# МАТЕМАТИКА

УДК 515.12
DOI 10.17223/19988621/50/1

**С.П. Гулько, А.В. Иванов**

## О ВПОЛНЕ ЗАМКНУТЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ КОМПАКТОВ ФЕДОРЧУКА[1]

*F*-компактом или компактом Федорчука называется компактное хаусдорфово топологическое пространство, допускающее разложение в специальный вполне упорядоченный обратный спектр с вполне замкнутыми соседними проекциями. F-компакты спектральной высоты 3 – это в точности неметризуемые компакты, допускающие вполне замкнутое отображение на метрический компакт с метризуемыми слоями. Доказано, что такое вполне замкнутое отображение для *F*-компакта *X* спектральной высоты 3 определено почти однозначно. А именно, нетривиальные слои любых двух вполне замкнутых отображений *X* в метрические компакты с метризуемыми прообразами точек совпадают всюду, за исключением, может быть, счетного семейства элементов.

**Ключевые слова:** *компакт Федорчука, обратный спектр, вполне замкнутое отображение.*

*Компактом Федорчука* или *F-компактом* называется компактное хаусдорфово топологическое пространство, допускающее разложение в специальный вполне упорядоченный обратный спектр (*F*-спектр) с вполне замкнутыми соседними проекциями (см. [1]). Наименьшая длина такого спектра, дающего в пределе данный компакт *X*, называется спектральной высотой sh(*X*) *F*-компакта *X*. Спектральная высота любого неметризуемого *F*-компакта больше либо равна 3. При этом $\mathrm{sh}(X)=3$ тогда и только тогда, когда существует вполне замкнутое отображение $f:X\to K$ на метрический компакт *K* с метризуемыми слоями $f^{-1}(t), t\in K$. (Такое вполне замкнутое отображение мы будем называть для краткости *допустимым.*) Таким образом, всякий *F*-компакт спектральной высоты 3 изначально связан с некоторым допустимым вполне замкнутым отображением. В работе доказано, что такое отображение для любого *F*-компакта *X* является почти единственным. А именно, если имеются два допустимых вполне замкнутых отображения $f_i:X\to K_i$, $i=1,2$, компакта *X* в метрические компакты $K_i$, то множество несовпадающих нетривиальных слоев этих отображений не более чем счетно:

$$\left|\left\{f_1^{-1}(t):|f_1^{-1}(t)|>1,t\in K_1\right\}\Delta\left\{f_2^{-1}(t):|f_2^{-1}(t)|>1,t\in K_2\right\}\right|\le\omega_0$$

(через $\Delta$ обозначена симметрическая разность множеств).

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-51-18051

Примерами $F$ -компактов спектральной высоты 3 являются, например, «две стрелки» $D$ и лексикографический квадрат отрезка $[0,1]_l^2$. Из основного результата данной статьи следует, что почти все нетривиальные слои любого допустимого вполне замкнутого отображения $f : D \to K$ являются двоеточиями, которые склеиваются при стандартном проектировании $D$ на отрезок. Аналогично, почти все нетривиальные слои любого допустимого вполне замкнутого отображения $f : [0,1]_l^2 \to K$ обязательно совпадают с «вертикальными отрезками» лексикографического квадрата $[0,1]_l^2$.

В дальнейшем рассматриваются только компактные хаусдорфовы топологические пространства. Непрерывное сюръективное отображение $f : X \to K$ является вполне замкнутым тогда и только тогда, когда для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств $F_1$ и $F_2$ в $X$ пересечение $f(F_1) \cap f(F_2)$ конечно (см. [2], предложение 1.6, с. 124). Это характеристическое свойство примем здесь за определение вполне замкнутости.

**Теорема**. Пусть $f_i : X \to K_i, i = 1,2$, – вполне замкнутые отображения компакта $X$ на метрические компакты $K_i$ с метризуемыми слоями $f_i^{-1}(t), t \in K_i$. Тогда

$$\left|\left\{f_1^{-1}(t) : |f_1^{-1}(t)| > 1, t \in K_1\right\} \Delta \left\{f_2^{-1}(t) : |f_2^{-1}(t)| > 1, t \in K_2\right\}\right| \le \omega_0.$$

***Доказательство***. Рассмотрим множество $A = \{t : \left|f_2(f_1^{-1}(t))\right| > 1\}$ и докажем, что оно не более чем счетно. Предположим противное. Тогда в $K_2$ получим несчетное индексированное семейство неодноточечных замкнутых подмножеств $\{B_t = f_2(f_1^{-1}(t)) : t \in A\}$. Для этого семейства найдутся $n \in N$ и несчетное подмножество $A_1 \subset A$, такие, что $\mathrm{diam} B_t \ge \frac{1}{n}$ при $t \in A_1$. Множество $T = \{B_t : t \in A_1\}$ имеет в $\exp K_2$ предельную точку $B$ (здесь через $\exp K_2$ обозначено пространство всех непустых замкнутых подмножеств в $K_2$ с метрикой Хаусдорфа). Ясно, что $\mathrm{diam} B \ge \frac{1}{n}$. Возьмем в $B$ две различные точки $p_1, p_2$ и их окрестности $Op_1$, $Op_2$ в $K_2$ с непересекающимися замыканиями. Поскольку $B$ – предельная точка $T$, то, согласно определению метрики Хаусдорфа в $\exp K_2$, множество

$$A_2 = \{t \in A_1; B_t \cap Op_1 \ne \varnothing, B_t \cap Op_2 \ne \varnothing\}$$

бесконечно. Рассмотрим в $X$ два непересекающихся замкнутых подмножества $F_i = f_2^{-1}(Cl(Op_i)), i = 1,2,$ где $Cl(Op_i)$ – замыкание множества $Op_i$. По построению имеем: $A_2 \subset f_1(F_1) \cap f_1(F_2)$, что противоречит вполне замкнутости отображения $f_1$.

Итак доказано, что почти все слои отображения $f_1$ содержатся в слоях отображения $f_2$. Аналогично, почти все слои $f_2$ содержатся в слоях $f_1$.

Покажем теперь, что любой слой $f_2$ содержит не более чем счетное множество нетривиальных слоев $f_1$. Предположим, что это не так и некоторый слой $f_2^{-1}(s), s \in K_2$, содержит несчетное множество слоев $f_1^{-1}(t)$, где $|f_1^{-1}(t)| > 1$,

$t \in E \subset K_1, |E| > \omega_0$ . Рассмотрим отображение

$$f_1|_{f_2^{-1}(s)}: f_2^{-1}(s) \to f_1(f_2^{-1}(s)).$$

Это отображение вполне замкнуто (см. [2], предложение 1.14, с.128), и все его слои $f_1^{-1}(t)$ нетривиальны при $t \in E \subset f_1(f_2^{-1}(s)), |E| > \omega_0$, откуда следует ([2], предложение 3.10, с. 137) неметризуемость $f_2^{-1}(s)$ . Получено противоречие.

Таким образом, доказано, что:

1) множество слоев отображения $f_1$, которые не содержатся в слоях $f_2$ , не более чем счетно;

2) множество слоев отображения $f_2$ , не содержащихся в слоях $f_1$, также не более чем счетно, и каждый такой слой содержит не более чем счетное множество нетривиальных слоев $f_1$ .

Следовательно, объединенное множество нетривиальных слоев $f_1$, упомянутых в 1) и 2), не более чем счетно. Остальные нетривиальные слои $f_1$ содержатся в слоях $f_2$ , которые, в свою очередь, содержатся в слоях $f_1$ . Таким образом, все эти слои $f_1$ совпадают со слоями $f_2$ . Поменяв местами $f_1$ и $f_2$ , получим аналогичное утверждение о нетривиальных слоях $f_2$ . Теорема доказана.

**Замечание**. В формулировке теоремы речь идет только о нетривиальных слоях отображений, и это ограничение принципиально. Пусть $f: X \to K$ – допустимое вполне замкнутое отображение $F$ -компакта $X$ спектральной высоты 3, и пусть точка $t_0 \in K$ такова, что $|f^{-1}(t_0)| = 2^{\aleph_0}$. Рассмотрим следующее разбиение компакта $X$:

$$R = \{f^{-1}(t) : t \in K, t \neq t_0\} \cup \{\{x\} : x \in f^{-1}(t_0)\}.$$

Фактор-пространство $X/R$ по этому разбиению является метрическим компактом, а факторное проектирование $\pi: X \to X/R$ есть допустимое вполне замкнутое отображение (см. [2], с. 124). Но при этом все (тривиальные) слои $\pi^{-1}(\{x\}), x \in f^{-1}(t_0)$, отличны от слоев отображения $f$.

В заключение приведем пример двух допустимых вполне замкнутых отображений $f_i : X \to K_i, i = 1, 2$ , $F$ -компакта $X$ спектральной высоты 3, для которых

$$\left|\left\{f_1^{-1}(t) : |f_1^{-1}(t)| > 1, t \in K_1\right\} \Delta \left\{f_2^{-1}(t) : |f_2^{-1}(t)| > 1, t \in K_2\right\}\right| = \omega_0.$$

В качестве $X$ возьмем компакт «две стрелки» $D$, и пусть $f_1 : D \to I$ – стандартное проектирование $D$ на отрезок. Возьмем любое счетное замкнутое подмножество $F \subset I$ и определим $g : I \to K$ как факторное отображение отрезка $I$, единственным нетривиальным слоем которого является $F$. Легко проверить, что композиция $f_2 = g \circ f_1$ является вполне замкнутым отображением, все слои которого метризуемы. При этом для отображений $f_1$ и $f_2$ выполняется равенство (1).

В связи с доказанной теоремой можно сформулировать общий вопрос о «степени однозначности» разложения $F$-компакта спектральной высоты $\alpha$ в $F$-спектр длины $\alpha$ .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов А.В.* О наследственной нормальности $F$-бикомпактов // Математические заметки. 1986. Т. 39. Вып. 4. С. 606–611.
2. *Федорчук В.В.* Вполне замкнутые отображения и их приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2003. Т. 9. Вып. 4. С. 105–235.

Статья поступила 20.11.2017 г.

Gul'ko S.P., Ivanov A.V. (2017) ON FULLY CLOSED MAPPINGS OF FEDORCHUK COMPACTA. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 5–8

DOI 10.17223/19988621/50/1

An $F$-compactum or a Fedorchuk compactum is a compact Hausdorff topological space that admits a decomposition into a special fully ordered inverse spectrum with fully closed neighboring projections. $F$-compacta of spectral height 3 are exactly nonmetrizable compacta that admit a fully closed mapping onto a metric compactum with metrizable fibers.

In this paper, it is proved that such a fully closed mapping for an $F$-compactum $X$ of spectral height 3 is defined almost uniquely. Namely, nontrivial fibers of any two fully closed mapping of $X$ into metric compacts with metrizable inverse images of points coincide everywhere, with a possible exception of a countable family of elements.

Examples of $F$-compacta of spectral height 3 are, for example, Aleksandrov's "two arrows" and the lexicographic square of the segment. It follows from the main result of this paper that almost all non-trivial layers of any admissible fully closed mapping are colons that are glued together under the standard projection of $D$ onto the segment. Similarly, almost all nontrivial fibers of any admissible fully closed mapping necessarily coincide with the "vertical segments" of the lexicographic square.

Keywords: Fedorchuk compactum, inverse spectra, fully closed mapping.

*GUL'KO Sergey Porfiryevich* (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: gulko@math.tsu.ru

*IVANOV Aleksandr Bladimirovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Applied Mathematics of Karelian Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, Russian Federation)
E-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

REFERENCES

1. Ivanov A.V. (1986) Hereditary normality of F-bicompacta. *Mathematical Notes*. 39(4). pp. 332–334.
2. Fedorchuk V.V. (2006) Fully closed mappings and their applications. *Journal of Mathematical Sciences*. 136(5). pp. 4201–4292.