{G}_0; \quad (2b)$$

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{x})f = (\mathbf{G}_i f)(\mathbf{x}) \equiv \int_{\partial\Omega} \mathbf{K}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') ds' \quad (f \in C(\partial\Omega), \quad i = \overline{0, 2}),$$

$\mathbf{K}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{x}')$ – ограниченные операторы в пространстве L_2 , определяемые равенствами:

$$\begin{aligned}
K_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}')f &\equiv \int_{I_T} g_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau) e^{-p\tau} U(\tau) f d\tau \quad (f \in L_2), \quad g_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau) \equiv a_0(r, \tau), \\
g_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \tau) &\equiv a_i(r, \tau) b_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (i = 1, 2), \quad a_0(r, \tau) \equiv a(r, \tau), \\
a_1(r, \tau) &\equiv a_2(r, \tau) \equiv -r \partial_r a(r, \tau), \quad b_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \partial_{n_i} \ln r^{-1}.
\end{aligned}$$

Здесь $a(r, \tau) \equiv (4\pi\tau)^{-1} \exp[-r^2/(4a^2\tau)]$, $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$; $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$ — нормали к кривой $\partial\Omega$, проходящие через точки $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}$ соответственно и направленные внутрь области Ω^+ ; дифференцирования ∂_{n_1} и ∂_{n_2} осуществляются соответственно по точкам $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}$. Операторы $U(\tau)$ образуют C_0 -полугруппу правых сдвигов, порождаемую оператором B : $(U(\tau)f)(t) = f(t - \tau)$ при $\tau \leq t$, $(U(\tau)f)(t) = 0$ при $\tau > t$, $Bf = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau^{-1}(f - U(\tau)f)$ ($f \in D(B)$). Заметим, что $\|U(\tau)\| = 1$ при $\tau < T$, $U(\tau) = O$ при $\tau \geq T$ (O — нулевой оператор).

Введем в рассмотрение параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \tilde{x}_1(s)$, $x_2 = \tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{\mathbf{x}}(s) \equiv (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$, причем $s > 0$, если дуга откладывается по часовой стрелке, и $s < 0$, если против. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$, периодические с периодом $2S$ (S — половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $I_S \equiv [-S, S]$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^k$, если функции $\tilde{x}_i(s)$ ($i = 1, 2$) имеют непрерывные производные на замкнутом множестве $\overline{I_S}$ до порядка k включительно, причем $\tilde{x}_i^{(l)}(-S+0) = \tilde{x}_i^{(l)}(S-0)$ ($l = \overline{1, k}$).

Введем в пространстве $C(\partial\Omega)$ норму: $\|f\|_{C(\partial\Omega)} \equiv \max_{x \in \partial\Omega} \|f(\mathbf{x})\|_{L_2}$. Обозначим через $C^k(\partial\Omega)$ ($k \in \mathbf{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$, $C^0(\partial\Omega) \equiv C(\partial\Omega)$) банаховы пространства, состоящие из функций $f \in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные на множестве $\partial\Omega$ производные $f^{(l)}$: $f^{(l)}(s) \equiv d^l f(\tilde{\mathbf{x}}(s))/ds^l$ ($s \in \overline{I_S}$, $l = \overline{1, k}$), с нормой $\|f\|_{C^k(\partial\Omega)} = \max_{l=0, k} \|f^{(l)}\|_{C(\partial\Omega)}$.

Обозначим через H^n ($n \in \mathbf{N}$) гильбертово пространство функций $f \in L_2$: $B^m f \in L_2$ ($m = \overline{1, n}$), с нормой $\|f\|_{H^n} \equiv \left[\sum_{m=0}^n \|B^m f\|_{L_2}^2 \right]^{1/2}$ ($H^0 \equiv L_2$). Введем в рассмотрение банаховы пространства $C_n^k(\partial\Omega)$ ($k \in \mathbf{Z}_+ \equiv \{0, 1, \dots\}$, $n \in \mathbf{N}$, $C_0^k(\partial\Omega) \equiv C^k(\partial\Omega)$), состоящие из элементов $f \in C^k(\partial\Omega)$, таких, что $f(\mathbf{x}) \in H^n$ при $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ и $B^m f \in C^k(\partial\Omega)$ ($m = \overline{1, n}$), с нормой $\|f\|_{C_n^k(\partial\Omega)} \equiv \max_{l=0, k, s \in I_S} \|f^{(l)}(s)\|_{H^n}$.

Будем рассматривать также банаховы пространства $C_{n,m}^k(\partial\Omega) \equiv C_n^k(\partial\Omega) \cap C_{n+m}(\partial\Omega)$ с нормой $\|f\|_{C_{n,m}^k(\partial\Omega)} \equiv \|f\|_{C_n^k(\partial\Omega)} + \|f\|_{C_{n+m}(\partial\Omega)}$ ($k, n \in \mathbf{Z}_+$, $m \in \mathbf{N}$, $C_{n,0}^k(\partial\Omega) \equiv C_n^k(\partial\Omega)$).

Условимся оператор A , отображающий банахово пространство B в банахово пространство C , обозначать как $A [B \rightarrow C]$, а если $C = B$, то $A [B]$. В силу теорем 2 и 3 [8] имеет место утверждение:

Теорема 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $G_i^\pm [C_{n,m}^k(\partial\Omega)]$ всюду определены, ограничены и ограниченно обратимы ($k, m, n \in \mathbf{Z}_+$).

Введем в рассмотрение банахово пространство $C(\Xi)$ непрерывных на множестве $\Xi \equiv \partial\Omega \times I_T$ скалярных функций $f(x, t)$ с нормой $\|f\|_{C(\Xi)} \equiv \max_{(x,t) \in \Xi} |f(x, t)|$.

Введем также в рассмотрение банаховы пространства $C^k(\Xi)$ и $C_n(\Xi)$ ($k \in \mathbf{Z}_+$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $C^0(\Xi) = C_0(\Xi) \equiv C(\Xi)$) функций $f \in C(\Xi)$, имеющих непрерывные на множестве $\overline{I_S} \times I_T$ скалярные производные $(\partial_s^l f)(s, t) \equiv \partial_s^l f(\tilde{x}(s), t)$ ($l = \overline{0, k}$) и $\partial_t^m f(\tilde{x}, t)$ ($m = \overline{0, n}$) соответственно с нормами $\|f\|_{C^k(\Xi)} \equiv \max_{l=0, k} \|\partial_s^l f\|_{C(\Xi)}$ и $\|f\|_{C_n(\Xi)} \equiv \max_{m=0, n} \|\partial_t^m f\|_{C(\Xi)}$. Наконец, будем рассматривать банаховы пространства $C_n^k(\Xi) \equiv C^k(\Xi) \cap C_n(\Xi)$ с нормой $\|f\|_{C_n^k(\Xi)} \equiv \|f\|_{C^k(\Xi)} + \|f\|_{C_n(\Xi)}$ ($k, n \in \mathbf{Z}_+$). С учетом соотношений

$$|f(x, t)| = \left| \int_0^t (Bf)(x, t') dt' \right| \leq \left[t \int_0^t |(Bf)(x, t')|^2 dt' \right]^{1/2} \leq \sqrt{T} \|f\|_{C_1(\partial\Omega)}$$

$$((x, t) \in \partial\Omega \times I_T, f \in C_1(\partial\Omega)), \quad (3a)$$

имеем следующее:

$$C_{1,n}^k(\partial\Omega) \subset C_n^k(\Xi), \quad \|f\|_{C_n^k(\Xi)} \leq \sqrt{T} \|f\|_{C_{1,n}^k(\partial\Omega)} \quad (f \in C_{1,n}^k(\partial\Omega); k, n \in \mathbf{Z}_+). \quad (3b)$$

Пусть s, s' – значения параметра, соответствующие точкам $x, x' \in \partial\Omega$. Введем обозначение: $\sigma \equiv s' - s$. На множестве $\partial\Omega$ зададим функцию $\rho(s, s') : \rho = r$, если $\sigma \geq 0$; $\rho = -r$, если $\sigma < 0$. Введем в рассмотрение функции $\psi_i(s, s')$ ($i = \overline{0, 3}$), заданные на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ при $s' \neq s$ равенствами $\psi_i \equiv \varphi_i / \sigma^2$ ($i = \overline{0, 2}$) и $\psi_3 \equiv \varphi_3 / \sigma$, где

$$\begin{aligned} \varphi_0(s, s') &\equiv r^2 = [x_1(s') - x_1(s)]^2 + [x_2(s') - x_2(s)]^2, \\ \varphi_1(s, s') &\equiv r \partial_{n_1} r = x_2'(s') [x_1(s') - x_1(s)] - x_1'(s') [x_2(s') - x_2(s)], \\ \varphi_2(s, s') &\equiv r \partial_{n_2} r = x_2'(s) [x_1(s) - x_1(s')] - x_1'(s) [x_2(s) - x_2(s')], \\ \varphi_3(s, s') &\equiv r \partial_{s'} r = x_1'(s') [x_1(s') - x_1(s)] + x_2'(s') [x_2(s') - x_2(s)], \end{aligned}$$

а при $s' = s$ равенствами

$$\psi_0(s, s) = \psi_3(s, s) \equiv 1, \quad \psi_1(s, s) = \psi_2(s, s) \equiv 2^{-1} [x_1''(s) x_2'(s) - x_2''(s) x_1'(s)].$$

Кроме того, введем в рассмотрение функции

$$\delta(s, s') \equiv (\partial_{s'} \rho)^{-1} = \sqrt{\psi_0} / \psi_3, \quad b_i(s, s') \equiv b_i(\tilde{x}(s), \tilde{x}(s')) = -\psi_i / \psi_0 \quad (i = 1, 2).$$

Лемма [8]. Пусть I – замкнутый интервал на вещественной оси. Предположим, что некоторая вещественная функция $f(z, \zeta)$ имеет на множестве $I \times I$ непрерывные производные $\partial_z^i \partial_\zeta^j f$ ($i = \overline{0, m}, j = \overline{0, m'}$), причем $m < m'$ и $\partial_\zeta^j f|_{\zeta=z} = 0$ при $z \in I, j = \overline{0, q-1}$, где $q = m' - m$. Тогда функция $h(z, \zeta)$, заданная при $\zeta \neq z$ равенством $h(z, \zeta) \equiv f/(\zeta - z)^q$, а при $\zeta = z$ равенством $h(z, z) \equiv \partial_\zeta^q f|_{\zeta=z}/q!$, имеет на множестве $I \times I$ непрерывные производные $\partial_z^i \partial_\zeta^j h$ при $i = \overline{0, m-j}, j = \overline{0, m}$.

Теорема 2. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда существуют непрерывные на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ производные $\partial_s^j b_i$ ($j = \overline{0, n}, i = 1, 2$). Кроме того, для любого $M > 1$ существует $\Sigma > 0$, такое, что при $(s, \sigma) \in \overline{I_S} \times I_\Sigma$ ($I_\Sigma \equiv [-\Sigma, \Sigma]$) функция δ ограничена: $1 \leq \delta \leq M$, и существуют непрерывные производные $\partial_s^j \delta$ ($j = \overline{0, n}$).

Доказательство. Можно убедиться, что условия леммы выполняются, если $f = \varphi_3$, $m = n+1$, $q = 1$, $z = s'$, $\zeta = s$. Тогда согласно лемме существуют непрерывные на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ производные $\partial_s^j \psi_3$ ($j = \overline{0, n+1}$). Аналогично в теореме 1 [8] доказано, что существуют непрерывные на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ производные $\partial_s^j \psi_i$ ($j = \overline{0, n}, i = \overline{0, 2}$). Поскольку $\delta(s, s) = 1$ и $|\rho(s, s'_1) - \rho(s, s'_2)| \leq |s'_1 - s'_2|$, то отсюда следует, что для любого $M > 1$ существует $\Sigma > 0$, такое, что $1 \leq \delta \leq M$ при $(s, \sigma) \in \overline{I_S} \times I_\Sigma$. Контур $\partial\Omega$ не имеет точек самопересечения, поэтому существует положительная константа $c_r \equiv \min_{(s, s') \in \overline{I_S} \times \overline{I_S}} \psi_0(s, s')$. Учитывая последние два обстоятельства, имеем оценку $\psi_3 \geq \sqrt{c_r}/M$ при $(s, \sigma) \in \overline{I_S} \times I_\Sigma$ и получаем утверждения теоремы на основе представлений

$$\partial_s^j \delta = F_j / \left(\psi_3^{j+1} \psi_0^{j-1/2} \right) \left((s, \sigma) \in \overline{I_S} \times I_\Sigma \right),$$

$$\partial_s^j b_i = G_{i,j} / \psi_0^{j+1} \left((s, s') \in \overline{I_S} \times \overline{I_S}, i = 1, 2 \right),$$

где функции F_j и $G_{i,j}$ суть линейные комбинации произведений некоторых степеней производных $\partial_s^k \psi_3$, $\partial_s^l \psi_0$ ($k, l = \overline{0, j}$) и $\partial_s^k \psi_i$, $\partial_s^l \psi_0$ ($k, l = \overline{0, j}$) соответственно. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда функция $\rho_s(\sigma) \equiv \rho(s, s + \sigma)$ при любых фиксированных $s \in I_S$ и $M > 1$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+2} отображает множество I_Σ на множество $\rho_s(I_\Sigma) \equiv [\rho_s(-\Sigma), \rho_s(\Sigma)]$. Функции $\tilde{b}_0(s, \rho) \equiv \delta(s, s + \sigma_s(\rho))$, $\tilde{b}_i(s, \rho) \equiv \delta(s, s + \sigma_s(\rho)) b_i(s, s + \sigma_s(\rho))$ ($s \in I_S, i = 1, 2$), где $\sigma_s(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_s(\sigma)$, имеют непрерывные на множестве $\overline{I_S} \times \rho_s(I_\Sigma)$ производные $\partial_\rho^j \tilde{b}_i$ ($j = \overline{0, n}, i = \overline{0, 2}$).

Обозначим через $\Lambda_m(z)$ и $\tilde{\Lambda}_m(z)$ ($z \in [a, b]$, $m = \overline{0, 2}$) квадратичные функции – интерполяционные многочлены Лагранжа, определенные на промежутке $[a, b]$:

$$\Lambda_m(z) \equiv \prod_{j=0 (j \neq m)}^2 \frac{z - z_j}{z_m - z_j}, \quad z_m \equiv \bar{z} + q_m h_z;$$

$$\tilde{\Lambda}_m(z) \equiv \prod_{j=0 (j \neq m)}^2 \frac{z - \tilde{z}_j}{\tilde{z}_m - \tilde{z}_j}, \quad \tilde{z}_m \equiv \bar{z} + \tilde{q}_m h_z \quad (m = \overline{0, 2}).$$

Здесь $h_z \equiv 2^{-1}(b-a)$, $\bar{z} \equiv 2^{-1}(a+b)$; $q_0 \equiv -1$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$; $\tilde{q}_0 \equiv -\sqrt{3}/2$, $\tilde{q}_1 \equiv 0$, $\tilde{q}_2 \equiv \sqrt{3}/2$ [9, с. 92]. Пусть $f(z)$ – трижды непрерывно дифференцируемая на промежутке $[a, b]$ функция со значениями в произвольном банаховом пространстве B . Тогда для функций

$$\tilde{f}_1(z) \equiv \sum_{m=0}^2 f(z_m) \Lambda_m(z) \quad \text{и} \quad \tilde{f}_2(z) \equiv \sum_{m=0}^2 f(\tilde{z}_m) \tilde{\Lambda}_m(z) \quad (z \in [a, b])$$

имеют место оценки:

$$\|\tilde{f}_1 - f\|_{C[a, b]} \leq c_\omega \|f^{(3)}\|_{C[a, b]} h_z^3, \quad c_\omega \equiv 6^{-1} \max_{z \in [-1; 1]} |z(z^2 - 1)| = 2\sqrt{3}/9; \quad (4a)$$

$$\|\tilde{f}_2 - f\|_{C[a, b]} \leq \tilde{c}_\omega \|f^{(3)}\|_{C[a, b]} h_z^3, \quad \tilde{c}_\omega \equiv 6^{-1} \max_{z \in [-1; 1]} |z(z^2 - 3/4)| = 4^{-1}, \quad (4b)$$

где $\|f\|_{C[a, b]} \equiv \max_{z \in [a, b]} \|f(z)\|_B$. При $z \in [a, b]$ имеют место неравенства: $|\Lambda_m(z)| \leq 1$ ($m = \overline{0, 2}$), $|\tilde{\Lambda}_m(z)| \leq 3^{-1}(2 + \sqrt{3})$ ($m = 0, 2$), $|\tilde{\Lambda}_1(z)| \leq 1$, вследствие которых имеем оценки

$$\|\tilde{f}_1(z)\|_B \leq c_\Lambda \max_{m=0,2} \|f(z_m)\|_B \quad (z \in [a, b]), \quad c_\Lambda \equiv 3; \quad (5a)$$

$$\|\tilde{f}_2(z)\|_B \leq \tilde{c}_\Lambda \max_{m=0,2} \|f(\tilde{z}_m)\|_B \quad (z \in [a, b]), \quad \tilde{c}_\Lambda \equiv 3^{-1}(7 + 2\sqrt{3}). \quad (5b)$$

Справедливы следующие формулы для первых и вторых производных функции $\tilde{f}_1(z)$, полученные с использованием формулы Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла [10, с. 146]:

$$\tilde{f}_1^{(1)}(z) = \frac{2z - (z_2 + z_1)}{(z_0 - z_2)(z_0 - z_1)} \int_{z_1}^{z_0} f^{(1)}(\zeta) d\zeta + \frac{2z - (z_0 + z_1)}{(z_2 - z_0)(z_2 - z_1)} \int_{z_1}^{z_2} f^{(1)}(\zeta) d\zeta,$$

$$\tilde{f}_1^{(2)}(z) = \frac{1}{(z_0 - z_2)(z_0 - z_1)} \int_{z_1}^{z_0} f^{(2)}(\zeta)(z_0 - \zeta) d\zeta + \frac{1}{(z_2 - z_0)(z_2 - z_1)} \int_{z_1}^{z_2} f^{(2)}(\zeta)(z_2 - \zeta) d\zeta.$$

Аналогичные формулы имеют место и для функции $\tilde{f}_2(z)$. Вследствие этих формул имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_1^{(1)}(z)\|_B &\leq c'_\Lambda \|f^{(1)}\|_{C[a, b]}, \quad \|\tilde{f}_2^{(1)}(z)\|_B \leq \tilde{c}'_\Lambda \|f^{(1)}\|_{C[a, b]} \quad (z \in [a, b]), \\ c'_\Lambda &\equiv 3, \quad \tilde{c}'_\Lambda \equiv (4 + \sqrt{3})/\sqrt{3}; \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_1^{(2)}(z)\|_B &\leq c_\Lambda'' \|f^{(2)}\|_{C[a,b]}, \quad \|\tilde{f}_2^{(2)}(z)\|_B \leq \tilde{c}_\Lambda'' \|f^{(2)}\|_{C[a,b]} \quad (z \in [a,b]), \\ c_\Lambda'' &= \tilde{c}_\Lambda'' \equiv 2^{-1}. \end{aligned} \quad (6b)$$

Сеточные аппроксимации граничных интегральных уравнений и решений краевых задач

При $(s, s') \in I_S \times I_S$ и $\tau > 0$ имеем оценки для скалярных функций $g_i(s, s', \tau) \equiv g_i(\tilde{x}(s), \tilde{x}(s'), \tau)$ ($i = \overline{0, 2}$):

$$\begin{aligned} |g_0(s, s', \tau)| &\leq (4\pi)^{-1} c_0 \tau^{-1} \exp[-c_r \gamma^2 / (4a^2)], \\ |g_i(s, s', \tau)| &\leq (8\pi a^2)^{-1} c_i \tau^{-1} \gamma^2 \exp[-c_r \gamma^2 / (4a^2)] \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (7)$$

где $c_0 \equiv 1$, $c_i \equiv \max_{(s, s') \in I_S \times I_S} |b_i(s, s')|$ ($i = 1, 2$), $\gamma \equiv \sigma / \sqrt{\tau}$.

С учетом оценок (7) операторы $G_i [C(\partial\Omega)]$ могут быть представлены в виде

$$G_i f = \int_{I_T} A_i(\tau) e^{-p\tau} U(\tau) f d\tau \quad (f \in C(\partial\Omega), i = \overline{0, 2}).$$

Значения функций $A_i(\tau)$ ($\tau > 0$) – ограниченные операторы в пространстве $C(\partial\Omega)$:

$$(A_i(\tau) f)(s) \equiv \int_{I_S} g_i(s, s', \tau) f(\tilde{x}(s')) ds' \quad (s \in I_S, f \in C(\partial\Omega), i = \overline{0, 2}).$$

При $\tau > 0$ функции $A_i(\tau) [C(\partial\Omega)]$ непрерывны в равномерной операторной топологии, причем справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|A_i(\tau)\| &\leq \tilde{c}_i c_i \tau^{-1/2} \quad (i = \overline{0, 2}), \quad \tilde{c}_0 \equiv (4\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-c_r \gamma^2 / (4a^2)] d\gamma, \\ \tilde{c}_1 &= \tilde{c}_2 \equiv (8\pi a^2)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2 \exp[-c_r \gamma^2 / (4a^2)] d\gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть $N/2 \in \mathbf{N}$, $\tilde{N}/2 \in \mathbf{N}$. Введем в рассмотрение операторы $\tilde{G}_i [C(\partial\Omega)]$:

$$\tilde{G}_i f \equiv \int_{I_T} \tilde{A}_i(\tau) \tilde{U}(\tau) f d\tau \quad (f \in C(\partial\Omega), i = \overline{0, 2}), \quad \tilde{A}_i(\tau) \equiv A_i(\tau) e(\tau);$$

$$\tilde{U}(\tau) \equiv \sum_{m=0}^2 U(\tau_{2n+1} + q_m h_\tau) \Lambda_m(\tau) \quad (\tau \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}], n = \overline{0, N/2-1}),$$

$$e(\tau) \equiv \sum_{m=0}^2 \exp[-p(\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}+1} + \tilde{q}_m \tilde{h}_\tau)] \tilde{\Lambda}_m(\tau) \quad (\tau \in [\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}}, \tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}+2}]),$$

$$\tilde{n} = \overline{0, \tilde{N}/2-1}, \quad n = \overline{0, N-1}.$$

Здесь $\tau_n \equiv n h_\tau$ ($n \in \mathbf{Z}_+$), $h_\tau \equiv T/N$; $\tilde{\tau}_n \equiv n \tilde{h}_\tau$ ($n \in \mathbf{Z}_+$), $\tilde{h}_\tau \equiv h_\tau / \tilde{N}$. Учитывая, что $\|U(\tau)\| = 1$ и $|e^{-p\tau}| \leq 1$ ($\tau \geq 0$), вследствие оценок (5) имеем оценки $\|\tilde{U}(\tau)\| \leq c_\Lambda$ и

$|e(\tau)| \leq \tilde{c}_\Lambda$. Поэтому в силу оценок (8) операторы $\tilde{G}_i [C(\partial\Omega)]$ всюду определены и ограничены равномерно по N .

Используя оценки (4) и равенства $B^n U(\tau)f = U(\tau)B^n f$, имеющие место при $f \in D(B^n)$ ($n \in \mathbb{N}$), получаем оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}(\tau)f - U(\tau)f\|_{C_n(\partial\Omega)} &\leq c_\omega \|B^3 f\|_{C_n(\partial\Omega)} h_\tau^3 \quad (f \in C_{n+3}(\partial\Omega), n \in \mathbb{Z}_+), \\ |e(\tau) - e^{-p\tau}| &\leq (p^3/\tilde{N}^3) \tilde{c}_\omega h_\tau^3. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу оценок (5а), (8) и (9) при $f \in C_{n+3}(\partial\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) имеем оценку

$$\|\tilde{G}_i f - G_i f\|_{C_n(\partial\Omega)} \leq 2\tilde{c}_i c_i \sqrt{T} \left[c_\omega \|B^3 f\|_{C_n(\partial\Omega)} + c_\Lambda \tilde{c}_\omega (p^3/\tilde{N}^3) \|f\|_{C_n(\partial\Omega)} \right] h_\tau^3,$$

из которой вытекает следующее утверждение:

Теорема 3. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\tilde{G}_i [C_{n+3}(\partial\Omega) \rightarrow C_n(\partial\Omega)]$ ($N \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{0,2}$) сходятся при $N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $G_i [C_{n+3}(\partial\Omega) \rightarrow C_n(\partial\Omega)]$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3)$.

На основании теоремы 3 осуществляется дискретизация ГИУ (2b) по параметру полугруппы τ , позволяющая, как будет показано далее, получить в явном виде приближенный обратный оператор ГИУ.

Пусть $L/2 \in \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение пространства H_L^n векторных сеточных функций $f \in H_L^n$ со значениями $f_l \in H^n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$, $H_L \equiv H_L^0$), заданными в узлах $x_l \equiv \tilde{x}(s_l)$ ($s_l \equiv lh_s$, $l = \overline{-L, L-1}$, $h_s \equiv S/L$). Условимся считать, когда это будет необходимо, что $x_{l+2L} = x_l$. Определим в H_L^n норму: $\|f\|_{H_L^n} = \max_{-L \leq l \leq L-1} \|f_l\|_{H^n}$.

Зададим проекционные операторы $P_L [C(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$: $(P_L f)_l = f(x_l)$. Очевидно, $\|P_L\| = 1$. Кроме того, введем в рассмотрение операторы $\tilde{P}_L [H_L \rightarrow C(\partial\Omega)]$:

$$(\tilde{P}_L f)(s) \equiv \sum_{m=0}^2 f_{2l+m} \Lambda_m(s) \quad (f \in H_L, s \in [s_{2l}, s_{2l+2}], l = \overline{-L/2, L/2-1}).$$

В силу оценки (5а) имеем $\|\tilde{P}_L\| \leq c_\Lambda$. В силу оценки (4а) и замкнутости оператора B имеют место оценки

$$\|\tilde{P}_L P_L f - f\|_{C_n(\partial\Omega)} \leq c_\omega \|f^{(3)}\|_{C_n(\partial\Omega)} h_s^3 \quad (f \in C_n^3(\partial\Omega), n \in \mathbb{Z}_+). \quad (10)$$

Определение. Будем говорить, что ограниченные операторы $A_n [C \rightarrow D]$ ($n \in \mathbb{N}$) сходятся при $n \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим ограниченным операторам $B_n [C \rightarrow D]$, если $\|A_n f - B_n f\|_D \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно в шаре $\|f\|_C \leq 1$.

С помощью равенств: $\check{G}_i f \equiv \int_{I_T} P_L \check{A}_i(\tau) \check{U}(\tau) \check{P}_L f d\tau$ ($f \in H_L$, $i = \overline{0, 2}$), зададим операторы $\check{G}_i$ [H_L]. В силу оценок (8), (10), $\|\check{U}(\tau)\| \leq c_\Lambda$, $|e(\tau)| \leq \check{c}_\Lambda$ и $\|P_L\| \leq 1$ и замкнутости оператора B имеем оценки

$$\|\check{G}_i P_L f - P_L \check{G}_i f\|_{H_L^n} \leq 2c_\Lambda \check{c}_\Lambda \check{c}_i c_\omega \sqrt{T} \|f^{(3)}\|_{C_n(\partial\Omega)} h_s^3 \quad (f \in C_n^3(\partial\Omega), n \in \mathbf{Z}_+),$$

позволяющие сделать следующее утверждение, в соответствии с которым осуществляется дискретизация ГИУ (2b) по длине дуги.

Теорема 4. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\check{G}_i P_L$ [$C_n^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L^n$] ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $i = \overline{0, 2}$) сходятся при $L \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $P_L \check{G}_i$ [$C_n^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L^n$] равномерно по N с порядком аппроксимации $O(h_s^3)$.

Операторы $\check{G}_i$ ($i = \overline{0, 2}$) могут быть представлены в виде конечных сумм:

$$\check{G}_i = \sum_{n=0}^{N-1} \check{G}_{i,n} U(\tau_n), \quad (11)$$

$$\check{G}_{i,0} \equiv \int_{\tau_0}^{\tau_2} \check{A}_i(\tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau) d\tau, \quad \check{G}_{i,2n+1} \equiv \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \check{A}_i(\tau) e(\tau) \Lambda_1(\tau) d\tau \quad (n = \overline{0, N/2-1}),$$

$$\check{G}_{i,2n} \equiv \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \check{A}_i(\tau) e(\tau) \Lambda_2(\tau) d\tau + \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \check{A}_i(\tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau) d\tau \quad (n = \overline{1, N/2-1}).$$

Операторы $\check{A}_i(\tau) \equiv P_L A_i(\tau) \check{P}_L$ [H_L] при любом фиксированном $\tau > 0$ имеют вид скалярных квадратных матриц порядка $2L$:

$$(\check{A}_i(\tau) f)_k = \sum_{l=-L}^{L-1} \hat{g}_{i,k,l}(\tau) f_l \quad (k = \overline{-L, L-1}, f \in H_L);$$

$$\hat{g}_{i,k,2l+1}(\tau) \equiv \int_{s_{2l-k}}^{s_{2l+2-k}} \check{g}_{i,1,k}(\sigma, \tau) d\sigma, \quad \hat{g}_{i,k,2l}(\tau) \equiv \int_{s_{2l-2-k}}^{s_{2l-k}} \check{g}_{i,2,k}(\sigma, \tau) d\sigma + \int_{s_{2l-k}}^{s_{2l+2-k}} \check{g}_{i,0,k}(\sigma, \tau) d\sigma$$

$$(k = \overline{-L, L-1}, l = \overline{-L/2, L/2-1}).$$

Здесь $\check{g}_{i,m,k}(\sigma, \tau) \equiv g_i(s_k, s_k + \sigma, \tau) \check{\Lambda}_m(s_k + \sigma)$, где $\check{\Lambda}_m(s)$ – кусочно-квадратичная функция, определенная на множестве $\overline{I_S}$: $\check{\Lambda}_m(s) = \Lambda_m(s)$ ($s \in [s_{2l}, s_{2l+2}]$, $l = \overline{-L/2, L/2-1}$).

Все интегралы $J_{i,m,k,l}(\tau) \equiv \int_{s_l}^{s_{l+1}} \check{g}_{i,m,k}(\sigma, \tau) d\sigma$ ($l = \overline{-L/2, L/2-1}$) при произвольном $M > 1$ можно представить в виде суммы интегралов $J'_{i,m,k,l}(\tau) + J''_{i,m,k,l}(\tau)$: $J'_{i,m,k,l}(\tau) \equiv \int_{s'_l}^{s'_{l+1}} \check{g}_{i,m,k}(\sigma, \tau) d\sigma$, $J''_{i,m,k,l}(\tau) \equiv \int_{s''_l}^{s''_{l+1}} \check{g}_{i,m,k}(\sigma, \tau) d\sigma$, где $s'_l \equiv \min\{s_l, \Sigma\}$,

$s_l'' \equiv \max \{s_l, \Sigma\}$, если $s_l \geq 0$; $s_l' \equiv \max \{s_l, -\Sigma\}$, $s_l'' \equiv \min \{s_l, -\Sigma\}$, если $s_l < 0$, а число $\Sigma > 0$ выбрано в соответствии с теоремой 2.

В интегралах $J'_{i,m,k,l}(\tau)$ на основании следствия 1 сделаем замену переменной $\sigma = \sigma_s(\rho)$:

$$J'_{i,m,k,l}(\tau) = \int_{\rho_k(s_l')}^{\rho_k(s_{l+1}')} a_i(\rho, \tau) \tilde{b}_{i,m,k}(\rho) d\rho \quad (i, m = \overline{0, 2}, k, l = \overline{-L, L-1}),$$

$$\tilde{b}_{i,m,k}(\rho) \equiv \tilde{b}_i(s_k, \rho) \tilde{\Lambda}_m(s_k + \sigma_k(\rho)),$$

$\rho_k(\sigma) \equiv \rho(s_k, s_k + \sigma)$, $\sigma_k(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_k(\sigma)$. Введем в рассмотрение соответствующие интегралы, аппроксимирующие $J'_{i,m,k,l}(\tau)$:

$$\tilde{J}'_{i,m,k,l}(\tau) \equiv \int_{\rho_k(s_l')}^{\rho_k(s_{l+1}')} a_i(\rho, \tau) \hat{b}_{i,m,k}(\rho) d\rho \quad (i, m = \overline{0, 2}, k, l = \overline{-L, L-1}),$$

$$\hat{b}_{i,m,k}(\rho) \equiv \sum_{m'=0}^2 \tilde{b}_{i,m,k}(\bar{\rho}_{k,l} + \tilde{q}_{m'} h_{k,l}) \tilde{\Lambda}_{m'}(\rho) \quad (\rho \in [\rho_k(s_l'), \rho_k(s_{l+1}')]),$$

$$h_{k,l} \equiv 2^{-1} [\rho_k(s_{l+1}') - \rho_k(s_l')], \quad \bar{\rho}_{k,l} \equiv 2^{-1} [\rho_k(s_l') + \rho_k(s_{l+1}')].$$

Интегралы $J''_{i,m,k,l}(\tau)$ аппроксимируем с помощью ПКФГ с γ узлами:

$$\tilde{J}''_{i,m,k,l}(\tau) \equiv 2^{-1} h_s \sum_{j=1}^{\gamma} \hat{w}_j \tilde{g}_{i,m,k}(\bar{s}_l + 2^{-1} h_s z_j, \tau), \quad \bar{s}_l \equiv 2^{-1} (s_l + s_{l+1}) \quad (i, m = \overline{0, 2},$$

$$k, l = \overline{-L, L-1}),$$

при этом z_j – корни многочлена $P_\gamma(z) \equiv [\gamma!/(2\gamma)!] (d^\gamma/dz^\gamma) (z^2 - 1)^\gamma$ на промежутке $[-1; 1]$ [9, с. 258]; для весовых коэффициентов $\hat{w}_j$ выполняется равенство $\sum_{j=1}^{\gamma} \hat{w}_j = 2$ ($w_j > 0$) [9, с. 255].

Операторы $\tilde{G}_i$, $\tilde{G}_{i,n}$ ($n = \overline{0, N-1}$), в которых интегралы $J_{i,m,k,l}(\tau)$ заменены выражениями $\tilde{J}'_{i,m,k,l}(\tau)$ и $\tilde{J}''_{i,m,k,l}(\tau)$, обозначим через $\hat{G}'_i$, $\hat{G}'_{i,n}$ и $\hat{G}''_i$, $\hat{G}''_{i,n}$ соответственно. В силу следствия 1, теоремы 2 и неравенства $r \geq c_r \Sigma$, имеющего место при $|\sigma| \geq \Sigma$, при указанной гладкости границы могут быть определены константы

$$\check{c}_{i,j} \equiv \max_{(s,\rho) \in I_S \times \rho_S(I_\Sigma)} |\partial_\rho^j \tilde{b}_i(s, \rho)| \quad (\partial\Omega \in C^{n+2}), \quad \check{c}_{i,j}'' \equiv \sup_{s \in \bar{I}_S, \sigma \geq \Sigma, \tau > 0} |\partial_\sigma^j g_i(s, s + \sigma, \tau)|$$

$$(\partial\Omega \in C^n) \quad (j = \overline{0, n}, i = \overline{0, 2}).$$

Учитывая неравенства (4b), (6) и $h_{k,l} \leq 2^{-1} h_s$, при условиях $\partial\Omega \in C^5$ и $f \in C^2(\partial\Omega)$ при любых $i = \overline{0, 2}$, $k = \overline{-L, L-1}$, $l = \overline{-L/2, L/2-1}$ и $\tau > 0$ имеем оценку

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{m=0}^2 \sum_{l'=0}^1 (\tilde{J}'_{i,m,k,2l+l'-k}(\tau) - J'_{i,m,k,2l+l'-k}(\tau)) f_{2l+m} \right\|_{L_2} \leq \\
& \leq 8^{-1} h_s^3 \tilde{c}_\omega \max_{\rho \in \rho_k([s'_{2l-k}, s'_{2l+2-k}])} \left\| \partial_\rho^3 [\tilde{b}_i(s_k, \rho) \tilde{f}(s_k + \sigma_k(\rho))] \right\|_{L_2} \int_{\rho_k(s'_{2l-k})}^{\rho_k(s'_{2l+2-k})} a_i(\rho, \tau) d\rho \leq \\
& \hat{c}'_i h_s^3 \|f\|_{C^2(\partial\Omega)} \int_{\rho_k(s'_{2l-k})}^{\rho_k(s'_{2l+2-k})} a_i(\rho, \tau) d\rho,
\end{aligned}$$

$$\hat{c}'_i \equiv 8^{-1} \tilde{c}_\omega \left[\tilde{c}'_{i,3} c_\Lambda + (3\tilde{c}'_{i,2} \tilde{c}'_{0,0} + 3\tilde{c}'_{i,1} \tilde{c}'_{0,1} + \tilde{c}'_{i,0} \tilde{c}'_{0,2}) c'_\Lambda + 3(\tilde{c}'_{i,1} \tilde{c}'_{0,0} + \tilde{c}'_{i,0} \tilde{c}'_{0,1} \tilde{c}'_{0,0}) c''_\Lambda \right], \quad (12a)$$

где $f_l = f(x_l)$, $\tilde{f} \equiv \tilde{P}_L P_L f$. Если $\partial\Omega \in C^{2\gamma}$, то при любых $i = \overline{0, 2}$, $k, l = \overline{-L, L-1}$ и $\tau > 0$ имеем оценку

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{m=0}^2 \sum_{l'=0}^1 (\tilde{J}''_{i,m,k,2l+l'-k}(\tau) - J''_{i,m,k,2l+l'-k}(\tau)) f_{2l+m} \right\|_{L_2} \leq \hat{c}''_i h_s^{2\gamma+1} \|f\|_{C^2(\partial\Omega)}, \\
& \hat{c}''_i \equiv \frac{(\gamma!)^4 [\tilde{c}''_{i,2\gamma} c_\Lambda + 2\gamma \tilde{c}''_{i,2\gamma-1} c'_\Lambda + \gamma(2\gamma-1) \tilde{c}''_{i,2\gamma-2} c''_\Lambda]}{[(2\gamma)!]^3 (2\gamma+1)} \quad (12b)
\end{aligned}$$

[9, с. 259]. В силу оценок (12) и замкнутости оператора B имеем при условии $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ оценку аппроксимирующих свойств операторов $\hat{G}_i \equiv \hat{G}'_i + \hat{G}''_i$ [H^n_L] ($i = \overline{0, 2}$)

$$\begin{aligned}
& \|\hat{G}_i P_L f - \tilde{G}_i P_L f\|_{H^n_L} \leq 2c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda (\sqrt{T} \tilde{c}_i \hat{c}'_i h_s^3 + ST \hat{c}''_i h_s^{2\gamma}) \|f\|_{C^n_2(\partial\Omega)} \\
& (f \in C^n_2(\partial\Omega), n \in \mathbf{Z}_+),
\end{aligned}$$

из которой вытекает следующее утверждение:

Теорема 5. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{G}_i P_L$ [$C^n_2(\partial\Omega) \rightarrow H^n_L$] ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $i = \overline{0, 2}$) сходятся при $L \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\tilde{G}_i P_L$ [$C^n_2(\partial\Omega) \rightarrow H^n_L$] равномерно по N с порядком аппроксимации $O(h_s^3)$.

Заметим, что при вычислении операторов $\hat{G}'_i$, соответствующих сингулярным и околосингулярным ГЭ, интегрирование по межточечному расстоянию r и параметру полугруппы τ осуществляется аналитически с помощью формулы Ньютона – Лейбница, при этом первообразная выражается через интегральную показательную функцию $Ei(x)$ и функцию Лапласа $\Phi(x)$. Значения $\sigma_k(\bar{\rho}_{k,l} + \tilde{q}_m h_{k,l})$ ($l = \overline{-L, L-1}$, $m = \overline{0, 2}$) в общем случае могут быть получены как численные решения уравнений $\rho_k(\sigma) = \bar{\rho}_{k,l} + \tilde{q}_m h_{k,l}$. Производные $x'_i(s)$ ($i = \overline{1, 2}$) вычисляются аналитически, если известны аналитические выражения функций $x_i(s)$.

На основании теорем 3–5 делаем следующий вывод:

Следствие 2. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{G}_i P_L$ $[C_{n,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L^n]$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $i = \overline{0,2}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $P_L G_i$ $[C_{n,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L^n]$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Введем в рассмотрение операторы в пространстве H_L : $\hat{G}_1^\pm \equiv \pm 2^{-1} + \hat{G}_1$, $\hat{G}_2^\pm \equiv \mp 2^{-1} + \hat{G}_2 - \eta \hat{G}_0$, $\hat{G}_{1,0}^\pm \equiv \pm 2^{-1} + \hat{G}_{1,0}$, $\hat{G}_{2,0}^\pm \equiv \mp 2^{-1} + \hat{G}_{2,0}$, $\hat{G}_{1,n} \equiv \hat{G}_{1,n}$, $\hat{G}_{2,n} \equiv \hat{G}_{2,n} - \eta \hat{G}_{0,n}$ ($n = \overline{0, N-1}$). Используя неравенство $\sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b-a}$, справедливое при $0 \leq a \leq b$, и оценки $|\Lambda_m(\tau)| \leq 1$, получаем оценки

$$\sum_{n=n'}^{n''} \|\hat{G}_{i,n}\| \leq E_i((n''+1-n')h_\tau) \quad (0 \leq n' \leq n'' \leq N-1; i = 1, 2); \quad (13)$$

$$E_1(\tau) \equiv 4c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda \left(\sqrt{2} \tilde{c}_1 \tilde{c}_\Lambda \tilde{c}'_{1,0} \sqrt{\tau} + 2S \tilde{c}''_{1,0} \tau \right),$$

$$E_2(\tau) \equiv 4c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda \left[\sqrt{2} \tilde{c}_\Lambda (\tilde{c}_2 \tilde{c}'_{2,0} + \eta \tilde{c}_0 \tilde{c}'_{0,0}) \sqrt{\tau} + 2S (\tilde{c}''_{2,0} + \eta \tilde{c}''_{0,0}) \tau \right].$$

Существует $N_{\min} \in \mathbf{N}$, такое, что при $N \in \mathbf{N}_{\min} \equiv \{N_{\min}, N_{\min} + 1, \dots\}$ выполняются условия

$$E_i(h_\tau) < 2^{-1} \quad (i = 1, 2). \quad (14)$$

С учетом (13) при $N \in \mathbf{N}_{\min}$ получаем оценки $\|\hat{G}_i\| < 2^{-1}$ ($i = 1, 2$), вследствие которых в силу теоремы Банаха операторы $\hat{G}_{i,0}^\pm$ ($i = 1, 2$) ограниченно обратимы. Тогда операторы $\hat{G}_i^\pm$ ($i = 1, 2$) также ограниченно обратимы. А именно, учитывая, что $U(\tau) = \mathbf{O}$ при $\tau \geq T$, на основании равенств (11) имеем формулы

$$\begin{aligned} (\hat{G}_i^\pm)^{-1} &= \sum_{n=0}^{N-1} \hat{G}_{i,n}^{\pm(-1)} U(\tau_n); \\ \hat{G}_{i,0}^{\pm(-1)} &\equiv (\hat{G}_{i,0}^\pm)^{-1}, \quad \hat{G}_{i,n}^{\pm(-1)} \equiv - \left(\sum_{m=1}^n \hat{G}_{i,m-1}^{\pm(-1)} \hat{G}_{i,n+1-m} \right) \hat{G}_{i,0}^{\pm(-1)} \quad (n = \overline{1, N-1}). \end{aligned} \quad (15)$$

Теорема 6. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $(\hat{G}_i^\pm)^{-1} [H_L]$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}_{\min}$, $i = 1, 2$) ограничены в совокупности.

Доказательство. Имеем $N = KN_{\min} + N'K + N''$, где $K \in \mathbf{N}$, $N', N'' \in \mathbf{Z}_+$: $N'K + N'' < N_{\min}$, $N'' < K$. Пусть $h'_\tau \equiv Kh_\tau$. Тогда оператор $\hat{G}_i^\pm$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \hat{G}_i^\pm &= \hat{G}_{i,0}^{\pm} + \sum_{n=1}^{2N_{\min}-1} \hat{G}'_{i,n} U(nh'_\tau); \quad \hat{G}_{i,0}^{\pm} \equiv \mp (-1)^i 2^{-1} + \hat{G}'_{i,0}, \quad \hat{G}'_{i,n} = \sum_{k=0}^{K-1} \hat{G}_{i,nK+k} U(\tau_k) \\ &\quad (n = \overline{0, N_{\min} + N' - 1}); \end{aligned}$$

$$\hat{G}'_{i, N_{\min} + N'} \equiv \sum_{k=0}^{N''-1} \hat{G}_{i, (N_{\min} + N')K + k} U(\tau_k), \text{ если } N'' > 0; \quad \hat{G}'_{i, N_{\min} + N'} \equiv \mathbf{O}, \text{ если } N'' = 0;$$

$$\hat{G}'_{i,n} \equiv \mathbf{O} \quad (n = \overline{N_{\min} + N' + 1, 2N_{\min} - 1}).$$

При $h_\tau = h_\tau'' \equiv T/N_{\min}$ выполняются неравенства (14). Поэтому с учетом оценок (13) получаем

$$\|\hat{G}'_{i,n}\| \leq E_i(h'_\tau) \leq E_i(h''_\tau) < 2^{-1} \quad (n = \overline{0, 2N_{\min} - 1}). \quad (16)$$

В силу (16) (при $n = 0$) существуют операторы $(\hat{G}'_{i,0})^{-1}$, и операторы $(\hat{G}_i^\pm)^{-1}$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} (\hat{G}_i^\pm)^{-1} &= \sum_{n=0}^{2N_{\min}-1} \hat{G}'_{i,n}{}^{\pm(-1)} U(nh'_\tau), \quad \hat{G}'_{i,0}{}^{\pm(-1)} \equiv (\hat{G}'_{i,0})^{\pm(-1)}, \\ \hat{G}'_{i,n}{}^{\pm(-1)} &\equiv - \left(\sum_{m=1}^n \hat{G}'_{i,m-1}{}^{\pm(-1)} \hat{G}'_{i,n+1-m} \right) \hat{G}'_{i,0}{}^{\pm(-1)} \quad (n = \overline{1, 2N_{\min} - 1}). \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом оценок (16) и равенств (17) получаем оценки

$$\begin{aligned} \|\hat{G}'_{i,0}{}^{\pm(-1)}\| &\leq (2^{-1} - E_i(h'_\tau))^{-1}, \quad \|\hat{G}'_{i,n}{}^{\pm(-1)}\| \leq 2^{-n+1} E_i(h'_\tau) (2^{-1} - E_i(h'_\tau))^{-n-1} \\ &\quad n = \overline{1, 2N_{\min} - 1}, \end{aligned}$$

следствием которых является равномерная по L и N ограниченность операторов $(\hat{G}_i^\pm)^{-1}$:

$$\|(\hat{G}_i^\pm)^{-1}\| \leq \|\hat{G}'_{i,0}{}^{\pm(-1)}\| + \sum_{n=1}^{2N_{\min}-1} \|\hat{G}'_{i,n}{}^{\pm(-1)}\| \leq 2^{-2N_{\min}+1} (2^{-1} - E_i(h'_\tau))^{-2N_{\min}} \leq C_i$$

(здесь $C_i \equiv 2^{-2N_{\min}+1} (2^{-1} - E_i(h'_\tau))^{-2N_{\min}}$ – константы, не зависящие от L и N).

Теорема доказана.

В силу равенств $\mathbf{B}^n U(\tau) \mathbf{f} = U(\tau) \mathbf{B}^n \mathbf{f}$ ($\mathbf{f} \in D(\mathbf{B}^n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$) и (15) имеем равенства $\mathbf{B}^n (\hat{G}_i^\pm)^{-1} \mathbf{f} = (\hat{G}_i^\pm)^{-1} \mathbf{B}^n \mathbf{f}$ ($\mathbf{f} \in H_L^n$). На основании теорем 1, 6 и следствия 2 делаем следующий вывод:

Следствие 3. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $(\hat{G}_i^\pm)^{-1} \mathbf{P}_L$ [$C_{n,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L^n$] ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}_{\min}$, $n \in \mathbf{Z}_+$; $i = 1, 2$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\mathbf{P}_L (\mathbf{G}_i^\pm)^{-1}$ [$C_{n,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L^n$] с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Введем в рассмотрение $2L \times N$ -мерные пространства $C_{L,N}$ сеточных функций $\mathbf{f} \in C_{L,N}$ со скалярными значениями $f_{l,j}$, заданными в узлах $(\mathbf{x}_l, t_j)$ ($l = \overline{-L, L-1}$, $t_j \equiv jh_\tau$, $j = \overline{0, N}$). Определим в $C_{L,N}$ норму

$$\|\mathbf{f}\|_{C_{L,N}} = \max_{l=-L, L-1, j=0, N} |f_{l,j}|.$$

Зададим проекционные операторы $P_N [H_L^1 \rightarrow C_{L,N}]$: $(P_N f)_{l,j} = f_l(t_j)$ ($l = \overline{-L, L-1}$, $j = \overline{0, N}$). В силу соотношений (3а) имеем $\|P_N\| \leq \sqrt{T}$. Зададим операторы правого сдвига $U_n [C_{L,N}]$ ($n = \overline{0, N-1}$): $(U_n f)_{l,j} \equiv f_{l,j-n}$, если $j \geq n$; $(U_n f)_{l,j} = 0$, если $j < n$. Зададим операторы $\ddot{G}_i^{\pm(-1)} [C_{L,N}]$: $\ddot{G}_i^{\pm(-1)} \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \hat{G}_{i,n}^{\pm(-1)} U_n$.

Заметим, что имеют место равенства $U_n P_N f = P_N U(\tau_n) f$ ($f \in H_L^1$, $n = \overline{0, N-1}$). Следовательно, имеют место равенства $\ddot{G}_i^{\pm(-1)} P_N f = P_N (\hat{G}_i^{\pm})^{-1} f$ ($f \in H_L^1$), позволяющие осуществить дискретизацию решения ГИУ (2b) по временной переменной $t \in I_T$. В силу следствия 3 и оценки $\|P_N\| \leq \sqrt{T}$ справедливо следующее утверждение:

Следствие 4. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\ddot{G}_i^{\pm(-1)} P_N P_L [C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C_{L,N}]$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}_{\min}$; $i = 1, 2$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $P_N P_L (\hat{G}_i^{\pm})^{-1} [C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C_{L,N}]$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Следствие 4 позволяет получить сеточные решения ГИУ (2b). Благодаря ограниченности совокупности операторов $\ddot{G}_i^{\pm(-1)} P_N P_L [C_1(\partial\Omega) \rightarrow C_{L,N}]$: $\|\ddot{G}_i^{\pm(-1)} P_N P_L\| \leq \sqrt{T} \|(\hat{G}_i^{\pm})^{-1}\|$, такие решения устойчивы к возмущениям граничной функции $w_i^{\pm}$ в норме $C_1(\partial\Omega)$.

Следствие 5. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда, если $w_i^{\pm} \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, то функции $\tilde{v}_i^{\pm}$: $\tilde{v}_i^{\pm} \equiv \ddot{G}_i^{\pm(-1)} P_N P_L w_i^{\pm}$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}_{\min}$; $i = 1, 2$), сходятся в норме $C_{L,N}$ при $L, N \rightarrow \infty$ к сеточным проекциям $P_N P_L v_i^{\pm}$ решений ГИУ: $v_i^{\pm} = (\hat{G}_i^{\pm})^{-1} w_i^{\pm}$, с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$. Кроме того, $\|\tilde{v}_i^{\pm[\delta]} - P_N P_L v_i^{\pm}\|_{C_{L,N}} \rightarrow 0$ при $L, N \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, где $\tilde{v}_i^{\pm[\delta]} \equiv \ddot{G}_i^{\pm(-1)} P_N P_L w_i^{\pm[\delta]}$, $w_i^{\pm[\delta]} \in C_1(\partial\Omega)$: $\|w_i^{\pm[\delta]} - w_i^{\pm}\|_{C_1(\partial\Omega)} \leq \delta$.

Пусть $C(I_T)$ – банахово пространство непрерывных на промежутке I_T скалярных функций $f(t)$ с нормой $\|f\|_{C(I_T)} = \max_{t \in I_T} |f(t)|$. Введем в рассмотрение пространства C_L векторных сеточных функций $f \in C_L$ со значениями $f_l \in C(I_T)$, заданными в узлах x_l ($l = \overline{-L, L-1}$). Определим в C_L норму: $\|f\|_{C_L} = \max_{-L \leq l \leq L-1} \|f_l\|_{C(I_T)}$. Зададим операторы $\tilde{P}_N [C_{L,N} \rightarrow C_L]$:

$$(\tilde{P}_N f)_l(t) \equiv \sum_{m=0}^2 f_{l,2j+m} \Lambda_m(t) \quad (t \in [t_{2j}, t_{2j+2}], \quad j = \overline{0, N/2-1}, \quad l = \overline{-L, L-1},$$

$$f \in C_{L,N}).$$

Операторы $P_L [C(\Xi) \rightarrow C_L]$, $P_N [C_L \rightarrow C_{L,N}]$, $\tilde{P}_N [C_{L,N} \rightarrow C_L]$, $\tilde{P}_L [C_L \rightarrow C(\Xi)]$ ограничены: $\|P_L\| = 1$, $\|P_N\| = 1$, $\|\tilde{P}_N\| \leq c_\Lambda$, $\|\tilde{P}_L\| \leq c_\Lambda$, и имеют место оценки

$$\|\tilde{P}_L \tilde{P}_N P_N P_L f - f\|_{C(\Xi)} \leq c_\omega \left(\|\partial_s^3 f\|_{C(\Xi)} h_s^3 + c_\Lambda \|\partial_t^3 f\|_{C(\Xi)} h_\tau^3 \right) \quad (f \in C_3^3(\Xi)). \quad (18)$$

Введем в рассмотрение функционалы $G_i(x, t) [C(\Xi) \rightarrow \mathbb{C}]$ и $\hat{G}_i(x, t) [C_{L,N} \rightarrow \mathbb{C}]$ ($x \in \Omega^\pm$, $t \in I_T$, $i = 0, 1$; $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел):

$$G_i(x, t)f \equiv (G_i(x)f)(t) = \int_{I_S} \int_0^t g_i(x, s', t - \tau) e^{-p(t-\tau)} f(s', \tau) d\tau ds' \quad (f \in C(\Xi)),$$

$$\hat{G}_i(x, t)f \equiv 2^{-1} h_s \sum_{l=-L}^{L-1} \sum_{j=1}^{\gamma} \hat{w}_j \int_0^t g_i(x, s_{l,j}, t - \tau) e(t - \tau) f_{L,N}(s_{l,j}, \tau) d\tau, \quad f_{L,N} \equiv \tilde{P}_L \tilde{P}_N f$$

$$(f \in C_{L,N}), \quad g_i(x, s, \tau) \equiv g_i(x, \tilde{x}(s), \tau), \quad s_{l,j} \equiv \bar{s}_l + 2^{-1} h_s z_j.$$

На основании оценок (18) при условии $\partial\Omega \in C^{2\gamma}$ получаем следующие оценки при $(x, t) \in \Omega' \times I_T$:

$$\left| \hat{G}_i(x, t) P_N P_L f - G_i(x, t) f \right| \leq 2ST (c_{i,0}' c_\omega \|f\|_{C^3(\Xi)} h_s^3 + c_{i,0}' c_\Lambda c_\omega \|f\|_{C_3(\Xi)} h_\tau^3 +$$

$$+ c_{i,0}' \tilde{c}_\omega (p^3 / \tilde{N}^3) c_\Lambda^2 \|f\|_{C(\Xi)} h_\tau^3 + \tilde{c}_i^{\Omega'} \tilde{c}_\Lambda c_\Lambda \|f\|_{C^2(\Xi)} h_s^{2\gamma}) \quad (f \in C_3^3(\Xi)),$$

$$\tilde{c}_i^{\Omega'} \equiv \frac{(\gamma!)^4 \left[c_{i,2\gamma}' c_\Lambda + 2\gamma c_{i,2\gamma-1}' c_\Lambda' + \gamma(2\gamma-1) c_{i,2\gamma-2}' c_\Lambda'' \right]}{[(2\gamma)!]^3 (2\gamma+1)},$$

$$c_{i,j}^{\Omega'} \equiv \sup_{x \in \Omega', s \in I_S, \tau > 0} \left| \partial_s^j g_i(x, s, \tau) \right| \quad (j = \overline{0, 2\gamma}). \quad (19)$$

Здесь Ω' – произвольное конечное замкнутое подмножество области $\Omega^\pm$. В силу оценок (19) справедливо утверждение:

Теорема 7. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда функционалы $\hat{G}_i(x, t) P_N P_L [C_3^3(\Xi) \rightarrow \mathbb{C}]$ сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим функционалам $G_i(x, t) [C_3^3(\Xi) \rightarrow \mathbb{C}]$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$ равномерно по $(x, t) \in \Omega' \times I_T$.

Заметим, что при вычислении функционалов $\hat{G}_i(x, t)$ интегрирование по параметру полугруппы τ осуществляется аналитически с помощью формулы Ньютона – Лейбница, при этом первообразная выражается через интегральную показательную функцию $Ei(x)$.

Используя следствие 4, теоремы 7, 1, соотношения (3b) и равномерную ограниченность на множестве $\Omega' \times I_T$ совокупности функционалов $\hat{G}_i(\mathbf{x}, t)$ $[C_{L,N} \rightarrow \mathbf{C}]$: $|\hat{G}_i(\mathbf{x}, t)| \leq 2STc_{i,0}^{\Omega'} \tilde{c}_\Lambda c_\Lambda^2$, приходим к утверждению:

Следствие 6. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда функционалы $\hat{G}_i(\mathbf{x}, t) \ddot{G}_i^{\pm(-1)} \mathbf{P}_N \mathbf{P}_L$ $[C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow \mathbf{C}]$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}_{\min}$, $i = 1, 2$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим функционалам $G_i(\mathbf{x}, t) (\mathbf{G}_i^\pm)^{-1}$ $[C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow \mathbf{C}]$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$ равномерно по $(\mathbf{x}, t) \in \Omega' \times I_T$.

Следствие 6 позволяет получить приближенные решения задач (1). Благодаря равномерной ограниченности на множестве $\Omega' \times I_T$ совокупности функционалов $\hat{G}_i(\mathbf{x}, t)$ $[C_{L,N} \rightarrow \mathbf{C}]$, а также ограниченности совокупности операторов $\ddot{G}_i^{\pm(-1)} \mathbf{P}_N \mathbf{P}_L$ $[C_1(\partial\Omega) \rightarrow C_{L,N}]$, такие решения устойчивы к возмущениям граничной функции $\mathbf{w}_i^\pm$ в норме $C_1(\partial\Omega)$. Сформулируем заключительное утверждение:

Следствие 7. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда, если $\mathbf{w}_i^\pm \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, то функции $\tilde{\mathbf{u}}_i^\pm(\mathbf{x}, t)$: $\tilde{\mathbf{u}}_i^\pm(\mathbf{x}, t) \equiv \hat{G}_i(\mathbf{x}, t) \tilde{\mathbf{v}}_i^\pm$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}_{\min}$; $i = 1, 2$), сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ к решениям соответствующих задач (1) $u_i^\pm(\mathbf{x}, t)$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$ равномерно по $(\mathbf{x}, t) \in \Omega' \times I_T$. Кроме того, $|\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm[\delta]}(\mathbf{x}, t) - u_i^\pm(\mathbf{x}, t)| \rightarrow 0$ равномерно по $(\mathbf{x}, t) \in \Omega' \times I_T$ при $L, N \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, где $\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm[\delta]}(\mathbf{x}, t) \equiv \hat{G}_i(\mathbf{x}, t) \tilde{\mathbf{v}}_i^{\pm[\delta]}$, $\mathbf{w}_i^{\pm[\delta]} \in C_1(\partial\Omega)$: $\|\mathbf{w}_i^{\pm[\delta]} - \mathbf{w}_i^\pm\|_{C_1(\partial\Omega)} \leq \delta$.

Вычислительные эксперименты

Рассмотрим численное решение внутренних задач (1) в случае, когда граница $\partial\Omega$ представляет собой окружность радиуса $R = 1$. Решения $\tilde{\mathbf{u}}_i^+(\mathbf{x}, t)$ ($i = 1, 3$) получаем согласно следствию 7. Далее через $\mathbf{u}_2$ обозначим решения $\mathbf{u}_2$ при $\eta = 0$, через $\mathbf{u}_3$ – решения $\mathbf{u}_2$ при $\eta = 1$. Вычисления проводим при $T = 1$, $a = 1$, $\tilde{N} = 2$, $\gamma = 4$, $M = 2$, $\mathbf{w}_i^+(\varphi, t) = 16t^2(1-t)^2 \sin \varphi$ ($i = \overline{1, 3}$, φ – полярный угол). «Точные» решения $\bar{\mathbf{u}}_i^+$ находим с помощью функций Грина, при этом интегрирование по временной переменной на промежутке $[0; 9 \times 10^{-7}]$ осуществляется численно с помощью ПКФГ с 12 узлами, а все остальные интегралы вычисляются аналитически с помощью формулы Ньютона – Лейбница. Оба решения $\tilde{\mathbf{u}}_i^+$, $\bar{\mathbf{u}}_i^+$ вычисляются на окружностях $\partial\Omega'$ с радиусами $R' < 1$, концентрических с окружностью $\partial\Omega$, в узлах $(\mathbf{x}'_l, t_j)$ ($l = \overline{-L, L-1}$, $t_j \equiv jh_\tau$, $j = \overline{0, N}$), причем точки $\mathbf{x}'_l$ получают из граничных точек $\mathbf{x}_l$ в результате сжимающего отображения $\partial\Omega$ на $\partial\Omega'$. Вычисления проводятся с обычной точностью (7 десятичных разрядов).

В следующей таблице представлены относительные среднеквадратичные отклонения $\delta u_i(h_\tau, h_s)$: $\delta u_i \equiv \|\Delta \mathbf{u}_i\| / \|\bar{\mathbf{u}}_i^+\|$ ($\Delta \mathbf{u}_i = \tilde{\mathbf{u}}_i^+ - \bar{\mathbf{u}}_i^+$, $\|\cdot\|$ – среднеквадратичная норма), и степени скорости сходимости v_i , вычисляемые по формуле $v_i \equiv \ln[\delta u_i(h_\tau, h_s) / \delta u_i(h_\tau/2, h_s/2)] / \ln 2$. В каждой основной ячейке представлены три значения δu_i или v_i при $R' = 0.9$, $R' = 0.5$, $R' = 0.1$ в соответствующем порядке сверху вниз.

Относительные среднеквадратичные отклонения δu_i
и степени скорости сходимости v_i

		$p = 0$			$p = \pi^2$		
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$h_\tau = 1/8$ $h_s = \pi/4$	δu_i	3.17×10^{-2}	2.39×10^{-2}	1.77×10^{-2}	4.39×10^{-2}	2.04×10^{-2}	1.76×10^{-2}
		2.24×10^{-2}	2.54×10^{-2}	2.01×10^{-2}	2.63×10^{-2}	2.89×10^{-2}	2.67×10^{-2}
		1.65×10^{-2}	2.28×10^{-2}	1.79×10^{-2}	2.34×10^{-2}	2.42×10^{-2}	2.27×10^{-2}
$h_\tau = 1/16$ $h_s = \pi/8$	δu_i	2.26×10^{-3}	1.05×10^{-3}	1.05×10^{-3}	3.40×10^{-3}	1.48×10^{-3}	1.50×10^{-3}
		8.82×10^{-4}	9.06×10^{-4}	9.19×10^{-4}	1.28×10^{-3}	1.07×10^{-3}	1.11×10^{-3}
		1.05×10^{-3}	1.06×10^{-3}	9.95×10^{-4}	1.19×10^{-3}	1.24×10^{-3}	1.29×10^{-3}
	v_i	3.81	4.51	4.08	3.69	3.78	3.55
		4.67	4.81	4.45	4.36	4.76	4.59
		3.97	4.43	4.17	4.30	4.29	4.14
$h_\tau = 1/32$ $h_s = \pi/16$	δu_i	3.60×10^{-4}	7.05×10^{-5}	1.02×10^{-4}	3.63×10^{-4}	1.34×10^{-4}	1.52×10^{-4}
		1.06×10^{-4}	6.28×10^{-5}	8.98×10^{-5}	1.23×10^{-4}	9.57×10^{-5}	1.15×10^{-4}
		1.03×10^{-4}	6.00×10^{-5}	8.60×10^{-5}	1.38×10^{-4}	8.67×10^{-5}	1.04×10^{-4}
	v_i	2.65	3.90	3.36	3.23	3.47	3.30
		3.06	3.85	3.36	3.38	3.48	3.27
		3.35	4.14	3.53	3.11	3.84	3.63
$h_\tau = 1/64$ $h_s = \pi/32$	δu_i	4.16×10^{-5}	9.20×10^{-6}	2.23×10^{-5}	4.39×10^{-5}	1.30×10^{-5}	1.63×10^{-5}
		1.53×10^{-5}	6.88×10^{-6}	1.48×10^{-5}	1.65×10^{-5}	1.13×10^{-5}	1.19×10^{-5}
		1.32×10^{-5}	6.55×10^{-6}	1.42×10^{-5}	1.79×10^{-5}	1.13×10^{-5}	1.20×10^{-5}
	v_i	3.11	2.94	2.19	3.05	3.37	3.22
		2.79	3.19	2.60	2.90	3.08	3.27
		2.96	3.20	2.60	2.95	2.94	3.12

Экспериментальные данные достаточно хорошо согласуются с теоретически: скорость сходимости для всех задач близка к кубической и почти однородна в широком диапазоне значений R' и p . Было замечено, что вычисляя интегралы $J'_{i,m,k,l}(\tau)$ ($i = 1, 2$) с помощью ПКФГ с $\gamma = 4 \div 12$ узлами, всегда получаем практически ту же точность δu_i , что и с помощью аппроксимации $\tilde{J}'_{i,m,k,l}(\tau)$.

Описанная аппроксимация интегральных операторов простого и двойного слов с помощью аналитического интегрирования по межточечному расстоянию была использована здесь для непрямого КМГЭ [1, с. 67] на основе ГИУ второго рода. Но также она может быть использована для решения плоских задач нестационарного

нарной теплопроводности с помощью прямого КМГЭ [1, с. 70, 167], в том числе на основе ГИУ первого рода [5]. Кроме того, такая аппроксимация может быть использована для решения двумерных ГИУ (2b) с операторными ядрами, выраженными через произвольную экспоненциально убывающую C_0 -полугруппу $U(\tau)$ [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
2. Onishi K. Convergence in the boundary element method for heat equation // Teaching for Robust Understanding of Mathematics. 1981. V. 17. P. 213–225.
3. Costabel M., Onishi K., Wendland W.L. A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation // Inverse and Ill-Posed Problems (H.W. Engl and C.W. Groetsch, ed.). Boston: Academic Press, 1987. P. 369–384.
4. Hongtao Y. On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation // Mathematics of Computation. 1999. V. 68. No. 226. P. 547–557.
5. Hamina M., Saranen J. On the spline collocation method for the single layer heat operator equation // Mathematics of Computation. 1994. V. 62. No. 205. P. 41–64.
6. Иванов Д.Ю. Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103.
7. Иванов Д.Ю., Дзержинский Р.И. Решение задач Робена для двумерных дифференциально-операторных уравнений, описывающих теплопроводность в прямом цилиндре // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 1. С. 15–17.
8. Иванов Д.Ю. Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6 (38). С. 33–45.
9. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: ГИФМЛ, 1962. 464 с.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 810 с.
11. Иванов Д.Ю. Вычисление операторов, разрешающих задачи теплопроводности в прямых цилиндрах, с использованием полугрупповой симметрии // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 4(22). С. 26–38.

Статья поступила 07.09.2017 г.

Ivanov D.Yu. (2017) ON SOLVING PLANE PROBLEMS OF NON-STATIONARY HEAT CONDUCTION BY THE COLLOCATION BOUNDARY ELEMENT METHOD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Toms State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 9–29

DOI 10.17223/19988621/50/2

In this paper, we propose a fully justified collocation boundary element method allowing one to obtain numerical solutions of internal and external initial-boundary value problems (IBVPs) with boundary conditions of the first, second, and third kind for the equation $\partial_t u = a^2 \Delta_2 u - pu$ with constants $a, p > 0$ in a plane spatial domain Ω (in a bounded one Ω^+ or in its exterior Ω^-) on a finite time interval $I_T \equiv [0, T]$ at a zero initial condition. The solutions are found in the form of the double-layer potential for the Dirichlet IBVP and in the form of the simple layer potential for the Neumann–Robin IBVP with unknown density functions determined from the boundary integral equations (BIEs) of the second kind.

In this paper, instead of the usual piecewise-polynomial interpolation of the density function on time variable τ , the BIEs are approximated by the piecewise-quadratic interpolation (PQI) of the C_0 -semigroup of right shifts on time. Also, on the basis of the PQI, the approximation of the multiplier $e^{-P\tau}$ in kernels of the integral operators is carried out. In addition, the PQI of density functions is performed: for the BIE, only on arc-length s ; for the potentials, on both variables s and τ . Then, the integration with respect to the variable τ on the boundary elements (BEs) is performed exactly. The integration with respect to the variable s on the BE for the potentials is performed approximately by using the Gaussian quadrature with $\gamma \geq 2$ points. For the BIE, the integration with respect to the arc-length s is carried out in two ways. On singular BEs and on nearby singular BEs, adjacent to a singular BE in some fixed arc-length region, an exact integration with respect to the variable r is carried out (r is the distance from the boundary point at which the integral is calculated as a function of parameter to the current boundary point of the integration). In this integration, functions of the variable r are taken as the weighting functions. The functions of r are generated by the fundamental solution of the heat equation and the rest of the integrand is approximated by quadratic interpolation on r . The integrals with respect to s on the remaining BEs are calculated using the Gaussian quadrature with γ points.

The cubic convergence of approximate solutions of the IBVP at any point of the set $\Omega \times I_T$ is proved under conditions $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ and $w \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$. It is also proved that such solutions are resistant to perturbations of the boundary function w in the norm of the space $C_1^0(\partial\Omega)$. Here, $C_{m,n}^k(\partial\Omega) \equiv C_m^k(\partial\Omega) \cap C_{m+n}^0(\partial\Omega)$ and $C_m^k(\partial\Omega)$ is the Banach space of k times continuously differentiable on $\partial\Omega$ vector functions with values in Sobolev's space which is the domain of definition of the operator B^m ($(Bf)(t) = f'(t)$, $f(t=0) = 0$).

In conclusion, results of the numerical experiments are presented. They confirm the cubic convergence of approximate solutions for all three IBVPs in a circular domain.

Keywords: boundary integral equation, boundary element method, singular boundary elements, non-stationary heat conduction, collocation, operator, approximation, stability.

IVANOV Dmitrii Yurievich (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russian Federation)
E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

REFERENCES

1. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984) *Boundary element techniques*. New York: Springer-Verlag. 464 p.
2. Onishi K. (1981) Convergence in the boundary element method for heat equation. *Teaching for Robust Understanding of Mathematics*. 17. pp. 213–225.
3. Costabel M., Onishi K., Wendland W.L. (1987) A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation. *Inverse and Ill-Posed Problems (H.W. Engl and C.W. Groetsch, ed.)*. Boston: Academic Press. pp. 369–384.
4. Hongtao Y. (1999) On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation. *Mathematics of Computation*. 68 (226). pp. 547–557.
5. Hamina M., Saranen J. (1994) On the spline collocation method for the single layer heat operator equation. *Mathematics of Computation*. 62 (205). pp. 41–64.
6. Ivanov D.Y. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations*. 46 (8). pp. 1104–1113. <https://doi.org/10.1134/S0012266110080045>.
7. Ivanov D.Yu., Dzerzhinskiy R.I. (2016) Reshenie zadach Robena dlya dvumernykh differential'no-operatornykh uravneniy, opisyvayushchikh teploprovodnost' v pryamom tsilindre [Solution of the Robin problems for two-dimensional differential-operator equations describ-

- ing the thermal conductivity in a straight cylinder]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Journal of the Volga Region*. 1. pp. 15–17.
8. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost' v prostranstvakh differentsiruemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integralnykh uravneniy teploprovodnosti s operatorno-polugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6. pp. 33–45. DOI 10.17223/19988621/38/4.
 9. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1962) *Metody vychisleniy* [Methods of computations]. Vol. 2. Moscow: GIFML.
 10. Fihktengol'ts G.M. (2001) *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course of differential and integral calculus]. Vol. 2. Moscow: FIZMATLIT.
 11. Ivanov D.Yu. (2014) Vychislenie operatorov, razreshayushchikh zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsilindrakh, s ispol'zovaniem polugruppovoy simmetrii [Calculation of operators solving problems of heat conduction in straight cylinders using semigroup symmetry]. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI – Proceedings of Moscow State Technical University MAMI*. 4(4). pp. 26–38.

УДК 517.977.58

DOI 10.17223/19988621/50/3

Р.К. Тагиев, В.М. Габитов

РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Рассматривается задача оптимального управления для параболического уравнения с интегральным граничным условием и управлениями в коэффициентах. Установлены оценки точности разностных аппроксимаций по состоянию и функционалу. Проведен процесс регуляризации аппроксимаций по А.Н.Тихонову.

Ключевые слова: оптимальное управление, параболическое уравнение, интегральное граничное условия, разностная аппроксимация.

Задачи оптимального управления для параболических уравнений имеют большое прикладное значение при оптимизации процессов теплофизики, диффузии, фильтрации и т.п. [1, 2]. Многие физические и биологические процессы описываются нелокальными краевыми задачами для уравнений параболического типа. Среди них особое место занимают краевые задачи с интегральными граничными условиями, и такие задачи изучены в работах [3–7] и др. Задачи оптимального управления для уравнений параболического типа с интегральным условием и управлениями в коэффициентах исследованы существенно слабее [8, 9].

Численная реализация многих методов решения задач оптимального управления практически невозможна без их конечномерных аппроксимаций. Одним из эффективных методов такой аппроксимации является разностный метод. Вопросы о сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления для параболических уравнений при классических краевых условиях и с управлениями в коэффициентах изучены в работах [10, 11] и др. Однако эти вопросы исследованы существенно слабее для задач оптимального управления параболическими уравнениями с интегральными граничными условиями [12].

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для параболического уравнения с интегральным граничным условием и управлениями в коэффициентах. Установлены оценки точности разностных аппроксимаций по состоянию и функционалу. Проведен процесс регуляризации аппроксимаций по А.Н.Тихонову.

1. Постановка задачи и ее корректность.

Пусть управляемый процесс описывается в области

$$Q_T = \{(x, t) : 0 < x < \ell, 0 < t \leq T\}$$

следующей краевой задачи для линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x, t)u = f(x, t), (x, t) \in Q_T; \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 < t \leq T; \quad (3)$$

$$k(\ell, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = \int_0^\ell H(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx + g(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

где $\varphi(x) \in W_2^1(0, \ell)$, $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, $g(t) \in W_2^1(0, T)$, $H(x) \in W_2^1(0, \ell)$ – заданные функции, $k(x, t), q(x, t)$ – управляющие функции, а $u = u(x, t) = u(x, t, v)$ – решение задачи (1) – (3), т.е. состояние процесса, соответствующее управлению v .

Введем множество допустимых управлений:

$$V = \{v = (k(x, t), q(x, t)) \in H = W_2^1(Q_T) \times L_2(Q_T) : 0 < v \leq k(x, t) \leq \mu, \left| \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} \right| \leq \mu_1, \left| \frac{\partial k(x, t)}{\partial t} \right| \leq \mu_2, |q(x, t)| \leq \mu_3 \text{ п.в. на } Q_T\}, \quad (5)$$

где $v, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$ – заданные числа.

Зададим функционал цели $J : V \rightarrow R$ равенством

$$J(v) = \int_0^T |u(x, T; v) - u_T(x)|^2 dx, \quad (6)$$

где $u_T(x) \in W_2^1(0, \ell)$ – заданная функция.

Поставим следующую задачу оптимального управления: требуется минимизировать функционал (6) на множестве V при условиях (1) – (4). Эту задачу ниже будем называть задачей (1) – (6).

Обозначения используемых в работе функциональных пространств и их норм соответствуют принятым в монографии [13, с. 23]. Ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин, от допустимых управлений и от шагов вводимых далее сеток, обозначаем через M .

Под решением краевой задачи (1) – (4), соответствующем управлению $v \in V$, будем понимать обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$. Используя результаты работ [13, с. 165; 7], можно показать, что при сделанных предположениях задача (1) – (4) имеет единственное обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ при каждом фиксированном $v \in V$ и справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq M (\|f\|_{2,Q_T} + \|\varphi\|_{2,(0,\ell)} + \|g\|_{2,(0,T)}). \quad (7)$$

Более того, обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ принадлежит также пространству $W_2^{2,1}(Q_T)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{2,Q_T}^{(2,1)} \leq M (\|f\|_{2,Q_T} + \|\varphi\|_{2,(0,\ell)}^{(1)} + \|g\|_{2,(0,T)}^{(1)}). \quad (8)$$

В работе [9] доказано, что задача (1) – (6) корректно поставлена в слабой топологии пространства H , т.е. множество оптимальных управлений задачи (1) – (6) $V_* = \{v_* \in V : J(v_*) = J_* \equiv \inf \{J(v) : v \in V\}\}$ не пусто, слабо компактно в H и любая минимизирующая последовательность $\{v_n = (k_n(x, t), q_n(x, t))\} \subset V$ функционала $J(v)$ слабо в H сходится к множеству V_* .

2. Разностная аппроксимация задачи и ее корректность

Для аппроксимаций задачи (1) – (6) и исследования сходимости разностных аппроксимаций введем следующие сетки на отрезках $[0, \ell]$, $[0, T]$ и в прямоугольнике $\bar{Q}_T$:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_h &= \{x_i = ih \in [0, \ell] : i = 0, 1, \dots, N, Nh = \ell\}, \\ \omega_h &= \bar{\omega}_h \cap (0, \ell), \quad \omega_h^+ = \bar{\omega}_h \cap (0, \ell], \quad \omega_h^- = \omega \times [0, \ell), \\ \bar{\omega}_{h*} &= \{\bar{x}_i = (i - 0.5)h : i = 1, 2, \dots, N, Nh = \ell\}, \\ \bar{\omega}_h &= \bar{\omega}_{h*} \cup \{\bar{x}_N = (N - 0.5)h\}, \\ \omega_\tau &= \{t_j = j\tau \in [0, T] : j = 1, 2, \dots, L, L\tau = T\}, \\ \bar{\omega}_\tau &= \{t_0 = 0\} \cup \omega_\tau, \quad \omega_\tau^+ = \omega_\tau \cap (0, T)\}, \\ \omega_T &= \omega_h \times \omega_\tau, \quad \bar{\omega}_T = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, \quad \omega_T^+ = \omega_h^+ \times \omega_\tau, \quad \gamma_T^{(-1)} = \{x = 0\} \times \omega_\tau, \\ \gamma_T^{(+1)} &= \{x = \ell\} \times \omega_\tau, \quad \omega_{T*} = \bar{\omega}_{h*} \times \omega_\tau.\end{aligned}$$

Пусть $\bar{h} = \bar{h}(x) = h$, если $x \in \omega_h$, и $\bar{h} = 0,5h$, если $x = 0$ или $x = \ell$. Введем следующие скалярные произведения и нормы для сеточных функции, заданных на соответствующих сетках:

$$\begin{aligned}(y, v)_{\bar{\omega}_h} &= \sum_{\bar{\omega}_h} \bar{h} y v, \quad \|y\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} = (y, y)_{\bar{\omega}_h}^{1/2}, \quad (y, v)_{\omega_h^+} = \sum_{\omega_h^+} h y v, \quad \|y\|_{L_2(\omega_h^+)} = (y, y)_{\omega_h^+}^{1/2}, \\ (y, v)_{\omega_\tau} &= \sum_{\omega_\tau} \tau y v, \quad \|y\|_{L_2(\omega_\tau)} = (y, y)_{\omega_\tau}^{1/2}, \quad (y, v)_{\bar{\omega}_T} = \sum_{\bar{\omega}_T} \tau (y, v)_{\bar{\omega}_h}, \quad \|y\|_{L_2(\bar{\omega}_T)} = (y, y)_{\bar{\omega}_T}^{1/2}, \\ (y, v)_{\omega_T^+} &= \sum_{\omega_\tau} \tau (y, v)_{\omega_h^+}, \quad \|y\|_{L_2(\omega_T^+)} = (y, y)_{\omega_T^+}^{1/2}, \\ \|y\|_{L_{2,1}(\omega_T^+)} &= \sum_{\omega_\tau} \tau \|y(x, t)\|_{L_2(\omega_h^+)}, \quad \|y\|_{L_{2,1}(\bar{\omega}_T)} = \sum_{\omega_\tau} \tau \|y(x, t)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}, \\ \|y\|_{\infty, \bar{\omega}_T} &= \max_{\bar{\omega}_T} |y(x, t)|, \quad \|y\|_{l^1, 0(\bar{\omega}_T)} = \max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|y(x, t)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \|y_{\bar{x}}\|_{L_2(\omega_T^+)}, \\ \|y\|_{L_2(\omega_{T*})}^2 &= \sum_{\omega_\tau} \tau \sum_{\bar{\omega}_{h*}} h y^2, \quad |y|_{W_2^1(\omega_{T*})}^2 = \sum_{\omega_\tau} \tau \left(\sum_{\omega_h} h y_x^2 + \sum_{\bar{\omega}_{h*}} h y_t^2 \right), \\ \|y\|_{W_2^1(\omega_{T*})} &= \left(\|y\|_{L_2(\bar{\omega}_{T*})}^2 + |y|_{W_2^1(\bar{\omega}_{T*})}^2 \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Введем также элементарные ячейки

$$\begin{aligned}e_1(x) &= \{\xi : x - 0,5h \leq \xi < x + 0,5h\}, \quad x \in \omega_h; \\ e_1(0) &= \{\xi : 0 \leq \xi < 0,5h\}, \quad e_1(\ell) = \{\xi : \ell - 0,5h \leq \xi \leq \ell\}; \\ e_2(t) &= \{\theta : t - \tau \leq \theta < t\}, \quad t \in \omega_\tau; \\ e(x, t) &= e_1(x) \times e_2(t), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_T.\end{aligned}$$

Пусть S^x , S_-^x и S_-^t – одномерные усредняющие операторы по Стеклову:

$$S^x u(x, t) = \frac{1}{h} \int_{e_1(x)} u(\xi, t) d\xi, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad S_-^x u(x, t) = \frac{1}{h} \int_{x-h}^x u(\xi, t) d\xi, \quad x \in \omega_h^+,$$

$$S_-^t u(x, t) = \frac{1}{\tau} \int_{e_2(t)} u(x, \theta) d\theta, \quad t \in \omega_\tau.$$

Кроме того, пусть $S^{tx} = S_-^t S^x$ – произведение усредняющих операторов S_-^t и S^x .

Задаче оптимального управления (1) – (5) поставим в соответствие следующую разностную аппроксимацию: минимизировать сеточный функционал

$$J_{h\tau}(v_{h\tau}) = \|y(x, T; v_{h\tau}) - u_T^h(x)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \quad (9)$$

на множестве сеточных управлений

$$V_{h\tau} = \{v_{h\tau} = (k_{h\tau}(x, t), q_{h\tau}(x, t)) \in H_{h\tau} = W_2^1(\omega_{T*}) \times L_2(\bar{\omega}_T) : 0 < v \leq k_{h\tau}(x, t) \leq \mu,$$

$$(x, t) \in \bar{\omega}_{T*}, |k_{h\tau}(x, t)| \leq \mu_1, (x, t) \in \overset{\circ}{\omega}_{h*} \times \omega_\tau, |k_{h\tau}(x, t)| \leq \mu_2, (x, t) \in \bar{\omega}_{h*} \times \overset{\circ}{\omega}_\tau, \\ |q_{h\tau}(x, t)| \leq \mu_3, (x, t) \in \bar{\omega}_T \}, \quad (10)$$

при условии, что сеточная функция $y = y(x, t) = y(x, t; v_{h\tau})$ является решением разностной краевой задачи

$$y_{\bar{x}} - (k_{h\tau}(x - 0.5h, t)y_{\bar{x}})_x + q_{h\tau}(x, t)y = f_{h\tau}(x, t), \quad (x, t) \in \omega_T; \quad (11)$$

$$y(x, 0) = \varphi_h(x), \quad x \in \bar{\omega}_h; \quad (12)$$

$$k_{h\tau}(0, 5h, t)y_x(0, t) = 0, 5h[y_{\bar{x}}(0, t) - q_{h\tau}(0, t)y(0, t) - f_{h\tau}(0, t)], \quad t \in \omega_\tau; \quad (13)$$

$$k_{h\tau}(\ell - 0.5h, t)y_{\bar{x}}(\ell, t) = \sum_{x \in \omega_h^+} hH_h(x)y_{\bar{x}}(x, t) - \\ - 0, 5h[y_{\bar{x}}(\ell, t) - q_{h\tau}(\ell, t)y(\ell, t) - f_{h\tau}(\ell, t)] + g(t), \quad t \in \omega_\tau. \quad (14)$$

Здесь

$$u_T^h(x) = S^x u_T(x), \quad \varphi_h(x) = S^x \varphi(x), \quad x \in \bar{\omega}_h;$$

$$H_h(x) = S_-^x H(x), \quad x \in \omega_h^+, \quad q_{h\tau}(x, t) = S^{xt} q(x, t);$$

$$f_{h\tau}(x, t) = S^{tx} f(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \quad g_\tau(t) = S_-^t g(t), \quad t \in \omega_\tau.$$

Разностную краевую задачу (11) – (14) представим в следующей форме:

$$y_{\bar{x}} = Ay + F_{h\tau}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_T, \quad (15)$$

$$y(x, 0) = \varphi_h(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (16)$$

где

$$Ay = \begin{cases} (k_{h\tau}(x - 0.5h, t)y_{\bar{x}})_x - q_{h\tau}(x, t)y, & (x, t) \in \omega_T, \\ 2h^{-1}k_{h\tau}(0.5h, t)y_x - q_{h\tau}(x, t)y, & (x, t) \in \gamma_T^{(-1)}, \\ -2h^{-1}k_{h\tau}(x - 0.5h, t)y_{\bar{x}} - q_{h\tau}(x, t)y + 2h^{-1} \sum_{\omega_h^+} hH_h(x)y_{\bar{x}}(x, t), & (x, t) \in \gamma_T^{(+1)}; \end{cases} \quad (17)$$

$$F_{h\tau}(x, t) = \begin{cases} f_{h\tau}(x, t), & (x, t) \in \omega_T \cup \gamma_T^{(-1)}, \\ f_{h\tau}(x, t) + 2h^{-1}g(t), & (x, t) \in \gamma_T^{(+1)}. \end{cases} \quad (18)$$

Будем предполагать, что шаг τ по переменной t удовлетворяет условию

$$\tau < \tau_0 = \frac{v^3 \ell}{4 \|H\|_{2,(0,\ell)}^2 (4 \|H\|_{2,(0,\ell)}^2 + v^2) (2 + v^{-1/2})^2}. \quad (19)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия, принятые в п.1, и неравенство (19). Тогда задача (11) – (14) однозначно разрешима для каждого $u_{h\tau}(x, t) \in V_{h\tau}$ и имеет место априорная оценка

$$\begin{aligned} & \|y(x, t; u_{h\tau})\|_{l^{1,0}_{2,(\bar{\omega}_T)}} + \sqrt{\tau} \|y_{\bar{t}}(x, t; u_{h\tau})\|_{L_2(\bar{\omega}_T)} \leq \\ & \leq M \left[\|\phi_h\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \|f_{h\tau}\|_{L_{2,1}(\bar{\omega}_T)} + \|g_\tau\|_{L_2(\omega_\tau)} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Доказательство. Умножим уравнение (15) скалярно $(\cdot)_{\bar{\omega}_h}$ на $y_{\bar{t}}(x, t'; u_{h\tau})$ и просуммируем полученное равенство по t' от $t' = \tau$ до $t' = t$, где $t \in \omega_\tau$ – некоторая точка сетки ω_τ . Затем, используя формулы суммирования по частям [14, с. 52] и тождество $y_{\bar{t}} y = 0, 5 \left(y^2 \right)_{\bar{t}} + 0, 5 \tau y_{\bar{t}}^2$, придем к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|y(x, t)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \tau \sum_{t'=\tau}^t h \sum_{x \in \bar{\omega}_h} k_h(x - 0.5h, t) y_{\bar{x}}^2(x, t') + \\ & + \frac{1}{2} \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{t}}(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \tau \sum_{t'=\tau}^t (q_{h\tau}(x, t'), y^2(x, t'))_{\bar{\omega}_h} = \\ & = \frac{1}{2} \|y(x, 0)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \tau \sum_{t'=\tau}^t (f_{h\tau}(x, t'), y(x, t'))_{\bar{\omega}_h} + \\ & + \tau \sum_{t'=\tau}^t (H_h(x), y_{\bar{x}}(x, t'))_{\omega_h^+} y(\ell, t') + \tau \sum_{t'=\tau}^t g_\tau(t') y(\ell, t'), t \in \omega_\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя условия $\kappa_{h\tau}(x, t) \geq v > 0$, $(x, t) \in \bar{\omega}_{T*}$, $q_{h\tau}(x, t) \geq q_0 > 0$, $(x, t) \in \bar{\omega}_T$, неравенство Коши – Буняковского, неравенство Коши с ε [13, с. 33], неравенство

$$y^2(\ell, t) \leq \varepsilon \|y_{\bar{x}}(x, t)\|_{L_2(\omega_h^+)}^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\ell} \right) \|y(x, t)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2, t \in \omega_\tau$$

которое справедливо для любой сеточной функции $y(x, t)$, $x \in \bar{\omega}_h$, при каждом фиксированном $t \in \omega_\tau$ и для любого $\varepsilon > 0$ [14, с. 190], и мажорируя левую и правую части равенства (21), придем к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|y(x, t)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + v\tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{x}}(x, t')\|_{L_2(\omega_h^+)}^2 + \frac{1}{2} \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{t}}(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \|y(x, 0)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \tau \sum_{t'=\tau}^t \|f_{h\tau}(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} \max_{0 \leq t' \leq t} \|y(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|H\|_{2,(0,\ell)} \left(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon_1} \right) \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{x}}(x, t')\|_{L_2(\omega_h^+)}^2 + \frac{\|H\|_{2,(0,\ell)}}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\ell} \right) \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\
& + \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t g_{\tau}^2(t') \right)^{\frac{1}{2}} \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{x}}(x, t')\|_{L_2(\omega_h^+)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\ell}} \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t g_{\tau}^2(t') \right)^{\frac{1}{2}} \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|y(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\
& \forall \varepsilon, \varepsilon_1 > 0.
\end{aligned}$$

Положим здесь $\varepsilon_1 = \nu / 2 \|H\|_{2,(0,\ell)}$, $\varepsilon = \varepsilon_1^2 = \nu^2 / 4 \|H\|_{2,(0,\ell)}^2$, затем умножим обе части этого неравенства на 2, приведем подобные члены, положим $\alpha(t) \equiv \max_{0 \leq t' \leq t} \|y(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}$, величину $\tau \sum_{t'=\tau}^t \|y(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2$ заменим на $t\alpha^2(t)$, а $\|y(x, 0)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2$ на $\alpha(t)\|y(x, 0)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}$. Это даст неравенство

$$\begin{aligned}
& \|y(x, t)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \nu \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{x}}(x, t')\|_{L_2(\omega_h^+)}^2 + \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{t}}(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \\
& \leq \alpha(t) \left[\|y(x, 0)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} + 2\tau \sum_{t'=\tau}^t \|f_{2h\tau}(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} + 2\sqrt{T(1+\ell^{-1})} \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t g_{\tau}^2(t') \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \\
& + ct\alpha^2(t) + 2 \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t g_{3\tau}^2(t') \right)^{\frac{1}{2}} \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{x}}(x, t')\|_{L_2(\omega_h^+)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \equiv \beta(t), t \in \omega, \\
& \text{где } c = \frac{2\|H\|_{2,(0,\ell)}}{\nu} \left(\frac{4\|H\|_{2,(0,\ell)}^2}{\nu^2} + \frac{1}{\ell} \right). \text{ Из него следуют три неравенства:}
\end{aligned}$$

$$\alpha^2(t) \leq \beta(t), \quad \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{x}}(x, t')\|_{L_2(\omega_h^+)}^2 \leq \frac{1}{\nu} \beta(t), \quad \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{t}}(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \beta(t).$$

Извлечем из обеих частей этих неравенств корень квадратный, полученные неравенства сложим. Тогда, используя условие (19), для $t < 2\tau_0$ получим оценку

$$\begin{aligned}
& \max_{0 \leq t' \leq t} \|y(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{x}}(x, t')\|_{L_2(\omega_h^+)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\tau} \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{t}}(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq (2(2 + \nu^{-1/2})^2 [1 - (2 + \nu^{-1/2})\sqrt{ct}]^{-2} [1 + \sqrt{T(1+\ell^{-1})}]) \times \\
& \times \left[\|y(x, 0)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \tau \sum_{t'=\tau}^t \|f_{h\tau}(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \tau \sum_{t'=\tau}^t g_{\tau}^2(t') \right]. \quad (22)
\end{aligned}$$

Разобьем отрезок $[0, T]$ на интервалы $\Delta_1 = [0, \tau_0]$, $\Delta_2 = [\tau_0, 2\tau_0]$, ..., Δ_n длиной, не большей τ_0 . Для каждого из них справедлива оценка вида (22). Отсюда, учитывая

$$\|y(x, t)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} \leq \max_{0 \leq t' \leq t} \|y(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)},$$

выведем неравенство

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t' \leq t} \|y(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{x}}(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h^+)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\tau} \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_{\bar{t}}(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq c(t) \left[\|y(x, 0)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \tau \sum_{t'=\tau}^t \|f_{h\tau}(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t g_{\tau}^2(t') \right)^{\frac{1}{2}} \right], t \in \omega_{\tau}, \end{aligned}$$

где функция $c(t)$ определяется величинами ℓ, T, ν и $\|H\|_{2,(0,\ell)}$. Полагая здесь $t = T$, получаем оценку (20). Однозначная разрешимость задачи (11) – (14) при каждом $\nu_{h\tau} \in V_{h\tau}$ очевидна. Теорема 1 доказана.

3. Априорная оценка погрешности разностного метода по состоянию

Пусть $\nu(\xi, \theta) = (k(\xi, \theta), q(\xi, \theta)) \in V$, $\nu_{h\tau}(x, t) = (k_{h\tau}(x, t), q_{h\tau}(x, t)) \in V_{h\tau}$ – произвольные управления, $u(\xi, \theta) = u(\xi, \theta; \nu)$, $y(x, t) = y(x, t; \nu_{h\tau})$ – решения задач (2) – (4) и (11) – (14), соответствующие управлениям $\nu(\xi, \theta)$ и $\nu_{h\tau}(x, t)$. Через $\bar{u}(x, t) = \bar{u}(x, t; \nu)$ обозначим усреднение решения задачи (2) – (4), определяемое по формуле

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} S^t u(x, t), & (x, t) \in \bar{\omega}_T, \\ S^x \varphi(x), & x \in \bar{\omega}_h, \quad t = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Используя условия (15), (16), для погрешности разностного метода по состоянию

$$z(x, t) = z(x, t; \nu, \nu_{h\tau}) = y(x, t; \nu_{h\tau}) - \bar{u}(x, t; \nu)$$

получим задачу

$$z_{\bar{t}} = Az + \psi_{h\tau}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_T; \quad (24)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (25)$$

где $\psi_{h\tau}(x, t) = F_{h\tau}(x, t) + A\bar{u} - \bar{u}_{\bar{t}}$, $(x, t) \in \bar{\omega}_T$ – погрешность аппроксимации задачи (15), (16).

Применяя к уравнению (2) в узлах $(x, t) \in \bar{\omega}_T$ усредняющий оператор S^{tx} , с помощью некоторых преобразований получим следующее представление для $\psi_{h\tau}$:

$$\psi_{h\tau}(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^2 [\eta_{1x}^{(k)}(x, t) + \eta_2^{(k)}(x, t)] + \eta_{\bar{t}}^{(3)}(x, t), & (x, t) \in \omega_T, \\ \frac{2}{h} [\eta_1^{(1)}(x, t) + \eta_1^{(2)}(x, t)] + \eta_2^{(1)}(x, t) + \eta_2^{(2)}(x, t) + \eta_{\bar{t}}^{(3)}(x, t), & (x, t) \in \gamma_T^{(-1)}, \\ -\frac{2}{h} [\eta_1^{(1)}(x, t) + \eta_1^{(2)}(x, t)] + \eta_2^{(1)}(x, t) + \eta_2^{(2)}(x, t) + \eta_{\bar{t}}^{(3)}(x, t) + \\ + \frac{2}{h} \eta^{(4)}(t), & (x, t) \in \gamma_T^{(+1)}, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$\eta_1^{(1)}(x, t) = \begin{cases} S_-^t k(x - 0.5h, t) \bar{u}_{\bar{x}}(x, t) - S_-^t k(x - 0.5h, t) \frac{\partial u(x - 0.5h, t)}{\partial x}, & (x, t) \in \omega_T^+, \\ S_-^t k(x + 0.5h) \bar{u}_x(x, t) - S_-^t k(x + 0.5h, t) \frac{\partial u(x + 0.5h, t)}{\partial x}, & (x, t) \in \gamma_T^{(-1)}; \end{cases} \quad (27)$$

$$\eta_1^{(2)}(x, t) = \begin{cases} [k_{h\tau}(x - 0.5h, t) - S_-^t k(x - 0.5h, t)] \bar{u}_{\bar{x}}(x, t), & (x, t) \in \omega_T^+, \\ [k_{h\tau}(x + 0.5h, t) - S_-^t k(x + 0.5h, t)] \bar{u}_x(x, t), & (x, t) \in \gamma_T^{(-1)}; \end{cases} \quad (28)$$

$$\eta_2^{(1)}(x, t) = S^{tx}(q(x, t)u(x, t)) - S^{tx}(q(x, t))\bar{u}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_T; \quad (29)$$

$$\eta_2^{(2)}(x, t) = [S^{tx}(q(x, t) - q_{h\tau}(x, t))] \bar{u}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_T; \quad (30)$$

$$\eta^{(3)}(x, t) = S^{tx}u(x, t) - \bar{u}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_T; \quad (31)$$

$$\eta^{(4)}(t) = \sum_{x \in \omega_h^+} h H_h(x) \bar{u}_{\bar{x}}(x, t) - S_-^t \left(\int_0^t H(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \right), \quad t \in \omega_\tau. \quad (32)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия, принятые в п.1. Тогда для решения задачи (24), (25) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|z(x, t)\|_{V_2^{1,0}(\bar{\omega}_T)} + \sqrt{\tau} \|z_T(x, t)\|_{L_2(\bar{\omega}_T)} \leq \\ & \leq M \left[\sum_{k=1}^2 \left(\|\eta_1^{(k)}\|_{L_2(\omega_T^+)} + \|\eta_2^{(k)}\|_{L_2(\bar{\omega}_T)} \right) + \left(\sum_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|\eta^{(3)}(x, t)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right)^{1/2} + \|\eta^{(4)}\|_{L_2(\omega_\tau)} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Доказательство. Умножая уравнение (24) скалярно $(\cdot)_{\bar{\omega}_h}$ на $\tau z(x, t')$ и рассуждая аналогично получению равенства (21), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|z(x, t)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \tau \sum_{t'=\tau}^t h k_h(x - 0.5h, t') z_{\bar{x}}^2(x, t') + \frac{1}{2} \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|z_T(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \\ & + \tau \sum_{t'=\tau}^t (q_{h\tau}(x, t'), z^2(x, t'))_{\bar{\omega}_h} = -\tau \sum_{t'=\tau}^t \left[\left(\sum_{k=1}^2 \eta_1^{(k)}(x, t), z_{\bar{x}}(x, t') \right)_{\omega_h^+} - \right. \\ & \left. - \left(\sum_{k=1}^2 \eta_2^{(k)}(x, t), z(x, t') \right)_{\bar{\omega}_h} - \tau \sum_{t'=0}^{t-\tau} \left(\eta^{(3)}(x, t'), z_t(x, t') \right)_{\bar{\omega}_h} + \right. \\ & \left. + \left(\eta^{(3)}(x, t), z(x, t) \right)_{\bar{\omega}_h} + \tau \sum_{t'=\tau}^t \eta^{(k)}(t') z(\ell, t'), t \in \omega_\tau. \right. \end{aligned}$$

Затем мажорируя левую и правую части этого равенства, можно получить следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \|z(x, t)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + 2\nu\tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{x}}(x, t')\|_{L_2(\omega_h^+)}^2 + \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|z_T(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \\ & \leq 2 \left[\sum_{k=1}^2 \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta_1^{(k)}(x, t')\|_{L_2(\omega_h^+)}^2 \right)^{1/2} + \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t (\eta^{(4)}(t'))^2 \right)^{1/2} \right] \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{x}}(x, t')\|_{L_2(\omega_h^+)}^2 \right)^{1/2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|z(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} \left\{ T \sum_{k=1}^2 \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta_2^{(k)}(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right)^{1/2} \right. \\
& \left. + \|\eta^{(3)}(x, t)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \sqrt{T(1+\ell^{-1})} \left(\tau \sum_{t'=\tau}^t (\eta^{(4)}(t'))^2 \right)^{1/2} \right\} + \\
& + 2 \left(\sum_{t'=0}^{t-\tau} \|\eta^{(3)}(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right)^{1/2} \left(\tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|z_T(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right)^{1/2} \equiv \delta(t), t \in \omega_\tau.
\end{aligned}$$

Из него следует три неравенства:

$$\gamma^2(t) \leq \delta(t),$$

$$\tau \sum_{t'=\tau}^t \|\bar{z}_x(x, t')\|_{L_2(\omega_h^+)}^2 \leq (2\nu)^{-1} \delta(t),$$

$$\tau \sum_{t'=\tau}^t \tau \|z_T(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \delta(t),$$

где

$$\gamma(t) = \max_{0 \leq t' \leq t} \|z(x, t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}.$$

Извлекая из обеих частей этих неравенств корень квадратный, складывая полученные неравенства, после некоторых преобразований приходим к оценке (33). Теорема 2 доказана.

Для получения оценки скорости сходимости аппроксимаций (11) – (14) по состоянию достаточно установить оценки величин (27) – (32).

Лемма 1. Пусть выполнены условия, принятые в п.1. Тогда для составляющих погрешности аппроксимации (27) – (32) справедливы оценки

$$\|\eta_1^{(1)}\|_{L_2(\omega_T^+)} \leq \sqrt{2}(h+\tau) \|k\|_{\infty, Q_T}^{(0,1)} \sqrt{\sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial^j u}{\partial \xi^j} \right\|_{2, Q_T}^2}; \quad (34)$$

$$\|\eta_1^{(2)}\|_{L_2(\omega_T^+)} \leq T \|k_{h\tau}(x, t) - S_-^t k(x, t)\|_{\infty, \omega_{T*}} \left\| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\|_{2, Q_T}; \quad (35)$$

$$\|\eta_2^{(1)}\|_{L_2(\bar{\omega}_T)} \leq \sqrt{2}(h+\tau) \|q\|_{\infty, Q_T} \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\|_{2, Q_T} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\|_{2, Q_T} \right); \quad (36)$$

$$\|\eta_2^{(2)}\|_{L_2(\bar{\omega}_T)} \leq M \|S^{tx} q - q_{h\tau}\|_{\infty, \bar{\omega}_T} \|u\|_{2, Q_T}^{(2,0)}; \quad (37)$$

$$\left[\sum_{\bar{\omega}_\tau} \|\eta^{(3)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \right]^{1/2} \leq M \left(\frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \tau^{1/2} \right) \|u\|_{2, Q_T}^{(2,1)}; \quad (38)$$

$$\|\eta^{(4)}\|_{L_2(\omega_\tau)} \leq h\ell \|H\|_{\infty, (0, \ell)} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right\|_{2, Q_T}. \quad (39)$$

Доказательство. Ввиду ограниченности объема работы рассмотрим лишь доказательство оценок (34) и (39).

Используя определение (23) сеточной функции $\bar{u}(x, t)$, $(x, t) \in \omega_T^+ \cup \gamma_T^{(-1)}$, можно показать, что справедливо представление

$$\eta^{(1)}(x, t) = \frac{1}{\tau^2 h} \int_{t-\tau}^t \int_{t-\tau}^t \int_{x-h}^x [k(x-0.5h, \theta_1) \int_{x-0.5h}^{\xi} \frac{\partial^2 u(\xi_1, \theta)}{\partial \xi_1^2} d\xi_1 + \\ + \int_0^{\theta_1} \frac{\partial k(x-0.5h, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2 \frac{\partial u(\xi, \theta)}{\partial \xi}] d\xi d\theta_1 d\theta, \quad (x, t) \in \omega_T^+.$$

Проводя оценку этого представления, имеем

$$|\eta^{(1)}(x, t)| \leq \|k\|_{\infty, Q_T} \sqrt{\frac{h}{\tau}} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right\|_{2, e^*(x, t)} + \left\| \frac{\partial k}{\partial \theta} \right\|_{\infty, Q_T} \sqrt{\frac{\tau}{h}} \left\| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\|_{2, e^*(x, t)}, \quad (x, t) \in \omega_T^+,$$

из которого следует оценка (34), где

$$e^*(x, t) = e_1^*(x) \times e_2(t), \quad e_1^*(x) = \{\xi : x-h \leq \xi < x\}, \quad x \in \omega_h^+.$$

Докажем оценку (39). Используя (23), можно показать, что для функции $\eta^{(4)}(t)$, $t \in \omega_\tau$, определяемой равенством (32), справедливо представление

$$\eta^{(4)}(t) = \frac{1}{h\tau} \int_{t-\tau}^t \sum_{x \in \omega_h^+} \int_{x-h}^x H(\xi) \left[\int_{x-h}^x \left(\int_{\xi}^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(\xi_2, \theta)}{\partial \xi_2^2} d\xi_2 \right) \right] d\xi_1 d\xi d\theta, \quad t \in \omega_\tau.$$

Проводя оценку полученного представления, получаем

$$\eta^{(4)}(t) \leq \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} \sum_{x \in \omega_h^+} \max_{x-h \leq \xi \leq x} |H(\xi)| \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right\|_{2, e^*(x, t)}, \quad t \in \omega_\tau.$$

На основе полученного неравенства установим оценку (39). Лемма 1 доказана.

Теорема 2 и лемма 1 позволяют установить справедливость следующей априорной оценки погрешности разностного метода по состоянию в сеточной норме $V_2^{1,0}(\bar{\omega}_T)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия принятые в п.1. Тогда для любых управлений $v \in V$ и $v_{h\tau} \in V_{h\tau}$ справедлива оценка погрешности разностного метода по состоянию

$$\|y(x, t; v_{h\tau} - \bar{u}(x, t; v))\|_{V_2^{1,0}(\bar{\omega}_T)} + \sqrt{\tau} \|y_{\bar{\tau}}(x, t; v_{h\tau} - \bar{u}_{\bar{\tau}}(x, t; v))\|_{L_2(\bar{\omega}_T)} \leq \\ \leq M \left[h + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \tau^{1/2} + \|k_{h\tau}(x, t) - S_-^t k(x, t)\|_{\infty, \bar{\omega}_{T^*}} + \|S^{tx} q - q_{h\tau}\|_{\infty, \bar{\omega}_T} \right] \equiv M \gamma_{h\tau}. \quad (40)$$

Следствие 1. Пусть

$$k_{h\tau}(x, t) = S_-^t k(x, t), \quad (x, t) \in \omega_{T^*}, \quad q_{h\tau}(x, t) = S^{tx} q(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_T.$$

Тогда разностная схема (11) – (14) имеет в сеточной норме $V_2^{1,0}(\bar{\omega}_T)$ при $\tau \sim h^{3/2}$ оценки скорости сходимости $O(h^{3/4})$, а при $\tau \sim h^2$ оценки скорости сходимости $O(\sqrt{h})$.

4. Оценка погрешности и скорости сходимости аппроксимаций по функционалу. Регуляризация аппроксимаций и сходимость по управлению

Оценку погрешности сеточного функционала устанавливает

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых управлений $v \in V$ и $v_{h\tau} \in V_{h\tau}$ для погрешности сеточного функционала справедлива оценка

$$|J(v) - J_{h\tau}(v_{h\tau})| \leq M(h + \sqrt{\tau} + \gamma_{h\tau}). \quad (41)$$

Доказательство теоремы проводится с помощью специального представления погрешности сеточного функционала, использующего некоторые кусочно-постоянные продолжения сеточных функций, и опирается на оценки (8), (20), (40). Ввиду ограниченности объема работы подробности опускаем.

Определим некоторые восполнения на Q_T сеточных управлений. Для сеточно-го управления $k_{h\tau}(x, t), (x, t) \in \omega_{T*}$ построим полилинейное восполнение на Q_T . Введем расширенную область $\tilde{Q}_T = \{(\xi, \theta) : -0.5h \leq \xi \leq \ell + 0.5h, 0 \leq t \leq T\}$ и сетку $\tilde{\omega}_{T*} = \tilde{\omega}_{h*} \times \bar{\omega}_\tau$ области $\tilde{Q}_T$, где $\tilde{\omega}_{h*} = \{-0.5h\} \cup \bar{\omega}_{h*} \cup \{\ell + 0.5h\}$. Продолжим функцию $k_{h\tau}(x, t), (x, t) \in \omega_{T*}$ на $\tilde{\omega}_{T*} \setminus \omega_{T*}$, полагая

$$k_{h\tau}(-0.5, t) = k_{h\tau}(0.5h, t), \quad k_{h\tau}(\ell + 0.5h, t) = k_{h\tau}(\ell - 0.5h, t), \\ t \in \omega_\tau, \quad k_{h\tau}(x, 0) = k_{h\tau}(x, \tau), \quad x \in \tilde{\omega}_{h*}.$$

Пусть $P_{h\tau}^{(1)}k_{h\tau}(\xi, \theta), (\xi, \theta) \in \tilde{Q}_T$ – полилинейное восполнение сеточного управления $k_{h\tau}(x, t), (x, t), (x, t) \in \tilde{\omega}_{T*}$ на Q_T , определяемое формулой

$$P_{h\tau}^{(1)}k_{h\tau}(\xi, \theta) = k_{h\tau}(x - 0.5h, t - \tau) + k_{h\tau x}(x - 0.5h, t - \tau)(\xi - x + 0.5h) + \\ + k_{h\tau t}(x - 0.5h, t - \tau)(\theta - t + \tau) + k_{h\tau xt}(x - 0.5h, t - \tau)(\xi - x + 0.5h)(\theta - t + \tau), \\ (\xi, \theta) \in \tilde{e}_1(x, t) = \tilde{e}_1(x) \times e_2(t), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_h \times \omega_\tau,$$

где $\tilde{e}_1(x) = \{\xi : x - 0.5h \leq \xi \leq x + 0.5h\}$, $x \in \bar{\omega}_h$.

Сужение функции $P_{h\tau}^{(1)}k_{h\tau}(\xi, \theta), (\xi, \theta) \in \tilde{Q}_T$ на Q_T назовем полилинейным восполнением сеточного управления $k_{h\tau}(x, t), (x, t) \in \omega_{T*}$ на Q_T и также обозначим через $P_{h\tau}^{(1)}k_{h\tau}(\xi, \theta), (\xi, \theta) \in Q_T$.

Для сеточного управления $q_{h\tau}(x, t), (x, t) \in \bar{\omega}_T$ построим кусочно-постоянное восполнение на Q_T , определяемое формулой

$$P_{h\tau}^{(2)}q_{h\tau}(\xi, \theta) = q_{h\tau}(x, t), \quad (\xi, \theta) \in e(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_T.$$

Кроме того, определим усреднения управлений непрерывного аргумента $k(\xi, \theta)$ и $q(\xi, \theta)$:

$$Q_{h\tau}^{(1)}k(x, t) = S_-^t k(x, \theta), \quad (x, t) \in \omega_{T*}, \\ Q_{h\tau}^{(2)}q(x, t) = S^{tx} q(\xi, \theta), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_T.$$

Для исследования связи между задачами (1) – (6) и (9) – (14) введем два отображения $P_{h\tau} : H_{h\tau} \rightarrow H$ и $Q_{h\tau} : H \rightarrow H_{h\tau}$, действующие по правилам

$$P_{h\tau} v_{h\tau} = v, \text{ где } v_{h\tau} = (k_{h\tau}(x, t), q_{h\tau}(x, t)), \quad v = (P_{h\tau}^{(1)} k_{h\tau}(\xi, \theta), P_{h\tau}^{(2)} q_{h\tau}(\xi, \theta)),$$

$$Q_{h\tau} v = v_{h\tau}, \text{ где } v = (k(\xi, \theta), q(\xi, \theta)), \quad v_{h\tau} = (Q_{h\tau}^{(1)} k(x, t), Q_{h\tau}^{(2)} q(x, t)).$$

Нетрудно показать, что для любых управлений $v_{h\tau} \in V_{h\tau}, v \in V$ имеют места включения $P_{h\tau} v_{h\tau} \in V, Q_{h\tau} v \in V_{h\tau}$.

Лемма 2. Для произвольных управлений $v \in V, v_{h\tau} \in V_{h\tau}$ справедливы оценки

$$\max \{ |J(v) - J_{h\tau}(Q_{h\tau} v)|, |J(P_{h\tau} v_{h\tau}) - J_{h\tau}(v_{h\tau})| \} \leq M \left[h + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \tau^{1/2} \right].$$

Доказательство этой леммы опирается на определения отображений $P_{h\tau}, Q_{h\tau}$ и следует из оценки (41).

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для аппроксимации (9) – (14) верна оценка

$$|J_{h\tau^*} - J_*| \leq M \left[h + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \tau^{1/2} \right],$$

где $J_{h\tau^*} = \inf \{ J_{h\tau}(v_{h\tau}) : v_{h\tau} \in V_{h\tau} \}$.

Следствие 2. Если $\tau \sim h^{3/2}$ и $\tau \sim h^2$, то сеточные задачи управления (9) – (14) аппроксимирует задачи (1) – (6) по функционалу, причем при $\tau \sim h^{3/2}$ справедлива оценка $|J_{h\tau^*} - J_*| \leq Mh^{3/4}$, а при $\tau \sim h^2$ – оценка $|J_{h\tau^*} - J_*| \leq Mh^{1/2}$. Если, кроме того, последовательность управлений $\{v_{h\tau}\} \subset V_{h\tau}$ определена из условий $J_{h\tau^*} \leq J_{h\tau}(v_{h\tau}) \leq J_{h\tau^*} + \varepsilon_{h\tau}$, где $\varepsilon_{h\tau} \geq 0, \varepsilon_{h\tau} \rightarrow 0$ при $h, \tau \rightarrow 0$, то последовательность управлений $\{P_{h\tau} v_{h\tau}\}$ является минимизирующей для задачи (1) – (6), слабо в H сходится к V_* и справедлива оценка $|J_{h\tau^*} - J_*| \leq Mh^{3/4} + \varepsilon_{h\tau}$ при $\tau \sim h^{3/2}$ и $|J_{h\tau^*} - J_*| \leq Mh^{1/2} + \varepsilon_{h\tau}$ при $\tau \sim h^2$.

Построим теперь минимизирующую последовательность, сходящуюся по норме H . Для этого воспользуемся методом Тихонова [2] и проведем регуляризацию задачи (9) – (14). Введем на V стабилизатор

$$\Omega(v) = \|v\|_H^2 = \left(\|k\|_{2, Q_T}^{(1)} \right)^2 + \|q\|_{2, Q_T}^2$$

и его сеточный аналог

$$\Omega_{h\tau}(v_{h\tau}) = \|v_{h\tau}\|_{H_{h\tau}}^2 = \left(\|k_{h\tau}\|_{W_2^1(\omega_{T^*})} \right)^2 + \|q_{h\tau}\|_{L_2(\bar{\omega}_T)}^2.$$

При каждом (h, τ) рассмотрим сеточный функционал Тихонова задачи (9) – (14):

$$T_{h\tau\alpha_{h\tau}}(v_{h\tau}) = J_{h\tau}(v_{h\tau}) + \alpha_{h\tau} \Omega_{h\tau}(v_{h\tau}), \quad v_{h\tau} \in V_{h\tau},$$

где $\{\alpha_{h\tau}\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $h, \tau \rightarrow 0$.

Пусть при каждом (h, τ) найдено сеточное управление $\tilde{v}_{h\tau} \in V_{h\tau}$, такое, что

$$T_{h\tau\alpha_{h\tau}^*} \equiv \inf \{ T_{h\tau\alpha_{h\tau}}(v_{h\tau}) : v_{h\tau} \in V_{h\tau} \} \leq T_{h\tau\alpha_{h\tau}}(\tilde{v}_{h\tau}) \leq T_{h\tau\alpha_{h\tau}^*} + \xi_{h\tau}, \quad (42)$$

где $\xi_{h\tau} \geq 0$ и $\xi_{h\tau} \rightarrow 0$ при $h, \tau \rightarrow 0$.

Теорема 6. Пусть, последовательность сеточных управлений $\{\tilde{v}_{h\tau}\}$ определена из условия (42) и $(\xi_{h\tau} + \varepsilon_{h\tau})/\alpha_{h\tau} \rightarrow 0$ при $h, \tau \rightarrow 0$. Тогда последовательность управлений $\{P_{h\tau}\tilde{v}_{h\tau}\}$ является минимизирующей для задачи (1) – (4) и сильно в H сходится к множеству Ω -нормальных решений $V_{**} = \{v_{**} \in V_* : \Omega(v_{**}) = \inf\{\Omega(v_*) : v_* \in V_*\}\}$ задачи (1) – (4).

Доказательство теоремы 6 проводится по методике [2, с. 325] на основе полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 436с.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
3. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
4. Нахушев А.З. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
5. Иванцов Н.И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 4. С. 547–564.
6. Кожанов А.Н. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2004. № 30. С. 63–69.
7. Данилкина О.Ю. Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2007. № 1 (14). С. 5–9.
8. Тагиев Р.К., Габиров В.М. Об одной задаче оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием // Вестн. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 1. С. 54–64. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1463>.
9. Тагиев Р.К., Гашимов С.А., Габиров В.М. Об одной задаче оптимального управления для параболического уравнения с интегральным условием и с управлениями в коэффициентах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 3(41). С. 31–41. DOI 10.17223/19988621/41/3.
10. Лубышев Ф.В. Аппроксимации и регуляризация задач оптимального управления коэффициентами параболических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 8. С. 1166–1183.
11. Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 9. С. 1313–1333.
12. Габиров В.М. Разностная аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием // Научные известия Ленкоранского государственного университета. Сер. Матем. и естеств. науки. 2015. С. 47–62.
13. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
14. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 325 с.

Статья поступила 19.06.2017 г.

Tagiev R.K., Gabibov V.M. (2017) DIFFERENCE APPROXIMATION AND REGULARIZATION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH AN INTEGRAL CONDITION *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 30–44

DOI 10.17223/19988621/50/3

Let a controlled process be described in the region $Q_T = \{(x, t): 0 < x < \ell, 0 < t \leq T\}$ by the following boundary-value problem for a linear parabolic equation with an integral boundary condition:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x, t)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

$$k(\ell, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = \int_0^\ell H(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx + g(t), \quad 0 < t \leq T,$$

where $\varphi(x) \in W_2^1(0, \ell)$, $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, $g(t) \in W_2^1(0, T)$, $H(x) \in W_2^1(0, \ell)$ are given functions, $k(x, t), q(x, t)$ – are control functions, and $u = u(x, t) = u(x, t, v)$ – is solution of the boundary value problem, i.e. the process state corresponding to the control v .

We introduce the set of admissible controls

$$V = \{v = (k(x, t), q(x, t)) \in H = W_2^1(Q_T) \times L_2(Q_T) : 0 < v \leq k(x, t) \leq \mu, \\ \left| \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} \right| \leq \mu_1, \left| \frac{\partial k(x, t)}{\partial t} \right| \leq \mu_2, |q(x, t)| \leq \mu_3 \text{ a.e. on } Q_T\},$$

where $v, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$ – are given numbers.

We define the target functional

$$J(v) = \int_0^T |u(x, T; v) - u_T(x)|^2 dx,$$

where $u_T(x) \in W_2^1(0, \ell)$ – the given function.

In the present work, the optimal control problem for a parabolic equation with an integral boundary condition and control coefficients is considered. Estimates of the accuracy of the difference approximations by state and function are established. The process of A.N. Tikhonov's regularization of the approximations is carried out.

Keywords: optimal control, parabolic equation, integral boundary condition, difference approximation.

TAGIYEV Rafiq Kalandar oghli (D.Sc.s., Professor, Baku State University, Baku, Azerbaijan)
E-mail: r.tagiyev@list.ru

GABIBOV Vaxab Mexdi oghli (Senior Lecturer, Lenkaran State University, Azerbaijan)
E-mail: vahab.hebibov@mail.ru

REFERENCES

1. Egorov A.I. (1978) *Optimal'noye upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami* [Optimum control of thermal and diffusion processes]. Moscow: Nauka.
2. Vasil'ev F.P. (1981) *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extreme problems]. Moscow: Nauka.
3. Samarsky A.A. (1980) O nekotorykh problemakh teorii differentsial'nykh uravneniy [On some problems of the theory of differential equations]. *Diff. equation*. 16(11). pp. 1925–1935.
4. Nakhushev A.Z. (1995) *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow: Vysshaya shkola.

5. Ivanchev N.I. (2004) Boundary value problems for a parabolic equation with integral conditions. *Diff. equation.* 40(4). pp. 547–564.
6. Kozhanov A.N. (2004) O razreshimosti kraevoy zadachi s nelokal'nym granichnym usloviem dlya lineynykh parabolicheskikh uravneniy [On solvability of a boundary value problem with a nonlocal boundary condition for linear parabolic equations]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki – J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* (30). pp. 63–69.
7. Danilkina O.Yu. (2007) Ob odnoy nelokal'noy zadache dlya uravneniya teploprovodnosti s integral'nym usloviem [On a nonlocal problem for the heat conduction equation with an integral condition]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki – J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 1 (14). pp. 5–9.
8. Tagiev R.K., Gabibov V.M. (2016) Ob odnoy zadache optimal'nogo upravleniya dlya uravneniya teploprovodnosti s integral'nym granichnym usloviem [On an optimal control problem for the heat equation with an integral boundary condition]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki – J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 20(1). pp. 54–64.
9. Tagiev R.K., Gashimov S.A., Gabibov V.M. (2016) On a problem of optimal control for a parabolic equation with an integral condition and with controls in the coefficients, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 3(41). pp. 31–41.
10. Lubyshev F.V. (1993) Approximation and regularization of problems of the optimal control of the coefficients of parabolic equations. *Comput. Math. Math. Phys.* 33(8). pp. 1027–1042.
11. Lubyshev F.V. (1995) Difference approximations and regularization of optimal control problems for parabolic equations with controls in the coefficients. *Comput. Math. Math. Phys.* 35(9). pp. 1053–1069.
12. Gabibov V.M. (2015) Difference approximation and regularization of the optimal control problem for the heat equation with an integral boundary condition. *Scientific news of the Lenkoran State University. Ser. Matem. and nat. sciences.* pp. 47–62.
13. Ladyzhenskaya O.A. (1973) *Krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka. pp. 408.
14. Samarsky A.A., Andreev V.B. (1976) *Raznostnyye metody dlya ellipticheskikh uravneniy* [Difference methods for elliptic equations]. Moscow: Nauka. pp. 325.

УДК 517.956.6; 517.44
DOI 10.17223/19988621/50/4

Т.Г. Эргашев

ЧЕТВЕРТЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОГО СЛОЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ДВУОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Потенциал двойного слоя играет важную роль при решении краевых задач для эллиптических уравнений. При его исследовании существенно используются свойства фундаментальных решений данного уравнения. В настоящее время все фундаментальные решения обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца известны, но, несмотря на это, только для первого из них построена теория потенциала. В данной работе исследуется потенциал двойного слоя, соответствующий четвертому фундаментальному решению. При использовании свойства гипергеометрической функции Аппеля от двух переменных доказываются предельные теоремы и выводятся интегральные уравнения, содержащие в ядре плотности потенциала двойного слоя.

Ключевые слова: обобщенное двуосесимметрическое уравнение Гельмгольца; формула Грина; фундаментальное решение; четвертый потенциал двойного слоя; гипергеометрические функции Аппеля от двух переменных; интегральные уравнения с плотностью потенциала двойного слоя в ядре.

1. Введение

Многочисленные приложения теории потенциала можно найти в механике жидкости, эластодинамике, электромагнетизме и акустике. С помощью теории потенциала краевые задачи удаётся свести к решению интегральных уравнений.

Потенциал двойного слоя играет важную роль при решении краевых задач для эллиптических уравнений. При этом решение ищется в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью, для определения которой применяется теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода [1–3]. В свою очередь, такой потенциал выписывается через фундаментальное решение данного эллиптического уравнения.

Фундаментальные решения следующего обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца:

$$H_{\alpha,\beta}^{\lambda}(u) \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y - \lambda^2 u = 0,$$

здесь α , β и λ – постоянные, причем $0 < 2\alpha, 2\beta < 1$, приведены в [4]. Оказывается, когда $\lambda = 0$, все четыре фундаментальные решения $q_i(x, y; x_0, y_0)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) уравнения

$$H_{\alpha,\beta}^0(u) \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y = 0 \quad (1.1)$$

можно выразить с помощью гипергеометрической функции Аппеля от двух переменных второго рода $F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)$, определенной по формуле [5–7]

$$F_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b_1)_m (b_2)_n}{(c_1)_m (c_2)_n m! n!} x^m y^n,$$

где $(a)_n$ – символ Похгаммера: $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \dots \cdot (a+n-1)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Теория потенциала для простейшего вырождающегося эллиптического уравнения (т.е. при $\alpha = 0$ и $\lambda = 0$) изложена автором [8, 9]. Следуя его теории, в работе [10] для первого фундаментального решения $q_1(x, y; x_0, y_0)$ уравнения (1.1) построена теория потенциала двойного слоя в области

$$\Omega \subset R_+^2 = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}.$$

В данной работе исследуется потенциал двойного слоя, соответствующий четвертому фундаментальному решению уравнения (1.1):

$$q_4(x, y; x_0, y_0) = k_4 (r^2)^{\alpha+\beta-2} x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} x_0^{1-2\alpha} y_0^{1-2\beta} \times \\ \times F_2(2-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta), \quad (1.2)$$

где
$$k_4 = \frac{2^{4-2\alpha-2\beta}}{4\pi} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2-2\beta)},$$

$$\xi = \frac{r^2 - r_1^2}{r^2}, \quad \eta = \frac{r^2 - r_2^2}{r^2}, \quad \left. \begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \\ r_2^2 \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} - \\ x+x_0 \\ - \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} - \\ y-y_0 \\ + \end{pmatrix}^2. \quad (1.3)$$

Нетрудно проверить, что функция $q_4(x, y; x_0, y_0)$ по переменным (x_0, y_0) является решением уравнения (1.1) и обладает следующими свойствами:

$$q_4(x, y; x_0, y_0)|_{x=0} = 0, \quad q_4(x, y; x_0, y_0)|_{y=0} = 0. \quad (1.4)$$

Используя свойства гипергеометрической функции Аппеля от двух переменных, доказываем предельные теоремы и выводим интегральные уравнения, содержащие в ядре плотность потенциала двойного слоя.

2. Формула Грина

Рассмотрим тождество

$$x^{2\alpha} y^{2\beta} [uH_{\alpha,\beta}^0(v) - vH_{\alpha,\beta}^0(u)] = \frac{\partial}{\partial x} [x^{2\alpha} y^{2\beta} (v_x u - v u_x)] + \frac{\partial}{\partial y} [x^{2\alpha} y^{2\beta} (v_y u - v u_y)].$$

Интегрируя обе части последнего тождества по области Ω , расположенной в первой четверти ($x > 0$, $y > 0$), и пользуясь формулой Остроградского, получим

$$\iint_{\Omega} x^{2\alpha} y^{2\beta} [uH_{\alpha,\beta}^0(v) - vH_{\alpha,\beta}^0(u)] dx dy = \\ = \int_S x^{2\alpha} y^{2\beta} u (v_x dy - v_y dx) - x^{2\alpha} y^{2\beta} v (u_x dy - u_y dx), \quad (2.1)$$

где $S = \partial\Omega$ – контур области Ω .

Формула Грина (2.1) выводится при следующих предположениях: функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области $\bar{\Omega}$, частные производные второго порядка непрерывны внутри Ω и интегралы по Ω , содержащие $H_{\alpha, \beta}^0(u)$ и $H_{\alpha, \beta}^0(v)$, имеют смысл. Если $H_{\alpha, \beta}^0(u)$ и $H_{\alpha, \beta}^0(v)$ не обладают непрерывностью вплоть до S , то это – несобственные интегралы, которые получаются как пределы по любой последовательности областей Ω_n , которые содержатся внутри Ω , когда эти области Ω_n стремятся к Ω , так что всякая точка, находящаяся внутри Ω , попадает внутрь областей Ω_n , начиная с некоторого номера n .

Если u и v суть решения уравнения (1.1), то из формулы (2.1) имеем

$$\int_S x^{2\alpha} y^{2\beta} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{dy}{ds} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dx}{ds} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{dy}{ds} = \cos(n, x), \quad \frac{dx}{ds} = -\cos(n, y), \quad (2.3)$$

n – внешняя нормаль к кривой S .

Полагая в формуле (2.1) $v = 1$ и заменяя u на u^2 , получим

$$\iint_{\Omega} x^{2\alpha} y^{2\beta} [u_x^2 + u_y^2] dx dy = \int_S x^{2\alpha} y^{2\beta} u \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

где $u(x, y)$ – решение уравнения (1.1).

Наконец, из формулы (2.2), полагая $v = 1$, будем иметь

$$\int_S x^{2\alpha} y^{2\beta} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, \quad (2.4)$$

т.е. интеграл от нормальной производной решения уравнения (1.1) с весом $x^{2\alpha} y^{2\beta}$ по контуру области равен нулю.

3. Потенциал двойного слоя $w^{(4)}(x_0, y_0)$

Пусть Ω – область, ограниченная отрезками $(0, a)$ и $(0, b)$ осей x и y соответственно и кривой Γ с концами в точках $A(a, 0)$ и $B(0, b)$, лежащей в первой четверти $x > 0, y > 0$.

Параметрическое уравнение кривой Γ пусть будет $x = x(s)$, $y = y(s)$, где s – длина дуги, отсчитываемая от точки B . Относительно кривой Γ будем предполагать, что:

1) функции $x = x(s)$ и $y = y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$ и $y'(s)$ на отрезке $[0, l]$, не обращающиеся одновременно в нуль; вторые произ-

водные $x''(s)$ и $y''(s)$ удовлетворяют условию Гельдера на $[0, l]$, где l – длина кривой Γ ;

2) в окрестностях точек $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ на кривой Γ выполняются условия

$$\left| \frac{dx}{ds} \right| \leq Cy^{1+\varepsilon}(s), \quad \left| \frac{dy}{ds} \right| \leq Cx^{1+\varepsilon}(s), \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (3.1)$$

где C – постоянная. Координаты переменной точки на кривой Γ будем обозначать через (x, y) .

Рассмотрим интеграл

$$w^{(4)}(x_0, y_0) = \int_0^l x^{2\alpha} y^{2\beta} \mu_4(s) \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} ds, \quad (3.2)$$

где $q_4(x, y; x_0, y_0)$ – фундаментальное решение уравнения (1.1), определенное по формуле (1.2), а $\mu_4(s)$ – непрерывная функция в промежутке $[0, l]$.

Интеграл (3.2) будем называть *четвертым потенциалом двойного слоя с плотностью $\mu_4(s)$* . Очевидно, что $w^{(4)}(x_0, y_0)$ есть регулярное решение уравнения (1.1) в любой области, лежащей в первой четверти, не имеющей общих точек ни с кривой Γ , ни с осью x и ни с осью y . Как и в случае логарифмического потенциала, можно показать существование потенциала двойного слоя (3.2) в точках кривой Γ для ограниченной плотности $\mu_4(s)$. Потенциал двойного слоя (3.2) при $\mu_4(s) \equiv 1$ обозначим через $w_1^{(4)}(x_0, y_0)$.

Лемма 1. *Справедливы следующие формулы:*

$$w_1^{(4)}(x_0, y_0) = \begin{cases} k(x_0, y_0) - 1, & (x_0, y_0) \in \Omega, \\ k(x_0, y_0) - \frac{1}{2}, & (x_0, y_0) \in \Gamma, \\ k(x_0, y_0), & (x_0, y_0) \notin \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\bar{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$;

$$\begin{aligned} k(x_0, y_0) = & (1 - 2\beta)k_4x_0^{1-2\alpha}y_0^{1-2\beta} \int_0^a x \left((x-x_0)^2 + y_0^2 \right)^{\alpha+\beta-2} \times \\ & \times F \left(2-\alpha-\beta, 1-\alpha; 2-2\alpha; -\frac{4xx_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} \right) dx + \\ & + (1-2\alpha)k_4x_0^{1-2\alpha}y_0^{1-2\beta} \int_0^b y \left(x_0^2 + (y-y_0)^2 \right)^{\alpha+\beta-2} \times \\ & \times F \left(2-\alpha-\beta, 1-\beta; 2-2\beta; -\frac{4yy_0}{x_0^2 + (y-y_0)^2} \right) dy. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k$ – известная гипергеометрическая функция Гаусса.

Доказательство. Случай 1. Пусть точка (x_0, y_0) находится внутри Ω . Вырежем из области Ω круг малого радиуса ρ с центром в точке (x_0, y_0) и обозначим через Ω^ρ оставшуюся часть области Ω , а через C_ρ окружность вырезанного круга. В области Ω^ρ функция $q_4(x, y; x_0, y_0)$ – регулярное решение уравнения (1.1). Используя следующую формулу для производной гипергеометрической функции Аппеля [4]:

$$\frac{\partial^{m+n} F_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{(a)_{m+n} (b_1)_m (b_2)_n}{(c_1)_m (c_2)_n} F_2(a+m+n; b_1+m, b_2+n; c_1+m, c_2+n; x, y), \quad (3.5)$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial x} &= (1-2\alpha) k_4(r^2)^{\alpha+\beta-2} x^{-2\alpha} y^{1-2\beta} x_0^{1-2\alpha} y_0^{1-2\beta} \times \\ &\times F_2(2-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) - \\ &- 2(2-\alpha-\beta) k_4(r^2)^{\alpha+\beta-3} x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} x_0^{1-2\alpha} y_0^{1-2\beta} P(x, y; x_0, y_0), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} P(x, y; x_0, y_0) &= (x-x_0) F_2(2-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) + \\ &+ x_0 F_2(3-\alpha-\beta; 2-\alpha, 1-\beta; 3-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) + \\ &+ (x-x_0) \left[\frac{(1-\alpha)}{2-2\alpha} \xi F_2(3-\alpha-\beta; 2-\alpha, 1-\beta; 3-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) + \right. \\ &\left. + \frac{(1-\beta)}{2-2\beta} \eta F_2(3-\alpha-\beta; 1-\alpha, 2-\beta; 2-2\alpha, 3-2\beta; \xi, \eta) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Далее применяя известное соотношение [4]:

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{c_1} x F_2(a+1; b_1+1, b_2; c_1+1, c_2; x, y) + \frac{b_2}{c_2} y F_2(a+1; b_1, b_2+1; c_1, c_2+1; x, y) = \\ = F_2(a+1; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) - F_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) \end{aligned}$$

к квадратной скобке в (3.7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial x} &= (1-2\alpha) k_4(r^2)^{\alpha+\beta-2} x^{-2\alpha} y^{1-2\beta} x_0^{1-2\alpha} y_0^{1-2\beta} \times \\ &\times F_2(2-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) - \\ &- 2(2-\alpha-\beta) k_4(r^2)^{\alpha+\beta-3} x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} x_0^{2-2\alpha} y_0^{1-2\beta} \times \\ &\times F_2(3-\alpha-\beta; 2-\alpha, 1-\beta; 3-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) - \\ &- 2(2-\alpha-\beta)(x-x_0) k_4(r^2)^{\alpha+\beta-3} x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} x_0^{1-2\alpha} y_0^{1-2\beta} \times \\ &\times F_2(3-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial y} &= (1-2\beta)k_4(r^2)^{\alpha+\beta-2} x^{1-2\alpha} y^{-2\beta} x_0^{1-2\alpha} y_0^{1-2\beta} \times \\ &\quad \times F_2(2-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) - \\ &\quad - 2(2-\alpha-\beta)k_4(r^2)^{\alpha+\beta-3} x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} x_0^{1-2\alpha} y_0^{2-2\beta} \times \\ &\quad \times F_2(3-\alpha-\beta; 1-\alpha, 2-\beta; 2-2\alpha, 3-2\beta; \xi, \eta) - \\ &\quad - 2(2-\alpha-\beta)(y-y_0)k_4(r^2)^{\alpha+\beta-3} x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} x_0^{1-2\alpha} y_0^{1-2\beta} \times \\ &\quad \times F_2(3-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Пользуясь (3.8) и (3.9), в силу (1.2) и (2.3) найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} &= -(2-\alpha-\beta)k_4(r^2)^{\alpha+\beta-2} x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} x_0^{1-2\alpha} y_0^{1-2\beta} \times \\ &\quad \times F_2(3-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} [\ln r^2] - \\ &\quad - 2(2-\alpha-\beta)k_4(r^2)^{\alpha+\beta-3} x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} x_0^{2-2\alpha} y_0^{1-2\beta} \times \\ &\quad \times F_2(3-\alpha-\beta; 2-\alpha, 1-\beta; 3-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) \frac{dy(s)}{ds} + \\ &\quad + 2(2-\alpha-\beta)k_4(r^2)^{\alpha+\beta-3} x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} x_0^{1-2\alpha} y_0^{2-2\beta} \times \\ &\quad \times F_2(3-\alpha-\beta; 1-\alpha, 2-\beta; 2-2\alpha, 3-2\beta; \xi, \eta) \frac{dx(s)}{ds} + \\ &\quad + (1-2\alpha)k_4(r^2)^{\alpha+\beta-2} x^{-2\alpha} y^{1-2\beta} x_0^{1-2\alpha} y_0^{1-2\beta} \times \\ &\quad \times F_2(2-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) \frac{dy(s)}{ds} - \\ &\quad - (1-2\beta)k_4(r^2)^{\alpha+\beta-2} x^{1-2\alpha} y^{-2\beta} x_0^{1-2\alpha} y_0^{1-2\beta} \times \\ &\quad \times F_2(2-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) \frac{dx(s)}{ds}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Тогда, в силу (2.4) и (1.4) получим

$$\begin{aligned} w_1^{(4)}(x_0, y_0) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} x^{2\alpha} y^{2\beta} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} ds + \\ &\quad + \int_0^b y^{2\beta} \left[x^{2\alpha} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} \right]_{x=0} ds + \int_0^a x^{2\alpha} \left[y^{2\beta} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} \right]_{y=0} ds. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Подставив (3.10) в (3.11), найдем

$$\begin{aligned} w_1^{(4)}(x_0, y_0) &= k_4 x_0^{1-2\alpha} y_0^{1-2\beta} \times \\ &\quad \times \lim_{\rho \rightarrow 0} [(2-\alpha-\beta)\{-J_1 - 2x_0 J_2 + 2y_0 J_3\} + (1-2\alpha)J_4 - (1-2\beta)J_5] + J_6 + J_7, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$J_1(x_0, y_0) = \int_{C_p} xy(r^2)^{\alpha+\beta-2} F_2(3-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} [\ln r^2] ds;$$

$$J_2(x_0, y_0) = \int_{C_p} xy(r^2)^{\alpha+\beta-3} F_2(3-\alpha-\beta; 2-\alpha, 1-\beta; 3-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) \frac{dy(s)}{ds} ds;$$

$$J_3(x_0, y_0) = \int_{C_p} xy(r^2)^{\alpha+\beta-3} F_2(3-\alpha-\beta; 1-\alpha, 2-\beta; 2-2\alpha, 3-2\beta; \xi, \eta) \frac{dx(s)}{ds} ds;$$

$$J_4(x_0, y_0) = \int_{C_p} y(r^2)^{\alpha-\beta-2} F_2(2-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) \frac{dy(s)}{ds} ds;$$

$$J_5(x_0, y_0) = \int_{C_p} x(r^2)^{\alpha-\beta-2} F_2(2-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) \frac{dx(s)}{ds} ds;$$

$$J_6(x_0, y_0) = \int_0^a x^{2\alpha} \left[y^{2\beta} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} \right] \Big|_{y=0} dx + \int_0^b y^{2\beta} \left[x^{2\alpha} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} \right] \Big|_{x=0} dy.$$

Вводя полярные координаты

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi, \quad y = y_0 + \rho \sin \varphi \quad (3.13)$$

в интеграле $J_1(x_0, y_0)$, получим

$$J_1(x_0, y_0) = \int_0^{2\pi} (x_0 + \rho \cos \varphi)(y_0 + \rho \sin \varphi) (\rho^2)^{\alpha+\beta-2} \times \\ \times F_2(3-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) d\varphi. \quad (3.14)$$

Исследуем подынтегральное выражение в (3.14). Применяя последовательно известные формулы [11]

$$F_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = \\ = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b_1)_i (b_2)_i}{(c_1)_i (c_2)_i i!} x^i y^i F(a+i, b_1+i; c_1+i; x) F(a+i, b_2+i; c_2+i; y)$$

и
$$F(a, b; c, x) = (1-x)^{-b} F\left(c-a, b; c, \frac{x}{x-1}\right), \quad (3.15)$$

получим формулу

$$F_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = (1-x)^{-b_1} (1-y)^{-b_2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b_1)_i (b_2)_i}{(c_1)_i (c_2)_i i!} \left(\frac{x}{1-x}\right)^i \left(\frac{y}{1-y}\right)^i \times \\ \times F\left(c_1-a, b_1+i; c_1+i; \frac{x}{x-1}\right) F\left(c_2-a, b_2+i; c_2+i; \frac{y}{y-1}\right). \quad (3.16)$$

Воспользовавшись теперь формулой (3.16), функцию Аппеля

$$F_2(3-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta)$$

запишем в виде

$$F_2(3-\alpha-\beta; 1-\alpha, 1-\beta; 2-2\alpha, 2-2\beta; \xi, \eta) = \\ = (\rho^2)^{2-\alpha-\beta} (\rho^2 + 4x_0^2 + 4x_0\rho \cos \varphi)^{\alpha-1} (\rho^2 + 4y_0^2 + 4y_0\rho \sin \varphi)^{\beta-1} P_{11}, \quad (3.17)$$

где

$$P_{11} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(3-\alpha-\beta)_i (1-\alpha)_i (1-\beta)_i}{(2-2\alpha)_i (2-2\beta)_i i!} \times \\ \times \left(\frac{4x_0^2 + 4x_0\rho \cos \varphi}{\rho^2 + 4x_0^2 + 4x_0\rho \cos \varphi} \right)^i \left(\frac{4y_0^2 + 4y_0\rho \sin \varphi}{\rho^2 + 4y_0^2 + 4y_0\rho \sin \varphi} \right)^i \times \\ \times F \left(-\alpha + \beta - 1, 1 - \alpha + i; 2 - 2\alpha + i; \frac{4x_0^2 + 4x_0\rho \cos \varphi}{\rho^2 + 4x_0^2 + 4x_0\rho \cos \varphi} \right) \times \\ \times F \left(\alpha - \beta - 1, 1 - \beta + i; 2 - 2\beta + i; \frac{4y_0^2 + 4y_0\rho \sin \varphi}{\rho^2 + 4y_0^2 + 4y_0\rho \sin \varphi} \right).$$

Используя известную формулу для $F(a, b; c; 1)$ [6]:

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, c \neq 0, -1, -2, \dots, \operatorname{Re}(c-a-b) > 0, \quad (3.18)$$

получим

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} P_{11} = \frac{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(3-\alpha-\beta)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}. \quad (3.19)$$

Таким образом, согласно (3.14), (3.17) и (3.19), окончательно получим

$$-(2-\alpha-\beta)k_4 x_0^{1-2\alpha} y_0^{1-2\beta} \lim_{\rho \rightarrow 0} J_1(x_0, y_0) = -1. \quad (3.20)$$

Далее, учитывая, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \ln \rho = 0, \quad (3.21)$$

имеем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} J_2(x_0, y_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} J_3(x_0, y_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} J_4(x_0, y_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} J_5(x_0, y_0) = 0. \quad (3.22)$$

Наконец, рассмотрим интеграл $J_6(x_0, y_0)$, который, согласно формуле (3.10), можно привести к виду (3.4), т.е.

$$J_6(x_0, y_0) = k(x_0, y_0). \quad (3.23)$$

Теперь, в силу (3.20) – (3.23) из (3.12) следует, что в точке $(x_0, y_0) \in \Omega$ имеет место тождество

$$w_1^{(4)}(x_0, y_0) = k(x_0, y_0) - 1.$$

Случай 2. Пусть теперь точка (x_0, y_0) совпадает с некоторой точкой M_0 , лежащей на кривой Γ . Проведем окружность малого радиуса ρ с центром в точке (x_0, y_0) . Эта окружность вырежет часть Γ_ρ кривой Γ . Оставшуюся часть кривой

обозначим через $\Gamma - \Gamma_\rho$. Обозначим через C'_ρ часть окружности C_ρ , лежащей внутри области Ω , и рассмотрим область Ω_ρ , ограниченную кривыми $\Gamma - \Gamma_\rho$, C'_ρ и отрезками $[0, a]$ и $[0, b]$ осей x и y соответственно. Тогда имеем

$$\begin{aligned} w_1^{(4)}(x_0, y_0) &\equiv \int_0^l x^{2\alpha} y^{2\beta} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} ds = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\rho} x^{2\alpha} y^{2\beta} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} ds. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Так как точка (x_0, y_0) лежит вне этой области, то в этой области функция $q_4(x, y; x_0, y_0)$ является регулярным решением уравнения (1.1) и в силу (2.4)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma - \Gamma_\rho} x^{2\alpha} y^{2\beta} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} ds &= \int_0^a x^{2\alpha} \left[y^{2\beta} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial y} \right]_{y=0} dx + \\ &+ \int_0^b y^{2\beta} \left[x^{2\alpha} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial x} \right]_{x=0} dy + \int_{C'_\rho} x^{2\alpha} y^{2\beta} \frac{\partial}{\partial n} \{q_4(x, y; x_0, y_0)\} ds. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Подставляя (3.25) в (3.24), с учетом (3.23) и (1.4), получим

$$w_1^{(4)}(x_0, y_0) = k(x_0, y_0) + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C'_\rho} x^{2\alpha} y^{2\beta} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} ds. \quad (3.26)$$

Вводя снова полярные координаты (3.13) в интеграле (3.26) и переходя к пределу при $\rho \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C'_\rho} x^{2\alpha} y^{2\beta} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} ds = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$w_1^{(4)}(x_0, y_0) = k(x_0, y_0) - \frac{1}{2}.$$

Случай 3. Положим, наконец, что точка (x_0, y_0) лежит вне области Ω . Тогда функция $q_4(x, y; x_0, y_0)$ есть регулярное решение уравнения (1.1) внутри области Ω с непрерывными производными всех порядков вплоть до контура Γ и в силу (2.4)

$$\begin{aligned} w_1^{(4)}(x_0, y_0) &\equiv \int_0^l x^{2\alpha} y^{2\beta} \frac{\partial}{\partial n} \{q_4(x, y; x_0, y_0)\} ds = \\ &= \int_0^a x^{2\alpha} \left[y^{2\beta} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial y} \right]_{y=0} dx + \int_0^b y^{2\beta} \left[x^{2\alpha} \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial x} \right]_{x=0} dy = k(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Лемма 1 полностью доказана.

Теорема 1. Для любых точек (x, y) и $(x_0, y_0) \in R_+^2$ при $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$, справедливо неравенство:

$$|q_4(x, y; x_0, y_0)| \leq C (xx_0)^{1-2\alpha} (yy_0)^{1-2\beta} (r_1^2)^{\alpha-1} (r_2^2)^{\beta-1} \ln \left(\frac{r^2}{r_1^2} + \frac{r^2}{r_2^2} - \frac{r^2}{r_1^2} \cdot \frac{r^2}{r_2^2} \right), \quad (3.27)$$

где C – постоянная, а α и β – действительные числа, причем $0 < 2\alpha, 2\beta < 1$, а r, r_1 и r_2 – выражения, определенные в (1.3).

Доказательство. Из (3.16), с учетом неравенства

$$F\left(-\alpha + \beta, 1 - \alpha + i; 2 - 2\alpha + i; 1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right) F\left(\alpha - \beta, 1 - \beta + i; 2 - 2\beta + i; 1 - \frac{r^2}{r_2^2}\right) \leq C_1,$$

получим

$$|q_4(x, y; x_0, y_0)| \leq C_1 k_4 \frac{(xx_0)^{1-2\alpha} (yy_0)^{1-2\beta}}{(r_1^2)^{1-\alpha} (r_2^2)^{1-\beta}} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} 2 - \alpha - \beta, 1 - \alpha, 1 - \beta; \\ 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta; \end{matrix} \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right) \left(1 - \frac{r^2}{r_2^2} \right) \right], \quad (3.28)$$

где $C_1 > 0$ – постоянная, а ${}_3F_2 \left[\begin{matrix} a_1, a_2, a_3; \\ b_1, b_2; \end{matrix} z \right]$ – обобщенная гипергеометрическая функция Гаусса [6].

Теперь, согласно формуле [6, 7],

$$F(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; z) = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)} \left\{ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} (1-z)^k \ln(1-z) + \sum_{k=0}^{\infty} d_k^+ (1-z)^k \right\},$$

где $b_1 + b_2 - a_1 - a_2 - a_3 = 0$; $|1-z| < 1$; $|\arg(1-z)| < \pi$; $\operatorname{Re} a_j > 0$; $a_j \neq 0, -1, -2, \dots$;

$j = 1, 2, 3$; c_k и d_k^+ известные постоянные, из (3.28) вытекает неравенство (3.27).

Теорема 1 доказана.

Таким образом, функция $q_4(x, y; x_0, y_0)$ имеет логарифмическую особенность при $r = 0$.

Теорема 2. Если кривая Γ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то

$$\int_{\Gamma} x^{2\alpha} y^{2\beta} \left| \frac{\partial q_4(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} \right| ds \leq C_1,$$

где C_1 – постоянная.

Доказательство теоремы 2 следует из условий (3.1) и формулы (3.10).

Формулы (3.3) показывают, что при $\mu_4(s) \equiv 1$ потенциал двойного слоя испытывает разрыв непрерывности, когда точка (x, y) пересекает кривую Γ . В случае произвольной непрерывной плотности $\mu_4(s)$ имеет место

Теорема 3. Потенциал двойного слоя $w^{(4)}(x_0, y_0)$ имеет пределы при стремлении точки (x_0, y_0) к точке $(x(s), y(s))$ кривой Γ извне или изнутри. Если предел значений $w^{(4)}(s)$ изнутри обозначить через $w_i^{(4)}(x_0, y_0)$, а предел извне через $w_e^{(4)}(x_0, y_0)$, то для непрерывной плотности $\mu_4(s)$ имеют место формулы

$$w_i^{(4)}(s) = -\frac{1}{2}\mu_4(s) + \int_0^l \mu_4(t)K_4(s,t)dt \quad (3.29)$$

$$u \quad w_e^{(4)}(s) = \frac{1}{2}\mu_4(s) + \int_0^l \mu_4(t)K_4(s,t)dt, \quad (3.30)$$

где $K_4(s,t) = [x(t)]^{2\alpha}[y(t)]^{2\beta} \frac{\partial}{\partial n} \{q_4[x(t), y(t); x_0(s), y_0(s)]\}$,

точки $(x(s), y(s))$ и $(x_0(t), y_0(t))$ лежат на кривой Γ .

Доказательство теоремы 3 следует из леммы 1 и теорем 1 и 2.

Функция

$$w_0^{(4)}(s) = \int_0^l \mu_4(t)K_4(s,t)dt$$

непрерывна при $0 \leq s \leq l$, что следует из хода доказательства теоремы 3. Принимая во внимание формулы (3.29) – (3.30) и непрерывность функций $w_0^{(4)}(s)$ и $\mu_4(s)$ при $0 \leq s \leq l$, можем утверждать, что потенциал двойного слоя $w^{(4)}(x_0, y_0)$ есть функция, непрерывная внутри области Ω вплоть до кривой Γ .

Статья поступила 12.08.2017 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957. 256 с.
2. Гюнтер Н.М. Теория потенциалов и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953. 416 с.
3. Gilbert R.P. Theoretic Methods in Partial Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering. Vol. 54. A Series of Monographs and Textbooks. New York, London: Academic Press, 1969. 308 p.
4. Hasanov A. Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex variables and Elliptic Equations. 2007. V. 52. P. 673–683.
5. Appell P., Kampe de Fariet J. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques: Polynomes d'Hermite. Paris: Gauthier – Villars, 1926. 440 p.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.
7. Srivastava H.M., Karlsson P.W. Multipl. Gaussian Hypergeometric Series, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), New York, Chichester, Brisbane and Toronto: John Wiley and Sons, 1985. 386 p.
8. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966. 292 с.
9. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.
10. Srivastava H.M., Hasanov A., Choi J. 2015. Double-Layer Potentials for a Generalized Bi-Axially Symmetric Helmholtz Equation // SoHag J. Math. 2015. V. 2. No. 1. P. 1–10.
11. Burchinall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell's double hypergeometric functions // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1940. V. 11. P. 249–270.

Ehrgashev T.G. (2017) THE FOURTH DOUBLE-LAYER POTENTIAL FOR A GENERALIZED BI-AXIALLY SYMMETRIC HELMHOLTZ EQUATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 45–56

DOI 10.17223/19988621/50/4

Applying a method of complex analysis (based upon analytic functions), R.P. Gilbert in 1969 constructed an integral representation of solutions of the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. Fundamental solutions of this equation were constructed recently. In fact, when the spectral parameter is zero, fundamental solutions of the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation can be expressed in terms of Appell's hypergeometric function of two variables of the second kind. All the fundamental solutions of the generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation are known, and only for the first one the theory of potential was constructed. In this paper, we aim at constructing a theory of double-layer potentials corresponding to the fourth fundamental solution. Using some properties of Appell's hypergeometric functions of two variables, we prove limiting theorems and derive integral equations containing double-layer potential densities in the kernel.

Keywords: generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation; Green's formula; fundamental solution; fourth double-layer potential; Appell's hypergeometric functions of two variables; integral equations with double-layer potential density.

EHRGASHEV Tuhtasin Gulamzhanovich (Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan)
E-mail: ertuhtasin@mail.ru

REFERENCES

1. Miranda C. (1970) *Partial Differential Equations of Elliptic Type. Second Revised Edition* (Translated from the Italian edition by Z.C. Motteler), *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 2*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York.
2. Gunter N.M. (1967) *Potential Theory and Its Applications to Basic Problems of Mathematical Physics* (Translated from the Russian edition by J.R. Schulenberger). New York: Frederick Ungar Publishing Company.
3. Gilbert R.P. (1969) *Theoretic Methods in Partial Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering*. Vol. 54. A Series of Monographs and Textbooks. New York and London: Academic Press.
4. Hasanov A. (2007) Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Complex variables and Elliptic Equations*. 52. pp. 673–683.
5. Appell P., Kampe de Fariet J. (1926) *Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques: Polynomes d'Hermite*. Paris: Gauthier-Villars.
6. Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. (1953) *Higher Transcendental Functions*, Vol. I, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto and London.
7. Srivastava H.M., Karlsson P.W. (1985) *Multiple Gaussian Hypergeometric Series*, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), New York, Chichester, Brisbane and Toronto: John Wiley and Sons.
8. Smirnov M.M. (1966) *Vyrozhdaiushchiesya ellipticheskie i giperbolicheskie uravneniya* [Degenerate elliptic and hyperbolic equations]. Moscow: Nauka.
9. Smirnov M.M. (1985) *Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of mixed type]. Moscow: Vysshaya Shkola.
10. Srivastava H.M., Hasanov A., Choi J. (2015) Double-Layer Potentials for a Generalized Bi-Axially Symmetric Helmholtz Equation. *Sohag J. Math.* 2(1). pp. 1–10.
11. Burchinal J.L., Chaundy T.W. (1940) Expansions of Appell's double hypergeometric functions. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 11. pp. 249–270.

МЕХАНИКА

УДК 539.374

DOI 10.17223/19988621/50/5

А.А. Афанасьев, К.К. Горностаев, А.В. Ковалёв, А.С. Чеботарев**О МЕХАНИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ
УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДИСКА
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА**

В рамках теории течения для модели Ишлинского – Прагера получено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии диска из изотропного упрочняющегося упругопластического материала под действием теплового источника, помещенного в центре диска. Проведена проверка достоверности полученного решения.

Ключевые слова: модель Ишлинского – Прагера, плоское напряженное состояние, точечный источник тепла.

Проблеме определения напряжений и деформаций в тонких дисках (в том числе вращающихся) и пластинах посвящены работы [1–4]. Учет температурных эффектов в упругих и упругопластических не вращающихся дисках приводится в работах [5, 6].

В настоящей работе, следуя [5] и [6], получено точное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии диска из изотропного идеального упругопластического материала под действием теплового источника, помещенного в центре диска. Такой процесс может иметь место при точечной контактной сварке. Задача по исследованию напряженно-деформированного состояния нагреваемого диска является логичным продолжением ряда работ, посвященных моделированию температурного поля, возникающего при точечной контактной сварке [7, 8]. Решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела [9, 10] приближенными и численными методами, в том числе методом конечных элементов, математически дополняют друг друга. Так, в данной работе приближенное решение методом малого параметра дополнено решением с помощью пакета ANSYS и распространено на случай упрочняющегося материала.

Примем, что диск будет находиться в плоском напряженном состоянии, все механические и тепловые константы материала не зависят от температуры. Вследствие осевой симметрии все искомые величины будут зависеть только от расстояния r до точечного источника. Задачу определения поля температур и напряженно-деформированного состояния будем считать несвязанной. Поскольку в окрестности теплового источника температура теоретически неограниченно высока, там сразу возникает пластическая область. Пусть $r = R$ – граница этой области. Внешнюю границу диска обозначим $r = b$.

Запишем систему уравнений осесимметричного плоско напряженного состояния упругопластического диска в цилиндрической системе координат (r, θ, z) :

- уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}, \quad (1)$$

где σ_r, σ_θ – компоненты тензора перемещений в цилиндрической системе координат (r, θ, z) ;

- соотношения Коши

$$e_r = \frac{du}{dr}, e_\theta = \frac{u}{r}, \quad (2)$$

где e_r, e_θ – компоненты тензора полных деформаций, u – компонента вектора перемещений в цилиндрической системе координат;

- связь полных деформаций с пластической и упругой составляющими

$$e_r = e_r^p + e_r^e, e_\theta = e_\theta^p + e_\theta^e, e_z = e_z^p + e_z^e. \quad (3)$$

Функцию нагружения выберем в форме, предложенной Ишлинским [7] и Прагером [8]:

$$\left(\sigma_r - \sigma_\theta - c(e_r^p - e_\theta^p)\right)^2 + \left(\sigma_r - c(e_r^p - e_z^p)\right)^2 + \left(\sigma_\theta - c(e_\theta^p - e_z^p)\right)^2 = 2k^2, \quad (4)$$

где e_r^p, e_θ^p, e_z^p – компоненты тензора пластических деформаций, c – коэффициент упрочнения, k – предел текучести.

Ассоциированный закон пластического течения тогда будет иметь вид

$$\begin{aligned} de_r^p &= 2d\psi \left(\sigma_r - \sigma_\theta - c(e_r^p - e_\theta^p - e_z^p) \right), \\ de_\theta^p &= 2d\psi \left(\sigma_\theta - \sigma_r - c(2e_\theta^p - e_r^p - e_z^p) \right), \\ de_z^p &= -2d\psi \left(\sigma_r + \sigma_\theta + c(2e_z^p - e_\theta^p - e_r^p) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $d\psi$ – малый скалярный положительный множитель.

Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука в форме

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{1-\nu} \left(e_r^e + \nu e_\theta^e - (1+\nu)\alpha T \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{2G}{1-\nu} \left(e_\theta^e + \nu e_r^e - (1+\nu)\alpha T \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного температурного расширения, T – температура.

Определим напряжения и перемещения в идеальном упругопластическом случае (коэффициент упрочнения равен 0) для функции температуры, зависящей от координат.

Из соотношений (1), (2), (6) получим уравнение для перемещений u в упругой зоне:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = (1+\nu)\alpha \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) имеет вид

$$u(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{2}r + \frac{(1+\nu)\alpha}{r} \int T r dr, \quad (8)$$

где A и B – произвольные функции. При этом, используя (2), (6), имеем

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2G \left(-\frac{A}{r^2} + \frac{B}{2} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) - \frac{(1+\nu)\alpha}{r^2} \int T r dr \right), \\ \sigma_\theta &= 2G \left(\frac{A}{r^2} + \frac{B}{2} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) + \frac{(1+\nu)\alpha}{r^2} \int T r dr - (1+\nu)\alpha T \right).\end{aligned}\quad (9)$$

Граничное условие, соответствующее свободному внешнему контуру диска, запишется в виде

$$\sigma_r|_{r \rightarrow b} = 0. \quad (10)$$

Из уравнений (1), (4) выводим уравнение для напряжений σ_r и σ_θ в пластической зоне

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -k. \quad (11)$$

Тогда из соотношений для полных деформаций (3) и ассоциированного закона пластического течения (5) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u}{r}.$$

Решением данного уравнения будет:

$$u(r) = r C. \quad (12)$$

Для определения постоянных интегрирования и радиуса упругопластической границы используем уравнение непрерывности компонент перемещений и напряжений

$$[\sigma_r]|_{r=R} = [\sigma_\theta]|_{r=R} = [u] = 0.$$

Квадратные скобки здесь означают разность соответствующих выражений в упругой и пластической областях.

Заметим, что вариант решения упругопластической задачи для неограниченной пластины и вполне определенного вида температуры приведен в книге Паркуса.

Известно, что стационарное температурное поле для кольцевого диска или цилиндрической трубы удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (13)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}T &= T_1, \text{ при } r = a, \\ T &= 0, \text{ при } r = b.\end{aligned}$$

Нетрудно установить, что решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$T(r) = T_1 \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{T_1}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{r}. \quad (14)$$

Для сплошного диска при заданной интенсивности источника тепла температурное поле, в соответствии с (14) и предположением о постоянстве количества тепла, протекающего через окружность радиуса r [6], примет следующий вид:

$$T(r) = \frac{W}{2\lambda\pi\delta} \ln\left(\frac{b}{r}\right), \quad (15)$$

где W – мощность источника тепла λ – коэффициент теплопроводности, δ – толщина диска,

при граничных условиях

$$T = 0, \text{ при } r = b.$$

Рассмотрим частное решение задачи для диска следующих геометрических размеров: радиус диска $b = 0.2$ м, толщина диска $\delta = 0.05$ м. К диску в центре приложен источник тепла постоянной интенсивности $W = 2000$ Вт.

Для большинства конструкционных сталей справедливы следующие константы материала: $\nu = 0.3$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $k = 250$ МПа; $\lambda = 60.5$ Вт/м·К; $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5}$ К $^{-1}$.

Определив постоянные интегрирования, с учетом приведенных выше констант материала и функции температурного поля, получим уравнение для радиуса упругопластической границы R :

$$R^2 = 0.0718 \ln R + 0.29.$$

Численное решение уравнения для радиуса упругопластической границы при приведенных значениях параметров среды и габаритах диска приводит к следующему результату – радиус упругопластической границы $R^2 = 0,0177$ м.

На рис. 1 показаны зависимости напряжений σ_r и σ_θ от радиуса диска r .

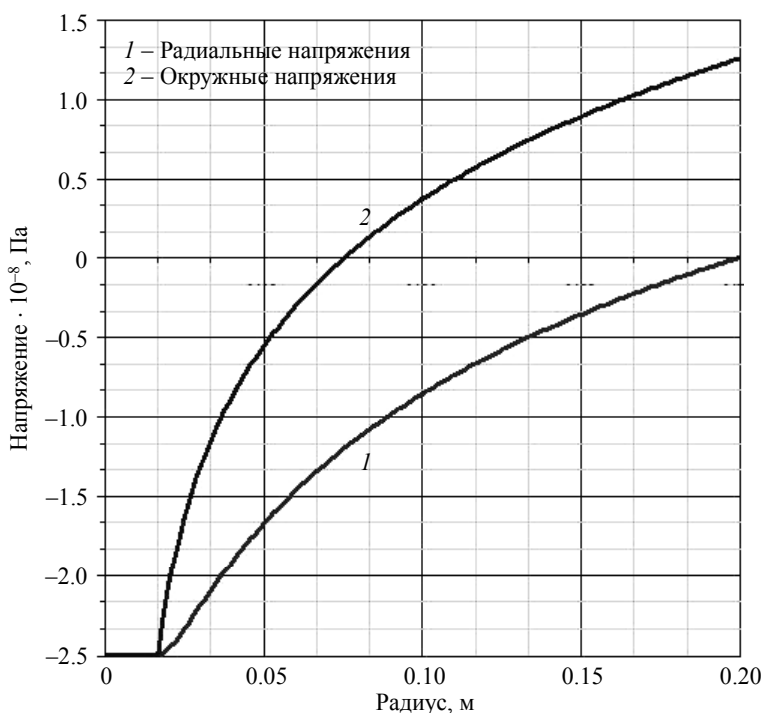


Рис. 1. Зависимость нормальных компонент напряжений от радиуса
Fig. 1. Normal stress components as functions of the radius

Данная задача без учета упрочнения также была решена с помощью пакета инженерного анализа ANSYS Mechanical, основанного на методе конечных элементов. Для экономии вычислительных ресурсов и удобства задания граничных условий рассматривалась четверть диска с заданными условиями симметрии относительно осей X и Y . Построена структурированная сетка (рис. 2), содержащая 7500 элементов Quad4 и 7651 узел.

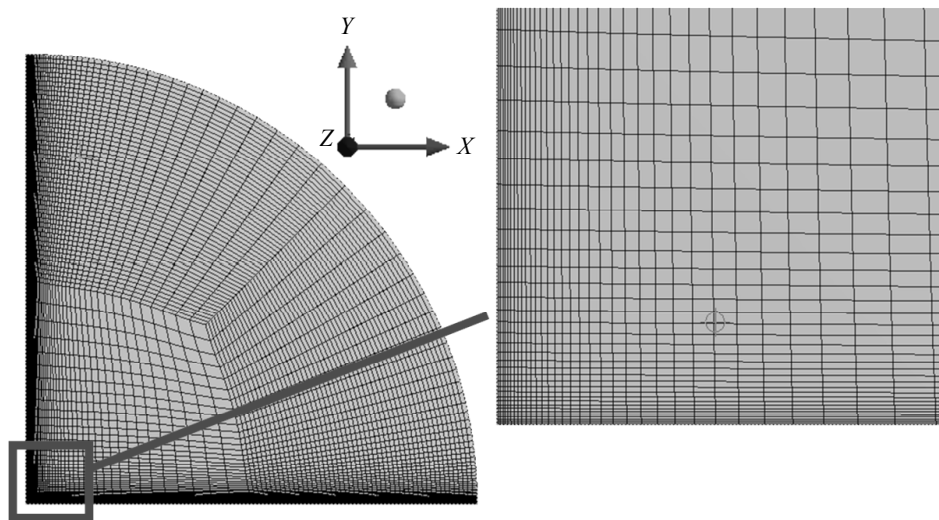


Рис. 2. Сетка для расчетной области
Fig. 2. Grid for the computational domain

Решение поставленной задачи потребовало последовательного исследования теплового состояния диска с помощью модуля Steady State Thermal и исследования напряженно-деформированного состояния под действием полученного температурного поля в модуле Static Structural.

При решении задачи заданы следующие граничные условия:

- в центральной точке приложен источник тепла постоянной интенсивности с мощностью 2000 Вт, удовлетворяющий условию (15) с предположением о постоянстве количества тепла, протекающего через окружность некоторого радиуса;
- на внешнем радиусе диска задана температура 0;
- в центре диска в узле задается отсутствие линейных степеней свободы в цилиндрической системе координат;
- задается модель кинематически упрочняющегося упругопластического материала, соответствующая модели Ишлинского – Прагера. С коэффициентом упрочнения равным 0, данная модель соответствует идеально пластическому случаю.

По результатам компьютерного моделирования получены зависимости (рис. 3) напряжений σ_r и σ_θ от радиуса диска r .

Получено совпадение результатов аналитического решения и компьютерного моделирования с точностью 0.1% для напряжений. Определим радиус упругопластической границы, исходя из условий равенства нулю компонента тензора пластических деформаций на этой границе.

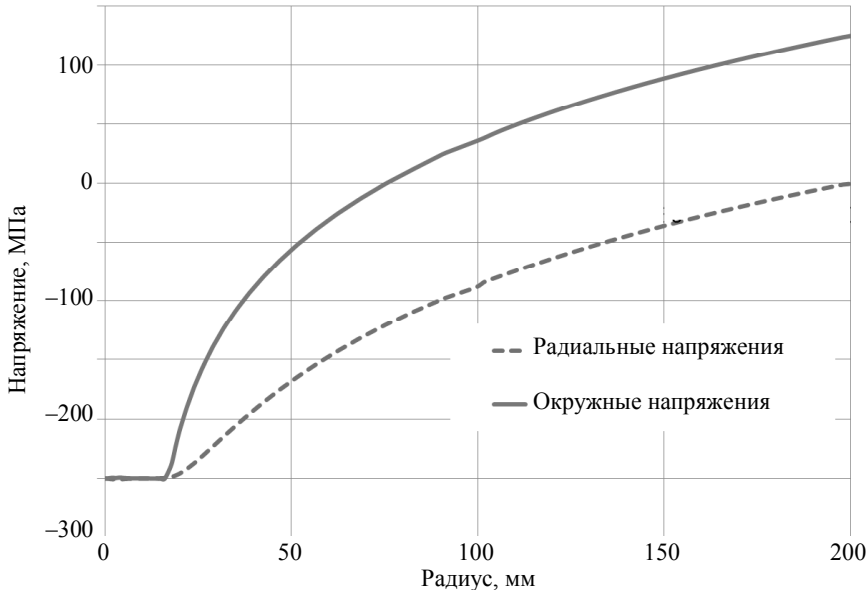


Рис. 3. Зависимость нормальных компонент напряжений от радиуса
Fig. 3. Normal stress components as functions of radius

В пластической зоне $e_r^p = e_\theta^p$ и они обращаются в ноль на радиусе 17.7 мм (рис. 4), что также совпадает с результатами аналитического решения.

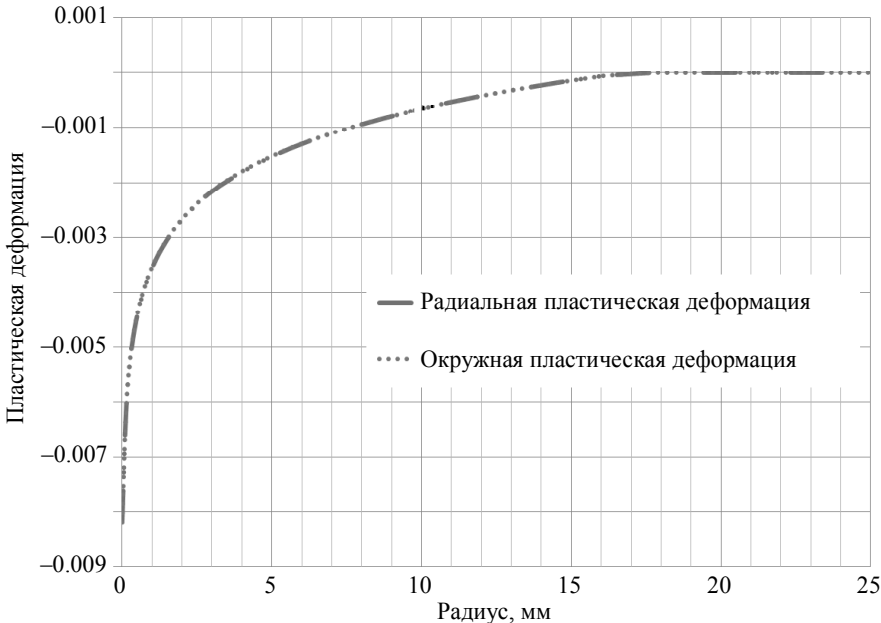


Рис. 4. Пластические деформации
Fig. 4. Plastic strains

Следует отметить, что в центре диска, где аналитическое решение несправедливо ввиду обращающейся в бесконечность температуры, в ANSYS получено определенное конечное значение температуры $T = 1036.1$ К. В основной части диска температурное поле в форме (15) совпадает с полем, полученным в ANSYS. При аналитическом решении этот факт позволяет рекомендовать к использованию температурное поле для кольцевого диска или цилиндрической трубы (14), где внутренний диаметр диска или трубы следует выбирать достаточно малым и задавать на нем некоторую конечную температуру. Что, по существу, и проделано в работе Мелана и Паркуса [6] при решении упругой задачи. Следствием ненулевой величины размера элемента в окрестности источника тепла является конечное максимальное значение температуры в центре диска, где, как отмечалось ранее, получена заметная разница температурных полей. В основной части диска получена погрешность на уровне 0.05 %.

Далее по описанному алгоритму проведено моделирование для кинематически упрочняющегося материала с коэффициентом упрочнения $c = 10000$ МПа. Такой коэффициент c наделяет материал ярко выраженным упрочнением, которое не характерно для конструкционных сталей, но позволяет нагляднее продемонстрировать разницу с идеально пластическим случаем.

Для упрочняющегося материала σ_r и σ_θ в пластической зоне не равны между собой (рис. 5). На упругопластической границе напряжения σ_r больше предела текучести, а напряжения σ_θ – меньше. В то же время радиус упругопластической границы, так же как и в идеально пластическом случае, равен 17.7 мм.

Для упрочняющегося материала получена меньшая интенсивность пластических деформаций (рис. 6). Кроме того, деформации $e_r^p \neq e_\theta^p$, причем $|e_r^p| > |e_\theta^p|$.

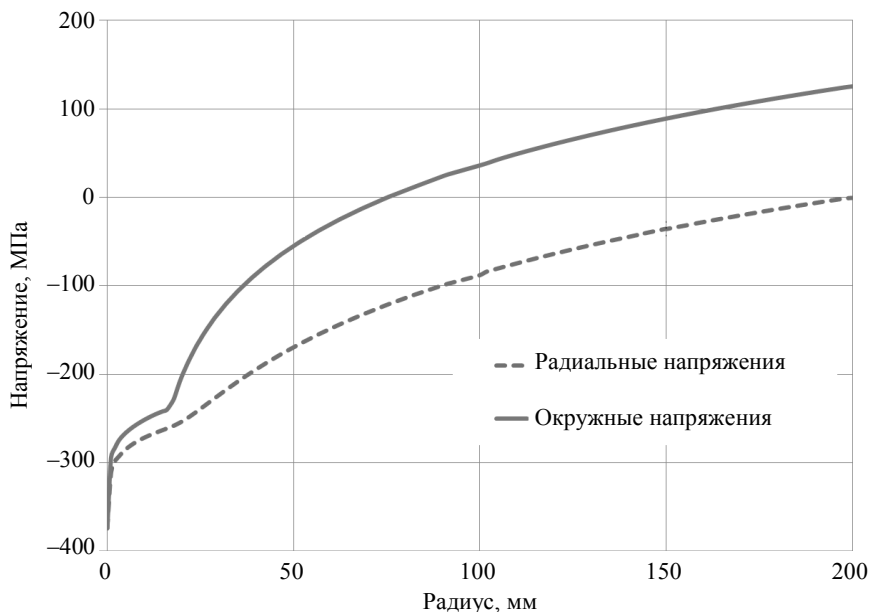


Рис. 5. Зависимость нормальных компонент напряжений от радиуса для упрочняющегося материала

Fig. 5. Normal stress components as functions of the radius for a hardening material

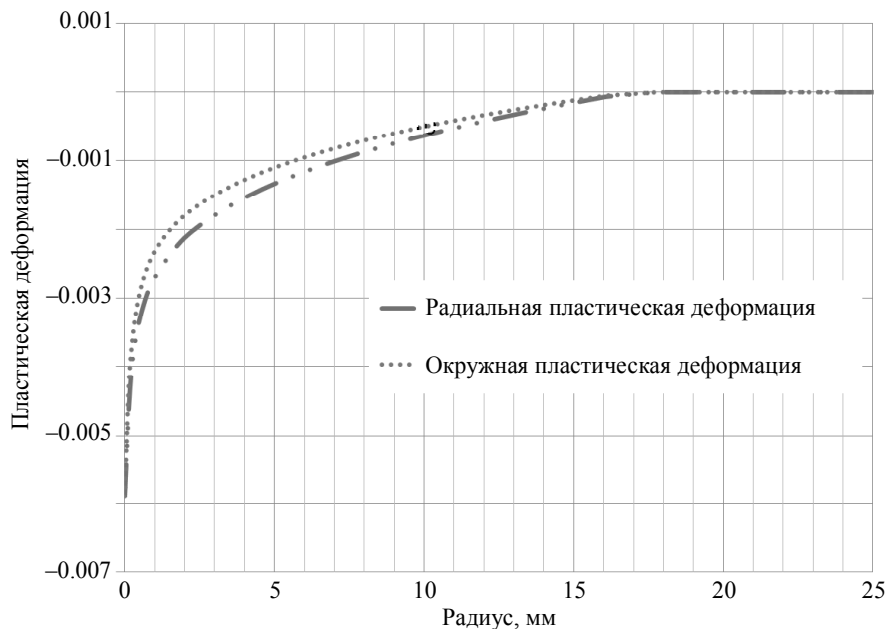


Рис. 6. Пластические деформации для упрочняющегося материала
Fig. 6. Plastic strains for a hardening material

Таким образом, в настоящей работе получено аналитическое решение задачи об идеально упругопластическом диске с приложенным в центре точечным источником тепла постоянной интенсивности. Проведено сравнение аналитического решения и решения на основе метода конечных элементов. С помощью метода конечных элементов решена задача о кинематически упрочняющемся диске (модель Ишлинского – Прагера [11, 12]) и проведено сравнение результатов полученных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. Артемов М.А., Якубенко А.П. Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска // Вестник Воронежского государственного университета. 2014. Сер.: Физика. Математика. № 1. С. 30–38.
3. Спорыхин А.Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Изд-во Воронеж, ун-та, 1997. 360 с.
4. Александров С.Е., Ломакин Е.В., Дзенг Й.Р. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443. №3. С. 310
5. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения: пер. с нем. М.: Физматлит, 1963. С. 199–206.
6. Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958.
7. Козловский С.Н. Математическое моделирование температурного поля при контактной точечной сварке // Вестник Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева. 2006. Сер.: Машиностроение. № 6. С. 4–10.
8. Борисенко Е.А., Шахматова В.А., Беляков Н.Н., Козловский С.Н. Расчетное определение температуры при точечной контактной сварке // Актуальные проблемы авиации и

- космонавтики. Общие и комплексные проблемы технических и прикладных наук и отраслей народного хозяйства. 2014. Т. 10. № 1. С. 93, 94
9. Манахов П.В., Федосеев О.Б. Оптимизация вычислений пластических деформаций в нелинейных задачах механики деформируемого твердого тела // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3(23). С. 96–103.
10. Гоцев Д.В., Перунов Н.С. Математическая модель напряженно-деформируемого состояния упруго цилиндрического тела с пористым наполнителем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 47. С. 43–50. DOI: 10.17223/19988621/47/5.
11. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журн. 1964. Т. 6. № 3. С. 314–325.
12. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956, 398 с.

Статья поступила 11.03.2017 г.

Afanas'ev A.A., Gornostaev K.K., Kovalev A.V., Chebotarev A.S. (2017) ON MECHANICAL BEHAVIOR OF THE HARDENING ELASTOPLASTIC DISK AFFECTED BY A HEAT SOURCE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 57–66

DOI 10.17223/19988621/50/5

The authors obtained an exact solution of the problem of the stress-strain state of a disk made of an isotropic hardening elastoplastic material affected by a heat source placed in the center of the disk. The disk is in a plane stress state. All mechanical and thermal constants of the material are temperature-independent. All the unknown quantities depend only on the distance to the point heat source due to axial symmetry. The temperature in the heat vicinity of the source is infinitely high.

In addition, the same problem without consideration of a hardening process was solved using ANSYS Mechanical engineering package. It should be noted that the analytical solution is unavailable due to infinite temperature in the center of the disk, but ANSYS made it possible to calculate a finite value of the temperature there.

As a result, in this paper, an analytical solution of the problem of an ideal elastoplastic disk with the point heat source in the center has been obtained. The analytical solution has been compared with results calculated using the finite element method.

Keywords: Ishlinskii – Prager model, plane stress state, point heat source.

AFANAS'EV Aleksandr Aleksandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation)
E-mail afanasyev.alex.alex@gmail.com

GORNOSTAEV Konstantin Konstantinovich (Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation)
E-mail gornostaevkonstantink@gmail.com

KOVALEV Aleksey Viktorovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation)
E-mail kav-mail@mail.ru

CHEBOTAREV Andrey Sergeevich (Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation)
Email: chebotarev@amm.vsu.ru

REFERENCES

1. Sokolovskiy V.V. (1969) *Teoriya plastichnosti* [Theory of plasticity]. Moscow: Vysshaya shkola.
2. Artemov M.A., Yakubenko A.P. (2014) Matematicheskoe modelirovanie mekhanicheskogo povedeniya vrashchayushchegosya diska [Mathematical modeling of mechanical behavior of a rotating disk]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Fizika i matematika – Proceedings of Voronezh State University. Physics and mathematics*. 1. pp. 30–38.
3. Sporykhin A.N. (1997) *Metod vozmushcheniy v zadachakh ustoychivosti slozhnykh sred* [Perturbation method in the problems of stability of complex media]. Voronezh: Izdatel'stvo Voronezh.
4. Aleksandrov S.E. (2012) Solution of the thermoelastoplastic problem for a thin disk of plastically compressible material subjected to thermal loading. *Doklady Physics*. 57(3). pp. 136–139. DOI: 10.1134/S1028335812030081.
5. Parkus H. (1963) *Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya* [Nonsteady temperature stresses]. Moscow: Fizmatgiz.
6. Melan E., Heinz P. (1958) *Temperaturnye napryazheniya, vyzvaemye statsionarnymi temperaturnymi polymi* [Thermal Stresses due to Stationary Temperature Fields]. Moscow: Fizmatgiz.
7. Kozlovskiy S.N. (2006) Mathematical modelling of the temperature field at contact spot welding. *Vestnik Sibirskogo Gosudarstvennogo Aerokosmicheskogo Universiteta im. akademika M.F. Reshetneva – Vestnik of the Siberian State University of Science and Technology Named after academician M.F. Reshetnev*. 6(13). pp. 4–10.
8. Borisenko E.A., Shakhmanova V.A., Belyakov N.N., Kozlovskiy S.N. (2014) Raschetnoe opredelenie temperatury pri tochechnoy kontaktной сварke [Computational temperature determination in spot welding]. *Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavтики. Obshchie i kompleksnye problemy tekhnicheskikh i prikladnykh nauk i otrasley narodnogo khozyaystva – Topical problems of aviation and cosmonautics. General and complex problems of technical and applied sciences and branches of national economy*. 10(1). pp. 93–94.
9. Manakhov P.V., Fedoseev O.B. (2013) Optimization of calculations of plastic deformations in nonlinear problems of deformable solid mechanics. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(23). pp. 96–103.
10. Gotsev D.V., Perunov N.S. (2017) Mathematical model of the stress-strain state of an elastic cylindrical body with a porous filler. *Vestnik tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp.43–50. DOI: 10.17223/19988621/47/5.
11. Ishlinskiy A.Yu. (1964) Obshchaya teoriya plastichnosti s lineynim uprochneniem [General theory of plasticity with a linear hardening]. *Ukrainskiy Matematicheskii Zhurnal – Ukrainian Mathematical Journal*. 6(3). pp. 314–325.
12. Prager W., Hodge P.G. (1951) *Theory of perfectly plastic solids*. John Wiley & Sons.

УДК 532.546: 519.6

DOI 10.17223/19988621/50/6

Х.М. Гамзаев

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФфуЗИИ – КОНВЕКЦИИ – РЕАКЦИИ

Рассматриваются две обратные задачи по восстановлению коэффициентов нестационарного одномерного уравнения диффузии – конвекции – реакции. Первая задача состоит в определении коэффициента конвективного переноса, зависящего лишь от временной переменной, по интегральному условию переопределения. А вторая задача заключается в определении кинетического коэффициента реакции, зависящего от времени, снова по интегральному условию переопределения. Для решения обеих задач сначала проводятся дискретизация производной по времени и используются явно- неявные схемы для аппроксимации операторов задач. Для численного решения полученных задач предлагается безытерационный вычислительный алгоритм, основанный на сведении дифференциально-разностной задачи к двум прямым краевым задачам и линейному уравнению относительно искомого коэффициента.

Ключевые слова: уравнение диффузии – конвекции – реакции, коэффициентная обратная задача, интегральное условие переопределения, дифференциально-разностная задача, явно- неявные схемы.

Известно, что для изучения многих динамических процессов в классической и магнитной гидродинамике, космической отрасли и физике космоса, ракетостроении, химической промышленности, полупроводниковых технологиях, экологии, теплопередаче, акустике и т.д. пользуются одномерным нестационарным уравнением диффузии – конвекции – реакции [1–4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(x, t)u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – физическая величина (масса, импульс, энергия и т.д.), $v(x, t)$ – коэффициент конвективного переноса (скорость конвекции), $\gamma(x, t)$ – кинетический коэффициент реакции, $k(x, t)$ – коэффициент диффузии. Слагаемое $\gamma(x, t)u$ описывает поглощения или выделения физической величины, а слагаемое $f(x, t)$ описывает действие внешнего источника.

В настоящей работе рассматриваются две коэффициентные обратные задачи для уравнения (1) по определению коэффициента конвективного переноса и кинетического коэффициента реакции, представляя их функциями лишь от временной переменной. Общим методом решения обратных задач для уравнений математической физики посвящены [5–7]. Вопросы существования и единственности, а также разрешимости некоторых коэффициентных обратных задач для параболических уравнений исследованы в [8–11]. Ряд работ посвящен численному исследованию проблемы восстановления младших коэффициентов, входящих в одномерное уравнение диффузии – конвекции – реакции [12–16].

В данной работе для решения обратной задачи по восстановлению младших коэффициентов в уравнении диффузии – конвекции – реакции предлагается численный метод, основанный на использовании явно-неявной схемы при дискретизации данного уравнения.

Постановка задачи и метод решения

Задача А. Пусть рассматривается нестационарное уравнение диффузии – конвекции – реакции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(x, t)u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

со следующими начальным и граничным условиями:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (3)$$

$$u(0, t) = \theta(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (4)$$

$$u(l, t) = r(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

Коэффициент конвективного переноса считается непрерывной и ограниченной функцией переменной t : $v = v(t)$.

Известно, что прямая задача для уравнения (2) состоит в определении функций $u(x, t)$ из уравнения (2) с заданными коэффициентами $v(t)$, $\gamma(x, t)$, $k(x, t)$, правой частью $f(x, t)$ и дополнительными условиями (3) – (5). Предположим, что помимо функции $u(x, t)$ неизвестной является также функция $v(t)$. Требуется восстановление этой функции по следующему интегральному условию переопределения:

$$\int_0^l u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

где $E(t)$ – заданная функция. Предполагается, что при этом выполняются условия согласования

$$\theta(0) = \varphi(0), \quad r(0) = \varphi(l), \quad \int_0^l \varphi(x) dx = E(0).$$

Таким образом, задача заключается в определении функций $u(x, t)$ и $v(t)$, удовлетворяющих уравнению (2) и условиям (3) – (6).

Для численного решения поставленной коэффициентной обратной задачи (2) – (6) сначала введем равномерную разностную сетку в области $0 \leq t \leq T$ по переменной t

$$\bar{\omega}_t = \{t_j = j\Delta t, \quad j = \overline{0, m}\}$$

с шагом $\Delta t = \frac{T}{m}$. Производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ в уравнении (2) при $t_j, j = \overline{1, m}$, дискретизируем разностью «назад»

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(x, t_j)} \approx \frac{u(x, t_j) - u(x, t_{j-1})}{\Delta t}.$$

Для оператора конвективного переноса используем явную аппроксимацию по времени, а для операторов диффузионного переноса и реакции – неявные аппроксимации. Следует отметить, что подобные технологии применяются при численном решении различных краевых задач для уравнения диффузии – конвекции – реакции [17]. Обозначив $u^j(x) \approx u(x, t_j)$, задачу (2) – (6) запишем в следующем виде:

$$\frac{u^j(x) - u^{j-1}(x)}{\Delta t} + v^j \frac{du^{j-1}}{dx} + \gamma^j(x) u^j(x) = \frac{d}{dx} \left(k^j(x) \frac{du^j(x)}{dx} \right) + f^j(x),$$

$$0 < x < l; \quad (7)$$

$$u^j(0) = \theta^j; \quad (8)$$

$$u^j(l) = r^j; \quad (9)$$

$$\int_0^l u^j(x) dx = E^j; \quad (10)$$

$$u^0(x) = \varphi(x); \quad (11)$$

где $v^j \approx v(t_j)$, $\gamma^j(x) = \gamma(x, t_j)$, $k^j(x) = k(x, t_j)$, $\theta^j = \theta(t_j)$,
 $r^j = r(t_j)$, $f^j(x) = f(x, t_j)$, $E^j = E(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Следует отметить, что дифференциально-разностная задача (7) – (11) аппроксимирует задачу (2) – (6) с погрешностью $O(\Delta t)$. Предположим, что решение полученной дифференциально-разностной задачи (7) – (11) на каждом временном слое $j = 1, 2, \dots, m$ можно представить в виде

$$u^j(x) = p^j(x) + v^j w^j(x), \quad (12)$$

где $w^j(x)$, $p^j(x)$ – неизвестные функции. Подставив соотношение (12) в уравнение (7), будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{p^j(x) + v^j w^j(x) - u^{j-1}(x)}{\Delta t} + v^j \frac{du^{j-1}}{dx} + \gamma^j(x) p^j(x) + v^j \gamma^j(x) w^j(x) = \\ & = \frac{d}{dx} \left(k^j(x) \frac{dp^j(x)}{dx} \right) + v^j \frac{d}{dx} \left(k^j(x) \frac{dw^j(x)}{dx} \right) + f^j(x) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \left[\frac{p^j(x) - u^{j-1}(x)}{\Delta t} + \gamma^j(x) p^j(x) - \frac{d}{dx} \left(k^j(x) \frac{dp^j(x)}{dx} \right) - f^j(x) \right] + \\ & + v^j \left[\frac{w^j(x)}{\Delta t} + \frac{du^{j-1}}{dx} + \gamma^j(x) w^j(x) - \frac{d}{dx} \left(k^j(x) \frac{dw^j(x)}{dx} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Соотношение (12) также подставим в (8), (9):

$$p^j(0) + v^j w^j(0) = \theta^j,$$

$$p^j(l) + v^j w^j(l) = r^j.$$

В силу произвольности переменной v^j из последних соотношений можно получить следующие краевые задачи относительно функций $w^j(x)$, $p^j(x)$:

$$\frac{p^j(x) - u^{j-1}(x)}{\Delta t} + \gamma^j(x)p^j(x) - \frac{d}{dx} \left(k^j(x) \frac{dp^j(x)}{dx} \right) - f^j(x) = 0, \quad 0 < x < l; \quad (13)$$

$$p^j(0) = \theta^j; \quad (14)$$

$$p^j(l) = r^j; \quad (15)$$

$$\frac{w^j(x)}{\Delta t} + \frac{du^{j-1}}{dx} + \gamma^j(x)w^j(x) - \frac{d}{dx} \left(k^j(x) \frac{dw^j(x)}{dx} \right) = 0, \quad 0 < x < l; \quad (16)$$

$$w^j(0) = 0; \quad (17)$$

$$w^j(l) = 0, \quad (18)$$

$$j = 1, 2, \dots, m;$$

$$u^0(x) = \varphi(x).$$

А подстановка (12) в условие переопределения (10) дает

$$\int_0^l p^j(x) dx + v^j \int_0^l w^j(x) dx = E^j. \quad (19)$$

Из полученных соотношений можно конструировать следующий вычислительный алгоритм для численного решения задачи (7) – (11) по определению $u^j(x)$, v^j , $j = 1, 2, \dots, m$:

- для фиксированного значения временного слоя j определяются решения задач (13) – (15) и (16) – (18), т.е. функции $p^j(x)$ и $w^j(x)$ на отрезке $[0, l]$;

- из соотношения (19) определяется приближенное значение искомой функции $v(t)$ при $t = t_j$

$$v^j = \frac{E^j - \int_0^l p^j(x) dx}{\int_0^l w^j(x) dx};$$

- по формуле $u^j(x) = p^j(x) + v^j w^j(x)$ определяется приближение искомой функции $u(x, t)$ при $t = t_j$;

- при переходе на следующий временной слой описанная процедура вычислений снова повторяется.

Для численного решения задач (13) – (15) и (16) – (18) можно использовать метод конечных разностей. Введем равномерную разностную сетку в области $[0 < x < l]$ по переменной x

$$\bar{\omega}_x = \{x_i = i\Delta x, \quad i = \overline{0, n}, \quad \Delta x = l/n\}.$$

Дискретные аналоги задач (13) – (15) и (16) – (18) на сетке $\bar{\omega}_x$ представим в виде

$$\frac{p_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} + \gamma_i^j p_i^j - \frac{1}{\Delta x} \left[k_{i+1/2}^j \frac{p_{i+1}^j - p_i^j}{\Delta x} - k_{i-1/2}^j \frac{p_i^j - p_{i-1}^j}{\Delta x} \right] - f_i^j = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$p_0^j = \theta^j, \quad (20)$$

$$p_n^j = r^j;$$

$$\frac{w_i^j}{\Delta t} + \frac{u_i^{j-1} - u_{i-1}^{j-1}}{\Delta x} + \gamma_i^j w_i^j - \frac{1}{\Delta x} \left[k_{i+1/2}^j \frac{w_{i+1}^j - w_i^j}{\Delta x} - k_{i-1/2}^j \frac{w_i^j - w_{i-1}^j}{\Delta x} \right] = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$w_0^j = 0, \quad (21)$$

$$w_n^j = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, m;$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, n},$$

где $w_i^j \approx w^j(x_i)$, $u_i^{j-1} \approx u^{j-1}(x_i)$, $p_i^j \approx p^j(x_i)$, $\gamma_i^j = \gamma^j(x_i)$,
 $f_i^j = f^j(x_i)$, $k_{i\pm 1/2}^j = k^j(x_i \pm \Delta x/2)$.

Разностные задачи (20) и (21) при каждом фиксированном значении $j = 1, 2, \dots, m$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Для решения этих систем можно использовать алгоритм Томаса (метод прогонки) [6].

Задача В. Пусть рассматривается нестационарное уравнение диффузии – конвекции – реакции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(t)u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (22)$$

со следующими начальным и граничным условиями:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (23)$$

$$u(0, t) = \theta(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (24)$$

$$u(l, t) = r(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (25)$$

Кинетический коэффициент реакции предполагается непрерывной и ограниченной функцией переменной t : $\gamma = \gamma(t)$.

Предположим, что помимо функции $u(x, t)$ неизвестной является также функция $\gamma(t)$. Требуется восстановление этой функции по следующему интегральному условию переопределения:

$$\int_0^l u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (26)$$

Предполагается, что выполняются условия согласования. Снова дискретизируем производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ разностью «назад» в уравнении (22) при t_j , $j = \overline{1, m}$, и используя явную аппроксимацию по времени для оператора реакции, а неявные аппроксимации – для операторов диффузионного и конвективного переноса, задачу (22) – (26) запишем в следующем виде:

$$\frac{u^j(x) - u^{j-1}(x)}{\Delta t} + v^j(x) \frac{du^j}{dx} + \gamma^j u^{j-1}(x) = \frac{d}{dx} \left(k^j(x) \frac{du^j(x)}{dx} \right) + f^j(x),$$

$$0 < x < l; \quad (27)$$

$$u^j(0) = \theta^j; \quad (28)$$

$$u^j(l) = r^j; \quad (29)$$

$$\int_0^l u^j(x) dx = E^j; \quad (30)$$

$$u^0(x) = \varphi(x), \quad (31)$$

где $\gamma^j \approx \gamma(t_j)$, $v^j(x) = v(x, t_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Дифференциально-разностная задача (27) – (31) также аппроксимирует задачу (22) – (26) с погрешностью $O(\Delta t)$.

Предположим, что решение дифференциально-разностной задачи (27) – (31) на каждом временном слое $j = 1, 2, \dots, m$ можно представить в виде

$$u^j(x) = p^j(x) + \gamma^j w^j(x), \quad (32)$$

где $w^j(x)$, $p^j(x)$ – неизвестные функции. Подставив соотношение (32) в (27) – (30) будем иметь

$$\left[\frac{p^j(x) - u^{j-1}(x)}{\Delta t} + v^j(x) \frac{dp^j}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k^j(x) \frac{dp^j(x)}{dx} \right) - f^j(x) \right] +$$

$$+ \gamma^j \left[\frac{w^j(x)}{\Delta t} + v^j(x) \frac{dw^j}{dx} + u^{j-1}(x) - \frac{d}{dx} \left(k^j(x) \frac{dw^j(x)}{dx} \right) \right] = 0,$$

$$p^j(0) + \gamma^j w^j(0) = \theta^j,$$

$$p^j(l) + \gamma^j w^j(l) = r^j.$$

Отсюда получим следующие краевые задачи относительно функций $p^j(x)$, $w^j(x)$:

$$\frac{p^j(x) - u^{j-1}(x)}{\Delta t} + v^j(x) \frac{dp^j}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k^j(x) \frac{dp^j(x)}{dx} \right) - f^j(x) = 0, \quad 0 < x < l; \quad (33)$$

$$p^j(0) = \theta^j; \quad (34)$$

$$p^j(l) = r^j; \quad (35)$$

$$\frac{w^j(x)}{\Delta t} + v^j(x) \frac{dw^j}{dx} + u^{j-1}(x) - \frac{d}{dx} \left(k^j(x) \frac{dw^j(x)}{dx} \right) = 0, \quad 0 < x < l; \quad (36)$$

$$w^j(0) = 0; \quad (37)$$

$$w^j(l) = 0, \quad (38)$$

$$j = 1, 2, \dots, m;$$

$$u^0(x) = \varphi(x).$$

Подставив (32) в условие переопределения (30), имеем

$$\int_0^l p^j(x)dx + v^j \int_0^l w^j(x)dx = E^j. \quad (39)$$

Таким образом, получим следующий вычислительный алгоритм для численного решения задачи (27) – (31) по определению $u^j(x)$, γ^j , $j = 1, 2, \dots, m$:

- для фиксированного значения временного слоя j определяются решения задач (33) – (35) и (36) – (38), т.е. функции $p^j(x)$ и $w^j(x)$ на отрезке $[0, l]$;

- из соотношения (39) определяется приближенное значение искомой функции $\gamma(t)$ при $t = t_j$

$$\gamma^j = \frac{E^j - \int_0^l p^j(x)dx}{\int_0^l w^j(x)dx};$$

- по формуле $u^j(x) = p^j(x) + \gamma^j w^j(x)$ определяется приближение искомой функции $u(x, t)$ при $t = t_j$;

- при переходе на следующий временной слой описанная процедура вычислений повторяется.

Для численного решения задач (33) – (35) и (36) – (38) можно использовать метод конечных разностей. Дискретные аналоги задач (33) – (35) и (36) – (38) на сетке $\bar{\omega}_x$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{p_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} + v_i^{j+} \frac{p_i^j - p_{i-1}^j}{\Delta x} + v_i^{j-} \frac{p_{i+1}^j - p_i^j}{\Delta x} - \\ & - \frac{1}{\Delta x} \left[k_{i+1/2}^j \frac{p_{i+1}^j - p_i^j}{\Delta x} - k_{i-1/2}^j \frac{p_i^j - p_{i-1}^j}{\Delta x} \right] - f_i^j = 0, i = \overline{1, n-1}; \\ & p_0^j = \theta^j; \\ & p_n^j = r^j; \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \frac{w_i^j}{\Delta t} + v_i^{j+} \frac{w_i^j - w_{i-1}^j}{\Delta x} + v_i^{j-} \frac{w_{i+1}^j - w_i^j}{\Delta x} + u_{i-1}^j - \\ & - \frac{1}{\Delta x} \left[k_{i+1/2}^j \frac{w_{i+1}^j - w_i^j}{\Delta x} - k_{i-1/2}^j \frac{w_i^j - w_{i-1}^j}{\Delta x} \right] = 0, i = \overline{1, n-1}; \\ & w_0^j = 0; \\ & w_n^j = 0; \\ & u_i^0 = \varphi(x_i), i = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $v_i^{j\pm} = \frac{v_i^j \pm |v_i^j|}{2}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Полученные разностные задачи (40) и (41) также при каждом фиксированном значении $j = 1, 2, \dots, m$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, и для решения этих систем можно использовать алгоритм Томаса.

Результаты численных расчетов

На основе предложенных вычислительных алгоритмов были проведены численные эксперименты для модельных задач. Ниже приводятся результаты численного эксперимента для двух модельных задач.

Задача А. Требуется найти функции $u(x,t)$ и $v(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + v(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{10}{5x + 3 \sin(x+t)} u &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{10x}{5 + 3 \cos(x+t)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ &+ 3 \cos(x+t) + (5 + 3 \cos(x+t))(3 + 2 \cos 100t), \\ 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) &= 5x + 3 \sin x, \\ u(0, t) &= 3 \sin t, \\ u(1, t) &= 5 + 3 \sin(1+t), \\ \int_0^1 u(x, t) dx &= 2.5 - 3 \cos(1+t) + 3 \cos t. \end{aligned}$$

Точным решением данной задачи являются функции

$$u(x,t) = 5x + 3 \sin(x+t), \quad v(t) = 3 + 2 \cos 100t.$$

Результаты численного решения задачи приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Численные результаты по задаче А

t_j	Значение функции $v(t)$	
	Точное	Вычисленное при $\Delta t = 10^{-4}$, $\Delta x = 5 \cdot 10^{-3}$
0.1	1.322	1.321
0.2	3.816	3.814
0.3	3.309	3.306
0.4	1.666	1.665
0.5	4.930	4.929
0.6	1.095	1.094
0.7	4.267	4.266
0.8	2.779	2.778
0.9	2.104	2.103
1.0	4.725	4.724

Задача В. Требуется найти функции $u(x, t)$ и $\gamma(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{8}{5t+2x} \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(t)u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{8x}{5t+2x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 5x + (5tx + x^2)(500 - 300 \sin 10^3 t),$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = x^2,$$

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = 5t + 1,$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 2.5t + 1/3.$$

Точным решением данной задачи являются функции

$$u(x, t) = 5tx + x^2, \quad \gamma(t) = 500 - 300 \sin 10^3 t.$$

Результаты численного решения задачи В приведены в табл. 2.

Таблица 2

Численные результаты по задаче В

t_j	Значение функции $\gamma(t)$	
	Точное	Вычисленное при $\Delta t = 10^{-4}$, $\Delta x = 5 \cdot 10^{-3}$
0.1	651.910	651.988
0.2	761.989	761.999
0.3	799.927	799.957
0.4	755.276	755.476
0.5	640.332	640.445
0.6	486.745	486.820
0.7	336.809	336.855
0.8	231.809	231.838
0.9	200.659	200.682
1.0	251.936	251.962

Как показывают результаты численного эксперимента, искомые функции $v(t)$ и $\gamma(t)$ восстанавливаются с достаточно высокой точностью. Максимальная относительная погрешность восстановления искомого коэффициента в задаче А не превышает 0.13 %, а в задаче В – 0.08 %. Анализ результатов численного экспериментирования свидетельствует, что для *повышения точности* решений достаточно использовать *мелкие шаги разностной сетки*.

Заключение

Рассмотрены коэффициентные обратные задачи для одномерного нестационарного уравнения диффузии – конвекции – реакции. Вычислительный алгоритм решения данных задач базируется на частичной дискретизации уравнения с использованием явно-неявных схем с последующим сведением к прямым краевым задачам. В отличие от метода регуляризации, приводящего к построению итерационных последовательностей, в предложенном подходе учитывается специфика обратных задач и решение определяется последовательно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1. 384 с.
2. Уизем Дж.Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 638 с.
3. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 528 с.
5. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издательство ЛКИ, 2009. 480 с.
7. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
8. Иванцов Н.И., Побывицкая Н.В. Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43. № 2. С. 406–413.
9. Камынин В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Матем. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 2. С. 207–2175.
10. Костин А.Б. Восстановление коэффициента перед u_t в уравнении теплопроводности по условию нелокального наблюдения по времени // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2015. Т. 55. № 1. С. 89–104.
11. Кожанов А.И. Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 6. С. 961–972.
12. Liu Yang, Jian-Ning Yu, Zui-Cha Deng. An inverse problem of identifying the coefficient of parabolic equation // Applied Mathematical Modelling. 2008. V. 32. Iss. 10. P. 1984–1995.
13. Nazim B. Kerimov, Mansur I. Ismailov. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // J. Mathematical Analysis and Applications. 2012. V. 396. Iss. 2. P. 546–554.
14. Engl H.W., Zou J. A new approach to convergence rates analysis of Tikhonov regularization for parameter identification in heat conduction // Inverse Problems. 2000. V. 16. P. 1907–1923.
15. Deng Z.C., Qian K., Rao X.B., Yang L. and Luo G.W. An inverse problem of identifying the source coefficient in a degenerate heat equation // Inverse Problems in Science and Engineering. 2015. 23(3). P. 498–517.
16. Dehghan M., Tatari M. Determination of a control parameter in a one-dimensional parabolic equation using the method of radial basis functions // Math. Comput. Modell. 2006. V. 44. pp. 1160–1168.
17. Вабищевич П.Н., Васильева М.В. Явно-неявные схемы для задач конвекции – диффузии – реакции // Сиб. журн. вычисл. матем. 2012. Т. 15. № 4. С. 359–369.

Статья поступила 04.09.2017 г.

Gamzaev Kh.M. (2017) A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR DIFFUSION-CONVECTION-REACTION EQUATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 67–78

DOI 10.17223/19988621/50/6

The two inverse problems on the restoration of coefficients for nonstationary one-dimensional diffusion – convection – reaction equation are considered. The first problem is intended to determine the convective transfer coefficient, which depends only on the time in accordance with the integral overdetermination condition. The second problem allows one to obtain the reaction rate coefficient depending on the time according to the integral overdetermination condition. To solve these problems, at first, a discretization of the time derivative is implemented and the explicit-implicit schemes are used to approximate the operators in both problems. For convective

transfer operator in the first problem and reaction operator in the second problem, the explicit scheme was used. For the rest of operators in these problems, the implicit scheme was applied. As a result, both problems are reduced to the differential-difference problems with respect to the functions that depend on the spatial variable. For numerical solution of the problems obtained, a non-iterative computational algorithm is proposed. It is based on reducing of the differential-difference problem to two direct boundary-value problems and to a linear equation with respect to unknown coefficient. The proposed method was used to carry out the numerical experiments for the model problems.

Keywords: diffusion – convection – reaction equation, coefficient inverse problem, integral overdetermination condition, differential-difference problem, explicit-implicit schemes.

GAMZAEV Khanlar Mekhvali ogly (Doctor of Technical Sciences, Professor, Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan)

E-mail: xan.h@rambler.ru

REFERENCES

1. Anderson D., Tannehill K., Pletcher R. (1984) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. New York.
2. Whitham G.B. (1974) *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons Inc.
3. Paskonov V.M., Polezhaev V.I., Chudov L.A. (1984) *Chislennoe modelirovanie protsessov teplo-i-massobmena* [Numerical modeling of heat and mass transfer processes]. Moscow: Nauka.
4. Roache P.J. (1976) *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque: Hermosa Publishers.
5. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. (1988) *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme methods for solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka.
6. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. (2009) *Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* [Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics]. Moscow: Publishing house LCI.
7. Kabanikhin S.I. (2009) *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and ill-posed problems]. Novosibirsk: Siberian Scientific publishers.
8. Ivanchov N.I., Pabyrivska N.V. (2002) On determination of two time-dependent coefficients in a parabolic equation. *Siberian Mathematical Journal*. 43(2). pp. 323–329. DOI: 10.1023/A:1014749222472.
9. Kamynin V.L. (2013) The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation. *Mathematical Notes*. 94(2). pp. 205–213. DOI: 10.1134/S0001434613070201.
10. Kostin A.B. (2015) Recovery of the coefficient of u_t in the heat equation from a condition of nonlocal observation in time. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 55(1). pp. 85–100. DOI: 10.1134/S0965542515010121.
11. Kozhanov A.I. (2017) Parabolic equations with unknown time-dependent coefficients. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 57(6). pp. 956–966. DOI: 10.1134/S0965542517060082.
12. Liu Yang, Jian-Ning Yu, Zui-Cha Deng. (2008) An inverse problem of identifying the coefficient of parabolic equation. *Applied Mathematical Modelling*. 32(10). pp. 1984–1995. DOI: 10.1016/j.apm.2007.06.025.
13. Kerimov N.B., Ismailov M.I. (2012) An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 396(2). pp. 546–554. DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.06.046.
14. Engl H.W., Zou J. (2000) A new approach to convergence rates analysis of Tikhonov regularization for parameter identification in heat conduction. *Inverse Problems*. 16. pp. 1907–1923. DOI: 10.1088/0266-5611/16/6/319.
15. Deng Z.C., Qian K., Rao X.B., Yang L., Luo G.W. (2015) An inverse problem of identifying the source coefficient in a degenerate heat equation. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 23(3). pp. 498–517. DOI: 10.1080/17415977.2014.922079.

16. Dehghan M., Tatari M. (2006) Determination of a control parameter in a one-dimensional parabolic equation using the method of radial basis functions. *Mathematical and Computer Modelling*. 44(11–12). pp. 1160–1168. DOI: 10.1016/j.mcm.2006.04.003.
17. Vabishchevich P.N., Vasil'eva M.V. (2012) Explicit-implicit schemes for convection-diffusion-reaction problems. *Numerical Analysis and Applications*. 5(4). pp. 297–306. DOI: 10.1134/S1995423912040027.

УДК 533.92

DOI 10.17223/19988621/50/7

А.А. Ляхов, В.И. Струнин

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КИНЕТИКИ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ
В АРГОН-СИЛАНОВОЙ ПЛАЗМЕ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА¹**

Путем численного решения уравнений диффузии для нейтральных компонентов с учетом протекания химических реакций в газовой фазе проведено моделирование состава аргон-силановой плазмы тлеющего разряда. Анализируется вклад наиболее значимых химических реакций в кинетику образования и гибели различных компонентов плазмы. Исследуется кинетика реагентов в зависимости от времени пребывания рабочего газа в разрядной зоне. Обсуждается вопрос о количестве компонентов, включаемых в модель. Показано, что для интервалов времени $t \leq 10^{-2}$ с компоненты Si_nH_x ($n \geq 3$) не существенны для моделирования химической кинетики пленкообразующих радикалов.

Ключевые слова: *силановая плазма, процессы переноса в химически активной плазме, аморфный кремний.*

В современной технологии производства электронных компонент большую роль играют пленочные материалы на основе кремния – аморфный и поликристаллический кремний, диэлектрики SiO_2 , SiN_x и др. Среди различных методов получения кремниевых пленок плазмохимические способы обладают некоторыми преимуществами. В неравновесной плазме протекание эндотермических реакций диссоциации осуществляется за счет процессов электронного удара, благодаря чему обеспечивается синтез нужных материалов при низкой температуре рабочего газа. Многокомпонентный состав, большое количество газофазных реакций и высокая химическая активность реагентов в плазмохимических системах осаждения осложняют экспериментальное изучение таких сред. Поэтому при их разработке широко применяют методы математического моделирования, с помощью которых выполняют расчеты многих параметров газоразрядной плазмы, важных с точки зрения разработки и оптимизации технологий [1].

К настоящему времени моделирование газовых разрядов достигло высокого уровня совершенства – разработаны комплексные модели, содержащие совместное описание электромагнитных процессов, кинетики электронного газа, процессов переноса заряженных частиц, химической кинетики реагентов, поверхностных процессов и др. Структурно эти модели состоят из нескольких взаимосвязанных блоков (модулей), моделирующих отдельные физико-химические процессы, протекающие в газовом разряде [2]. Полные модели газовых разрядов обеспечивают нахождение самосогласованных («плазменных») решений, но требуют значительных вычислительных ресурсов. В качестве альтернативы полномасштабному моделированию в некоторых случаях выступают более простые расчеты, в которых моделируются отдельные подсистемы плазменной среды. Так, рассмотрение процессов переноса и химических превращений нейтральных частиц в объ-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-42-550936 p_a.

еме разряда в виде независимой задачи имеет самостоятельное значение, поскольку позволяет сравнительно простым образом оценить пространственно-временное распределение компонентов плазмы, ответственных за формирование пленок. Объем вычислений при этом оказывается небольшим. Такой подход неоднократно применялся для расчета состава плазмы в силансодержащих газах [3–6]. Естественно, что электрические характеристики плазмы (концентрация электронов, напряженность электрического поля и др.) вводятся в модель в таком случае в качестве свободных параметров. Величины этих параметров могут быть взяты из экспериментальных данных.

В процессе моделирования химической кинетики плазменных частиц параллельно с решением основной задачи – определением концентрации компонентов, представляется полезным рассматривать удельные вклады отдельных реакций в прирост или убыль наиболее значимых продуктов разложения. Такая информация позволяет установить взаимосвязи между содержанием компонентов в газовой фазе и наиболее существенными химическими реакциями, а также исследовать вопросы о дополнительных каналах образования радикалов (например, при внесении добавок в исходную рабочую смесь или усложнении описания элементарных процессов). В конечном итоге это дает возможность глубже понять как механизмы плазмохимического процесса, так и пути воздействия на него.

В данной работе с использованием диффузионной модели переноса нейтральных частиц проведен анализ кинетики реакций, ответственных за образование и убыль наиболее важных компонентов, при режимах, соответствующих осаждению пленок аморфного кремния в аргон-силановой плазме тлеющего разряда.

Постановка задачи

Математической основой модели служат уравнения диффузии нейтральных частиц в газоразрядной камере цилиндрической геометрии с учетом химических реакций, протекающих в газовой фазе:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = D_k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n_k}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 n_k}{\partial z^2} \right) + S_k(r, z), \quad (1)$$

где $n_k = N_k/N_1$ – относительная концентрация нейтральных частиц сорта k (N_1 – начальная концентрация молекулярного компонента рабочей смеси); D_k – скалярный коэффициент диффузии; $S_k(r, z)$ – источниковое слагаемое, учитывающее рождение и гибель реагентов сорта k в результате химических реакций. Если ограничиться только бимолекулярными реакциями, то выражение для этого слагаемого можно представить в виде

$$S_k(r, z) = \sum_{i=1}^{L_k} w_{k,i} N_1 k_i n_{A(i)} n_{B(i)} - n_k \sum_{j=1}^{P_k} N_1 k_j^* n_{C(j)}. \quad (2)$$

Прирост концентрации определяет первая сумма в (2), где $w_{k,i}$ – стехиометрический коэффициент k -го компонента, рождающегося в i -й реакции; $n_{A(i)}$ и $n_{B(i)}$ обозначают концентрации реагентов сортов $A(i)$ и $B(i)$ в реакции с порядковым номером i и константой скорости k_i . Здесь индексная запись $A(i)$ указывает на зависимость сорта реагентов от i -й реакции. Второе слагаемое в (2) учитывает полную убыль компонента в различных реакциях с частицами сортов $C(j)$, протекающих с константами скоростей k_j^* . Пределы сумм L_k и P_k – количество реакций, отвечающих за прирост и убыль компонента k соответственно.

Для всех компонентов на границе расчетной области используются соотношения, вытекающие из равенства падающего и отраженного потоков. Вероятность прилипания при этом характеризуется эффективным коэффициентом прилипания β_k .

$$D_k \frac{\partial n_k}{\partial q} \bigg|_{\substack{r=R \\ z=L}} = \frac{\beta_k n_k v_{T,k}}{2(2-\beta_k)}, \quad q = r, z, \quad (3)$$

где $v_T = \sqrt{8kT/\pi M}$ – средняя скорость частиц с массой M . На оси используется условие симметрии радиального потока

$$D_k \frac{\partial n_k}{\partial r} \bigg|_{r=0} = 0. \quad (4)$$

Система взаимосвязанных уравнений (1) с граничными условиями (3), (4) аппроксимируется конечно-разностной двухслойной продольно-поперечной схемой на равномерной пространственной сетке. Порядок аппроксимации схемы равен $O(\tau + h_r^2 + h_z^2)$, где τ – шаг интегрирования по времени, h_r и h_z – шаги пространственной сетки по координатам r и z . Краевые условия аппроксимировались формулами второго порядка точности. Получаемые в результате дискретизации системы линейных уравнений решаются методом прогонки на каждом временном полуслое.

Выбор количества компонентов и связанных с ними реакций, включаемых в модель, в полимеризующемся газе, к которым относится силан, не вполне однозначен. В первую очередь, это касается элементов, появляющихся в результате вторичных реакций. Для них априорно сложно предсказать кинетические взаимосвязи и скорость накопления в объеме разряда. Здесь был использован набор, который помимо рабочего газа $\text{Ar} + \text{SiH}_4$ включает следующие компоненты: SiH_x , ($x = 1-3$), Si , H , H_2 , Si_2H_y ($y = 2-6$), Si_3H_7 , Si_3H_8 , Si_4H_9 , Si_4H_{10} , Si_5H_{11} , Si_5H_{12} , а также метастабильные состояния аргона Ar^* . Такой набор можно считать достаточным для описания начальных стадий полимеризации силана. Ниже в разделе 3 показано, что если специальным образом не интересоваться кинетикой тяжелых радикалов, то для не слишком больших времен пребывания газа компонентный состав модели может быть сокращен.

Коэффициенты диффузии компонентов D_k предварительно рассчитывались по формуле Уилке для многокомпонентных смесей [5]:

$$D_k = (n - n_k) \left[\sum_{j=1, j \neq k} n_j / D_{jk} \right]^{-1}, \quad (5)$$

где n – суммарная концентрация смеси, n_k – концентрация k -го компонента, D_{jk} – коэффициенты бинарной диффузии, которые, в свою очередь, вычислялись по формуле молекулярно-кинетической теории через параметры потенциала Леннарда – Джонса [7]:

$$D_{jk} = \frac{3}{16} \frac{(4\pi k_B T / 2\mu_{jk})^{1/2}}{N\pi\sigma_{jk}^2\Omega_{jk}^*(T_{jk}^*)} = 1.412308 \frac{\sqrt{T^3/\mu_{jk}}}{p\sigma_{jk}^2\Omega_{jk}^*(T_{jk}^*)} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}. \quad (6)$$

Здесь T – температура газа в К, $\mu_{jk} = m_j m_k / (m_j + m_k)$ – приведенная масса частиц j -го и k -го сортов в а.е.м., $p = Nk_B T$ – давление в Торр, $\sigma_{jk} = (\sigma_j + \sigma_k)/2$ – эффективный диаметр сечения столкновения частиц в ангстремах. $T_{jk}^* = k_B T / \epsilon_{jk}$ – характеристическая температура, где $\epsilon_{jk} = (\epsilon_j \epsilon_k)^{1/2}$ – глубина ямы потенциала межмолекулярного взаимодействия, $\Omega_{jk}^*(T_{jk}^*)$ – интеграл столкновений для переноса массы, нормированный на Ω -интеграл для модели твердых сфер. Вычисление $\Omega_{jk}^*(T_{jk}^*)$ проводится

по аппроксимационной формуле, приведенной в [7]. Параметры σ_j, ϵ_j для компонентов модели взяты из [4, 7].

Значения коэффициентов диффузии D_k , а также коэффициентов прилипания β_k , использованные в расчете приведены в табл. 1. Список химических реакций, включенных в модель, представлен в табл. 2. Константы скоростей процессов с участием электронов, (реакции R1-R9), определяются в модели по функции распределения электронов по энергии (ФРЭЭ) путем численного решения однородного уравнения Больцмана (в таблице они отмечены символом F). При расчете ФРЭЭ использовались известные данные по сечениям столкновений электронов с Ar и SiH₄ [7]. Значения остальных констант скоростей взяты из [4, 7, 8].

Таблица 1

Коэффициенты диффузии ($p = 0.1$ Торр, $T = 500$ К) и прилипания [7]

Компонент	$D_k, \text{см}^2/\text{с}$	β_k
SiH ₄	140.30	0.00
Ar	167.78	0.00
SiH ₃	150.42	0.15
SiH ₂	162.10	1.00
SiH	176.18	1.00
Si	123.41	1.00
H	1149.40	0.00
H ₂	677.96	0.00
Si ₂ H ₂	106.41	1.00
Si ₂ H ₃	103.40	1.00
Si ₂ H ₄	100.62	1.00
Si ₂ H ₅	97.75	0.15
Si ₂ H ₆	95.12	0.00
Si ₃ H ₈	74.21	0.00
Si ₃ H ₇	93.77	0.15
Si ₄ H ₉	67.91	0.15
Si ₄ H ₁₀	67.84	0.00
Si ₅ H ₁₁	57.35	0.15
Si ₅ H ₁₂	57.31	0.00
Ar*	148.59	0.00

Таблица 2

Химические реакции и константы их скоростей

№	Реакция	$k, \text{см}^3/\text{с}$	№	Реакция	$k, \text{см}^3/\text{с}$
1	$e + \text{SiH}_4 = e + \text{SiH}_3 + \text{H}$	F	30	$\text{Si}_2\text{H}_4 + \text{H}_2 = \text{SiH}_4 + \text{SiH}_2$	$3.56 \cdot 10^{-9}$
2	$e + \text{SiH}_4 = e + \text{SiH}_2 + 2\text{H}$	F	31	$\text{Si}_2\text{H}_5 + \text{H} = \text{Si}_2\text{H}_4 + \text{H}_2$	$1.00 \cdot 10^{-10}$
3	$e + \text{SiH}_4 = \text{SiH} + \text{H} + \text{H}_2 + e$	F	32	$\text{Si}_2\text{H}_6 + \text{H} = \text{SiH}_4 + \text{SiH}_3$	$6.70 \cdot 10^{-12}$
4	$e + \text{SiH}_4 = \text{SiH}_2 + \text{H}_2 + e$	F	33	$\text{Si}_2\text{H}_6 + \text{H} = \text{Si}_2\text{H}_5 + \text{H}_2$	$1.30 \cdot 10^{-12}$
5	$e + \text{H}_2 = e + 2\text{H}$	F	34	$\text{Si}_2\text{H}_3 + \text{H}_2 = \text{Si}_2\text{H}_5$	$1.70 \cdot 10^{-12}$
6	$e + \text{Si}_2\text{H}_6 = e + \text{SiH}_4 + \text{SiH}_2$	F	35	$\text{Si}_3\text{H}_8 + \text{H} = \text{Si}_2\text{H}_5 + \text{SiH}_4$	$1.97 \cdot 10^{-11}$
7	$e + \text{Si}_2\text{H}_6 = e + \text{Si}_2\text{H}_4 + \text{H}_2$	F	36	$\text{Ar}^* + \text{SiH}_4 = \text{SiH}_2 + 2\text{H} + \text{Ar}$	$2.60 \cdot 10^{-10}$
8	$e + \text{Ar} = e + \text{Ar}^*$	F	37	$\text{Ar}^* + \text{SiH}_4 = \text{SiH}_3 + \text{H} + \text{Ar}$	$1.40 \cdot 10^{-10}$
9	$e + \text{Ar}^* = e + \text{Ar}$	F	38	$\text{Ar}^* + \text{H}_2 = 2\text{H} + \text{Ar}$	$7.00 \cdot 10^{-11}$
10	$e + \text{Ar}^* = e + \text{Ar}^+ + e$	F	39	$\text{Ar}^* + \text{SiH}_3 = \text{SiH}_2 + \text{H} + \text{Ar}$	$1.00 \cdot 10^{-10}$
11	$\text{SiH}_4 + \text{H} = \text{SiH}_3 + \text{H}_2$	$2.80 \cdot 10^{-11}$	40	$\text{Ar}^* + \text{SiH}_2 = \text{SiH} + \text{H} + \text{Ar}$	$1.00 \cdot 10^{-10}$
12	$\text{SiH}_4 + \text{SiH} = \text{Si}_2\text{H}_3 + \text{H}_2$	$2.18 \cdot 10^{-11}$	41	$\text{Ar}^* + \text{SiH} = \text{Si} + \text{H} + \text{Ar}$	$1.00 \cdot 10^{-10}$

Окончание табл. 2

№	Реакция	k , см ³ /с	№	Реакция	k , см ³ /с
13	$\text{SiH}_4 + \text{SiH} = \text{Si}_2\text{H}_5$	$2.50 \cdot 10^{-12}$	42	$\text{Ar}^* + \text{Si}_2\text{H}_6 = \text{Si}_2\text{H}_4 + 2\text{H} + \text{Ar}$	$6.60 \cdot 10^{-10}$
14	$\text{SiH}_3 + \text{H} = \text{SiH}_2 + \text{H}_2$	$5.00 \cdot 10^{-10}$	43	$\text{Ar}^* + \text{Si}_2\text{H}_6 = \text{Si}_2\text{H}_2 + 2\text{H} + \text{Ar}$	$6.60 \cdot 10^{-10}$
15	$\text{SiH}_2 + \text{H}_2 = \text{SiH}_4$	$7.66 \cdot 10^{-15}$	44	$\text{Ar}^* + \text{Ar}^* = \text{Ar}^+ + \text{Ar} + \text{e}$	$8.00 \cdot 10^{-9}$
16	$\text{SiH}_2 + \text{H} = \text{SiH} + \text{H}_2$	$2.31 \cdot 10^{-11}$	45	$\text{SiH}_2 + \text{Si}_2\text{H}_6 = \text{Si}_3\text{H}_8$	$2.03 \cdot 10^{-11}$
17	$\text{SiH}_2 + \text{SiH} = \text{Si}_2\text{H}_3$	$7.22 \cdot 10^{-13}$	46	$\text{SiH} + \text{Si}_2\text{H}_6 = \text{Si}_3\text{H}_7$	$1.00 \cdot 10^{-11}$
18	$\text{SiH}_3 + \text{SiH}_3 = \text{SiH}_4 + \text{SiH}_2$	$3.00 \cdot 10^{-11}$	47	$\text{SiH}_2 + \text{Si}_3\text{H}_8 = \text{Si}_4\text{H}_{10}$	$1.00 \cdot 10^{-11}$
19	$\text{SiH}_2 + \text{SiH}_2 = \text{Si}_2\text{H}_2 + \text{H}_2$	$1.08 \cdot 10^{-9}$	48	$\text{Si}_3\text{H}_8 + \text{SiH}_3 = \text{Si}_4\text{H}_9 + \text{H}_2$	$1.00 \cdot 10^{-11}$
20	$\text{SiH}_3 + \text{SiH}_2 = \text{Si}_2\text{H}_5$	$3.77 \cdot 10^{-13}$	49	$\text{Si}_2\text{H}_5 + \text{Si}_2\text{H}_5 = \text{Si}_4\text{H}_{10}$	$1.00 \cdot 10^{-11}$
21	$\text{SiH}_4 + \text{Si}_2\text{H}_4 = \text{Si}_3\text{H}_8$	$1.00 \cdot 10^{-10}$	50	$\text{Si}_2\text{H}_4 + \text{Si}_2\text{H}_6 = \text{Si}_4\text{H}_{10}$	$1.00 \cdot 10^{-11}$
22	$\text{SiH} + \text{H} = \text{Si} + \text{H}_2$	$1.70 \cdot 10^{-10}$	51	$\text{Si}_3\text{H}_7 + \text{H} = \text{Si}_3\text{H}_8$	$1.00 \cdot 10^{-11}$
23	$\text{SiH}_4 + \text{Si} = \text{Si}_2\text{H}_2 + \text{H}_2$	$1.62 \cdot 10^{-13}$	52	$\text{SiH} + \text{Si}_3\text{H}_8 = \text{Si}_4\text{H}_9$	$1.00 \cdot 10^{-11}$
24	$\text{SiH}_2 + \text{Si} = \text{Si}_2\text{H}_2$	$4.53 \cdot 10^{-13}$	53	$\text{Si}_4\text{H}_9 + \text{H} = \text{Si}_4\text{H}_{10}$	$1.00 \cdot 10^{-11}$
25	$\text{SiH}_4 + \text{SiH}_2 = \text{Si}_2\text{H}_6$	$1.05 \cdot 10^{-11}$	54	$\text{SiH} + \text{Si}_4\text{H}_{10} = \text{Si}_5\text{H}_{11}$	$1.00 \cdot 10^{-11}$
26	$\text{Si}_2\text{H}_2 + \text{H} = \text{Si}_2\text{H}_3$	$4.94 \cdot 10^{-11}$	55	$\text{SiH}_2 + \text{Si}_4\text{H}_{10} = \text{Si}_5\text{H}_{12}$	$1.00 \cdot 10^{-11}$
27	$\text{Si}_2\text{H}_2 + \text{H}_2 = \text{Si}_2\text{H}_4$	$1.40 \cdot 10^{-11}$	56	$\text{SiH}_3 + \text{Si}_4\text{H}_{10} = \text{Si}_5\text{H}_{11} + \text{H}_2$	$1.00 \cdot 10^{-11}$
28	$\text{SiH}_4 + \text{Si}_2\text{H}_5 = \text{SiH}_3 + \text{Si}_2\text{H}_6$	$5.00 \cdot 10^{-13}$	57	$\text{Si}_5\text{H}_{11} + \text{H} = \text{Si}_5\text{H}_{12}$	$1.00 \cdot 10^{-11}$
29	$\text{SiH}_3 + \text{Si}_2\text{H}_6 = \text{SiH}_4 + \text{Si}_2\text{H}_5$	$2.76 \cdot 10^{-12}$			

Связь системы уравнений (1) с плазменными параметрами в данной модели осуществляется через пространственный профиль концентрации электронов и значения констант скоростей электронно-индуцированных процессов, фигурирующих в членах $S_k(r, z)$. Концентрации электронов устанавливалась равной $n_e = 10^8 \text{ см}^{-3}$. По длине разрядного промежутка распределение электронов задавалось равномерным, а по радиусу аппроксимировалось косинусоидальным спадом. Начальная концентрация метастабильных частиц аргона была принята $0.01n_e$.

Результаты и их обсуждение

Расчет состава выполнялся для плазмохимического реактора с радиусом $R = 6 \text{ см}$ и длиной $L = 3 \text{ см}$. Задавались следующие параметры: рабочий газ $\text{Ar} + 5\% \text{ SiH}_4$, давление $p = 0.1 \text{ Торр}$, температура $T = 500 \text{ К}$. Величина приведенного поля E/N , необходимая для расчета ФРЭЭ, принималась равной $1 \cdot 10^{-15} \text{ В} \cdot \text{см}^2$.

Зависимости относительных концентраций компонентов от времени приведены на рис. 1. Концентрация SiH_3 , наиболее важного радикала для осаждения пленок, относительно медленно выходит на стационарный уровень. Концентрации атомарного водорода и радикала SiH принимают стационарные значения в течение 10^{-3} с . Несколько позже устанавливается концентрация SiH_2 . Молекулярный водород, образующийся при диссоциации силана, имеет значительное содержание в составе плазмы. Его концентрация сопоставима с концентрацией SiH_3 . Обращает на себя внимание большое количество синтезируемого дисилана Si_2H_6 , который, как и H_2 , накапливается в объеме. Концентрации радикалов Si_2H_x ($2 \leq x \leq 5$) для указанного временного интервала примерно на 2 порядка меньше, чем концентрации радикалов SiH_3 (относительная концентрация Si_2H_4 очень мала, $\sim 10^{-13}$), но скорость накопления этих компонентов достаточно высокая.

На рис. 2 – 4 представлены гистограммы удельных вкладов химических реакций, наиболее существенным образом влияющих на кинетику изменения некоторых компонентов аргон-силановой плазмы. В каждой гистограмме приведены три группы данных, соответствующих времени пребывания газа в реакторе $t = 10^{-4}$, 10^{-3} и 10^{-2} с .

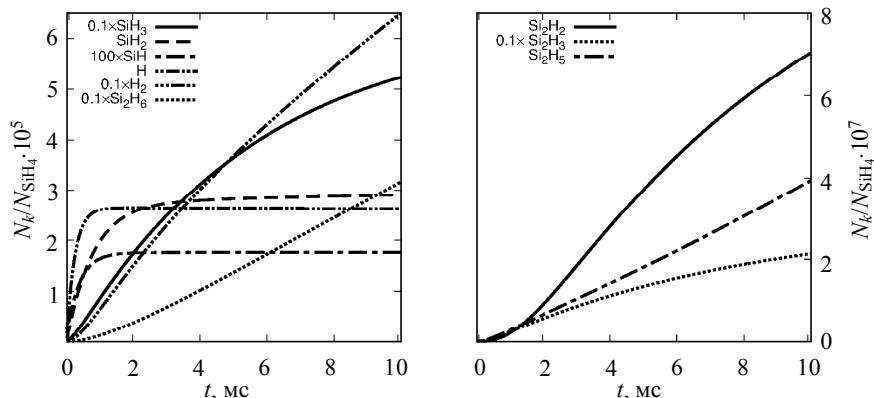


Рис. 1. Концентрации компонентов в аргон-силановой плазме (Ar+5 % SiH₄, $p = 0.1$ Торр., $E/N = 1 \cdot 10^{-15}$ В·см²)

Fig. 1. Densities of components in an argon-silane plasma (Ar+5 % SiH₄, $p = 0.1$ Torr, and $E/N = 1 \cdot 10^{-15}$ V·cm²)

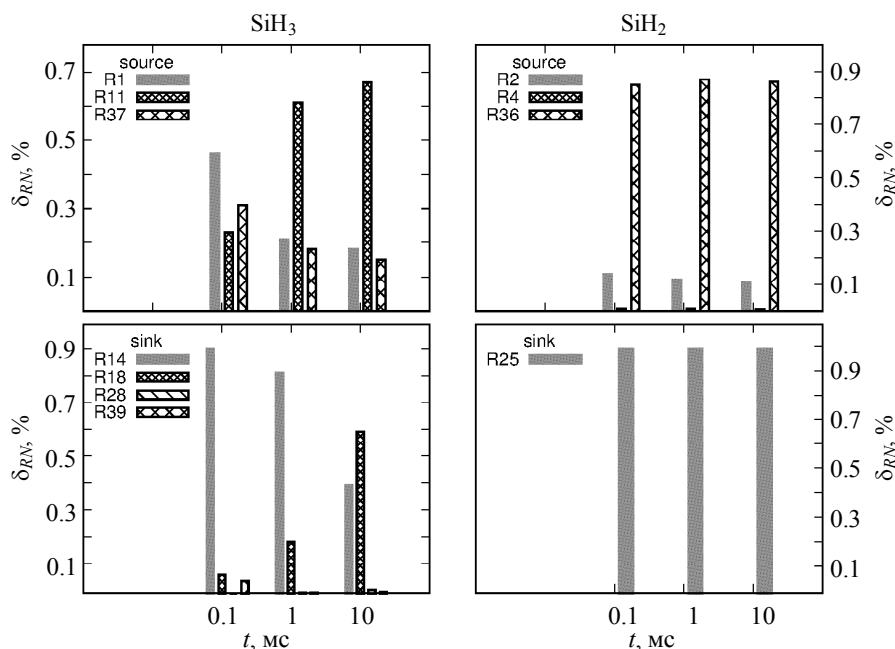


Рис. 2. Относительный вклад реакций в прирост (source) и убыль (sink) радикалов SiH₃ и SiH₂ для трех значений времени $t = 10^{-4}$, 10^{-3} и $5 \cdot 10^{-3}$ с

Fig. 2. Relative contribution of reactions to the source and sink of radicals SiH₃ and SiH₂ for three time values: $t = 10^{-4}$, 10^{-3} , and $5 \cdot 10^{-3}$ s

Из рис. 2 видно, что прирост SiH₃ обусловлен диссоциацией силана электронным ударом – реакция R1 (имена реакций Rx соответствуют их порядковым номерам в табл. 1), столкновениями с метастабильными атомами аргона – реакция R37, а также реакцией R11, вклад которой в образование SiH₃ возрастает по мере увеличения времени. Это может быть объяснено постепенным накоплением водо-

рода в реакторе. Столкновения SiH_3 с атомарным водородом (реакция R14) и между собой (реакция R18) определяют убыль этого радикала. При этом вклад реакции R18 со временем увеличивается.

Для радикала SiH_2 с течением времени кинетика реакций не изменяется. Прирост идет, главным образом, за счет диссоциации силана метастабильными состояниями аргона. Вклад реакции R2 – диссоциации электронным ударом, не превышает 15 %. Накопление SiH_2 в объеме почти полностью лимитируется его реакцией с силаном (процесс R25), в результате которой активно образуется Si_2H_6 .

Прирост SiH обусловлен исключительно диссоциацией электронным ударом (см. рис.3). Процесс диссоциации атомарным водородом по каналу R22 вклада практически не дает, несмотря на значительную константу скорости. Гибель SiH происходит на 90 % за счет реакции полимеризации силана R12 и R13, которая дает 10 % убыли.

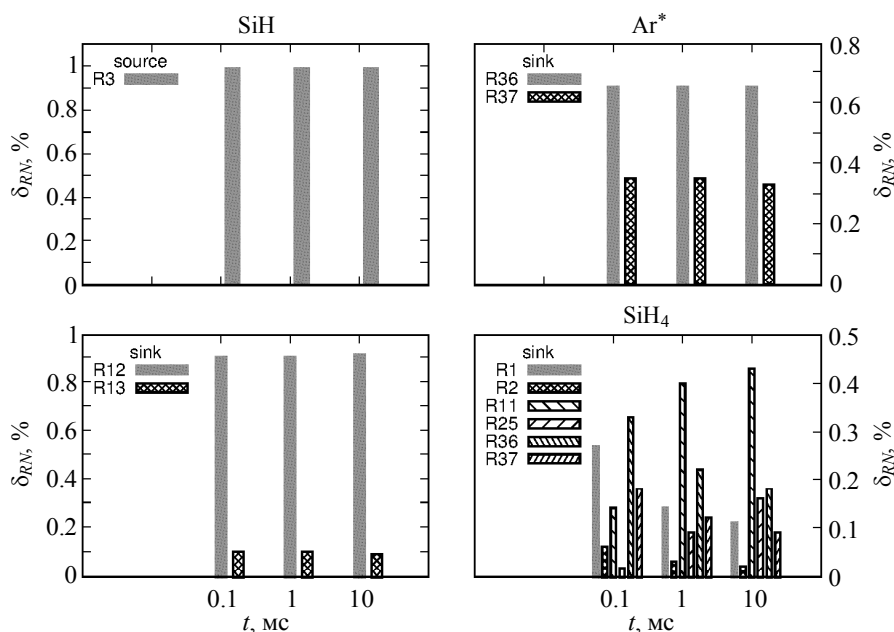


Рис. 3. Относительный вклад реакций в прирост (source) и убыль (sink) радикала SiH , убыль метастабильных атомов аргона Ar^* и убыль силана SiH_4

Fig. 3. Relative contribution of reactions both to the source and sink of radical SiH , to the sink of metastable argon atoms Ar^* , and to the sink of silane SiH_4

Как отмечалось выше, диссоциация силана метастабильными частицами Ar^* дает существенный вклад в прирост радикалов SiH_3 и SiH_2 . Эти два канала, «полезные» с точки зрения наработки указанных радикалов, и являются основными для убыли Ar^* (см. рис. 3). Доля девозбуждения метастабильных атомов электронами (сверхупругий процесс R9) по результатам расчетов не превышала $10^{-4}\%$.

Из гистограммы реакций убыли SiH_4 видно, что с течением времени в каналах диссоциации силана происходит смещение от диссоциации электронным ударом и метастабильными частицами Ar^* в сторону превалирования канала R11 – взаимодействия с водородом. При $t = 10^{-4}$ с на долю электронного процесса R1 прихо-

дится 27 %, на реакции R36 и R37 суммарно 50 %. При $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с на R1 только ~11 %, реакции с метастабильными частицами аргона дают ~27 %, а более половины прореагировавшего газа диссоциирует по реакции R11.

Одновременно с процессом разложения силана происходит активное образование водорода H и H₂. Набор реакций, определяющих прирост и убыль водорода, и их относительные вклады на протяжении времени не изменяются (рис. 4). Столкновения Ar* с SiH₄ определяют, в основном, появление атомарного водорода. Доля электронных процессов не превышает 30 %. Уход атомов H почти на 100 % обеспечивается реакцией R1, в которой происходит отрыв одной из водородных связей у силана с образованием молекул H₂. Эта реакция в итоге дает основной прирост H₂ (не менее 97 %). Возвратные (по отношению к R11) процессы диссоциации молекул водорода электронным ударом и метастабильными частицами аргона (реакции R5, R38) являются основными каналами убыли H₂, но в приросте H они не существенны. Молекулярный водород эффективно заполняет недостающие водородные связи у радикалов Si_nH_x ($n \geq 2$). Поэтому с накоплением таких радикалов в убыли H₂ начинают сказываться дополнительные каналы (см. рис. 4).

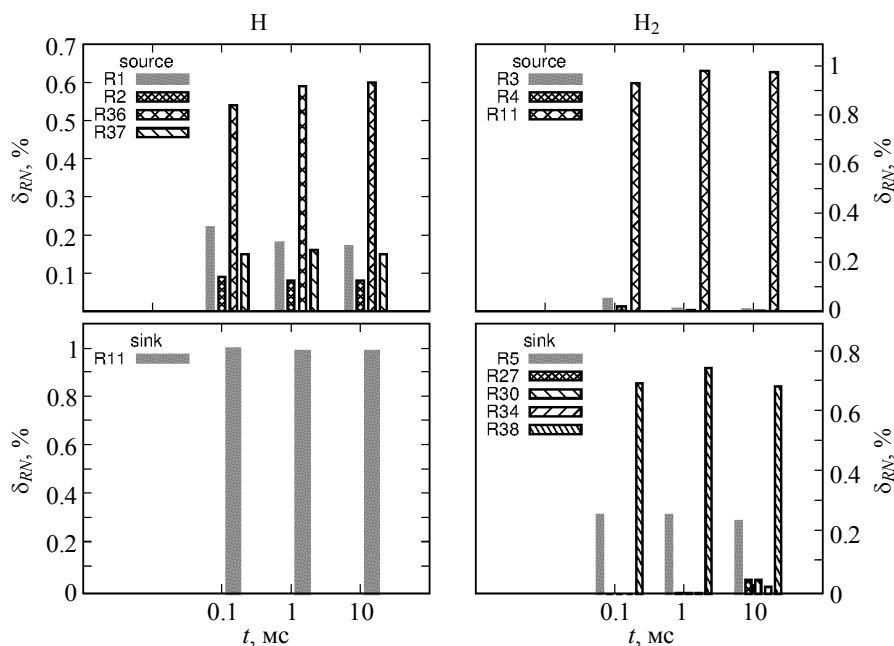


Рис. 4. Вклад реакций в прирост и убыль атомарного и молекулярного водорода
Fig. 4. Contribution of reactions to the source and sink of atomic and molecular hydrogen

На рассматриваемых временах пребывания газа в разрядной зоне ($t \leq 10^{-2}$ с) вклад реакций с участием тяжелых радикалов Si_nH_x ($n \geq 3$) в прирост и убыль наиболее важных компонентов, приведенных на рис. 2 – 4, очень мал. Следовательно, влиянием этих компонентов на химическую кинетику можно пренебречь и допустимо их исключить из модели.

Далее мы провели моделирование состава для тех же самых параметров, что были указаны выше, но исключили из модели компоненты Si_nH_x ($n \geq 3$). Из списка

реакций, представленных в табл. 2, были оставлены только те реакции с их участием, в которых эти компоненты рождаются при столкновении более легких частиц. Такие реакции являются каналами гибели для радикалов Si_2H_x , поэтому должны быть сохранены. Итого, в сокращенной модели рассматривалось 14 компонентов и 47 реакций. Для времени моделирования $t = 10^{-2}$ с полученные в такой модели концентрации радикалов SiH_3 , SiH_2 , SiH , водорода H и H_2 , а также Si_2H_3 , Si_2H_5 , Si_2H_6 практически совпали с вышеприведенными результатами более полной модели (20 компонентов и 57 реакций) (рис. 1). Этот результат подтверждает предположение о незначительности вклада компонент Si_nH_x ($n \geq 3$).

Таким образом, численный анализ химической кинетики радикалов позволяет, исходя из относительно полного набора компонентов и химических реакций для определенной рабочей смеси, выявить подмножество, которое является достаточным для описания изучаемого плазмохимического процесса на определенном интервале времени.

Из приведенного анализа реакций в аргон-силановой плазме следует, что режимы плазмохимического процесса, в которых реализуется время пребывания рабочего газа $t > 10^{-3}$ с, являются неоптимальными с точки зрения осаждения пленок кремния. При больших временах в рабочем объеме успевают накапливаться полисиланы и их радикалы Si_nH_x ($n \geq 2$), которые способствуют дальнейшей полимеризации рабочего газа. Для рассматриваемой плазмохимической системы с параметрами, указанными выше (геометрические размеры $R = 6$ см, $L = 3$ см, давление $p = 0.1$ мм рт.ст.) выполнение условия $t \leq 10^{-3}$ с, в приближении идеального вытеснения, соответствует большому натеканию газа $Q \geq 2500$ std.см³/мин, что неэкономично с точки зрения расхода рабочей смеси. Естественный способ достижения необходимой скорости прокачки газа через разрядный промежуток при приемлемых расходах газа заключается в уменьшении объема реактора. Но в традиционных схемах осаждения уменьшение объема камеры ограничивается размерами подложки, располагаемой на одном из электродов. Такое ограничение отсутствует в струйном плазмохимическом способе [9], где осаждение продуктов разложения происходит в объеме, конструктивно отделенным от области генерации плазмы. Объем разрядной камеры при этом может быть достаточно малым, поэтому реализовать необходимые условия по времени пребывания газа в рабочей зоне заметно проще.

Выводы и заключение

Проведенный численный анализ реакций в аргон-силановой плазме показал, что при времени пребывания газа $t > 10^{-3}$ с радикалы силана начинают активно участвовать в процессе полимеризации. При этом в рабочем объеме наблюдается рост концентраций соединений Si_2H_x ($2 \leq x \leq 6$). Реакции взаимодействия этих компонентов с силаном, его радикалами и водородом, «запускают» следующую ступень полимеризации – формирование соединений с еще большим содержанием кремния. В этой связи можно считать, что при времени пребывания газа $t > 10^{-3}$ с компонентный состав плазмы изменяется и условия для получения кремниевых пленок ухудшаются.

Временной анализ кинетики реакций, определяющих рост и убыль компонентов, может использоваться в качестве метода определения такого минимального набора реагентов и реакций, включаемых в модель, которые достаточны для количественного описания ключевых компонентов плазмы при заданном временном

интервале. Редукция к модели с меньшим количеством реагентов позволяет снизить вычислительные затраты с сохранением точности расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Graves D.B., Kushner M.J.* Influence of modeling and simulation on the maturation of plasma technology: feature evolution and reactor design. // *J. Vac. Sci. Technol. A.* 2003. V. 21. P. 152–156. DOI: 10.1116/1.1600447.
2. *Dijk van J., Bogaerts A.* Plasma modelling and numerical simulation // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2009. V. 42. P. 190301. DOI: 10.1088/0022-3727/42/19/190301.
3. *Горбачев Ю.Е., Затевахин М.А., Каганович И.Д.* Моделирование роста пленок аморфного гидрированного кремния из ВЧ разрядной плазмы // *Журн. техн. физики.* 1996. Т. 66. № 12. С. 89–110.
4. *Kushner M.J.* A model for discharge kinetics and plasma chemistry during plasma enhanced chemical vapor deposition of amorphous silicon // *J. Appl. Phys.* 1988. V. 63. P. 2532–2551. DOI: 10.1063/1.340989.
5. *Горбачев Ю.Е., Затевахин М.А., Кржижановская В.В. и др.* Особенности скорости роста пленок гидрированного аморфного кремния в PECVD-реакторах // *Журн. техн. физики.* 2000. Т. 70. № 8. С. 77–86.
6. *Струнин В.И., Ляхов А.А., Худайбергенов Г.Ж. и др.* Моделирование процесса разложения силана в высокочастотной плазме // *Журн. техн. физики.* 2002. Т. 72. № 6. С. 109–114.
7. *Perrin J., Leroy O., Bordage M.C.* Cross-sections, rate constants and transport coefficients in silane plasma chemistry // *Contrib. Plasma Phys.* 1996. V. 36. P. 3–49. DOI: 10.1002/ctpp.2150360102.
8. *Leroy O., Gousset G., Alves L.L. et al.* Two-dimensional modeling of SiH₄–H₂ radio-frequency discharges for a-Si:H deposition // *Plasma Sour. Sci. Tech.* 1998. V. 7. P. 348–358. DOI: 10.1088/0963-0252/7/3/013.
9. *Способ* нанесения пленок аморфного кремния и устройство для его осуществления: пат. Рос. Федерация 2188878 // Баранова Л.В., Струнин В.И., Худайбергенов Г.Ж. и др. № 2000119336/28.

Статья поступила 06.07.2017 г.

Lyakhov A.A., Strunin V.I. (2017) NUMERICAL ANALYSIS OF THE KINETICS OF CHEMICAL REACTIONS IN AN ARGON-SILANE PLASMA OF THE GLOW DISCHARGE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 79–89

DOI 10.17223/19988621/50/7

The chemical kinetics of neutral components in an argon-silane plasma of the glow discharge is considered. The modeling of plasma chemical composition is implemented in 2D-cylinder geometry based on numerical solution of the set of coupled diffusion equations. The model includes 20 neutral species and about 60 chemical reactions. The coefficients of electron collision rate are computed using numerical solution of two-term approximation of the Boltzmann equation for electrons. The electron density is set as an input parameter with the value of 10^8 cm^{-3} . A contribution of the principal chemical reactions on the entire source and sink of different components is discussed. In modeling of the chemical kinetics of film-forming radicals, the role of higher silane radicals Si_nH_x ($n \geq 3$) is not significant up to 10^{-2} s. Consequently, if the residence time of feed gas in the reaction chamber is of about milliseconds, the effect of such components and chemical reactions, which produce them, can be neglected in the simulation of silane plasma. Calculation results obtained using the model with the quantity of components reduced to 14 give almost the same values for silane radical densities.

In modeling of plasma chemistry system, an analysis of contribution of the reactions can be used as a tool for reducing preliminary set of species and reactions to the minimal set, which is sufficient for the computations in a certain time interval.

Keywords: silane plasma, transport processes in a chemical-active plasma, amorphous silicon.

LYAKHOV Anatoliy Aleksandrovich (Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russian Federation)

E-mail: lyahov@omsu.ru

STRUNIN Vladimir Ivanovich (Doctor of Physics and Mathematics, Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russian Federation)

E-mail: strunin@omsu.ru

REFERENCES

1. Graves D.B., Kushner M.J. (2003) Influence of modeling and simulation on the maturation of plasma technology: feature evolution and reactor design. *Journal of Vacuum Science & Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films*. 21. pp. 152–156. DOI: 10.1116/1.1600447.
2. Dijk van J., Bogaerts A. (2009) Plasma modelling and numerical simulation. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 42(190301). pp. 1–14. DOI: 10.1088/0022-3727/42/19/190301.
3. Gorbachev Yu.E., Zatevakhin M.A., Kaganovich I.D. (1996) Simulation of the growth of hydrogenated amorphous silicon films from an rf plasma. *Technical Physics*. 41(12). pp. 1247–1258.
4. Kushner M.J. (1988) A model for discharge kinetics and plasma chemistry during plasma enhanced chemical vapor deposition of amorphous silicon. *Journal of Applied Physics*. 63. pp. 2532–2551. DOI: 10.1063/1.340989.
5. Gorbachev Yu.E., Zatevakhin M.A., Krzhizhanovskaya V.V. et al. (2000) Special features of the growth of hydrogenated amorphous silicon in PECVD reactors. *Technical Physics*. 45(8). pp. 1032–1041. DOI: 10.1134/1.1307013.
6. Strunin V.I., Lyakhov A.A., Khudaybergenov, G.Zh. et al. (2002) Numerical simulation of silane decomposition in an RF plasma. *Technical Physics*. 47(6). pp. 760–766. DOI: 10.1134/1.1486201.
7. Perrin J., Leroy O., Bordage M.C. (1996) Cross-sections, rate constants and transport coefficients in silane plasma chemistry. *Contributions to Plasma Physics*. 36(1). pp. 3–49. DOI: 10.1002/ctpp.2150360102.
8. Leroy O., Gousset G., Alves L.L. et al. (1998) Two-dimensional modeling of $\text{SiH}_4\text{--H}_2$ radio-frequency discharges for a-Si:H deposition. *Plasma Sources Science and Technology*. 7(3). pp. 348–358. DOI: 10.1088/0963-0252/7/3/013.
9. Baranova L.V., Strunin V.I., Khudaybergenov G.Zh. et al. *Sposob nanoseniya plenok amorfnoho kremniya i ustroystvo dlya ego osushchestvleniya* [Method for depositing amorphous silicon films and the device for its implementation]. RF Patent 2188878.

УДК 533, 629.7

DOI 10.17223/19988621/50/8

С.В. Пейгин, К.А. Степанов, С.В. Тимченко

ТЕХНОЛОГИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЙ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА¹

Предлагается новый подход к оптимальному проектированию аэродинамических конфигураций на основе численных решений полных уравнений Навье – Стокса. Для решения собственно задачи оптимизации используется вариант генетического алгоритма (ГА), обеспечивающий эффективную реализацию различных нелинейных геометрических и аэродинамических ограничений. Результаты показали, что предложенный подход обеспечивает снижение сопротивления крыла при заданных коэффициенте подъемной силы и значениях числа Маха набегающего потока в зоне крейсерского режима полета при сохранении всех остальных положительных характеристик крыла и с учетом всех ограничений, наложенных на форму крыла и его аэродинамические характеристики.

Ключевые слова: *оптимальное проектирование, полные уравнения Навье – Стокса, нелинейные ограничения, коэффициент сопротивления, момент тангажа.*

Введение

Традиционный процесс аэродинамического проектирования в авиационной промышленности выполняется вручную на основе метода «проб и ошибок». Основанный по большей части на опыте разработчиков и их интуиции, этот процесс требует большого числа циклов (итераций) проектирования, а также больших временных и финансовых затрат. Таким образом, по-настоящему назревшими требованиями авиапромышленности является переход с «ручного» метода проб и ошибок на новый технологический подход, в основе которого лежат средства автоматического оптимального проектирования и который позволит значительно уменьшить материальные затраты на дизайн, сократить время цикла дизайна и число таких циклов, а также улучшить качество аэродинамического дизайна.

В работе описывается новый технологический подход к аэродинамическому проектированию, основанный на средствах автоматического оптимального дизайна. Данный подход должен обеспечить разработку конфигураций, обладающих минимальным сопротивлением при крейсерских условиях полета и отвечающий всем необходимым геометрическим и аэродинамическим ограничениям, увеличение полезной загрузки и достижение хороших аэродинамических параметров в широком диапазоне условий полета.

Оптимизация производится на основе высокоточных расчетов вязких сжимаемых течений (уравнений Навье – Стокса) и генетического поиска при наличии ограничений [1–4]. Итерационный алгоритм выполняет ряд оптимизационных ша-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке прикладных научных исследований Министерства образования и науки РФ: уникальный идентификатор работ RFMEFI57617X0094.

гов с использованием программного продукта OPTIMENGA_AERO [5]. Первая итерация стартует с заданной во вводе начальной формы крыла. Каждая итерация осуществляет оптимальный поиск, сопровождаемый последующей проверкой найденной субоптимальной формы крыла, которая, в свою очередь, служит отправной точкой для следующего оптимизационного шага. Форма крыла в плане фиксирована, в то время как форма секционных профилей, углы крутки и углы поперечного V крыла являются параметрами оптимизации.

Целью оптимизации является снижение полного сопротивления крыла в заданных аэродинамических условиях (которые включают коэффициент подъемной силы, а также числа Маха и Рейнольдса набегающего потока). На оптимальное решение может быть наложено значительное число ограничений. Допускаются аэродинамические ограничения (такие, как ограничение на момент тангажа) и геометрические ограничения (например, ограничения на толщину профилей, величину радиуса передней кромки крыла и т.д.). В работе рассматривалась как одноточечная, так и многоточечная оптимизация. В ходе многоточечной оптимизации минимизируется взвешенная комбинация значений сопротивления в заданном пользователем наборе полётных условий (таком, например, как сочетание условий взлёта и условий крейсерского полета).

Используемый итерационный процесс разделяется на оптимизационные шаги. Число шагов оптимизации устанавливается в зависимости от сходимости итерационного процесса. Для ее улучшения используется непосредственное продолжение оптимизационного процесса.

Входные данные состоят из начальной геометрии крыла, а также перечня условий аэродинамического проектирования и геометрических и аэродинамических ограничений. Основные выходные данные состоят из окончательной оптимальной геометрии крыла, которая включает формы секционных профилей, а также соответствующие углы крутки и поперечного V крыла.

Кроме собственно оптимизации производился высокоточный анализ течений на основе численного решения полных уравнений Навье – Стокса в заданных полётных условиях. Численный анализ течения (который производится как в режиме оптимизации, так и в режиме анализа) использует адаптивные разностные сетки, которые автоматически подстраиваются к изменяющейся геометрии.

Детальный анализ полученных аэродинамических характеристик исходных (базовых) крыльев привёл к следующим оценкам:

1) Данные расчетов позволяют сделать вывод, что базовые крылья обладают приемлемым волновым сопротивлением в основной точке проектирования.

2) При постоянном значении коэффициента подъемной силы происходит волновой кризис крыла, при котором, начиная с некоторого значения числа Маха (порядка $M = 0.80$), резко возрастает значение сопротивления – при изменении числа Маха на 0.01 прирост сопротивления составляет несколько десятков каунтов.

Эти данные позволяют предположить следующее. Потенциальное увеличение крейсерской скорости полёта свыше $M = 0.80$ – 0.81 может оказаться проблематичным. Однако существует потенциальная возможность снижения сопротивления в точке проектирования и в более широком диапазоне полётных условий.

Вначале проводилась одноточечная оптимизация в основной точке проектирования. Одноточечная оптимизация без ограничения на момент тангажа снижает коэффициент сопротивления в точке оптимизации на несколько десятков каунтов по сравнению с базовыми крыльями. При этом изменение формы крыла при-

водит к благоприятному в аэродинамическом смысле перераспределению нагрузки по всему размаху крыла и значительному сужению зоны низких давлений. Это благоприятно отражается на значении коэффициента сопротивления крыла при фиксированном коэффициенте подъемной силы – сопротивление понижается для всех рассматриваемых чисел Маха набегающего потока, а значение порога безопасности по Маху существенно повышается. При этом уменьшение сопротивления крыла не является точечным, а распространяется на всю зону высоких коэффициентов подъемной силы, начиная с $C_L = 0.30$ для трансзвуковых значений числа Маха.

К сожалению, такие оптимальные формы не пригодны в практическом смысле, так как изменение формы крыла приводит к неприемлемому уменьшению величины момента тангажа (с $C_M = -0.12$ до $C_M = -0.16$). Причиной тому – отсутствие ограничения на момент тангажа в данной оптимизации. Тем не менее проведение такого типа предварительной оптимизации полезно при аэродинамическом проектировании, так как оно позволяет оценить ультимативную (хотя часто и недостижимую) границу потенциальных оптимизационных улучшений.

Оптимизация с ограничением на момент тангажа также снижает коэффициент сопротивления в точке проектирования по сравнению с базовым крылом, хотя это снижение меньше по сравнению с предыдущим случаем («штраф на момент» оказывается довольно значительным). В дополнение к значительному выигрышу в самой точке проектирования существенно повышается (на 0.02) значение порога безопасности по Маху.

Недочёты предыдущей оптимизации, связанные с некоторым снижением величины C_{Lmax} полученных оптимальных крыльев (из-за отсутствия в ней соответствующих полётных условий), устраняются путём многоточечной оптимизации с добавлением дополнительной трансзвуковой точки оптимизации (с несколько большим числом Маха) и точки оптимизации, соответствующей условиям взлета. Типичным примером служит следующий набор весов: 0.73 в первой точке оптимизации, 0.22 – во второй и 0.05 – в третьей. Данная многокритериальная задача может быть успешно решена при помощи генетических алгоритмов в классическом смысле определения фронта Парето [6], но с практической точки зрения это решение будет фактически бесполезно.

Результаты расчетов показывают, что незначительное изменение формы оптимального крыла (по сравнению с одноточечной оптимизацией с ограничением на момент тангажа) оказалось достаточно для искомого увеличения значения C_{Lmax} и дополнительного снижения сопротивления при $M = 0.82$.

Анализ полученных результатов показывает, что, особенно при $M = 0.80$, оптимальное крыло обладает значительно улучшенными распределениями давлений по всему размаху крыла. Индикация на подход к зоне отрыва течения во внешней по размаху части крыла, отмеченная при анализе базового крыла, отсутствует в оптимальном крыле при $M = 0.80$ и значительное улучшение наблюдается при $M = 0.82$.

Анализ кривой роста сопротивления оптимального крыла указывает на то, что порог безопасности по Маху вырос примерно на 0.02 по сравнению с базовым крылом.

Примечательным является тот факт, что правильным динамическим регулированием весовых коэффициентов целевой функции удалось добиться существенного улучшения в значении C_L^{max} по отношению к одноточечной оптимизации без потерь в других режимах полёта.

Разработанная технология аэродинамического проектирования состоит из трех этапов.

На *первом этапе* производится предварительный анализ в соответствии со следующей программой действий:

- Подготовка начальной геометрии крыла, поставленной заказчиком («базового крыла»), для расчётов обтекания (форма крыла в плане, секционные профили).
- Анализ (расчёт обтекания) базового крыла в круизном режиме полёта.
- Анализ крыла в широком диапазоне полётных условий.
- Расчёт обтекания базового крыла на высоких скоростях, при высоких и низких значениях подъёмной силы, полётных условиях взлёта и т. д.
- Построение графиков распределения давления, трансзвуковых аэродинамических поляр, кривых зависимости коэффициента сопротивления от числа Маха при заданном значении подъёмной силы, аэродинамической поляры в условиях взлёта и т.п.
- Анализ полученных результатов и оценка потенциала оптимизационных улучшений.

- Уточнение условий оптимизации, а также аэродинамических и геометрических ограничений на оптимальную форму крыла.

Таким образом, в результате первого этапа уточняются условия для аэродинамической оптимизации и накладываются ограничения на оптимальную форму крыла.

На *втором этапе* производится собственно оптимизация крыла в соответствии со следующей программой действий:

- Проведение одноточечной оптимизации с начальной (стартовой) геометрией, поставленной заказчиком (базового крыла) без учёта ограничения на момент тангажа.
- Проведение одноточечной оптимизации с начальной (стартовой) геометрией, поставленной заказчиком (базового крыла) с учётом ограничения на момент тангажа.
- Проведение трёхточечной оптимизации с той же начальной геометрией.

На *третьем этапе* проводится анализ (при помощи программного продукта OPTIMENGA_AERO_ANALISYS) полученных оптимальных крыльев в широком диапазоне полётных условий (круиз, различные углы атаки, набор различных чисел Маха при постоянном круизном значении коэффициента подъёмной силы), условий на взлёте и т.п. По окончании третьего этапа работы строятся графики распределения давления, трансзвуковых аэродинамических поляр, кривых зависимости коэффициента сопротивления от числа Маха при заданном значении подъёмной силы, аэродинамических поляр в условиях взлёта и т.п.

Результаты расчетов

В качестве примера представленной технологии приведем сравнительный анализ исходного и оптимального крыльев реального самолета Boeing-737. Интересно оценить нештатное поведение оптимизированных форм. Поляры (Подъёмная сила/Сила сопротивления – C_L/C_D) при $M = 0,75$ и при $M = 0,80$ представлены на рис. 1 и 2, кривая роста коэффициента сопротивления от числа Маха показана на рис. 3, а кривая зависимости подъёмной силы от угла атаки для условий взлёта (при $M = 0,20$) изображена на рис. 4. На всех рисунках сплошная кривая относится к крылу самолета Boeing-737, штриховая – к полученному в данной работе оптимизированному крылу.

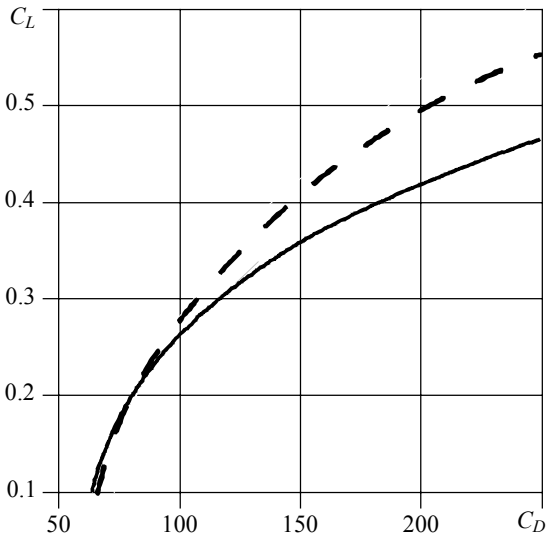


Рис. 1. Поляры (Подъемная сила / Сила сопротивления) при $M = 0,75$
Fig. 1. Drag polar (ratio of the lift force to the drag force) at $M = 0.75$

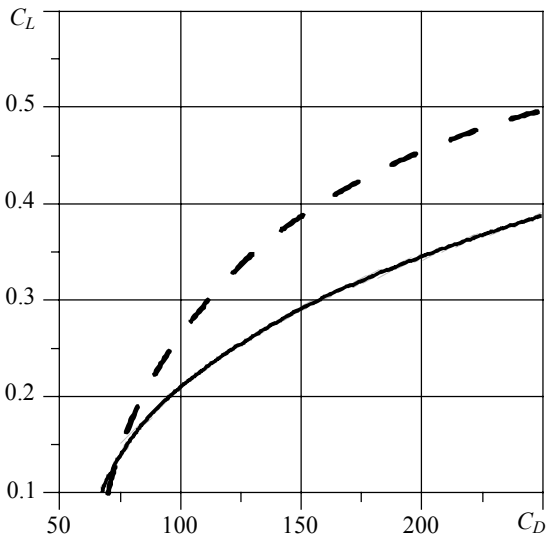


Рис. 2. Поляры (Подъемная сила / Сила сопротивления) при $M = 0,8$
Fig. 2. Drag polar (ratio of the lift force to the drag force) at $M = 0.8$

Анализ поляра показывает, что уровень снижения сопротивления, полученный при заданном коэффициенте подъемной силы сохранился в широком диапазоне значений C_L . Что касается свойства роста сопротивления для полученных решений, оно может быть оценено из рис. 3. Хотя одноточечная оптимизации для более высокого числа Маха естественно обладает большим значением критического числа Маха, многоточечная оптимизация также значительно расширила зону низкого сопротивления по сравнению с оригинальным крылом.

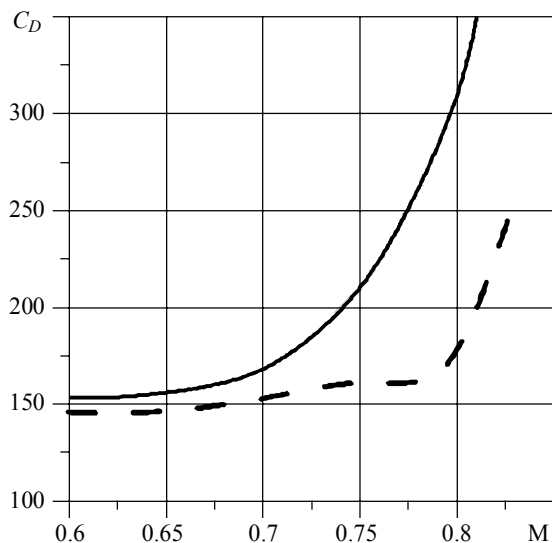


Рис. 3. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Маха

Fig. 3. Drag coefficient as a function of the Mach number

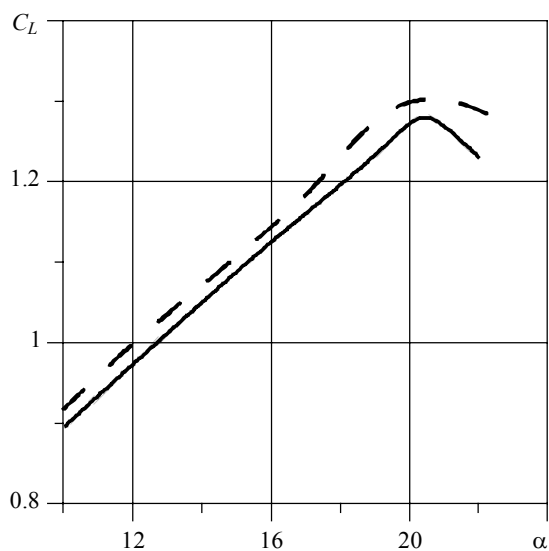


Рис. 4. Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки при $M = 0.2$

Fig. 4. Lift coefficient as a function of the angle of attack at $M = 0.2$

Анализ кривой зависимости подъемной силы от угла атаки (рис. 4) показывает, что как одноточечная оптимизация для $M = 0.80$, так и многоточечная приводят к улучшению взлетных характеристик. Отметим, что усиление особенно высоко в первом случае. С аэродинамической точки зрения это может быть объяснено следующим образом. Безусловная (по отношению к моменту тангажа) оптимизация привела к сильно заостренной форме задней кромки крыла таким образом, что

симитировала подобие закрылка, который обычно и используется для того, чтобы увеличить C_L^{max} при взлете. Для того чтобы удержать момент тангажа на требуемом уровне, многоуровневая оптимизация смещает нагрузку на крыло в направлении передней кромки уменьшая, таким образом, описанный выше эффект.

Заключение

Полученные результаты находятся на уровне лучших мировых работ в данной области. В частности, сравнение реальных крыльев самолета Boeing-737 с полученными оптимальными крыльями показало, что полученные оптимальные геометрии позволили:

- 1) Существенно снизить сопротивление крыла на крейсерских режимах полета.
- 2) Удовлетворить всем заданным нелинейным ограничениям на оптимальное решение.
- 3) Сохранить указанные преимущества по снижению сопротивления в широком диапазоне изменения коэффициента подъемной силы и числа Маха.
- 4) Сдвинуть точку возникновения волнового кризиса крыла на 0.01–0.02 в сторону больших чисел Маха.
- 5) Сохранить на начальном уровне коэффициент подъемной силы на режиме взлета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Michalewicz Z. Genetic algorithms + data structures = evolution programs. New York: Springer-Verlag, 1992, Artificial Intelligence.
2. Пейгин С.В., Periaux J., Тимченко С.В. Применение генетических алгоритмов для оптимизации формы тела по тепловому потоку // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 9. С. 111–122.
3. Казаков В.Ю., Пейгин С.В., Тимченко С.В. Оптимизация траектории входа в атмосферу земли по интегральному тепловому потоку // ЖПМТФ. 2000. Т. 41. № 4. С. 112–121.
4. Орлов С.А., Пейгин С.В., Степанов К.А. Тимченко С.В. Эффективная реализация нелинейных ограничений при оптимизации трехмерных трансзвуковых крыльев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1(33). С. 72–81.
5. Epstein B., Peigin S., Bolsunovskiy A., Timchenko S.V. Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO // Source of the Document 52nd AIAA Aerospace Sciences Meeting AIAA Science and Technology Forum and Exposition, SciTech 2014.
6. Тимченко С.В. Параллельный генетический алгоритм для решения задач многокритериальной оптимизации // Ползуновский вестник. 2012. № 2/1. С. 103–107
7. Epstein B., Averbuch A. and Yavneh I. An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows // J. Computational Physics. 2001. V. 168. P. 316–328.
8. Epstein B., Peigin S.V. Application of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) Approach to Navier-Stokes Computations // Int. J. CFD. 2004. V. 18. No. 3.

Статья поступила 10.11.2017 г.

Peygin S.V., Stepanov K.A., Timchenko S.V. (2017) AN OPTIMAL DESIGN TECHNOLOGY FOR AERODYNAMIC CONFIGURATIONS BASED ON THE NUMERICAL SOLUTIONS OF THE FULL NAVIER-STOKES EQUATIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 90–98

DOI 10.17223/19988621/50/8

A new approach for optimization of essentially 3D aerodynamic shapes intended to minimize their drag is proposed. The method allows one to apply the non-linear surfaces, which are typically used for the complex aircraft junctions such as wing-to-body fairing. This method involves the solution of full Navier-Stokes equations for the objective function calculation, and the optimization technology is based on the genetic algorithms. The important features of the method are both the ability to take into account the multiple geometrical and aerodynamic constraints and the high level of computational efficiency achieved by the complex multilevel parallelization and reduced-order modeling approach. This method was applied for a wing-to-body fairing optimization on a typical medium-range aircraft at the realistic transonic flight conditions.

The constraint handling can be described as follows: it is proposed to employ the search paths through both feasible and infeasible points instead of a traditional approach where only feasible points can be included in a path. For this purpose, the search space is extended by evaluating points (in terms of fitness) which do not satisfy the constraints imposed by optimization problem. The required extension of an objective function can be implemented due to a basic property of genetic algorithms: they are not confined to only smooth solutions in contrast to the classical optimization methods.

The results demonstrate that the proposed approach provides a significant drag reduction and is applicable for engineering and designing.

Keywords: optimal design, full Navier-Stokes equations, non-linear constraints, drag coefficient, pitch moment.

PEYGIN Sergey Vladimirovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Innovation Center "SKOLKOVO", Moscow, Russian Federation)
E-mail: tsv@ftf.tsu.ru

STEPANOV Kirill Aleksandrovich (Tomsk State University, Tomsk, Innovation Center "SKOLKOVO", Moscow, Russian Federation)
E-mail: kirill.stepanov.90@mail.ru

TIMCHENKO Sergey Viktorovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Innovation Center "SKOLKOVO", Moscow, Russian Federation)
E-mail: tsv@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Michalewicz Z. (1992) Genetic algorithms + data structures = evolution programs. New York: Springer-Verlag.
2. Peygin S.V., Periaux J., Timchenko S.V. (1998) Primenenie geneticheskikh algoritmov dlya optimizatsii formy tela po teplovomu potoku [Application of genetic algorithms in a body shape optimization in terms of a heat flux]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 10(9). pp. 111–122.
3. Kazakov V.Yu., Peygin S.V., Timchenko S.V. (2000) Optimizatsiya traektorii vkhoda v atmosferu zemli po integral'nomu teplovomu potoku [Optimization of the trajectory of the earth atmosphere entry according to the integral heat flux]. *Zhurnal prikladnoy matematiki i tekhnicheskoy fiziki – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 41(4). pp. 112–121.
4. Orlov S.A., Peygin S.V., Stepanov K.A., Timchenko S.V. (2015) Effective implementation of nonlinear constraints in optimization of three-dimensional transonic wings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(33). pp. 72–81. DOI: 10.17223/19988621/33/7.
5. Epstein B., Peigin S., Bolsunovskiy A., Timchenko S.V. (2014) Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO. *52nd Aerospace Sciences Meeting, AIAA SciTech Forum*. DOI: 10.2514/6.2014-0569.
6. Timchenko S.V. (2012) Parallel'nyy geneticheskiy algoritm dlya resheniya zadach mnogokriterial'noy optimizatsii [A parallel genetic algorithm for solving multicriterion optimization problems]. *Polzunovskiy vestnik*. 2(1). pp. 103–107.

7. Epstein B., Averbuch A., Yavneh I. (2001) An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows. *Journal of Computational Physics*. 168(2). pp. 316–328. DOI: 10.1006/jcph.2001.6698.
8. Epstein B., Peigin S.V. (2004) Application of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) Approach to Navier-Stokes Computations. *International Journal of CFD*. 18(3). pp. 289–293. DOI: 10.1080/1061-8560310001621243.

УДК: 536.46+536.24

DOI 10.17223/19988621/50/9

В.А. Порязов, А.Ю. Крайнов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ МЕТАЛЛИЗИРОВАННЫХ ТВЕРДЫХ РАКЕТНЫХ ТОПЛИВ¹

Представлена физико-математическая модель и результаты расчета нестационарной скорости горения металлизированного твердого топлива. Подход основан на разработке сопряженной математической модели, учитывающей процессы в твердой и газовой фазах. На поверхности топлива учитываются условия сохранения потоков энергии и массы компонентов, в расчетной области – записываются уравнения переноса тепла и разложения конденсированной фазы и двухскоростная, двухтемпературная модель реагирующего течения продуктов его разложения и газификации над поверхностью твердого топлива. Представлены результаты расчета нестационарной скорости горения при сбросе давления, в зависимости от дисперсности и массовой доли порошка металла в составе топлива, согласующиеся с описанными в научной литературе.

Ключевые слова: металлизированное твердое топливо, математическая модель, скорость горения, переходные процессы.

Задача определения нестационарной скорости горения твердого топлива и вопрос устойчивости горения при сбросе давления в камере сгорания были сформулированы Я.Б. Зельдовичем в 1942 г. [1]. Феноменологическая теория нестационарного горения (ФТНГ) [2, 3] позволяет качественно предсказать зависимость скорости горения от величины и скорости изменения давления. В [4] представлены результаты экспериментального исследования явления погасания пороха при резком уменьшении давления. Были определены границы горения и погасания пороха в зависимости от глубины и скорости падения давления. Результаты обработаны в безразмерных переменных, имеющих смысл относительного конечного давления при спаде давления и безразмерной скорости спада давления. Авторами работы [5] исследована устойчивость горения нитроглицеринового пороха при спаде давления. Выделено два переходных режима – выход на новый стационарный режим и погасание, определены критические значения глубины и скорости спада давления, приводящие к погасанию пороха. Экспериментально установлено, что спад давления в камере сгорания с хорошей точностью описывается экспоненциальной зависимостью. Авторы [6] представили результаты измерения нестационарной скорости горения гомогенного и модельного смесового твердых топлив при резком сбросе давления в полузамкнутом объеме. В зависимости от глубины и скорости сброса давления выделено пять характерных переходных режима: квазистационарный, слабо квазистационарный, колебательный режим, режим «гашение – повторное воспламенение», полное погасание. В работе [7] представлены результаты исследования влияния дисперсности порошка алюминия в со-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-03-02578 А.

ставе конденсированных систем на характеристики зажигания и нестационарного горения. Показано, что задержка времени зажигания и температура поверхности горения уменьшаются при уменьшении размера частиц, а замена нанодисперсных порошков на порошки микронных размеров приводит к росту акустической проводимости. В [8] предложено модельное уравнение для расчета нестационарной колебательной скорости горения твердого ракетного топлива. Результаты расчетов по модели [8] удовлетворительно согласуются с результатами расчетов по ФНТГ с переменной температурой поверхности [2]. На сегодняшний день основным источником достоверной информации об устойчивости горения твердых топлив являются экспериментальные данные.

В работе рассматриваются одномерные нестационарные процессы при горении металлизированного твердого топлива. Предполагается, что в твердом топливе при нагревании идут химические реакции, полупродуктами которых является газ. Газообразные продукты разложения высвобождаются на последней стадии реакции по достижении глубины превращения 0.99. Предполагается первый порядок реакции и зависимость ее скорости от температуры по закону Аррениуса. Теплофизические характеристики конденсированной фазы – плотность, удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности – не зависят от температуры и определяются компонентным составом твердого топлива, путем осреднения, аналогично [8]. Предполагается, что в газовой фазе протекает экзотермическая химическая реакция первого порядка по закону Аррениуса, конвекция и диффузия реагентов. Величина давления над поверхностью горящего твердого топлива не зависит от координаты, но может зависеть от времени. Учитывается расширение газа при его нагревании, параметры состояния газа подчиняются уравнению состояния идеального газа. Предполагается, что частицы алюминия в составе твердого топлива представляют собой шарики, равномерно распределенные в объеме топлива, их размер равен размеру частиц алюминия, вылетающих в газовую фазу с поверхности горения. Процессы агломерации порошка алюминия на поверхности горения не рассматриваются. Воспламенение частиц алюминия происходит при достижении частицей заданной температуры, горение частиц алюминия описывается согласно экспериментальным данным [9]. Теплообмен между частицами и газом происходит по закону Ньютона, движение частиц определяется действием сил трения со стороны газа. Из-за малой объемной концентрации частиц в газе влиянием движения частиц на движение газа пренебрегается, не учитывается взаимодействие частиц друг с другом в газовой фазе.

Математическая модель горения металлизированного твердого топлива включает уравнение теплопроводности, записанное для конденсированной фазы, и уравнение для глубины превращения твердого топлива. В газовой фазе процессы описываются уравнениями сохранения энергии газа и частиц алюминия, сохранения массы газа, массы частиц и числа частиц алюминия с учетом их горения, выгорания окислителя в газовой фазе, движения частиц в потоке газа, уравнения состояния газа. На поверхности горения твердого топлива ставятся условия сопряжения в виде равенства потоков массы и энергии (граничные условия четвертого рода). Математическая модель нестационарного горения металлизированного твердого топлива строилась при использовании моделей, представленных в работах [10, 11]. В системе координат, связанной с поверхностью твердого вещества, система уравнений математической модели запишется в виде:

для конденсированной фазы, при $-\infty < x < x_s$:

$$c_1 \rho_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + u \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + Q_1 k_1 \rho_1 (1 - \eta) \exp \left(-\frac{E_1}{RT_1} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = k_1 (1 - \eta) \exp \left(-\frac{E_1}{RT_1} \right); \quad (2)$$

для газовой фазы, при $x_s < x < \infty$:

$$c_2 \rho_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} + V \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 (T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) + \frac{dp}{dt} + Q_2 k_2 \rho_2 Y \exp \left(-\frac{E_2}{RT_2} \right) + 4\pi \alpha r_3^2 n (T_3 - T_2); \quad (3)$$

$$c_3 \rho_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial t} + W \frac{\partial T_3}{\partial x} \right) = -4\pi \alpha r_3^2 n (T_3 - T_2) + \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O} G Q_{Al}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + V \frac{\partial Y}{\partial x} = D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - k_2 Y \exp \left(-\frac{E_2}{RT_2} \right); \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 V}{\partial x} = -G; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_3 W)}{\partial x} = G; \quad (7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial W}{\partial x} = -\tau_{fr}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (nW)}{\partial x} = 0; \quad (9)$$

$$p = \frac{R}{\mu} \rho_2 T. \quad (10)$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial T_1(-\infty, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_2(\infty, t)}{\partial x} = 0,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x_s, t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x_s, t)}{\partial x}, \quad T_1(x_s, t) = T_2(x_s, t); \quad (11)$$

$$T_3(x_s, t) = T_1(x_s, t); \quad (12)$$

$$\alpha_{Al} \rho_1 u = \rho_3 W(x_s, t); \quad (13)$$

$$n(x_s, t) = \frac{\rho_3(x_s, t)}{\frac{4}{3} \pi r_{Al,0}^3 \rho_k}; \quad (14)$$

$$(1 - \alpha_{Al}) \rho_1 u = \rho_2(x_s, t) V(x_s, t), \quad \rho_2(x_s, t) = p \mu / R T_2(x_s, t); \quad (15)$$

$$(1 - \alpha_{Al}) \rho_1 u = (\rho_2 V Y)|_{(x_s, t)} - D \rho_2(x_s, t) \frac{\partial Y(x_s, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y(\infty, t)}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

Начальные условия:

для $-\infty < x < x_s$:

$$T_1(x, 0) = T_0, \quad \eta(x, 0) = 0;$$

для $x_s < x < \infty$:

$$T_2(x, 0) = T_{ig}, \quad T_3(x, 0) = T_{ig}, \quad Y(x, 0) = 0,$$

$$V(x, 0) = 0, \quad W(x, 0) = 0, \quad n(x, 0) = 0,$$

$$p(0) = p_0, \quad \rho_2(x, 0) = p_0 \mu / R T_{ig}, \quad \rho_3(x, 0) = 0. \quad (17)$$

Принятые обозначения: t – время, x – координата, x_s – координата положения поверхности горения, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_{Al}, \rho_k$ – плотность твердого топлива, газа, приведенная плотность частиц (масса частиц в единице объема), алюминия, вещества частицы, T_1, T_2, T_3 – температура в твердом топливе, газовой фазы, частиц в газовой фазе, T_0, T_{ig} – начальная температура в твердом топливе, в газовой фазе над поверхностью твердого топлива, η – глубина превращения твердого топлива, u – линейная скорость горения твердого топлива, V, W – скорость газа и частиц, n – число частиц в единице объема, r_3, r_{Al} – радиус частицы, радиус не сгоревшего алюминия в частице, c_1, c_2, c_3 – удельная теплоемкость твердого топлива, газа при постоянном давлении, частиц, λ – коэффициент теплопроводности, Q_2 – тепловой эффект реакции в газовой фазе, Q_{Al} – эффективная теплота сгорания алюминия, k – предэкспоненциальный множитель в законе Аррениуса, E – энергия активации химической реакции, R – универсальная газовая постоянная, α_{Al} – массовая доля алюминия в составе топлива смесового твердого топлива, p – давление, p_0, p_k – начальное и конечное давление при его изменении над поверхностью горения, $t_{p,n}, t_{p,k}$ – моменты времени начала и окончания изменения давления, Y – концентрация окислителя в газовой фазе, D – коэффициент диффузии, μ, μ_{Al}, μ_O – средняя молярная масса газовой фазы, молекул алюминия и кислорода, G – скорость изменения массы частиц при их горении, τ_{fr} – сила трения при движении частиц в газе, α – коэффициент теплоотдачи. Индексы: 1 – конденсированная фаза (металлизированное твердое топливо), 2 – газовая фаза, 3 – частицы.

В системе уравнений (1) – (10): (1) – уравнение переноса тепла в твердом топливе, (2) – глубины разложения твердого топлива, (3), (4) – энергии для газовой фазы и частиц алюминия, (5) – выгорания окислителя в газовой фазе, (6) – сохранения массы газовой фазы, (7) – сохранения массы частиц, (8) – движения частиц, (9) – числа частиц, (10) – состояния идеального газа.

Сила взаимодействия частиц с газом вычисляется по формуле

$$\tau_{fr} = \frac{F_{fr}}{4/3 \pi r_3^3 \rho_k}, \quad F_{fr} = C_R S_m \rho_2 \frac{(W - V)|V - W|}{2}, \quad S_m = \pi r_3^2, \quad (18)$$

коэффициент сопротивления C_R определяется по эмпирической формуле

$$C_R = \frac{24}{\text{Re}} \left(1 + 0,15 \text{Re}^{0,682} \right), \quad \text{Re} = \frac{2r_3 \rho_2 |V - W|}{\nu},$$

где Re – число Рейнольдса, ν – динамическая вязкость газа.

Коэффициент теплоотдачи вычисляется по формуле [12]

$$\alpha = \frac{\text{Nu} \lambda_2}{2r_3}, \quad \text{Nu} = 2 + \sqrt{\text{Nu}_l^2 + \text{Nu}_t^2}, \quad (19)$$

где $\text{Nu}_l = 0,664 \text{Re}^{0,5}$, $\text{Nu}_t = 0,037 \text{Re}^{0,8}$ – числа Нуссельта.

Скорость изменения массы частиц алюминия при их горении, а также уравнения, определяющие текущие значения размеров частиц и алюминия в частице получены в [10] и имеют вид

$$G = \frac{3\mu_{\text{O}}}{2\mu_{\text{Al}}} n \rho_k 4\pi k_{\text{Al}} a^{0,9} r_{\text{Al}}^{1,5}, \quad k_{\text{Al}} = 2,22 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{1,5}/\text{с}, \quad (20)$$

где k_{Al} – эмпирический коэффициент в законе скорости горения частицы алюминия, a – коэффициент избытка окислителя.

Радиус ядра чистого алюминия r_{Al} в частице и радиус частицы r_3 определяются по формулам

$$r_{\text{Al}} = \left[\frac{2\mu_{\text{Al}}}{3\mu_{\text{O}}} \left(\left(1 + \frac{3\mu_{\text{O}}}{2\mu_{\text{Al}}} \right) r_{\text{Al},0}^3 - \frac{\rho_3}{(4/3)\pi n \rho_k} \right) \right]^{1/3}, \quad (21)$$

$$r_3 = \left[r_{\text{Al}}^3 + \frac{\mu_{\text{Al}} + 3/2\mu_{\text{O}}}{\mu_{\text{Al}}} (r_{\text{Al},0}^3 - r_{\text{Al}}^3) \right]^{1/3}. \quad (22)$$

Коэффициент теплопроводности газовой фазы зависит от температуры и вычисляется в каждой точке пространства как

$$\lambda_2 = \lambda_{2,0} \left(\frac{T_2}{T_{\text{ig},0}} \right)^{2/3}. \quad (23)$$

Изменение давления моделируется линейным во времени изменением давления от величины p_0 в заданный момент времени начала изменения давления $t_{p,n}$ до величины p_k в заданный момент времени окончания изменения давления $t_{p,k}$:

$$p(t) = \begin{cases} p_0, & t < t_{p,n}, \\ p_0 + A_p (t - t_{p,n}), & t_{p,n} < t < t_{p,k}, \\ p_k, & t \geq t_{p,k}. \end{cases} \quad \text{где } A_p = \frac{p_0 - p_k}{(t_{p,k} - t_{p,n})}, \quad (24)$$

Тогда dp/dt в уравнении (3) определится выражением

$$\frac{dp}{dt} = \begin{cases} 0, & t < t_{p,n}, \\ A_p, & t_{p,n} < t < t_{p,k}, \\ 0, & t \geq t_{p,k}. \end{cases} \quad (25)$$

Система уравнений (1) – (10) решалась численно. Уравнения (1), (3), (5) аппроксимировались неявной разностной схемой. Конвективные слагаемые – разностями против потока. Полученная система линейных уравнений решалась методом прогонки. Уравнение (2) аппроксимировалось неявным методом с использованием разностей против потока для аппроксимации конвективного слагаемого. Уравнения (4), (7) – (9) – явной разностной схемой с использованием разностей против потока для аппроксимации конвективных слагаемых. Для устойчивости численного решения использовалось условие вида $\Delta t < \Delta x / \max[V_i]$, где Δt , Δx – величины шагов по времени и пространству, V_i – величина скорости в точках разностной сетки. После определения температуры в газовой фазе на $(n+1)$ временном слое из уравнения состояния газа (10) при известном давлении определялась плотность газа. Уравнение (6) аппроксимировалось неявной разностной схемой. Из уравнения сохранения массы (6), при известных значениях плотности на n -м и $(n+1)$ -м временных слоях бегущим счетом определялась скорость движения газовой фазы.

Линейная скорость горения твердого топлива u определялась из уравнения (2) следующим образом: За линейную скорость горения u принималась скорость движения изолинии глубины превращения твердого топлива $\eta = 0.99$. При решении уравнения (2) величина u определялась итерационным путем. Выбирается «пробное» значение скорости u (обычно в качестве него принимается величина с n -го временного слоя). Вычисляется поле значений глубины превращения η_i^{n+1} . Затем полученное значение η в точке разностной сетки m , которая находится на поверхности конденсированного вещества, $\eta_m^{n+1} = \eta(x_s, t)$, сравнивается со значением $\eta = 0.99$. Если $\eta_m^{n+1} > 0.99$, то значение u увеличивается на заданную долю от ее первоначальной величины, если $\eta_m^{n+1} < 0.99$, то значение u уменьшается. При выполнении равенства $\eta_m^{n+1} = 0.99$ с заданной точностью скорость u найдена и используется при решении уравнений (1), (2) и в граничных условиях.

Система уравнений (1) – (10) решалась в соответствии со следующим алгоритмом вычисления значений неизвестных на $(n+1)$ -м временном слое (счет шага по времени): вычисляем выгорание окислителя на $(n+1)$ -м временном слое из уравнения (2), записанного в разностной форме, и определяем величину линейной скорости горения твердого топлива с использованием вышеописанных итераций; температуру на $(n+1)$ -м временном слое из уравнений (1) и (3) с использованием граничных условий (11); выгорание окислителя на $(n+1)$ -м временном слое из уравнения (5) с использованием граничных условий (16); плотность газа из уравнения (10) при заданном давлении над поверхностью горения; скорость газа из (6), (15); температуру частиц из (4), (12); скорость движения частиц из (8), (13); количество частиц в единице объема из (9), (14); распределенную плотность частиц из (7) (13). Счет шага по времени повторяется необходимое количество раз. Расчеты проводились до установления стационарного распределения переменных в к-фазе и в газодисперсной среде над поверхностью горения.

Расчеты проводились для значений теплофизических и формально-кинетических параметров, характерных для пороха Н:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.25 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \lambda_{2,0} = 0.066 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, Q_1 = 556800 \text{ Дж/кг}, \\ Q_2 &= 2435300 \text{ Дж/кг}, Q_{Al} = 36.51 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}, E_1 = 80000 \text{ Дж/моль}, \\ E_2 &= 186107 \text{ Дж/моль}, k_1 = 2 \cdot 10^9 \text{ л/с}, k_2 = 3.92 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}, k_{Al} = 2.22 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{1.5}/\text{с}, \\ a &= 0.5, c_1 = 1465 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, c_2 = 1466 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, c_3 = 760 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \\ \rho_1 &= 1600 \text{ кг/м}^3, \rho_k = 2600 \text{ кг/м}^3, \rho_{Al} = 2600 \text{ кг/м}^3, R = 8.31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}, \\ T_0 &= 293 \text{ К}, T_{ig} = 1300 \text{ К}.\end{aligned}$$

Коэффициент диффузии вычисляется через число Льюиса Le :

$$D_2 = Le \lambda_2 / (c_2 \rho_2),$$

число Льюиса принято $Le = 1$. Температура воспламенения частиц алюминия принята равной 1300 К [9]. Величина начального радиуса частицы в расчетах варьировалась в интервале $2 \leq r_{Al,0} \leq 30$ мкм, массовая доля порошка алюминия принята равной 9 % массы твердого топлива. Формально-кинетические параметры реакции в газовой фазе взяты из [14].

Было проведено тестирование разработанной методики и программы ЭВМ решения системы уравнений (1) – (25). Математическая модель (1) – (25) при задании массовой доли порошка алюминия равной нулю и задании всех исходных данных, соответствующим данным для пороха Н, описывает его горение с учетом процессов в конденсированной газовой фазах [10]. Был проведен расчет линейной скорости горения пороха Н при постоянном давлении, результаты расчета представлены в таблице. Результаты расчетов совпадают с результатами расчета стационарной скорости горения пороха Н по модели Беляева – Зельдовича, представленными в работе [11].

Сравнение результатов расчетов стационарной скорости горения пороха Н по модели (1) – (25) с результатами эксперимента [13]

P , атм		40	60	80	100
u , мм/с, Порох Н	Эксперимент [13]	5.2	7.1	8.5	10.2
	Расчет (1) – (25)	6.8	7.8	8.6	9.3
u , мм/с, Порох Н + 9 % Al	Эксперимент, $d_{Al,0} = 40 - 70$ мкм [13]	6.0	8.0	9.6	10.5
	Расчет (1) – (25), $d_{Al,0} = 60$ мкм	8.1	9.3	10.1	10.9

Проведено исследование изменения скорости горения пороха Н без добавления порошка алюминия во времени при сбросе давления. Вид переходных процессов представлен на рис. 1, скорость сброса давления задавалась равной $15 \cdot 10^3$ МПа/с. Видно, что при фиксированной скорости спада давления, в зависимости от глубины сброса, происходит резкая смена режима горения: от выхода на стационарный режим (кривые 1, 2) до погасания (кривая 6). Согласно классификации представленной в работе [5], между этими режимами можно выделить режим «пригасания» (кривые 3–5). Не рассматривая предложенные в работах [5, 6] классификации переходных режимов, основываясь на данных, представленных на рис. 1, можно заключить, что чем больше глубина спада давления, тем дольше ре-

лаксационный период выхода скорости горения на стационарный режим при заданной величине конечного давления. При больших значениях глубины спада давления наблюдается эффект погасания топлива.

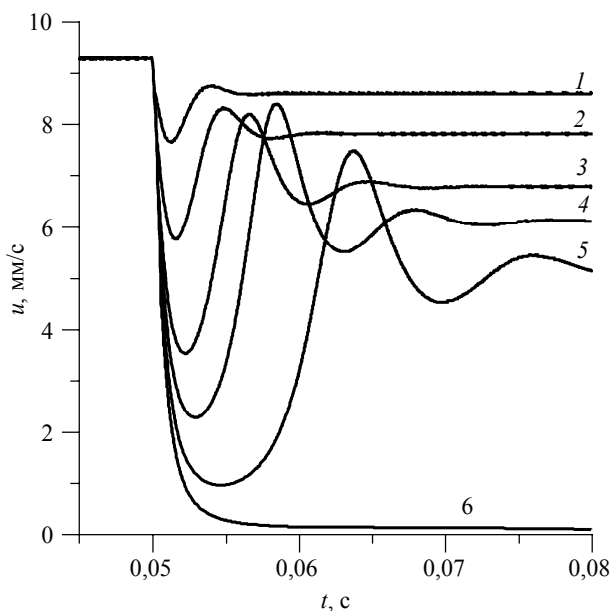


Рис. 1. Изменение скорости горения пороха Н без добавления порошка алюминия во времени при уменьшении давления от 10 до 8 МПа (1), до 6 МПа (2), до 4 МПа (3), до 3 МПа (4), до 2 МПа (5), до 1.2 МПа (6). Скорость сброса давления $15 \cdot 10^3$ МПа/с

Fig. 1. Time variation in the combustion rate of powder N without aluminum powder additive during the pressure drop from 10 MPa to (1) 8, (2) 6, (3) 4, (4) 3, (5) 2, and (6) 1.2 MPa. The pressure drop rate is $15 \cdot 10^3$ MPa/s

Расчеты погасания или продолжения горения для определения граничных значений глубины и скорости сброса давления по модели (1) – (25) для пороха Н без добавления порошка металла были проведены в работе [11]. Результаты расчетов граничных значений глубины и скорости сброса давления были обработаны и представлены в виде, предложенном в работе [5, 6]. Зависимости, полученные в [11], аналогичные модели (1) – (25) в случае горения пороха Н без добавления порошка металла, качественно соответствуют экспериментальным зависимостям, приведенным в работах [4, 5].

В рамках сформулированной физико-математической модели нестационарного горения твердого топлива с добавлением порошка металла представляет интерес изучение влияния добавок порошка металла в состав твердого топлива на переходные режимы при сбросе давления. На рис. 2 представлено изменение скорости горения пороха Н при сбросе давления от 10 до 2 МПа с заданной скоростью $15 \cdot 10^3$ МПа/с, в зависимости от массовой доли порошка алюминия в составе топлива.

Как видно из представленной на рис. 2 зависимости скорость горения пороха Н с добавлением порошка алюминия от времени, увеличение массовой доли порошка алюминия в составе пороха Н стабилизирует переходные процессы при сбросе давления, уменьшая время релаксации. Однако в рамках проведенных исследований на основе представленной модели нестационарного горения металлизированного твердого топлива не установлено существенного влияния добавок порошка алюминия в состав пороха Н на глубину сброса давления, при котором происходит погасание топлива.

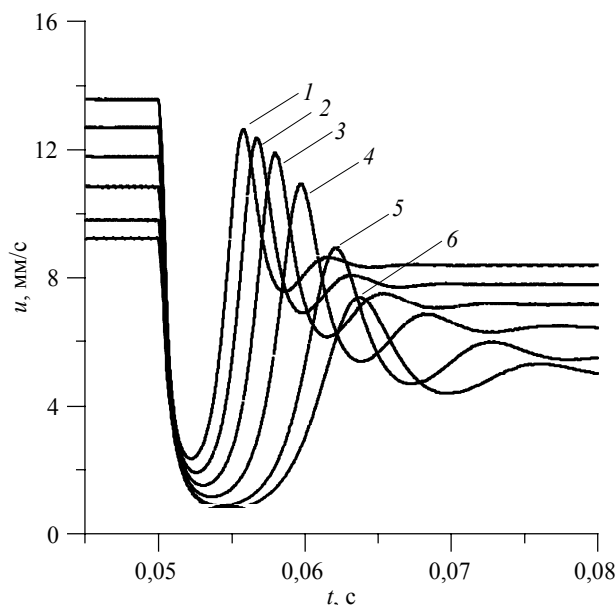


Рис. 2. Зависимость скорости горения пороха Н от времени при уменьшении давления от 10 до 2 МПа. Скорость сброса давления $15 \cdot 10^3$ МПа/с, $r_{Al,0} = 2$ мкм. $\alpha_{Al} = 0.09$ (1), 0.07 (2), 0.05 (3), 0.03 (4), 0.01 (5), 6 – порох Н без добавления порошка алюминия

Fig. 2. Time variation in the combustion rate of powder N during the pressure drop from 10 to 2 MPa. The pressure drop rate is $15 \cdot 10^3$ MPa/s, $r_{Al,0} = 2$ μ m. $\alpha_{Al} =$ (1) 0.09, (2) 0.07, (3) 0.05, (4) 0.03, (5) 0.01, and (6) powder N without aluminum powder additive

Отдельно стоит вопрос о влиянии дисперсности частиц металла, вылетающих с поверхности горения, на характер переходных процессов. На рис. 3 представлено изменение скорости горения пороха Н с добавлением порошка алюминия во времени при сбросе давления от 10 до 2 МПа. Скорость сброса давления $15 \cdot 10^3$ МПа/с, массовая доля алюминия в составе топлива – 9 %, при различной дисперсности порошка алюминия. Как видно из рис. 3, чем выше дисперсность порошка алюминия в составе металлизированного твердого топлива, тем меньше время релаксации и тем быстрее топливо выходит на стационарный режим горения после сброса давления.

Видны существенные отличия во времени релаксации скорости горения при различной дисперсности порошка алюминия в составе топлива. С уменьшением размера частиц, вылетающих с поверхности горения, продолжительность переходного режима сокращается. Полученные результаты качественно согласуются с результатами, представленными в работе [6].

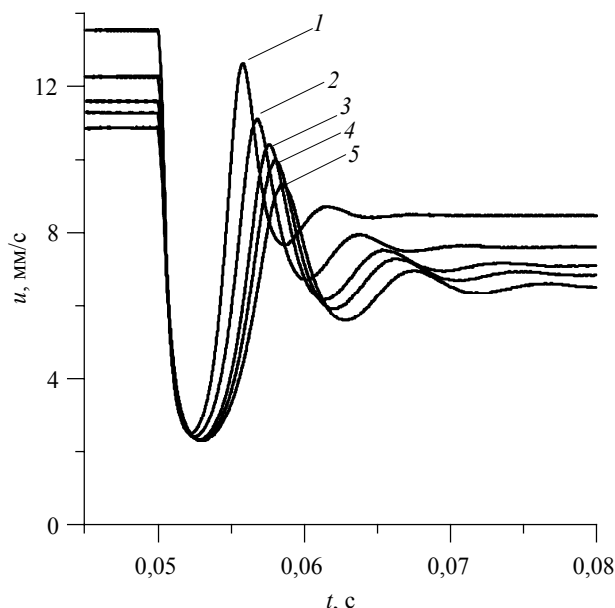


Рис. 3. Изменение скорости горения пороха Н с добавлением порошка алюминия во времени при уменьшении давления от 10 до 2 МПа. Скорость сброса давления $15 \cdot 10^3$ МПа/с. $\alpha_{Al} = 0.09$, $r_{Al,0} = 2$ мкм (1), 5 (2), 10 (3), 15 (4), 30 (5)

Fig. 3. Time variation in the combustion rate of powder N with aluminum powder additive during the pressure drop from 10 to 2 MPa. The pressure drop rate is $15 \cdot 10^3$ MPa/s, $\alpha_{Al} = 0.09$, $r_{Al,0} = (1) 2, (2) 5, (3) 10, (4) 15, \text{ and } (5) 30 \mu\text{m}$

Характерные распределения температуры газа и частиц алюминия над поверхностью горения до и после сброса давления, после выхода на стационарный режим, представлены на рис. 4. Расчет проводился для случая сброса давления от 10 до 2 МПа со скоростью $15 \cdot 10^3$ МПа/с, массовая доля порошка алюминия в составе твердого топлива составляла 9 %, размер частиц алюминия $r_{Al,0} = 30$ мкм. На рис. 5 представлены распределения скорости газа и частиц алюминия над поверхностью горения до и после сброса давления, после выхода на стационарный режим. Расчет проводился для случая сброса давления от 10 до 2 МПа со скоростью $15 \cdot 10^3$ МПа/с, массовая доля порошка алюминия в составе твердого топлива составляла 9 %, размер частиц алюминия $r_{Al,0} = 2$ мкм.

Таким образом, разработана физико-математическая модель нестационарного горения твердого топлива с добавлением порошка металла. Представлены результаты расчета нестационарной скорости горения при сбросе давления. Получены

переходные режимы в зависимости от величины изменения давления от дисперсности и массовой доли порошка металла в составе твердого топлива, совпадающие с представленными в литературе.

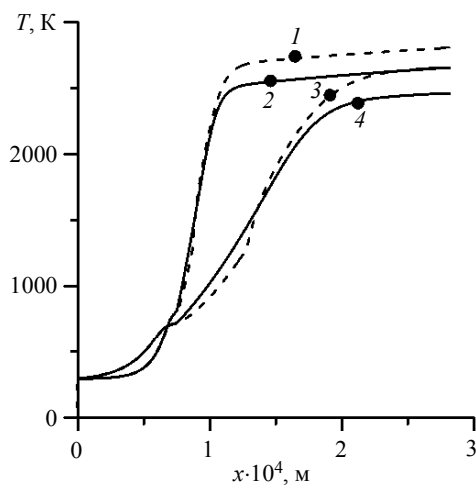


Рис. 4. Распределение температуры газа и частиц над поверхностью горения. 1 – температура частиц алюминия, 2 – температура газа при стационарном режиме горения при давлении 10 МПа, 3 – температура частиц алюминия, 4 – температура газа при стационарном режиме горения при давлении 2 МПа. $\alpha_{Al} = 0.09$, $r_{Al,0} = 30$ мкм

Fig. 4. Distribution of the temperature of gas and particles above the burning surface. 1, temperature of aluminum particles; 2, temperature of the gas under steady-state combustion conditions at a pressure of 10 MPa; 3, temperature of aluminum particles; 4, temperature of the gas under steady-state combustion conditions at a pressure of 2 MPa. $\alpha_{Al} = 0.09$, $r_{Al,0} = 30$ μm

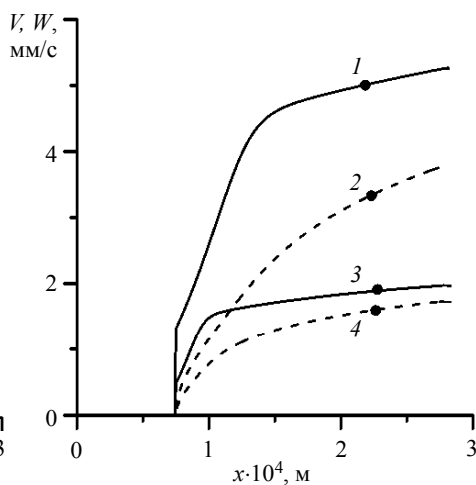


Рис. 5. Распределение скорости газа и частиц над поверхностью горения. 1 – скорость частиц алюминия, 2 – скорость газа при стационарном режиме горения при давлении 10 МПа, 3 – скорость частиц алюминия, 4 – скорость газа при стационарном режиме горения при давлении 2 МПа. $\alpha_{Al} = 0.09$, $r_{Al,0} = 2$ мкм

Fig. 5. Distribution of the velocity of gas and particles above the burning surface. 1, velocity of aluminum particles; 2, velocity of the gas under steady-state combustion conditions at a pressure of 10 MPa; 3, velocity of aluminum particles; 4, velocity of the gas under steady-state combustion conditions at a pressure of 2 MPa. $\alpha_{Al} = 0.09$, $r_{Al,0} = 2$ μm

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я.Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1942. Т. 12. С. 498–524. (В книге Я.Б. Зельдович. Избранные труды. Химическая физика и гидродинамика. М.: Наука. 1984. 374 с.).
2. Новожилов Б.В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973. 176 с.
3. Зельдович Я.Б., Лейтунский О.И., Либрович В.Б. Теория нестационарного горения пороха. М.: Наука, 1975. 132 с.
4. Маршаков В.Н., Лейтунский О.И. Горение и потухание пороха при быстром спаде давления // Физика горения и взрыва. 1967. Т. 3. № 2. С. 231–235.
5. Новожилов Б.В., Маршаков В.Н. Горение пороха и его потухание при быстром спаде давления. Сопоставление теории и опыта // Химическая физика. 2011. Т. 30. № 6. С. 32–39.

6. Архипов В.А., Бондарчук С.С., Коротких А.Г. Сравнительный анализ методов измерения нестационарной скорости горения. II. Результаты исследования // Физика горения и взрыва. 2010. Т. 46. № 5. С. 88–96.
7. Архипов В.А., Бондарчук С.С., Коротких А.Г., Кузнецов В.Т., Громов А.А., Волков С.А., Ревягин Л.Н. Влияние дисперсности алюминия на характеристики зажигания и нестационарного горения гетерогенных конденсированных систем // Физика горения и взрыва. 2012. Т. 48. № 5. С. 148–159.
8. Липанов А.М., Болкисев А.А. О расчете температурного поля в заряде твердого топлива с учетом гетерогенности его теплофизических свойств // Химическая физика и мезоскопия. 2013. Т. 14. № 3. С. 364–370.
9. Беляев А.Ф., Фролов Ю.В., Коротков А.И. О горении и воспламенении частиц мелко-дисперсного алюминия // Физика горения и взрыва. 1968. Т. 4. № 3. С. 323–329.
10. Порязов В.А., Крайнов А.Ю., Крайнов Д.А. Математическое моделирование горения пороха Н с добавлением порошка алюминия // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 1. С. 93–101.
11. Крайнов А.Ю., Порязов В.А. Численное моделирование погасания пороха Н при резком сбросе давления на основе сопряженной модели горения // Физика горения и взрыва. 2015. Т. 51. № 6. С. 47–52.
12. Справочник по теплообменникам: в 2 т. Т. 1. М.: Энергоатомиздат, 1987.
13. Мальцев В.М., Мальцев М.И., Кашипов Л.Я. Основные характеристики горения. М.: Химия, 1977. 320 с.
14. Булгаков В.К., Липанов А.М. Теория эрозионного горения твердых ракетных топлив. М.: Наука, 2001. 138 с.

Статья поступила 14.09.2017 г.

Poryazov V.A., Krainov A.Yu. (2017) MATHEMATICAL MODEL AND CALCULATION OF THE UNSTEADY COMBUSTION RATE OF THE METALLIZED SOLID ROCKET PROPELLANTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 99–110

DOI 10.17223/19988621/50/9

This paper provides a physical-mathematical model and the calculation results of unsteady combustion rate of a metallized solid fuel. The approach is based on the development of an adjoint mathematical model which takes into account the processes in solid and gas phases. On the fuel surface, the conservation of both energy fluxes and mass of the components is assumed. The equations of heat transfer and condensed phase decomposition are written for a computational domain. The double-rate and two-temperature model of the reacting flow of decomposition and gasification products is used over the solid fuel surface. The results of unsteady combustion rate calculated during the pressure drop are presented as functions of dispersion and mass fraction of the metal powder in a propellant composition. The obtained results are in a good agreement with the data available in scientific literature.

Keywords: metallized solid fuel, mathematical model, combustion rate, transient processes.

KRAINOV Aleksey Yurievich (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

PORYAZOV Vasily Andreevich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: poryazov@mail.ru

REFERENCES

1. Zel'dovich Ya.B. (1942) K teorii goreniya porokhov i vzryvchatykh veshchestv [On the theory of combustion of gunpowder and explosives]. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki – Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 12. pp. 498–524.
2. Novozhilov B.V. (1973) *Nestatsionarnoe gorenie tverdykh raketnykh topliv* [Unsteady burning of solid propellants]. Moscow: Nauka.
3. Zel'dovich Ya.B., Leypunskiy O.I., Librovich V.B. (1975) *Theory Of Unsteady Propellant Burning*. Moscow: Nauka.
4. Marshakov V.N., Leypunskiy O.I. (1967) Burning and quenching of a powder in the presence of a rapid pressure drop. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 3(2). pp. 144–146. DOI: 10.1007/BF00748735.
5. Marshakov V.N., Novozhilov B.V. (2011) Combustion of a propellant and its extinction upon rapid depressurization: a comparison of theory and experiment. *Russian Journal of Physical Chemistry B*. 5(3). pp. 474–481. DOI: 10.1134/S1990793111020369.
6. Arkhipov V.A., Bondarchuk S.S., Korotkikh A.G. (2010) Comparative analysis of methods for measuring the transient burning rate. II. Research results. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 46(5). pp. 570–577. DOI: 10.1007/s10573-010-0075-8.
7. Arkhipov V.A., Bondarchuk S.S., Kuznetsov V.T., Korotkikh A.G., Gromov A.A., Volkov S.A., Revyagin L.N. (2012) Influence of aluminum particle size on ignition and nonstationary combustion of heterogeneous condensed systems. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 48(5). pp. 625–635. DOI: 10.1134/S0010508212050140.
8. Lipanov A.M., Bolkisev A.A. (2012) On computation of a temperature field in a composite solid propellant charge considering heterogeneity of its thermophysical properties. *Chemical Physics and Mesoscopy*. 14(3). pp. 364–370.
9. Belyaev A.F., Frolov Yu.V., Korotkov A.I. (1968) Combustion and ignition of particles of finely dispersed aluminum. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 4(3). pp. 182–185. DOI: 10.1007/BF00750857.
10. Poryazov V.A., Krainov A.Yu., Krainov D.A. (2015) Simulating the combustion of N powder with added finely divided aluminum. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 88(1). pp. 94–103. DOI: 10.1007/s10891-015-1171-0.
11. Krainov A.Yu., Poryazov V.A. (2015) Numerical simulation of the extinction of N powder by a pressure drop based on a coupled combustion model. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 51(6). pp. 664–669. DOI: 10.1134/S0010508215060076.
12. *Spravochnik po teploobmennikam* (1987) [Handbook of the heat exchangers]. V. 1. Moscow: Energoatomizdat.
13. Mal'tsev V.M., Mal'tsev M.I., Kashporov L.Ya. (1977) *Osnovnye kharakteristiki goreniya* [Basic characteristics of combustion]. Moscow: Khimiya.
14. Bulgakov V.K., Lipanov A.M. (2001) *Teoriya erozionnogo goreniya tverdykh raketnykh topliv* [Theory of Erosive Combustion of Solid Rocket Propellants]. Moscow: Nauka.

УДК 519.6 + 532.516

DOI 10.17223/19988621/50/10

Б.О. Цыденов

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОМПОНЕНТОВ СИСТЕМЫ
«НУТРИЕНТ – ФИТОПЛАНКТОН – ЗООПЛАНКТОН – ДЕТРИТ»
ВО ВРЕМЯ ЭВОЛЮЦИИ ВЕСЕННЕГО ТЕРМОБАРА¹**

Описана математическая модель, позволяющая численно воспроизводить взаимодействие элементов системы «нутриент–фитопланктон–зоопланктон–детрит» в период прогревания водоема. Получены пространственно-временные распределения концентрации биологических компонентов модели на примере озера Камлупс. Показано влияние термического режима речного притока на изменение биомассы фито-, зоопланктона, нутриента и детрита.

Ключевые слова: численное моделирование, термобар, планктон, нутриент, детрит, озеро Камлупс.

Во время весеннего прогревания водоема возникает явление термобара, представляющее собой погружение водных масс в узкой зоне [1]. Создавая специфические условия для жизнедеятельности планктонных сообществ, термобар оказывает огромное влияние на экосистему озер умеренных широт [2]. Для численного воспроизведения эффекта термобара используют двухмерные [3, 4, 5–7], квазидвухмерные [8–10] и трехмерные [11, 12] модели. Выбор модели зависит от цели исследования. Однако натурные наблюдения показывают, что при образовании и развитии термобара основные изменения происходят от берега (для случая озера Камлупс – от устья реки Томпсон) к центру озера. При этом характеристики в направлении, параллельном берегу (устью реки Томпсон), достаточно однородны. На этом основании полагают [13], что модель, в которой исключены все градиенты в направлении, параллельном берегу (устью реки Томпсон), должна качественно и правильно описывать физический процесс развития речного термобара. Поэтому для исследования динамики термобара достаточно применять квазидвухмерную модель, в которой используется такое приближение, переводящее задачу в двумерную, но учитывающую три компонента вектора скорости, причем компонента скорости вдоль однородного направления в результате влияния силы Кориолиса может в некоторых областях доминировать над другими компонентами [8].

Цель настоящей работы – разработка квазидвухмерной численной модели на основе модели «нутриент – фитопланктон – зоопланктон – детрит» Паркера [14], анализ влияния температурного режима речного притока на концентрацию биологических компонентов в озере Камлупс в период существования весеннего термобара.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60041 мол_а_дк.

Математическая модель

Негидростатическая квазидвухмерная математическая модель состоит из термогидродинамического и биологического модулей. Термогидродинамический модуль, включающий в себя уравнения количества движения, энергии, минерализации и турбулентных характеристик, детально описан в ранее опубликованной работе [15]. Биологический модуль воспроизводит перенос биомасс фито-, зоопланктона, нутриента и детрита с помощью конвективно-диффузионных уравнений

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial uP}{\partial x} + \frac{\partial wP}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial P}{\partial z} \right) + P(G - m_P - IZ)q;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial uZ}{\partial x} + \frac{\partial wZ}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + Z((1 - \gamma_N - \gamma_D)IP - m_Z)q;$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial uN}{\partial x} + \frac{\partial wN}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial N}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial N}{\partial z} \right) + (-GP - \gamma_N IPZ + C_0 D)q;$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial uD}{\partial x} + \frac{\partial wD}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial D}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial D}{\partial z} \right) + (m_P P + \gamma_D IPZ - C_0 D + m_Z Z)q,$$

где N , P , Z , D – концентрация нутриента, фитопланктона, зоопланктона, детрита соответственно; A_x и A_z – коэффициенты турбулентной диффузии в соответствующих направлениях. Для описания гидробиологического процесса в водоеме используется модель «нутриент – фитопланктон – зоопланктон – детрит» (N – P – Z – D) Паркера [14]. Схематическая диаграмма математической модели биологической системы, демонстрирующая связь между ее компонентами, представлена на рис. 1.

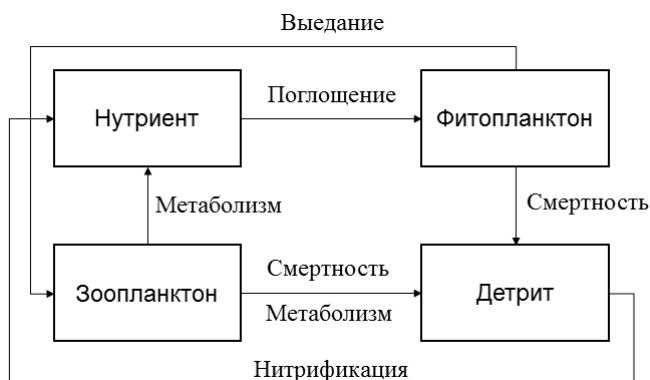


Рис. 1. Схема взаимодействия компонентов биологической системы

Fig. 1. Scheme of the interaction between biological system components

Согласно модели Паркера [14], увеличение биомассы фитопланктона происходит за счет поглощения нутриентов из водной среды (рис. 1). Часть экскреции зоопланктона переходит в фонд нутриентов, а часть – в детритный фонд. В процессе нитрификации продукты деградации детрита превращаются в нутриенты с постоянной скоростью. Фитопланктон, съеденный зоопланктоном, распределяется следующим образом: 40 % – в фонд нутриентов, 30 % – в детритный фонд и 30 % – в биомассу зоопланктона.

Также модель Паркера описывает процессы фотосинтеза с учетом проникновения света в эвфотическую зону. Скорость первичного продуцирования фитопланктона G определяется по формуле

$$G = V_m [(L_d/s_c) \exp\{1 - (L_d/s_c)\}][N/(N+k_s)].$$

Суточная поверхностная инсоляция вычисляется на основе закона нормально-го распределения с математическим ожиданием 0.5 сут и дисперсией 1/64 сут²:

$$L_s = \left[(s_{cm} \sqrt{2\pi} / 8) \right] N(0.5, 1/64).$$

Функция L_s принимает максимальное значение 150 Э·м²·сут⁻¹ в полдень.

Свет, проникающий на определенную глубину, рассчитывается по экспоненциальной зависимости с учетом затенения планктоном и детритом в водной толще между поверхностью ($z = L_z$) и глубиной $z = d$:

$$L_d = L_s \exp \left\{ -\eta d - S_s \int_d^{L_z} (P + Z + D) dz \right\}.$$

Задержка роста, связанная с доступом света, определяется по функции Стила [16] с коэффициентом светового насыщения s_c , равным 40 % от максимальной дневной инсоляции [14].

Смертность фитопланктона и множитель температурного ограничения вычисляются соответственно:

$$m_p = M \exp\{-(n_1 N)^2\};$$

$$q = 2.5^{(T-15)/10}.$$

Следует заметить, что m_p представляет физиологическую смертность фитопланктонных клеток в условиях нехватки питательных веществ. Благодаря множителю q , активное развитие биологической системы происходит в теплой водной среде.

Остальные параметры, входящие в расчетные формулы модели «нутриент – фитопланктон – зоопланктон – детрит», приведены в таблице [8].

Значения параметров N–P–Z–D-модели

Параметр	Наименование	Значение
V_m	Максимальная скорость роста фитопланктона	2.8 сут ⁻¹
η	Коэффициент ослабления света	0.15 м ⁻¹
k_s	Константа полунасыщения поглощения нутриентов	0.6 ммольN·м ⁻³
m_Z	Смертность зоопланктона	0.1 сут ⁻¹
I	Интенсивность питания зоопланктона	0.2 сут ⁻¹
M	Максимальная скорость смертности фитопланктона	0.5 сут ⁻¹
n_1	Коэффициент скорости смертности фитопланктона	1 (ммольN·м ⁻³) ⁻¹
γ_N	Доля неусвоенного питания зоопланктона, превращающегося в нутриент	0.4
γ_D	Доля неусвоенного питания зоопланктона, превращающегося в детрит	0.3
C_0	Скорость превращения детрита в нутриент	0.02 сут ⁻¹
S_s	Коэффициент самозатенения	0.02 (ммольN·м ⁻³) ⁻¹ м ⁻¹
s_c	Коэффициент светового насыщения	60 Э·м ² ·сут ⁻¹
s_{cm}	Коэффициент максимального светового поглощения	150 Э·м ² ·сут ⁻¹

Начальная концентрация фито-, зоопланктона, нутриента и детрита составляет 1.0, 1.0, 4.0 и 1.0 ммольN·м⁻³ соответственно [8]. Термическое состояние озера Камлупс и реки Томпсон соответствует весеннему режиму [17]. На поверхности озера задается тепловой поток, равный 170 Вт/м² [8].

Численный метод решения уравнений модели подробно изложен в работах [18, 19].

Результаты и обсуждение

В качестве области исследования рассматривается канадское озеро Камлупс (рис. 2, а). Расчётная область представляет собой упрощённую форму вертикального разреза водоема и имеет протяженность $L_x = 10$ км и глубину $L_z = 150$ м (рис. 2, б).

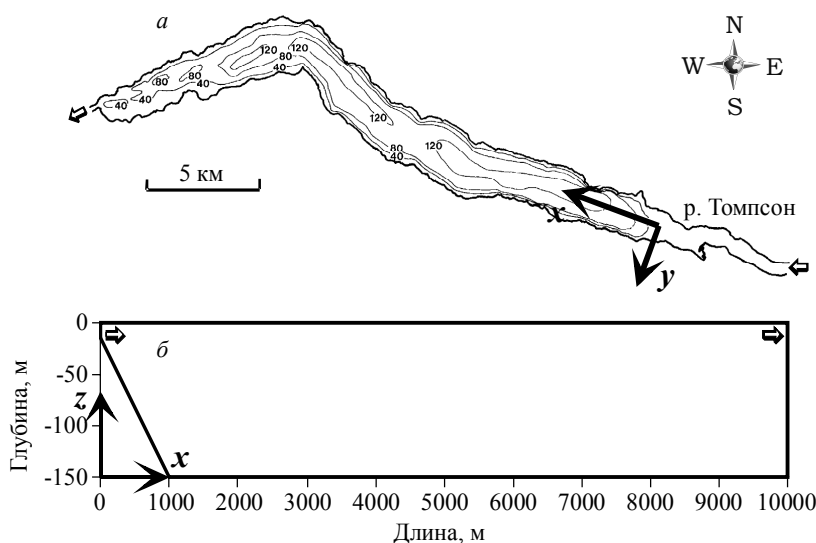


Рис. 2. Озеро Камлупс: а – батиметрия, б – вычислительная область
Fig. 2. Kamloops Lake: (a) bathymetry and (b) computational domain

Полученные на 8-е, 16-е и 24-е сутки значения биологических компонентов модели на поверхности водоема (рис. 3) хорошо согласуются с результатами Холланда и др. (рис. 13 в [8]). На 8-й день вычислительного эксперимента в области впадения реки в озеро наблюдается увеличение популяции фитопланктона (рис. 3, а). Более теплые речные воды способствуют быстрому росту биомассы фитопланктона. Это влечет за собой уменьшение нутриента на месте интенсивного цветения фитопланктона (рис. 3, б и в).

Согласно области расположения температуры максимальной плотности (изотерма 4 °С) и линиям тока (рис. 4, а и б), можно заключить, что термобар на 16-й день моделирования находится на расстоянии 1.7–1.8 км от устья речного притока. Фронтальное нисходящее течение (термобар), формирующееся при смешении теплых вод реки и холодных вод открытого озера, индуцирует циркуляцию (рис. 4, б) в теплоинертной области (справа от термобара). Локальный максимум концентрации фитопланктона (рис. 4, в) наблюдается в приповерхностном слое слева от термобара (в теплоактивной области). Видно, что на месте активного

роста фитопланктона происходит истощение нутриента (рис. 4, в). Опускное течение, инициированное термобаром, увлекает частицы зоопланктона (рис. 4, д) и детрита (рис. 4, е) в глубоководную зону озера.

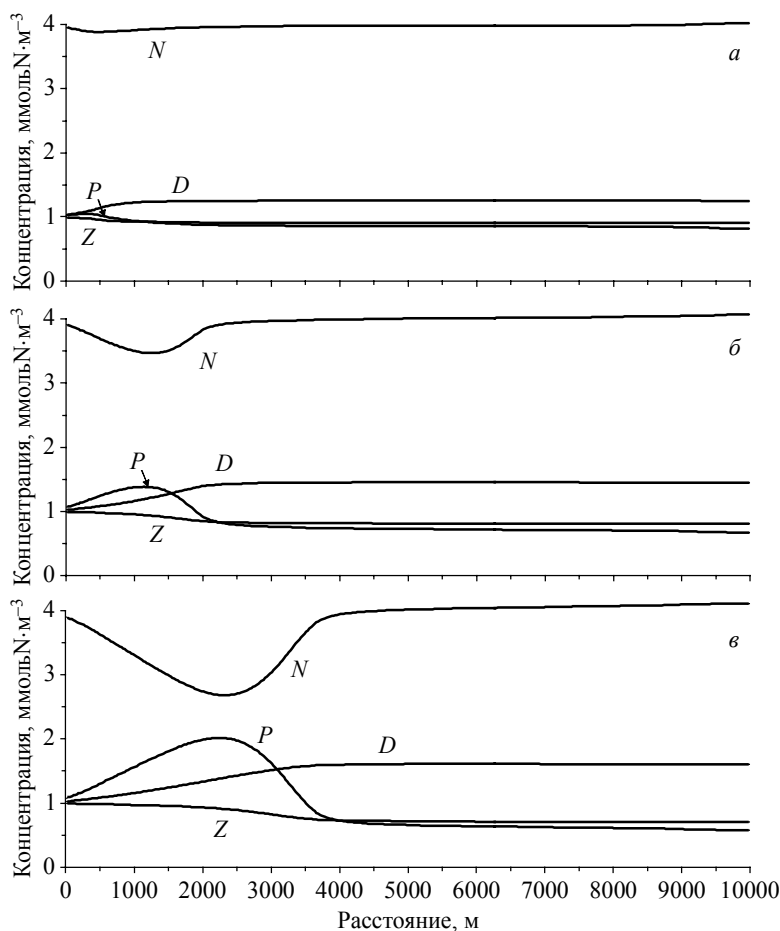


Рис. 3. Профили фито-, зоопланктона, нутриента и детрита на 8 (а), 16 (б) и 24 (в) сутки на глубине 4.5 м
Fig. 3. Profiles of phytoplankton, zooplankton, nutrient, and detritus after (а) 8, (б) 16, and (в) 24 days at 4.5 m depth

Сравнительный анализ представленных на рис. 3 профилей с ранее полученными по модели Франкса и др. результатами [20, рис. 3] показывает качественное различие. На особенность взаимодействия биологических компонентов в модели Паркера [14] влияют более сложные зависимости, описывающие процессы фотосинтеза, а также температурные условия водной среды. Если согласно модели Франкса и др. на 16-е сутки расчетов концентрация фитопланктона увеличивается до $4.5 \text{ ммоль N} \cdot \text{м}^{-3}$, а концентрация нутриента сокращается до $0.3 \text{ ммоль N} \cdot \text{м}^{-3}$ [20, рис. 3, б], то модель Паркера на том же временном разрезе дает следующие экстремальные значения данных компонентов: $1.4 \text{ ммоль N} \cdot \text{м}^{-3}$ и $3.5 \text{ ммоль N} \cdot \text{м}^{-3}$

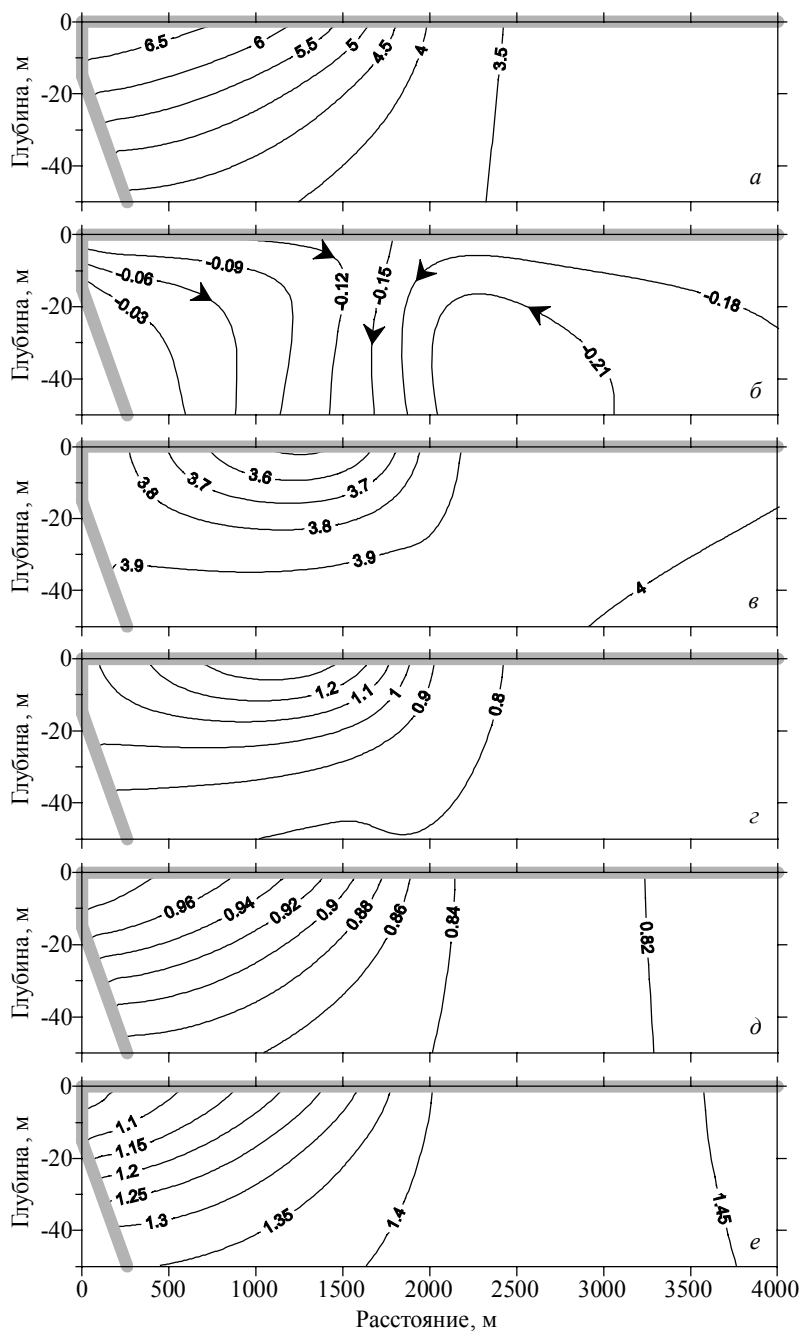


Рис. 4. Картина на 16-е сутки: *а* – изотермы [°C], *б* – линии тока [$\text{м}^2/\text{с}$], *в* – концентрация нутриента [$\text{ммольN}\cdot\text{м}^{-3}$], *г* – концентрация фитопланктона [$\text{ммольN}\cdot\text{м}^{-3}$], *д* – концентрация зоопланктона [$\text{ммольN}\cdot\text{м}^{-3}$], *е* – концентрация детрита [$\text{ммольN}\cdot\text{м}^{-3}$]

Fig. 4. Pattern after 16 days: (*a*) isotherms [°C], (*б*) streamlines [m^2/s], (*в*) nutrient concentrations [$\text{mmolN}\cdot\text{m}^{-3}$], (*г*) phytoplankton concentrations [$\text{mmolN}\cdot\text{m}^{-3}$], (*д*) zooplankton concentrations [$\text{mmolN}\cdot\text{m}^{-3}$], and (*е*) detritus concentrations [$\text{mmolN}\cdot\text{m}^{-3}$]

соответственно (рис. 3, б). Кроме того, важно заметить, что полученные в данной работе максимальные значения концентрации фитопланктона значительно смещены в сторону прибрежной акватории водоема, где вода имеет более высокую температуру.

Для оценки влияния термического режима реки на концентрацию планктона проведены вычислительные эксперименты с прогревом вод речного притока на 0.3 и 0.4 °C в день. На основе результатов вычислительных экспериментов (рис. 5) можно заключить, что в рамках модели Паркера температурный режим является определяющим фактором роста биомассы фитопланктона. Интенсивный прогрев поверхностных слоев за счет поступления теплых вод из реки способствует бурному цветению фитопланктона и снижению количества питательных веществ.

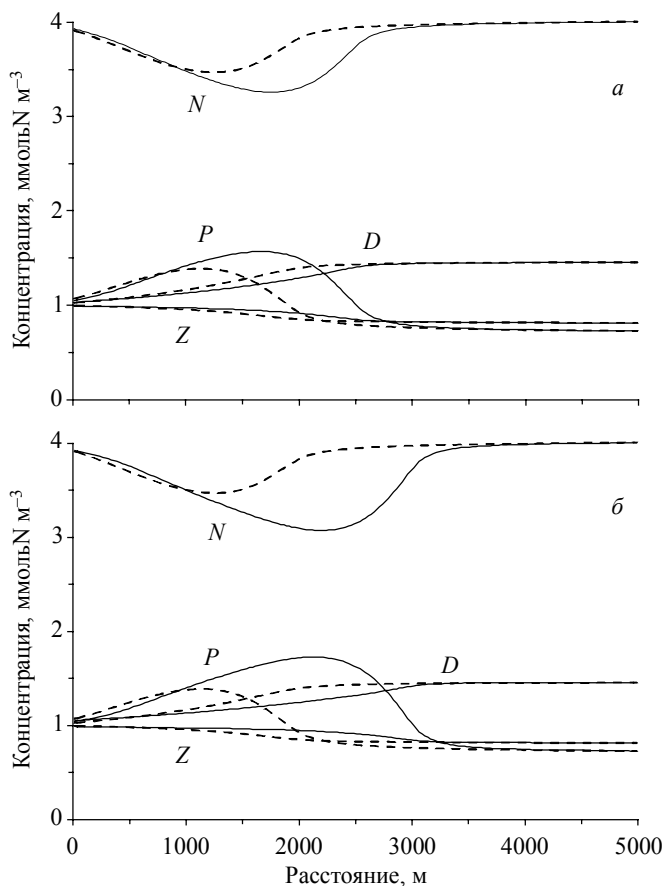


Рис. 5. Профили нутриента (*N*), фитопланктона (*P*), зоопланктона (*Z*) и детрита (*D*) на 16-е сутки моделирования (глубина 4.5 м) в вычислительных экспериментах с прогревом вод речного притока на 0.3 °C (*а*) и 0.4 °C (*б*) в день. Пунктиром показаны профили биологических компонентов, соответствующие эксперименту с прогревом вод речного притока на 0.2 °C в день

Fig. 5. Profiles of nutrient (*N*), phytoplankton (*P*), zooplankton (*Z*), and detritus (*D*) after 16 days (at 4.5 m depth) in simulations with the river inflow warmed by (*a*) 0.3 and (*b*) 0.4 °C day⁻¹. Dash line indicates the results of simulation with the river inflow warmed by 0.2 °C day⁻¹

Кроме того, термический режим речного притока влияет на скорость продвижения термобара в центральную часть водоема, что отражается на местоположении максимальных значений концентрации фитопланктона (и минимальных значений концентрации нутриента). Важно также заметить, что граничные температурные условия в устье реки не оказывают сильного влияния на изменение популяции зоопланктона и частиц детрита.

Заключение

Представленная в работе математическая модель позволяет адекватно воспроизводить весеннюю динамику компонентов системы «нутриент – фитопланктон – зоопланктон – детрит». Результаты моделирования свидетельствуют о максимальной концентрации фитопланктона в теплоактивной области водоема. С помощью вычислительных экспериментов с различными температурными условиями речного притока установлено, что интенсивный прогрев поверхностных слоев за счет поступления теплых вод из реки способствует бурному цветению фитопланктона и существенному снижению количества нутриента в соответствующей области. Термические граничные условия в устье реки имеют меньший эффект на изменение биомассы зоопланктона и детрита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохина Н.С., Показеев К.В. Уникальное природное явление – термобар // Земля и Вселенная. 2015. № 6. С. 78–88.
2. Mortimer C.H. Lake hydrodynamics // *Mitteilungen Int. Ver. Limnol.* 1974. No. 20. P. 124–197.
3. Blokhina N.S., Ordanovich A.E., Savell'eva O.S. Model of Formation and Development of Spring Thermal Bar // *Water Resources*. 2001. No. 28(2). P. 201–204. DOI: 10.1023/A:1010339919712
4. Holland P.R., Kay A., Botte V. A numerical study of the dynamics of the riverine thermal bar in a deep lake // *Environmental Fluid Mechanics*. 2001. No. 1(3). P. 311–332. DOI: 10.1023/A:1013106526253
5. Бочаров О.Б., Овчинникова Т.Э. О термогравитационной конвекции в прибрежной зоне глубокого озера в период весеннего прогревания // *Вычисл. технологии*. 1998. Т. 3. № 4. С. 3–12.
6. Квон В.И., Квон Д.В. Численный анализ механизма глубокого проникновения поверхностных вод в прибрежной зоне озера в период весенне-летнего термобара // *Вычисл. технологии*. 1997. Т. 2. № 5. С. 46–56.
7. Farrow D.E. A numerical model of the hydrodynamics of the thermal bar // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 303. P. 279–295. DOI: 10.1017/S0022112095004277.
8. Holland P.R., Kay A., Botte V. Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake // *J. Mar. Syst.* 2003. No. 43(1–2). P. 61–81. DOI: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7
9. Malm J. Spring circulation associated with the thermal bar in large temperate lakes // *Nordic Hydrology*. 1995. V. 26. No. 4–5. P. 331–358.
10. Tsvetova E.A. Effect of the Coriolis force on convection in a deep lake: numerical experiment // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1998. V. 39. No. 4. P. 593–599.
11. Tsvetova E.A. Mathematical modelling of Lake Baikal hydrodynamics // *Hydrobiologia*. 1999. No. 407. P. 37–43. DOI: 10.1023/A:1003766220781.
12. Demchenko N.Yu., Chubarenko I.P. Horizontal exchange across the thermal bar front: laboratory and numerical modeling // *Water Quality Res. J. Can.* 2012. V. 47. No. 3–4. P. 436–450. DOI: 10.2166/wqrjc.2012.037.
13. Цветова Е.А. Численное моделирование гидродинамических процессов, ответственных за распространение загрязняющих примесей в глубоком водоёме // *Вычисл. технологии*. 1997. Т. 2. № 2. С. 102–108.

14. Parker R.A. Eddy diffusion of phytoplankton and nutrients: Estimating coefficients from simulated and observed vertical distributions // *Journal of Plankton Research*. 1991. No. 13(4). P. 815–830. DOI: 10.1093/plankt/13.4.815.
15. Tsydenov B.O., Kay A., Starchenko A.V. Numerical modeling of the spring thermal bar and pollutant transport in a large lake // *Ocean Modelling*. 2016. No. 104. P. 73–83. DOI: 10.1016/j.ocemod.2016.05.009
16. Steele J.H. Notes on some theoretical problems in production ecology // *Mem. Ist. Ital. Idrobiol.* Dr. Marco de Marchi. 1965. No. 18 (SUPPL.). P. 383–398.
17. John B.E.St., Carmack E.C., Daley R.J., Gray C.B.J., Pharo C.H. The limnology of Kamloops Lake, B.C. Vancouver, 1976. 167 p.
18. Цыденов Б.О. Численное моделирование эффекта весеннего термобара в глубоком озере: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск. 2013. 145 с.
19. Цыденов Б.О. Численное исследование распространения примеси в пресном озере на основе распределения мутности воды // *Вычислительные технологии*. 2017. Т. 22. № S1. С. 113–124.
20. Цыденов Б.О. Численное воспроизведение гидробиологических процессов в период развития весеннего термобара на основе модели «нутриент – фитопланктон – зоопланктон» // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2016. № 3(41). С. 86–97. DOI: 10.17113/19988611/41/9

Статья поступила 17.03.2017 г.

Tsydenov B.O. (2017) NUMERICAL MODELING OF THE INTERACTION BETWEEN NUTRIENT-PHYTOPLANKTON-ZOOPLANKTON-DETRITUS SYSTEM COMPONENTS DURING THE SPRING THERMAL BAR *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 112–121

DOI 10.17223/19988621/50/10

In this paper, a nonhydrostatic 2.5D numerical model for simulating the hydrobiological processes during the spring riverine thermal bar in Kamloops Lake (British Columbia, Canada) is described. A thermal bar is a narrow zone in a lake where the water, which has a maximum density, sinks from the surface to the bottom. Numerical modeling of the dynamics of plankton ecosystems is implemented using the nutrient – phytoplankton – zooplankton – detritus model of Parker (1991). The hydrodynamic model, which takes into account an effect of the Coriolis force, is written in the Boussinesq approximation with the continuity, momentum, energy, and salinity equations. The data obtained in numerical experiments show a good agreement with that of Holland et al. (2003). Simulation results demonstrate that the maximum concentrations of phytoplankton are in the thermoactive (the inshore side of a thermal bar) region of the lake. Calculations under variable temperature conditions of the Thompson River show that the warm river waters facilitate a rapid growth of the phytoplankton and leads to a significant reduction of the nutrient in this area. However, these thermal boundary conditions have a little impact on the changes in zooplankton and detritus biomass.

Keywords: plankton, thermal bar, mathematical model, numerical experiment, Kamloops Lake.

TSYDENOV Bair Olegovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tsydenov@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Blokhina N.S., Pokazeev K.V. (2015) *Unikal'noe prirodnnoe yavlenie – termobar* [A unique natural phenomenon is the thermal bar]. *Zemlya i Vselennaya*. 6. pp. 78–88.
2. Mortimer C.H. (1974) Lake hydrodynamics. *Mitteilugen Int. Ver. Limnol.* 20. pp. 124–197.
3. Blokhina N.S., Ordanovich A.E., Savel'eva O.S. (2001) Model of formation and development of spring thermal bar. *Water Resources*. 28(2). pp. 201–204. DOI: 10.1023/A:1010339919712.

4. Holland P.R., Kay A., Botte V. (2001) A numerical study of the dynamics of the riverine thermal bar in a deep lake. *Environ. Fluid Mech.* 1(3). pp. 311–332. DOI: 10.1023/A:1013106526253.
5. Bocharov O.B., Ovchinnikova T.E. (1998) O termogravitatsionnoy konveksii v pribrezhnoy zone glubokogo ozera v period vesennego progrevaniya [On the thermo-gravity convection in the near-shore zone of a deep lake in the spring warming period]. *Vychislitelnye tekhnologii.* 3(4). pp. 43–12.
6. Kvon V.I., Kvon D.V. (1997) Chislennyy analiz mekhanizma glubokogo proniknoveniya poverkhnostnykh vod v pribrezhnoy zone ozera v period vesenne-letnego termobara [Numerical analysis of a deep penetration mechanism of surface waters during the spring-summer thermal bar]. *Vychislitelnye tekhnologii.* 2(5). pp. 46–56.
7. Farrow D.E. (1995) A numerical model of the hydrodynamics of the thermal bar. *J. Fluid Mech.* 303. pp. 279–295. DOI: 10.1017/S0022112095004277.
8. Holland P.R., Kay A., Botte V. (2003) Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake. *J. Mar. Syst.* 43(1–2). pp. 61–81. DOI: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7.
9. Malm J. (1995) Spring circulation associated with the thermal bar in large temperate lakes. *Nordic Hydrology.* 26(4–5). pp. 331–358.
10. Tsvetova E.A. (1998) Effect of the Coriolis force on convection in a deep lake: numerical experiment. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 39(4). pp. 593–599.
11. Tsvetova E.A. (1999) Mathematical modelling of Lake Baikal hydrodynamics. *Hydrobiologia.* 407. pp. 37–43. DOI: 10.1023/A:1003766220781.
12. Demchenko N.Yu., Chubarenko I.P. (2012) Horizontal exchange across the thermal bar front: laboratory and numerical modeling. *Water Quality Res. J. Can.* 47(3–4). pp. 436–450. DOI: 10.2166/wqrjc.2012.037.
13. Tsvetova E.A. (1997) Chislennoe modelirovanie gidrodinamicheskikh protsessov, otvetstvennykh za rasprostranenie zagryaznyayushchikh primesey v glubokom vodoeme [Numerical modelling of hydrodynamic processes responsible for the propagation of contaminants in a deep basin]. *Vychislitelnye tekhnologii.* 2(2). pp. 102–108.
14. Parker R.A. (1991) Eddy diffusion of phytoplankton and nutrients: Estimating coefficients from simulated and observed vertical distributions. *J. Plankton Res.* 13(4). pp. 815–830. DOI: 10.1093/plankt/13.4.815.
15. Tsydenov B.O., Kay A., Starchenko A.V. (2016) Numerical modeling of the spring thermal bar and pollutant transport in a large lake. *Ocean Modelling.* 104. pp. 73–83. DOI: 10.1016/j.ocemod.2016.05.009.
16. Steele J.H. (1965) Notes on some theoretical problems in production ecology. *Mem. Ist. Ital. Idrobiol. Dr. Marco de Marchi.* 18 (suppl.). pp. 383–398.
17. John B.E.St., Carmack E.C., Daley R.J., Gray C.B.J., Pharo C.H. (1976) *The Limnology of Kamloops Lake, B.C.* Vancouver.
18. Tsydenov B.O. (2013) *Chislennoe modelirovanie effekta vesennego termobara v glubokom ozere* [Numerical modeling of the effect of spring thermal bar in a deep lake]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk.
19. Tsydenov B.O. (2017) Chislennoe issledovanie rasprostraneniya primesi v presnom ozere na osnove raspredeleniya mutnosti vody [A numerical study of impurity propagation in a fresh-water lake on the basis of water turbidity distribution]. *Vychislitelnye tekhnologii.* 22(S1). pp. 113–124.
20. Tsydenov B.O. (2016) Chislennoe vosпроизvedenie gidrobiologicheskikh protsessov v period razvitiya vesennego termobara na osnove modeli “nutrient – fitoplankton – zooplankton” [Numerical simulation of hydrobiological processes during the spring thermal bar on the basis of the nutrient – phytoplankton – zooplankton model]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 3(41). pp. 86–97. DOI: 10.17223/19988621/41/9.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АФАНАСЬЕВ Александр Александрович – кандидат физико-математических наук Воронежского государственного университета. E-mail: afanasyev.alex.alex@gmail.com

ГАБИБОВ Вахаб Мехти оглы – старший преподаватель кафедры физики, математики и информатики Ленкоранского государственного университета (Азербайджанская Республика). E-mail: vahab.hebibov@mail.ru

ГАМЗАЕВ Ханлар Мехвали оглу – доктор технических наук, профессор, Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, кафедра общей и прикладной математики, г. Баку. E-mail: xan.h@rambler.ru

ГОРНОСТАЕВ Константин Константинович – аспирант Воронежского государственного университета. E-mail: gornostaevkonstantink@gmail.com

ГУЛЬКО Сергей Порфирьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: gulko@math.tsu.ru

ИВАНОВ Александр Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института прикладных математических исследований Карельского НЦ РАН. E-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

ИВАНОВ Дмитрий Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Российского университета транспорта (МИИТ). E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

КОВАЛЕВ Алексей Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета. E-mail: kav@mail@mail.ru

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

ЛЯХОВ Анатолий Александрович – старший преподаватель кафедры экспериментальной физики и радиофизики Омского государственного университета имени Ф.М. Достоевского. E-mail: lyah@rambler.ru

ПЕЙГИН Сергей Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, генеральный директор ООО «Оптименга – 777», г. Москва. E-mail: tsv@ftf.tsu.ru

ПОРЯЗОВ Василий Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: poryazov@mail.ru

СТЕПАНОВ Кирил Александрович – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, специалист ООО «Оптименга – 777», г. Москва. E-mail: kirill.stepanov.90@mail.ru

СТРУНИН Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экспериментальной физики и радиофизики Омского государственного университета имени Ф.М. Достоевского. E-mail: strunin@omsu.ru

ТАГИЕВ Рафиг Каландар оглы – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой оптимизации и управления Бакинского государственного университета (Азербайджанская Республика). E-mail: r.tagiyev@list.ru

ТИМЧЕНКО Сергей Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета, ведущий специалист ООО «Оптименга – 777», г. Москва. E-mail: tsv@ftf.tsu.ru

ЦЫДЕНОВ Баир Олегович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории вычислительной геофизики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: tsydenov@math.tsu.ru.

ЧЕБОТАРЕВ Андрей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета. E-mail: chebotarev@amm.vsu.ru

ЭРГАШЕВ Тухтасин Гуламжанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail: ertuhtasin@mail.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 18.12.2017. Выпуск в свет 25.12.2017.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10.0. Уч.-изд. л. 11.2. Тираж 250 экз. Заказ № 46. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 2928.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru