УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/41/4

Ю.Е. Летунович, О.В. Якубович

ОТКРЫТЫЕ МАРКОВСКИЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОНТРОЛЬНЫМИ ОЧЕРЕДЯМИ И КАРАНТИННЫМ УЗЛОМ

Исследуется открытая сеть массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком. В каждом узле формируются две очереди заявок: контрольная очередь проверки заявок на стандартность и очередь на обслуживание заявок. Поступающие в узлы заявки присоединяются к контрольной очереди, в которой происходят их сканирование, проверка на соответствие требованиям сети. По результатам проверки заявки могут быть направлены в карантинный узел для решения обнаруженной проблемы.
Ключевые слова: сеть массового обслуживания; карантинные очереди в узлах; стационарное распределение; эргодичность.

Системы и сети массового обслуживания позволяют моделировать и анализировать функционирование различных реальных объектов, осуществляющих обслуживание: сети связи, телекоммуникационные и информационные сети и т.д. В настоящее время весьма актуальным является вопрос защиты информации, использования антивирусного программного обеспечения, которое обнаруживает и обезвреживает вредоносные объекты и угрозы для систем и сетей. Ранее исследованы сети массового обслуживания, позволяющие учитывать ситуации, когда ожидающие в очереди заявки, обладая некоторым дефектом, становятся временно неактивными [1, 2] или обслуживающий прибор реагирует на вредоносные заявки сменой режима обслуживания [3]. В настоящей работе исследуются сети массового обслуживания, позволяющие описать функционирование подобного программного обеспечения с помощью введения очередей, в которых производится проверка всех поступающих объектов с последующим обезвреживанием вредоносных объектов в карантине. В работе [4] рассматривается модель с карантинным узлом, в который направляются заявки, признанные нестандартными в очередях узлов, при этом возможна ситуация, когда заявка будет направлена на обслуживание в узле, не успев пройти проверку. В настоящей работе контрольная очередь присутствует в каждом узле, что позволяет учитывать ситуацию, когда все поступающие заявки проходят предварительную проверку, сканирование до того, как они будут допущены к обслуживанию. Исследуется открытая марковская сеть, в которую поступает пуассоновский поток заявок. Узлы состоят из двух очередей: контрольной очереди и очереди для обслуживания. Заявки, поступая в узел, увеличивают длину контрольной очереди узла на единицу. В контрольной очереди узла производится проверка поступивших заявок, при обнаружении опасности заявка направляется в карантинный узел для устранения проблемы, в противном случае заявка присоединяется к обычной очереди узла.

1. Изолированный узел

1.1. Изолированный узел с контрольной очередью

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ. В системе формируются две однолинейные очереди: контрольная очередь и очередь к обслуживающему прибору. Каждая поступающая заявка присоединяется к контрольной очереди, где проверяется экспоненциальным прибором на стандартность. Времена проверки независимы, не зависят от процессов поступления, обслуживания и имеют показательное распределение с параметром ν, ν – некоторая положительная постоянная. Дисциплина проверки заявок произвольная. Каждая заявка после окончания проверки либо с вероятностью p признается нестандартной и покидает систему, либо с вероятностью $1 - p$ присоединяется к очереди стандартных заявок.

Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления, проверки и имеют показательное распределение с параметром μ. Порядок обслуживания заявок произвольный.

Функционирование рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t описывается случайным процессом $x(t) = (m(t), n(t))$, где $m(t)$ – количество заявок в контрольной очереди в момент времени t, $n(t)$ – количество заявок в обычной очереди в момент времени t. Тогда $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным пространством состояний $X = \{x = (m, n)\colon m, n \geq 0\}$.

Предположим, что $\{p(x),\ x \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$p(m,n)\left[\lambda + \mu I_{\{n\neq 0\}} + \nu I_{\{m\neq 0\}}\right] = p(m-1,n)\lambda I_{\{m\neq 0\}} + p(m,n+1)\mu +$$
$$+ p(m+1,n)\nu p + p(m+1,n-1)\nu(1-p)I_{\{n\neq 0\}}, \quad (m,n)\in X.$$

Теорема 1. При выполнении неравенств

$$\frac{\lambda}{\nu} < 1, \ \frac{\lambda(1-p)}{\mu} < 1$$

марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид:

$$p(m,n) = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^m \left(\frac{\lambda(1-p)}{\mu}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)\left(1-\frac{\lambda(1-p)}{\mu}\right).$$

Доказательство проводится стандартным образом – подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности получено из эргодической теоремы Фостера.

1.2. Изолированный карантинный узел

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток нестандартных заявок с параметром λ.

Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления и имеют показательное распределение с параметром μ. Порядок обслуживания заявок произвольный.

Функционирование рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t описывается случайным процессом $n(t)$, где $n(t)$ – количество заявок в системе в момент времени t. Тогда $n(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным пространством состояний $X = \{n,\ n \geq 0\}$.

Предположим, что $\{p(n),\ n \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $n(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$p(n)\left[\lambda + \mu I_{\{n\neq 0\}}\right] = p(n-1)\lambda I_{\{n\neq 0\}} + p(n+1)\mu, \quad n\in X.$$

Теорема 2. При выполнении неравенства

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1$$

марковский процесс $n(t)$ эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид:

$$p(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Доказательство проводится стандартным образом – подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности получено из эргодической теоремы Фостера.

2. Открытая сеть

Рассмотрим открытую сеть, состоящую из N узлов первого типа со структурой, описанной в пункте 1.1, и $(N+1)$-го узла второго типа со структурой, описанной в пункте 1.2. В сеть поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ.

Каждая заявка независимо от других заявок направляется в i-й узел с вероятностью p_{0i} ($i = \overline{1, N}$). Очевидно, что $\sum_{i=1}^{N} p_{0i} = 1$. Каждая заявка, поступающая в i-й узел первого типа, присоединяется к контрольной очереди, где проверяется на стандартность. Времена проверки независимы, не зависят от процессов поступления, обслуживания и имеют показательное распределение с параметром ν_i, ν_i – некоторая положительная постоянная ($i = \overline{1, N}$). Каждая заявка после окончания проверки в i-м узле с вероятностью p_i признается нестандартной и независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь ($N + 1$)-го узла, а с вероятностью $1 - p_i$ присоединяется к очереди стандартных заявок в i-м узле. Стандартные заявки обслуживаются экспоненциальным прибором, времена обслуживания заявок прибором i-го узла независимы, не зависят от процесса поступления и имеют показательное распределение с параметром μ_i ($i = \overline{1, N}$). Порядок обслуживания заявок произвольный.

Каждая заявка после завершения обслуживания в i-м узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j-й узел с вероятностью p_{ij}, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij} + p_{i0} = 1,\ i = \overline{1, N}\right)$.

В ($N + 1$)-м узле, который назовем карантином, осуществляется восстановление качеств (лечение) нестандартных заявок или их обезвреживание. Время такого обслуживания имеет показательное распределение с параметром μ_{N+1}. Порядок обслуживания произвольный. Каждая заявка после обслуживания в ($N + 1$)-м узле независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь j-го узла с вероятностью p_{N+1j}, т.е. «вылечивается» и продолжает движение по сети, а с вероятностью p_{N+10} обезвреживается, т.е. покидает сеть $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{N+1j} + p_{N+10} = 1\right)$.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{N+1}(t)),$$

где $x_i(t) = (m_i(t), n_i(t))$ – состояние узла первого типа в момент времени t, $m_i(t)$ – число заявок в контрольной очереди, $n_i(t)$ – число заявок очереди на обслуживание в i-м узле в момент времени t ($i = \overline{1, N}$); $x_{N+1}(t) = n_{N+1}(t)$ – число заявок в карантинном ($N + 1$)-м узле в момент времени t.

Процесс $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счетным пространством состояний $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{N+1}$, где $X_i = \{x_i = (m_i, n_i): m_i, n_i \geq 0,\ i = \overline{1, N}\}$, $X_{N+1} = \{x_{N+1} = n_{N+1}: n_{N+1} \geq 0\}$.

Уравнения трафика имеют вид

$$\varepsilon_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j (1 - p_j) p_{ji} + \varepsilon_{N+1} p_{N+1i},\ i = \overline{1, N},$$

$$\varepsilon_{N+1} = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j p_j.$$

Введем следующие обозначения:

$$p_{0i}^* = p_{0i},$$

$$p_{ji}^* = (1 - p_j) p_{ji},$$

$$p_{jN+1}^* = p_j,$$

$$p_{N+1i}^* = p_{N+1i}.$$

Покажем, что матрица $P^* = \left(p_{ji}^*,\ i, j = \overline{0, N+1}\right)$ является стохастической.

$$\sum_{i=1}^{N} p_{0i}^* = \sum_{i=1}^{N} p_{0i} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{N+1} p_{ji}^* = \sum_{i=0}^{N} (1 - p_j) p_{ji} + p_j = \sum_{i=0}^{N} p_{ji} - p_j \sum_{i=0}^{N} p_{ji} + p_j = 1,$$

$$\sum_{i=0}^{N} p_{N+1i}^* = \sum_{i=0}^{N} p_{N+1i} = 1.$$

Будем предполагать, что матрица маршрутизации P^*, где $p_{00}{}^* = p_{0N+1}{}^* = 0$, неприводима. Записав уравнения трафика через введенные обозначения вероятностей переходов, получаем систему уравнений трафика сети Джексона, для которой доказано существование единственного положительного решения при условии неприводимости матрицы маршрутизации [5]. Таким образом, система уравнений трафика для исследуемой сети имеет единственное положительное решение (ε_i, $\overline{1, N+1}$).

Пусть $\{p(x),\ x \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид

$$p(x)\left(\lambda+\sum_{i=1}^{N}\mu_i I_{\{n_i\neq 0\}}+\mu_{N+1}I_{\{n_{N+1}\neq 0\}}+\sum_{i=1}^{N}\nu_i I_{\{m_i\neq 0\}}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}p(x-e_i^1)\lambda p_{0i}I_{\{m_i\neq 0\}}+\sum_{i=1}^{N}p(x+e_i^2)\mu_i p_{i0}+p(x+e_{N+1})\mu_{N+1}p_{N+10}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}p(x+e_i^1-e_{N+1})\nu_i p_i I_{\{n_{N+1}\neq 0\}}+\sum_{i=1}^{N}p(x+e_i^1-e_i^2)\nu_i(1-p_i)I_{\{n_i\neq 0\}}+ \tag{1}$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}p(x+e_j^2-e_i^1)\mu_j p_{ji}I_{\{m_i\neq 0\}}+\sum_{i=1}^{N}p(x+e_{N+1}-e_i^1)\mu_{N+1}p_{N+1i}I_{\{m_i\neq 0\}},\ x\in X\ .$$

Здесь e_i^k – единичный вектор размерности $(2N + 1)$ с единицей в $(2(i - 1) + k)$-й позиции, $i = \overline{1, N}$, $k = 1, 2$; e_{N+1} – единичный вектор размерности $(2N + 1)$ с единицей в $(2N + 1)$-й позиции.

Теорема 3. Пусть для любых $i = \overline{1, N}$ выполняются неравенства

$$\frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i}<1,\ \frac{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}{\mu_i}<1,\ \frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}<1, \tag{2}$$

тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет следующий вид:

$$p(x) = p_1(x_1)\, p_2(x_2) \ldots p_{N+1}(x_{N+1}),\ x \in X, \tag{3}$$

где

$$p_i(x_i)=\left(\frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i}\right)^{m_i}\left(\frac{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}{\mu_i}\right)^{n_i}\left(1-\frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i}\right)\left(1-\frac{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}{\mu_i}\right),\ i=\overline{1,N}, \tag{4}$$

$$p_{N+1}(x_{N+1})=\left(\frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right)^{n_{N+1}}\left(1-\frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right), \tag{5}$$

(ε_i, $\overline{1, N+1}$) – решение системы уравнений трафика.

Доказательство. Докажем, что марковский процесс $x(t)$ эргодичен при выполнении условий (2), а (3) является решением уравнений равновесия (1). Согласно эргодической теореме Фостера достаточно доказать, что существует нетривиальное решение $\{p(x),\ x \in X\}$ системы уравнений равновесия

$$p(x)q(x)=\sum_{y\neq x,\, y\in X}p(y)q(y,x),\ x\in X, \tag{6}$$

такое, что ряд $\sum_{x\in X}q(x)p(x)$ сходится. Здесь $q(x)$ – интенсивность выхода из состояния x.

Докажем, что (3) удовлетворяет уравнениям равновесия (1). Воспользуемся методом локального баланса. Разобьем (1) на уравнения локального равновесия

$$p(x)\lambda=\sum_{i=1}^{N}p(x+e_i^2)\mu_i p_{i0}+p(x+e_{N+1})\mu_{N+1}p_{N+10}; \tag{7}$$

$$p(x)\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i I_{\{n_i\neq 0\}}+\mu_{N+1}I_{\{n_{N+1}\neq 0\}}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}p(x+e_i^1-e_{N+1})\nu_i p_i I_{\{n_{N+1}\neq 0\}}+\sum_{i=1}^{N}p(x+e_i^1-e_i^2)\nu_i(1-p_i)I_{\{n_i\neq 0\}}; \tag{8}$$

$$p(x)\sum_{i=1}^{N}\nu_i I_{\{m_i\neq 0\}}=\sum_{i=1}^{N}p(x-e_i^1)\lambda p_{0i}I_{\{m_i\neq 0\}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p(x+e_i^2-e_j^1)\mu_i p_{ij} I_{\{m_j\neq 0\}} + \sum_{i=1}^{N} p(x+e_{N+1}-e_i^1)\mu_{N+1} p_{N+1i} I_{\{m_i\neq 0\}}\,. \qquad (9)$$

Разделим обе части уравнения (7) на $p(x) = p_1(x)\, p_2(x)\ldots\, p_{N+1}(x)$, подставим (4), (5), получим

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}{\mu_i}\mu_i p_{i0} + \frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\mu_{N+1} p_{N+10} =$$

$$= \lambda\left(\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(1-p_i) - \sum_{j=1}^{N}(\varepsilon_j - p_{0j} - \varepsilon_{N+1}p_{N+1j}) + \varepsilon_{N+1}p_{N+10}\right) = \lambda.$$

Разделим обе части уравнения (8) на $p(x) = p_1(x)\, p_2(x)\ldots\, p_{N+1}(x)$, подставим (4), (5), получим

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_i I_{\{n_i\neq 0\}} + \mu_{N+1} I_{\{n_{N+1}\neq 0\}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i}\frac{\mu_{N+1}}{\lambda\varepsilon_{N+1}}\nu_i p_i I_{\{n_{N+1}\neq 0\}} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i}\frac{\mu_i}{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}\nu_i(1-p_i) I_{\{n_i\neq 0\}} = \frac{\mu_{N+1}}{\varepsilon_{N+1}}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i p_i I_{\{n_{N+1}\neq 0\}} + \sum_{i=1}^{N}\mu_i I_{\{n_i\neq 0\}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\mu_i I_{\{n_i\neq 0\}} + \mu_{N+1} I_{\{n_{N+1}\neq 0\}}.$$

Разделим обе части уравнения (9) на $p(x) = p_1(x)\, p_2(x)\ldots\, p_{N+1}(x)$, подставим (4), (5), получим

$$\sum_{i=1}^{N}\nu_i I_{\{m_i\neq 0\}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\nu_i}{\lambda\varepsilon_i}\lambda p_{0i} I_{\{m_i\neq 0\}} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda\varepsilon_j(1-p_j)}{\mu_j}\frac{\nu_i}{\lambda\varepsilon_i}\mu_j p_{ji} I_{\{m_i\neq 0\}} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\frac{\nu_i}{\lambda\varepsilon_i}\mu_{N+1}p_{N+1i} I_{\{m_i\neq 0\}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\frac{\nu_i}{\varepsilon_i}\left[p_{0i} + \sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j(1-p_j)p_{ji} + \varepsilon_{N+1}p_{N+1i}\right] I_{\{m_i\neq 0\}} = \sum_{i=1}^{N}\nu_i I_{\{m_i\neq 0\}}.$$

Из требования теоремы Фостера о сходимости ряда $\sum_{x\in X} q(x)p(x)$, где интенсивность выхода из состояния x

$$q(x) = \lambda + \sum_{i=1}^{N}\mu_i I_{\{n_i\neq 0\}} + \mu_{N+1} I_{\{n_{N+1}\neq 0\}} + \sum_{i=1}^{N}\nu_i I_{\{m_i\neq 0\}}\,,$$

учитывая (3), получим условие (2). При этом (3) задает единственное стационарное распределение вероятностей состояний сети. Теорема доказана.

Заключение

В настоящей работе исследована открытая марковская сеть массового обслуживания с поступающим пуассоновским потоком заявок. Сеть состоит из узлов, в которых находятся две очереди: очередь для проверки заявок на стандартность и обычная очередь для обслуживания. Времена проверки и времена обслуживания независимы и имеют показательное распределение. В сети также имеется карантинный узел, в который направляются заявки, не прошедшие проверку. Установлены условия эргодичности и аналитический вид стационарного распределения состояний сети. Рассматриваемая в работе модель является обобщением модели сети, исследуемой в [5] на случай наличия карантинного узла и контрольных очередей в узлах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боярович Ю.С. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний замкнутой сети массового обслуживания с временно неактивными заявками // Автоматика и телемеханика. 2012. № 10. С. 32–41.
2. Боярович Ю.С. Стационарное распределение сети с различными типами заявок и ненадежными требованиями // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : сб. науч. ст. Минск : БГУ, 2009. С. 14–20.
3. Малинковский Ю.В., Нуеман А.Ю. Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания // Весці НАНБ. Серыя фіз.-мат. навук. 2001. № 3. С. 129–134.

4. Дудовская Ю.Е., Якубович О.В. Открытая марковская сеть массового обслуживания с «карантинным» узлом // XII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф. Минск, 5–10 сентября 2016 г.: в 5 ч. / ред. С.Г. Красовский. Ч. 4. Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2016. С. 5–6.
5. Jackson J.R. Jobshop-like Queueing Systems // Manag. Sci. 1963. V. 10, No. 1. P. 131–142.

Летунович Юлия Евгеньевна, канд. физ.-мат. наук. E-mail: yletunovich@gmail.com
Якубович Оксана Владимировна, канд. физ.-мат. наук. E-mail: yakubovich@gsu.by
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины (Республика Беларусь)

Поступила в редакцию 2 сентября 2017 г.

Letunovich Yuliya E., Yakubovich Oksana V. (F. Scorina Gomel State University, Belarus).
Open Markov queueing networks with control queues and quarantine node.
Keywords: queueing network; control queues in the nodes; stationary distribution; ergodicity.

DOI: 10.17223/19988605/41/4

Recently the questions of information security and using of the antivirus software are very important. Such software finds and neutralizes harmful objects and threats for systems and networks. In systems and queueing networks functioning of the similar software can be described by means of queues in which all arriving objects are checked with the subsequent neutralization of harmful objects in a quarantine.

In this paper, the open queueing network with the Poisson input flow with a parameter λ is investigated. Every customer goes to the node i with probability p_{0i} ($i = \overline{1,N}$, $\sum_{i=1}^{N} p_{0i} = 1$). In each of N nodes there are two queues: control queue and a queue for service.

Every arriving customer joins control queue, in which it is scanning, checking on compliance to requirements of the network. The times of checking have exponential distribution with a parameter ν_i ($i = \overline{1,N}$).

After checking in the node i every customer is admitted as non-standard with probability p_i and is directed to the queue of node (N+1) immediately and independently from the other customers. Or it joins queue of standard customers in the node i with probability $1 - p_i$.

Standard customers are served by the device, service times in each node are independent and have exponential distribution with parameter μ_i ($i = \overline{1,N}$). After service at the node i every customer is sent immediately to the node j with probability p_{ij}, and it leaves the network with probability p_{i0} $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij} + p_{i0} = 1,\ i = \overline{1,N}\right)$.

In the node (N+1) called quarantine the restoration of qualities of non-standard customers or their neutralization is carried out. The times of such service have exponential distribution with a parameter μ_{N+1}. After service at the node (N+1) every customer is sent immediately to the node j with probability p_{N+1j}, and it leaves the network with probability p_{N+10} $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{N+1j} + p_{N+10} = 1\right)$.

Network state at the moment t is characterized by a vector

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{N+1}(t)),$$

where $x_i(t) = (m_i(t), n_i(t))$ is the state of the node i at the moment t, $m_i(t)$ is the number of the customers in the control queue, $n_i(t)$ is the number of the customers in the queue for service in the node i at the time moment t ($i = \overline{1,N}$); $x_{N+1}(t) = n_{N+1}(t)$ is the number of the customers in the quarantine node (N+1) at the moment t.

The process $x(t)$ is homogeneous Markov process with continuous time and finite or countable states space $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{N+1}$, где $X_i = \{x_i = (m_i, n_i): m_i, n_i \geq 0,\ i = \overline{1,N}\}$, $X_{N+1} = \{x_{N+1} = n_{N+1}: n_{N+1} \geq 0\}$.

Traffic equations are following

$$\varepsilon_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j (1 - p_j) p_{ji} + \varepsilon_{N+1} p_{N+1i},\ i = \overline{1,N},$$

$$\varepsilon_{N+1} = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j p_j.$$

Let $\{p(x), x \in X\}$ be stationary distribution of states probabilities for the process $x(t)$.

We proved the following statement. If for all $i = \overline{1,N}$ inequalities

$$\frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i} < 1,\ \frac{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}{\mu_i} < 1,\ \frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} < 1$$

are carried out, then Markov process $x(t)$ is ergodic and stationary distribution of the network states probabilities has the following form

$$p(x) = p_1(x_1)\, p_2(x_2) \ldots p_{N+1}(x_{N+1}),\ x \in X,$$

where

$$p_i(x_i) = \left(\frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i}\right)^{m_i} \left(\frac{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}{\mu_i}\right)^{n_i} \left(1 - \frac{\lambda\varepsilon_i}{\nu_i}\right)\left(1 - \frac{\lambda\varepsilon_i(1-p_i)}{\mu_i}\right),\ i = \overline{1,N},$$

$$p_{N+1}(x_{N+1}) = \left(\frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right)^{n_{N+1}} \left(1 - \frac{\lambda\varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right),$$

(ε_i, $\overline{1, N+1}$) is solutions of the traffic equations.

REFERENCES

1. Boyarovich, Yu.S.(2012) The stationary distribution invariance of states in a closed queuing network with temporarily non-active customers. *Automation and Remote Control*. 73. pp. 1616–1623. DOI: 10.1134/S0005117912100037
2. Boyarovich, Yu.S. (2009) Statsionarnoe raspredelenie seti s razlichnymi tipami zayavok i nenadezhnymi trebovaniyami [The stationary distribution of the network with various types of customers and unreliable requests]. In: *Teoriya veroyatnostey, matematicheskaya statistika i ikh prilozheniya* [Probability theory, mathematical statistics and their applications]. Minsk: Belarusian State University. pp. 14–20.
3. Malinkovsky, Yu.V. (2001) Mul'tiplikativnost' statsionarnogo raspredeleniya v otkrytykh setyakh s mnogorezhimnymi strategiyami obsluzhivaniya [Multiplication of probability distribution in open networks with multimode service strategies]. *Vestsi NANB. Seryya fiz.-mat. navuk*. 3. pp. 129–134.
4. Dudovskaya, Y.E. & Yakubovich, O.V. (2016) [Open Markov queueing network with quarantine node]. *Proc. of the 12th Belarusian Conference of math*. 4. pp. 5–6. (In Russian).
5. Jackson, J.R. (1963) Jobshop-like Queueing Systems. *Managment Science*. 10(1). pp. 131–142. DOI: 10.1287/mnsc.1040.0268