УДК 519.642.4
DOI 10.17223/19988621/50/2

Д.Ю. Иванов

О РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОЛЛОКАЦИОННЫМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Предлагается разновидность коллокационного метода граничных элементов с кубической скоростью сходимости, позволяющего получить решения начально-краевых задач с граничными условиями первого, второго и третьего рода для уравнения $\partial_t u = a^2 \Delta_2 u - pu$ с постоянными $a, p > 0$ в плоской пространственной области при нулевом начальном условии. Для того чтобы иметь возможность доказать сходимость метода с указанной скоростью, аппроксимация интегралов на сингулярных и околосингулярных граничных элементах осуществляется на основе аналитического интегрирования по расстоянию между точками границы. Такая аппроксимация практически и теоретически осуществима для любой аналитически заданной границы класса C^5.

Ключевые слова: *граничное интегральное уравнение*, *метод граничных элементов*, *сингулярные граничные элементы*, *нестационарная теплопроводность*, *коллокация*, *оператор*, *аппроксимация*, *устойчивость.*

В настоящей работе предлагается полностью обоснованный коллокационный метод граничных элементов (КМГЭ) [1, с. 21], позволяющий получить численные решения внутренних и внешних начально-краевых задач (НКЗ) с граничными условиями первого, второго и третьего рода для уравнения $\partial_t u = a^2 \Delta_2 u - pu$ с постоянными $a, p > 0$ в плоской пространственной области при нулевом начальном условии. Решения ищутся в виде потенциала двойного слоя для задачи Дирихле и в виде потенциала простого слоя для задач Неймана и Робина с неизвестными функциями плотности, определяемыми из граничных интегральных уравнений (ГИУ) второго рода. Ранее обоснование коллокационных схем для решения ГИУ второго рода, возникающих в задачах нестационарной теплопроводности, выполнялось в работах [2–4]. В этих работах исследовалась задача Неймана и решение находилось в виде потенциала простого слоя. В работах [2, 4] доказательство сходимости метода было сделано на границах класса гладкости C^∞, а в работе [3] – на негладких поверхностях, удовлетворяющих условию типа Липшица. В работе [4] разработана методика численного решения ГИУ с сингулярной правой частью на основе соответствующей замены переменной. Обоснование КМГЭ для плоской задачи Дирихле дано в работе [5], при этом используется ГИУ первого рода и решение ищется в виде потенциала простого слоя.

Во всех перечисленных работах, а также других работах, посвященных обоснованию КМГЭ, вопрос аппроксимации интегралов на пространственно-временных граничных элементах (ГЭ), которые образуются в результате кусочно-полиномиальной интерполяции функции плотности, считается чисто вычислительным и выносится за рамки доказательства сходимости методов, которое предполагает точное вычисление таких интегралов. При этом, как правило, в первую очередь осуществляется аналитическое интегрирование по временно́й переменной τ (при $p=0$ это возможно). Затем выполняется интегрирование по длине дуги s (в плоском случае), причем в случае интегрального оператора двойного слоя интегралы вычисляются с помощью простых квадратурных формул Гаусса (ПКФГ) [1, с. 79; 4]. В случае интегрального оператора простого слоя на сингулярных ГЭ выделяется логарифмическая особенность, которая для простых геометрий интегрируется аналитически, а все остальные интегралы по s также вычисляются с помощью ПКФГ [5; 1, с. 172] (сингулярными называются ГЭ, содержащие точку с парой значений $\tau=0$, $r=0$; r – расстояние от граничной точки, в которой вычисляется интеграл как функция от параметра, до текущей граничной точки интегрирования). При таком подходе не учитывается неограниченное возрастание производных подынтегральной функции на определенной части околосингулярных ГЭ при измельчении сетки, а также неограниченность таких производных на сингулярных ГЭ в случае интегрального оператора двойного слоя, что не позволяет в принципе применять ПКФГ без снижения порядка аппроксимации схемы в целом. Вместе с тем применение ПКФГ дает хорошие результаты, если точки, в которых вычисляются интегралы на ГЭ как функции от параметра, расположены на границе между ГЭ.

Не имея возможности ни обосновать применение ПКФГ теоретически, ни опровергнуть практически, автор предлагает для вычисления интегралов по длине дуги s на сингулярных и околосингулярных ГЭ аппроксимацию третьего порядка относительно шага по длине дуги, использующую осуществимое для любого аналитически заданного контура точное интегрирование по расстоянию r между точками границы. При таком интегрировании роль весовых функций играют функции переменной r, порожденные фундаментальным решением уравнения теплопроводности, а остальная часть подынтегральной функции аппроксимируется с помощью квадратичной интерполяции по r. Так вычисляются интегралы на сингулярных ГЭ, а также на околосингулярных ГЭ в некоторой фиксированной по длине дуги области, прилегающей к сингулярному ГЭ, а на остальных ГЭ интегралы по s вычисляются с помощью ПКФГ. Первоначальное интегрирование по τ проводится аналогично: множитель $e^{-p\tau}$ аппроксимируется с помощью кусочно-квадратичной интерполяции, и тогда интегралы вычисляются точно. Стоит отметить, что здесь при решении ГИУ не осуществляется кусочно-полиномиальная интерполяция функции плотности по времени, как это делается обычно в КМГЭ, а выполняется кусочно-квадратичная интерполяция временно́й C_0-полугруппы, через которую выражаются ядра интегральных операторов. В целом получена схема с кубической скоростью сходимости относительно шагов по времени и длине дуги. Доказана сходимость в равномерной операторной топологии как сеточных операторов, аппроксимирующих разрешающие операторы ГИУ, так и сеточных функционалов, определяющих приближенное решение НКЗ в любой точке пространственно-временно́й области. Доказана устойчивость приближенных решений ГИУ и НКЗ к возмущениям граничных функций. Полученные результаты справедливы для границы с гладкостью C^5. Приведены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие кубическую сходимость приближенных решений всех трех НКЗ в круговой пространственной области.

В заключение отметим, что в данном КМГЭ используется равномерная временна́я сетка. Благодаря этому разрешающие ГИУ сеточные операторы экономно вычисляются, так как имеют вид полиномов, образованных степенями оператора правого сдвига на временно́й сетке. Матричные коэффициенты таких полиномов реккурентно находятся с помощью матричных коэффициентов прямого сеточного оператора ГИУ, имеющего аналогичный вид.

Предварительные замечания

Пусть Ω^+ – плоская открытая ограниченная односвязная область, и $\Omega^- \equiv \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega^+}$ ($\mathbf{R} \equiv (-\infty, +\infty)$). Кроме того, пусть $\partial\Omega$, граница области Ω^+, является кривой класса гладкости C^2, если не оговорено особо. Рассмотрим четыре краевые задачи (внутренние и внешние при $i = 1, 2$):

$$a^2 \Delta_2 \boldsymbol{u}_i^\pm - p\boldsymbol{u}_i^\pm = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}_i^\pm \ \ (\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega^\pm),$$

$$\boldsymbol{u}_1^\pm = \boldsymbol{w}_1^\pm \ \ (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega), \ \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}_2^\pm - \eta\, \boldsymbol{u}_2^\pm = \boldsymbol{w}_2^\pm \ \ (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{u}_i^\pm(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{w}_i^\pm(\boldsymbol{x})$ – векторные функции со значениями в пространстве $L_2 \equiv L_2(I_T)$ ($I_T \equiv [0, T]$), заданные на множествах $\Omega^\pm$ и $\partial\Omega$ соответственно (все вводимые здесь пространства функций считаем комплексными); $\boldsymbol{n}$ – нормаль к кривой $\partial\Omega$ в точке $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, направленная внутрь области Ω^+; $p > 0$, $\Delta_2 \equiv \partial_{x_1 x_1}^2 + \partial_{x_2 x_2}^2$ (непрерывность и дифференцируемость векторных функций предполагается здесь в норме пространства их значений, в данном случае – L_2), $a > 0$ – коэффициент температуропроводности, $\eta \ge 0$ – коэффициент теплообмена на боковой поверхности цилиндра (p, a, η – постоянные); $\boldsymbol{B}$ – замкнутый оператор в L_2: $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{f})(t) = f'(t)$, заданный на множестве $D(\boldsymbol{B})$ абсолютно непрерывных на промежутке I_T функций $f(t) \in L_2$, таких, что $f(0) = 0$. Заметим, что в настоящей работе рассматриваются только линейные пространства и операторы.

Пусть $C(\Omega')$ и $C^k(\Omega')$ – пространства непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых на некотором множестве $\Omega' \subset \mathbf{R}^2$ векторных функций со значениями в L_2. Авторами [6, 7] доказана однозначная разрешимость задач (1) в классе $C(\overline{\Omega^\pm}) \cap C^2(\Omega^\pm)$ при любых $\boldsymbol{w}_i^\pm \in C(\partial\Omega)$. Решения имеют вид векторных потенциалов – криволинейных интегралов первого рода:

$$\boldsymbol{u}_1^\pm(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}_1^\pm, \ \boldsymbol{u}_2^\pm(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}_2^\pm \ \ (x \in \Omega^\pm), \tag{2a}$$

где функции $\boldsymbol{v}_i^\pm \in C(\partial\Omega)$ находятся из соответствующих ГИУ:

$$\left(\boldsymbol{G}_i^\pm \boldsymbol{v}_i^\pm\right)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}_i^\pm(\boldsymbol{x}) \ \ (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \ i = 1, 2); \ \boldsymbol{G}_1^\pm \equiv \pm 2^{-1} + \boldsymbol{G}_1, \ \boldsymbol{G}_2^\pm \equiv \mp 2^{-1} + \boldsymbol{G}_2 - \eta\, \boldsymbol{G}_0; \tag{2b}$$

$$\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{G}_i \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')\, ds' \ \ (\boldsymbol{f} \in C(\partial\Omega), \ i = \overline{0, 2}),$$

$\boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ ($\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$) – ограниченные операторы в пространстве L_2, определяемые равенствами:

$$\boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{f} \equiv \int\limits_{I_T} g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)e^{-p\tau}\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau \ \ (\boldsymbol{f}\in L_2),\ g_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)\equiv a_0(r,\tau),$$

$$g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\tau)\equiv a_i(r,\tau)b_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \ \ (i=1,2),\ a_0(r,\tau)\equiv a(r,\tau),$$

$$a_1(r,\tau)=a_2(r,\tau)\equiv -r\,\partial_r a(r,\tau),\ b_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\equiv \partial_{\boldsymbol{n}_i}\ln r^{-1}.$$

Здесь $a(r,\tau)\equiv(4\pi\tau)^{-1}\exp\left[-r^2\big/\left(4a^2\tau\right)\right]$, $r\equiv|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$; $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{n}$ – нормали к кривой $\partial\Omega$, проходящие через точки $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}$ соответственно и направленные внутрь области Ω^+; дифференцирования $\partial_{\boldsymbol{n}_1}$ и $\partial_{\boldsymbol{n}_2}$ осуществляются соответственно по точкам $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}$. Операторы $\boldsymbol{U}(\tau)$ образуют C_0-полугруппу правых сдвигов, порождаемую оператором $\boldsymbol{B}$: $(\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f})(t)=f(t-\tau)$ при $\tau\le t$, $(\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f})(t)=0$ при $\tau>t$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}=\lim\limits_{\tau\to+0}\tau^{-1}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f})$ ($\boldsymbol{f}\in D(\boldsymbol{B})$). Заметим, что $\|\boldsymbol{U}(\tau)\|=1$ при $\tau<T$, $\boldsymbol{U}(\tau)=\boldsymbol{O}$ при $\tau\ge T$ ($\boldsymbol{O}$ – нулевой оператор).

Введем в рассмотрение параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1=\tilde{x}_1(s)$, $x_2=\tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{\boldsymbol{x}}(s)\equiv(\tilde{x}_1(s),\tilde{x}_2(s))$, причем $s>0$, если дуга откладывается по часовой стрелке, и $s<0$, если против. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$, периодические с периодом $2S$ (S – половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $I_S\equiv[-S,S)$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega\in C^k$, если функции $\tilde{x}_i(s)$ ($i=1,2$) имеют непрерывные производные на замкнутом множестве $\overline{I_S}$ до порядка k включительно, причем $\tilde{x}_i^{(l)}(-S+0)=\tilde{x}_i^{(l)}(S-0)$ ($l=\overline{1,k}$).

Введем в пространстве $C(\partial\Omega)$ норму: $\|\boldsymbol{f}\|_{C(\partial\Omega)}\equiv\max\limits_{x\in\partial\Omega}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|_{L_2}$. Обозначим через $C^k(\partial\Omega)$ ($k\in\mathbf{N}\equiv\{1,2,...\}$, $C^0(\partial\Omega)\equiv C(\partial\Omega)$) банаховы пространства, состоящие из функций $\boldsymbol{f}\in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные на множестве $\partial\Omega$ производные $\boldsymbol{f}^{(l)}$: $\boldsymbol{f}^{(l)}(s)\equiv d^l\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s))\big/ds^l$ ($s\in\overline{I_S}$, $l=\overline{1,k}$), с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{C^k(\partial\Omega)}=\max\limits_{l=\overline{0,k}}\left\|\boldsymbol{f}^{(l)}\right\|_{C(\partial\Omega)}$.

Обозначим через H^n ($n\in\mathbf{N}$) гильбертово пространство функций $\boldsymbol{f}\in L_2$: $\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{f}\in L_2$ ($m=\overline{1,n}$), с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{H^n}\equiv\left[\sum_{m=0}^n\left\|\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{f}\right\|_{L_2}^2\right]^{1/2}$ ($H^0\equiv L_2$). Введем в рассмотрение банаховы пространства $C_n^k(\partial\Omega)$ ($k\in\mathbf{Z}_+\equiv\{0,1,...\}$, $n\in\mathbf{N}$, $C_0^k(\partial\Omega)\equiv C^k(\partial\Omega)$), состоящие из элементов $\boldsymbol{f}\in C^k(\partial\Omega)$, таких, что $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in H^n$ при $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ и $\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{f}\in C^k(\partial\Omega)$ ($m=\overline{1,n}$), с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{C_n^k(\partial\Omega)}\equiv\max\limits_{l=\overline{0,k},s\in\overline{I_S}}\left\|\boldsymbol{f}^{(l)}(s)\right\|_{H^n}$.

Будем рассматривать также банаховы пространства $C_{n,m}^k(\partial\Omega)\equiv C_n^k(\partial\Omega)\cap C_{n+m}(\partial\Omega)$ с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{C_{n,m}^k(\partial\Omega)}\equiv\|\boldsymbol{f}\|_{C_n^k(\partial\Omega)}+\|\boldsymbol{f}\|_{C_{n+m}(\partial\Omega)}$ ($k,n\in\mathrm{Z}_+$, $m\in\mathrm{N}$, $C_{n,0}^k(\partial\Omega)\equiv C_n^k(\partial\Omega)$).

Условимся оператор $\boldsymbol{A}$, отображающий банахово пространство B в банахово пространство C, обозначать как $\boldsymbol{A}\ [\,B \to C\,]$, а если $C = B$, то $\boldsymbol{A}\ [\,B\,]$. В силу теорем 2 и 3 [8] имеет место утверждение:

Теорема 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $\boldsymbol{G}_i^{\pm}\ [\,C_{n,m}^k(\partial\Omega)\,]$ всюду определены, ограничены и ограниченно обратимы ($k,m,n \in \mathbf{Z}_+$).

Введем в рассмотрение банахово пространство $C(\Xi)$ непрерывных на множестве $\Xi \equiv \partial\Omega \times I_T$ скалярных функций $f(\boldsymbol{x},t)$ с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{C(\Xi)} \equiv \max\limits_{(\boldsymbol{x},t)\in\Xi} |f(\boldsymbol{x},t)|$. Введем также в рассмотрение банаховы пространства $C^k(\Xi)$ и $C_n(\Xi)$ ($k \in \mathbf{Z}_+$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $C^0(\Xi) = C_0(\Xi) \equiv C(\Xi)$) функций $\boldsymbol{f} \in C(\Xi)$, имеющих непрерывные на множестве $\overline{I_S} \times I_T$ скалярные производные $\left(\partial_s^l f\right)(s,t) \equiv \partial_s^l f\left(\tilde{\boldsymbol{x}}(s),t\right)$ ($l = \overline{0,k}$) и $\partial_t^m f\left(\tilde{\boldsymbol{x}},t\right)$ ($m = \overline{0,n}$) соответственно с нормами $\|\boldsymbol{f}\|_{C^k(\Xi)} \equiv \max\limits_{l=\overline{0,k}} \left\|\partial_s^l f\right\|_{C(\Xi)}$ и $\|\boldsymbol{f}\|_{C_n(\Xi)} \equiv \max\limits_{m=\overline{0,n}} \left\|\partial_t^m f\right\|_{C(\Xi)}$. Наконец, будем рассматривать банаховы пространства $C_n^k(\Xi) \equiv C^k(\Xi) \cap C_n(\Xi)$ с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{C_n^k(\Xi)} \equiv \|\boldsymbol{f}\|_{C^k(\Xi)} + \|\boldsymbol{f}\|_{C_n(\Xi)}$ ($k,n \in \mathbf{Z}_+$). С учетом соотношений

$$|f(\boldsymbol{x},t)| = \left|\int_0^t (\boldsymbol{B}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x},t')dt'\right| \le \left[t\int_0^t |(\boldsymbol{B}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x},t')|^2\, dt'\right]^{1/2} \le \sqrt{T}\, \|\boldsymbol{f}\|_{C_1(\partial\Omega)}$$

$$(\,(\boldsymbol{x},t) \in \partial\Omega \times I_T\,,\ \boldsymbol{f} \in C_1(\partial\Omega)\,), \tag{3a}$$

имеем следующее:

$$C_{1,n}^k(\partial\Omega) \subset C_n^k(\Xi)\,,\ \|\boldsymbol{f}\|_{C_n^k(\Xi)} \le \sqrt{T}\, \|\boldsymbol{f}\|_{C_{1,n}^k(\partial\Omega)}\ (\,\boldsymbol{f} \in C_{1,n}^k(\partial\Omega)\,;\ k,n \in \mathbf{Z}_+). \tag{3b}$$

Пусть s, s' – значения параметра, соответствующие точкам $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}' \in \partial\Omega$. Введем обозначение: $\sigma \equiv s' - s$. На множестве $\partial\Omega$ зададим функцию $\rho(s,s')$: $\rho = r$, если $\sigma \ge 0$; $\rho = -r$, если $\sigma < 0$. Введем в рассмотрение функции $\psi_i(s,s')$ ($i = \overline{0,3}$), заданные на множестве $\overline{I_S} \times \overline{I_S}$ при $s' \ne s$ равенствами $\psi_i \equiv \varphi_i / \sigma^2$ ($i = \overline{0,2}$) и $\psi_3 \equiv \varphi_3 / \sigma$, где

$$\varphi_0(s,s') \equiv r^2 = \left[x_1(s') - x_1(s)\right]^2 + \left[x_2(s') - x_2(s)\right]^2,$$

$$\varphi_1(s,s') \equiv r\,\partial_{\boldsymbol{n}_1} r = x_2'(s')\left[x_1(s') - x_1(s)\right] - x_1'(s')\left[x_2(s') - x_2(s)\right],$$

$$\varphi_2(s,s') \equiv r\,\partial_{\boldsymbol{n}_2} r = x_2'(s)\left[x_1(s) - x_1(s')\right] - x_1'(s)\left[x_2(s) - x_2(s')\right],$$

$$\varphi_3(s,s') \equiv r\,\partial_{s'} r = x_1'(s')\left[x_1(s') - x_1(s)\right] + x_2'(s')\left[x_2(s') - x_2(s)\right],$$

а при $s' = s$ равенствами

$$\psi_0(s,s) = \psi_3(s,s) \equiv 1\,,\ \psi_1(s,s) = \psi_2(s,s) \equiv 2^{-1}\left[x_1''(s)\, x_2'(s) - x_2''(s)\, x_1'(s)\right].$$

Кроме того, введем в рассмотрение функции

$$\delta(s,s') \equiv \left(\partial_{s'}\rho\right)^{-1} = \sqrt{\psi_0} \big/ \psi_3\,,\ b_i(s,s') \equiv b_i(\tilde{\boldsymbol{x}}(s), \tilde{\boldsymbol{x}}(s')) = -\psi_i / \psi_0\ \ (\,i = 1,2\,).$$

Лемма [8]. Пусть I – замкнутый интервал на вещественной оси. Предположим, что некоторая вещественная функция $f(z,\zeta)$ имеет на множестве $I\times I$ непрерывные производные $\partial_z^i\partial_\zeta^j f$ ($i=\overline{0,m}$, $j=\overline{0,m'}$), причем $m<m'$ и $\partial_\zeta^j f\,|_{\zeta=z}=0$ при $z\in I$, $j=\overline{0,q-1}$, где $q=m'-m$. Тогда функция $h(z,\zeta)$, заданная при $\zeta\neq z$ равенством $h(z,\zeta)\equiv f\big/(\zeta-z)^q$, а при $\zeta=z$ равенством $h(z,z)\equiv\partial_\zeta^q f\,|_{\zeta=z}\big/q!$, имеет на множестве $I\times I$ непрерывные производные $\partial_z^i\partial_\zeta^j h$ при $i=\overline{0,m-j}$, $j=\overline{0,m}$.

Теорема 2. Пусть $\partial\Omega\in C^{n+2}$ ($n\in\mathbf{Z}_+$). Тогда существуют непрерывные на множестве $\overline{I_S}\times\overline{I_S}$ производные $\partial_{s'}^j b_i$ ($j=\overline{0,n}$, $i=1,2$). Кроме того, для любого $M>1$ существует $\Sigma>0$, такое, что при $(s,\sigma)\in\overline{I_S}\times I_\Sigma$ ($I_\Sigma\equiv[-\Sigma,\Sigma]$) функция δ ограничена: $1\le\delta\le M$, и существуют непрерывные производные $\partial_{s'}^j\delta$ ($j=\overline{0,n}$).

Доказательство. Можно убедиться, что условия леммы выполняются, если $f=\varphi_3$, $m=n+1$, $q=1$, $z=s'$, $\zeta=s$. Тогда согласно лемме существуют непрерывные на множестве $\overline{I_S}\times\overline{I_S}$ производные $\partial_{s'}^j\psi_3$ ($j=\overline{0,n+1}$). Аналогично в теореме 1 [8] доказано, что существуют непрерывные на множестве $\overline{I_S}\times\overline{I_S}$ производные $\partial_{s'}^j\psi_i$ ($j=\overline{0,n}$, $i=\overline{0,2}$). Поскольку $\delta(s,s)=1$ и $|\rho(s,s_1')-\rho(s,s_2')|\le|s_1'-s_2'|$, то отсюда следует, что для любого $M>1$ существует $\Sigma>0$, такое, что $1\le\delta\le M$ при $(s,\sigma)\in\overline{I_S}\times I_\Sigma$. Контур $\partial\Omega$ не имеет точек самопересечения, поэтому существует положительная константа $c_r\equiv\min\limits_{(s,s')\in\overline{I_S}\times\overline{I_S}}\psi_0(s,s')$. Учитывая последние два обстоятельства, имеем оценку $\psi_3\ge\sqrt{c_r}\big/M$ при $(s,\sigma)\in\overline{I_S}\times I_\Sigma$ и получаем утверждения теоремы на основе представлений

$$\partial_{s'}^j\delta=F_j\Big/\left(\psi_3^{j+1}\psi_0^{j-1/2}\right)\ \ ((s,\sigma)\in\overline{I_S}\times I_\Sigma),$$

$$\partial_{s'}^j b_i=G_{i,j}\Big/\psi_0^{j+1}\ \ ((s,s')\in\overline{I_S}\times\overline{I_S},\ i=1,2),$$

где функции F_j и $G_{i,j}$ суть линейные комбинации произведений некоторых степеней производных $\partial_{s'}^k\psi_3$, $\partial_{s'}^l\psi_0$ ($k,l=\overline{0,j}$) и $\partial_{s'}^k\psi_i$, $\partial_{s'}^l\psi_0$ ($k,l=\overline{0,j}$) соответственно. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\partial\Omega\in C^{n+2}$ ($n\in\mathbf{Z}_+$). Тогда функция $\rho_s(\sigma)\equiv\rho(s,s+\sigma)$ при любых фиксированных $s\in I_S$ и $M>1$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+2} отображает множество I_Σ на множество $\rho_s(I_\Sigma)\equiv[\rho_s(-\Sigma),\rho_s(\Sigma)]$. Функции $\tilde b_0(s,\rho)\equiv\delta(s,s+\sigma_s(\rho))$, $\tilde b_i(s,\rho)\equiv\delta(s,s+\sigma_s(\rho))b_i(s,s+\sigma_s(\rho))$ ($s\in I_S$, $i=1,2$), где $\sigma_s(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_s(\sigma)$, имеют непрерывные на множестве $\overline{I_S}\times\rho_s(I_\Sigma)$ производные $\partial_\rho^j\tilde b_i$ ($j=\overline{0,n}$, $i=\overline{0,2}$).

Обозначим через $\Lambda_m(z)$ и $\tilde{\Lambda}_m(z)$ ($z \in [a,b]$, $m=\overline{0,2}$) квадратичные функции – интерполяционные многочлены Лагранжа, определенные на промежутке $[a,b]$:

$$\Lambda_m(z) \equiv \prod_{j=0\,(j\neq m)}^{2} \frac{z-z_j}{z_m-z_j},\ z_m \equiv \overline{z}+q_m h_z;$$

$$\tilde{\Lambda}_m(z) \equiv \prod_{j=0\,(j\neq m)}^{2} \frac{z-\tilde{z}_j}{\tilde{z}_m-\tilde{z}_j},\ \tilde{z}_m \equiv \overline{z}+\tilde{q}_m h_z\ \ (m=\overline{0,2}).$$

Здесь $h_z \equiv 2^{-1}(b-a)$, $\overline{z} \equiv 2^{-1}(a+b)$; $q_0 \equiv -1$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$; $\tilde{q}_0 \equiv -\sqrt{3}/2$, $\tilde{q}_1 \equiv 0$, $\tilde{q}_2 \equiv \sqrt{3}/2$ [9, с. 92]. Пусть $\boldsymbol{f}(z)$ – трижды непрерывно дифференцируемая на промежутке $[a,b]$ функция со значениями в произвольном банаховом пространстве B. Тогда для функций

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_1(z) \equiv \sum\nolimits_{m=0}^{2} \boldsymbol{f}(z_m)\Lambda_m(z) \text{ и } \tilde{\boldsymbol{f}}_2(z) \equiv \sum\nolimits_{m=0}^{2} \boldsymbol{f}(\tilde{z}_m)\tilde{\Lambda}_m(z)\ \ (z \in [a,b])$$

имеют место оценки:

$$\left\| \tilde{\boldsymbol{f}}_1 - \boldsymbol{f} \right\|_{C[a,b]} \le c_\omega \left\| \boldsymbol{f}^{(3)} \right\|_{C[a,b]} h_z^3,\ c_\omega \equiv 6^{-1} \max_{z\in[-1;1]} \left| z\left(z^2-1\right) \right| = 2\sqrt{3}/9; \tag{4a}$$

$$\left\| \tilde{\boldsymbol{f}}_2 - \boldsymbol{f} \right\|_{C[a,b]} \le \tilde{c}_\omega \left\| \boldsymbol{f}^{(3)} \right\|_{C[a,b]} h_z^3,\ \tilde{c}_\omega \equiv 6^{-1} \max_{z\in[-1;1]} \left| z\left(z^2-3/4\right) \right| = 4^{-1}, \tag{4b}$$

где $\|\boldsymbol{f}\|_{C[a,b]} \equiv \max\limits_{z\in[a,b]} \|\boldsymbol{f}(z)\|_B$. При $z \in [a,b]$ имеют место неравенства: $|\Lambda_m(z)| \le 1$ ($m=\overline{0,2}$), $\left|\tilde{\Lambda}_m(z)\right| \le 3^{-1}\left(2+\sqrt{3}\right)$ ($m=0,2$), $\left|\tilde{\Lambda}_1(z)\right| \le 1$, вследствие которых имеем оценки

$$\left\| \tilde{\boldsymbol{f}}_1(z) \right\|_B \le c_\Lambda \max_{m=\overline{0,2}} \left\| \boldsymbol{f}(z_m) \right\|_B\ \ (z \in [a,b]),\ c_\Lambda \equiv 3; \tag{5a}$$

$$\left\| \tilde{\boldsymbol{f}}_2(z) \right\|_B \le \tilde{c}_\Lambda \max_{m=\overline{0,2}} \left\| \boldsymbol{f}(\tilde{z}_m) \right\|_B\ \ (z \in [a,b]),\ \tilde{c}_\Lambda \equiv 3^{-1}\left(7+2\sqrt{3}\right). \tag{5b}$$

Справедливы следующие формулы для первых и вторых производных функции $\tilde{\boldsymbol{f}}_1(z)$, полученные с использованием формулы Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла [10, с. 146]:

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_1^{(1)}(z) = \frac{2z-(z_2+z_1)}{(z_0-z_2)(z_0-z_1)} \int_{z_1}^{z_0} f^{(1)}(\zeta)d\zeta + \frac{2z-(z_0+z_1)}{(z_2-z_0)(z_2-z_1)} \int_{z_1}^{z_2} f^{(1)}(\zeta)d\zeta,$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_1^{(2)}(z) = \frac{1}{(z_0-z_2)(z_0-z_1)} \int_{z_1}^{z_0} f^{(2)}(\zeta)(z_0-\zeta)d\zeta + \frac{1}{(z_2-z_0)(z_2-z_1)} \int_{z_1}^{z_2} f^{(2)}(\zeta)(z_2-\zeta)d\zeta.$$

Аналогичные формулы имеют место и для функции $\tilde{\boldsymbol{f}}_2(z)$. Вследствие этих формул имеют место оценки

$$\left\| \tilde{\boldsymbol{f}}_1^{(1)}(z) \right\|_B \le c'_\Lambda \left\| \boldsymbol{f}^{(1)} \right\|_{C[a,b]},\ \left\| \tilde{\boldsymbol{f}}_2^{(1)}(z) \right\|_B \le \tilde{c}'_\Lambda \left\| \boldsymbol{f}^{(1)} \right\|_{C[a,b]}\ (z \in [a,b]),$$

$$c'_\Lambda \equiv 3,\ \tilde{c}'_\Lambda \equiv \left(4+\sqrt{3}\right)/\sqrt{3}; \tag{6a}$$

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_1^{(2)}(z)\right\|_B \le c''_\Lambda \left\|\boldsymbol{f}^{(2)}\right\|_{C[a,b]},\ \left\|\tilde{\boldsymbol{f}}_2^{(2)}(z)\right\|_B \le \tilde{c}''_\Lambda \left\|\boldsymbol{f}^{(2)}\right\|_{C[a,b]}\ (z\in[a,b]),$$
$$c''_\Lambda = \tilde{c}''_\Lambda \equiv 2^{-1}. \tag{6b}$$

Сеточные аппроксимации граничных интегральных уравнений и решений краевых задач

При $(s,s')\in I_S\times I_S$ и $\tau>0$ имеем оценки для скалярных функций $g_i(s,s',\tau)\equiv g_i(\tilde{x}(s),\tilde{x}(s'),\tau)$ ($i=\overline{0,2}$):

$$|g_0(s,s',\tau)|\le(4\pi)^{-1}c_0\,\tau^{-1}\exp\left[-c_r\gamma^2\big/\left(4a^2\right)\right],$$
$$|g_i(s,s',\tau)|\le\left(8\pi a^2\right)^{-1}c_i\,\tau^{-1}\gamma^2\exp\left[-c_r\gamma^2\big/\left(4a^2\right)\right]\ (i=1,2), \tag{7}$$

где $c_0\equiv1$, $c_i\equiv\max\limits_{(s,s')\in\overline{I_S\times I_S}}|b_i(s,s')|$ ($i=1,2$), $\gamma\equiv\sigma/\sqrt{\tau}$.

С учетом оценок (7) операторы $\boldsymbol{G}_i$ $[C(\partial\Omega)]$ могут быть представлены в виде

$$\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{f}=\int_{I_T}\boldsymbol{A}_i(\tau)e^{-p\tau}\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau\ \ (\boldsymbol{f}\in C(\partial\Omega),\ i=\overline{0,2}).$$

Значения функций $\boldsymbol{A}_i(\tau)$ ($\tau>0$) – ограниченные операторы в пространстве $C(\partial\Omega)$:

$$(\boldsymbol{A}_i(\tau)\boldsymbol{f})(s)\equiv\int_{I_S}g_i(s,s',\tau)\,\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}(s'))\,ds'\ \ (s\in I_S,\ \boldsymbol{f}\in C(\partial\Omega),\ i=\overline{0,2}).$$

При $\tau>0$ функции $\boldsymbol{A}_i(\tau)$ $[C(\partial\Omega)]$ непрерывны в равномерной операторной топологии, причем справедливы оценки

$$\|\boldsymbol{A}_i(\tau)\|\le\tilde{c}_i c_i\tau^{-1/2}\ (i=\overline{0,2}),\ \tilde{c}_0\equiv(4\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-c_r\gamma^2\big/\left(4a^2\right)\right]d\gamma,$$
$$\tilde{c}_1=\tilde{c}_2\equiv\left(8\pi a^2\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma^2\exp\left[-c_r\gamma^2\big/\left(4a^2\right)\right]d\gamma. \tag{8}$$

Пусть $N/2\in\mathbf{N}$, $\tilde{N}/2\in\mathbf{N}$. Введем в рассмотрение операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_i$ $[C(\partial\Omega)]$:

$$\tilde{\boldsymbol{G}}_i\boldsymbol{f}\equiv\int_{I_T}\tilde{\boldsymbol{A}}_i(\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\boldsymbol{f}\,d\tau\ \ (\boldsymbol{f}\in C(\partial\Omega),\ i=\overline{0,2}),\ \tilde{\boldsymbol{A}}_i(\tau)\equiv\boldsymbol{A}_i(\tau)e(\tau);$$

$$\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\equiv\sum_{m=0}^{2}\boldsymbol{U}\left(\tau_{2n+1}+q_m h_\tau\right)\Lambda_m(\tau)\ \ (\tau\in[\tau_{2n},\tau_{2n+2}],\ n=\overline{0,N/2-1}),$$

$$e(\tau)\equiv\sum_{m=0}^{2}\exp\left[-p\left(\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}+1}+\tilde{q}_m\tilde{h}_\tau\right)\right]\tilde{\Lambda}_m(\tau)\ \ (\tau\in\left[\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}},\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}+2}\right],$$
$$\tilde{n}=\overline{0,\tilde{N}/2-1},\ n=\overline{0,N-1}).$$

Здесь $\tau_n\equiv n h_\tau$ ($n\in\mathbf{Z}_+$), $h_\tau\equiv T/N$; $\tilde{\tau}_n\equiv n\tilde{h}_\tau$ ($n\in\mathbf{Z}_+$), $\tilde{h}_\tau\equiv h_\tau/\tilde{N}$. Учитывая, что $\|\boldsymbol{U}(\tau)\|=1$ и $\left|e^{-p\tau}\right|\le1$ ($\tau\ge0$), вследствие оценок (5) имеем оценки $\left\|\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\right\|\le c_\Lambda$ и

$|e(\tau)| \le \tilde{c}_\Lambda$. Поэтому в силу оценок (8) операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_i$ $[\,C(\partial\Omega)\,]$ всюду определены и ограничены равномерно по N .

Используя оценки (4) и равенства $\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{f}$, имеющие место при $\boldsymbol{f} \in D(\boldsymbol{B}^n)$ ($n \in \mathbf{N}$), получаем оценки

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\boldsymbol{f} - \boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f}\right\|_{C_n(\partial\Omega)} \le c_\omega \left\|\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{f}\right\|_{C_n(\partial\Omega)} h_\tau^3 \ \ (\,\boldsymbol{f} \in C_{n+3}(\partial\Omega)\,,\ n \in \mathbf{Z}_+\,),$$

$$\left|e(\tau) - e^{-p\tau}\right| \le \left(p^3 / \tilde{N}^3\right)\tilde{c}_\omega h_\tau^3 \,. \tag{9}$$

В силу оценок (5a), (8) и (9) при $\boldsymbol{f} \in C_{n+3}(\partial\Omega)$ ($n \in \mathbf{Z}_+$) имеем оценку

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{G}}_i\,\boldsymbol{f} - \boldsymbol{G}_i\,\boldsymbol{f}\right\|_{C_n(\partial\Omega)} \le 2\,\tilde{c}_i\,c_i\sqrt{T}\left[\,c_\omega\left\|\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{f}\right\|_{C_n(\partial\Omega)} + c_\Lambda\tilde{c}_\omega\left(p^3/\tilde{N}^3\right)\|\boldsymbol{f}\|_{C_n(\partial\Omega)}\right]h_\tau^3\,,$$

из которой вытекает следующее утверждение:

Теорема 3. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\tilde{\boldsymbol{G}}_i$ $[\,C_{n+3}(\partial\Omega) \to C_n(\partial\Omega)\,]$ ($N \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $i = \overline{0,2}$) сходятся при $N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{G}_i$ $[\,C_{n+3}(\partial\Omega) \to C_n(\partial\Omega)\,]$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3\right)$.

На основании теоремы 3 осуществляется дискретизация ГИУ (2b) по параметру полугруппы τ , позволяющая, как будет показано далее, получить в явном виде приближенный обратный оператор ГИУ.

Пусть $L/2 \in \mathbf{N}$. Введем в рассмотрение пространства H_L^n векторных сеточных функций $\boldsymbol{f} \in H_L^n$ со значениями $\boldsymbol{f}_l \in H^n$ ($n \in \mathbf{Z}_+$, $H_L \equiv H_L^0$), заданными в узлах $\boldsymbol{x}_l \equiv \tilde{\boldsymbol{x}}(s_l)$ ($s_l \equiv l h_s$, $l = \overline{-L, L-1}$, $h_s \equiv S/L$). Условимся считать, когда это будет необходимо, что $\boldsymbol{x}_{l+2L} = \boldsymbol{x}_l$. Определим в H_L^n норму: $\|\boldsymbol{f}\|_{H_L^n} = \max\limits_{-L \le l \le L-1} \|\boldsymbol{f}_l\|_{H^n}$

Зададим проекционные операторы $\boldsymbol{P}_L$ $[\,C(\partial\Omega) \to H_L\,]$: $\left(\boldsymbol{P}_L\boldsymbol{f}\right)_l = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_l)$. Очевидно, $\|\boldsymbol{P}_L\| = 1$. Кроме того, введем в рассмотрение операторы $\breve{\boldsymbol{P}}_L$ $[\,H_L \to C(\partial\Omega)\,]$:

$$\left(\breve{\boldsymbol{P}}_L\,\boldsymbol{f}\right)(s) \equiv \sum_{m=0}^{2} \boldsymbol{f}_{2l+m}\,\Lambda_m(s) \ \ (\,\boldsymbol{f} \in H_L\,,\ s \in [s_{2l}, s_{2l+2}]\,,\ l = \overline{-L/2, L/2-1}\,).$$

В силу оценки (5a) имеем $\left\|\breve{\boldsymbol{P}}_L\right\| \le c_\Lambda$. В силу оценки (4a) и замкнутости оператора $\boldsymbol{B}$ имеют место оценки

$$\left\|\breve{\boldsymbol{P}}_L\boldsymbol{P}_L\,\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}\right\|_{C_n(\partial\Omega)} \le c_\omega\left\|\boldsymbol{f}^{(3)}\right\|_{C_n(\partial\Omega)} h_s^3 \ \ (\,\boldsymbol{f} \in C_n^3(\partial\Omega)\,,\ n \in \boldsymbol{Z}_+\,). \tag{10}$$

Определение. Будем говорить, что ограниченные операторы A_n $[\,C \to D\,]$ ($n \in \mathbf{N}$) сходятся при $n \to \infty$ по операторной норме к соответствующим ограниченным операторам $\boldsymbol{B}_n$ $[\,C \to D\,]$, если $\|\boldsymbol{A}_n\,\boldsymbol{f} - \boldsymbol{B}_n\,\boldsymbol{f}\|_D \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно в шаре $\|\boldsymbol{f}\|_C \le 1$.

С помощью равенств: $\breve{\boldsymbol{G}}_i \boldsymbol{f} \equiv \int_{I_T} \boldsymbol{P}_L \tilde{\boldsymbol{A}}_i(\tau)\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\breve{\boldsymbol{P}}_L \boldsymbol{f}\, d\tau$ ($\boldsymbol{f} \in H_L$, $i=\overline{0,2}$), зададим операторы $\breve{\boldsymbol{G}}_i$ $[H_L]$. В силу оценок (8), (10), $\|\tilde{\boldsymbol{U}}(\tau)\| \le c_\Lambda$, $|e(\tau)| \le \tilde{c}_\Lambda$ и $\|\boldsymbol{P}_L\| \le 1$ и замкнутости оператора $\boldsymbol{B}$ имеем оценки

$$\left\|\breve{\boldsymbol{G}}_i \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f} - \boldsymbol{P}_L \tilde{\boldsymbol{G}}_i \boldsymbol{f}\right\|_{H_L^n} \le 2 c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda \tilde{c}_i c_i c_\omega \sqrt{T} \left\|\boldsymbol{f}^{(3)}\right\|_{C_n(\partial\Omega)} h_s^3 \ \ (\boldsymbol{f} \in C_n^3(\partial\Omega),\ n \in \mathbf{Z}_+),$$

позволяющие сделать следующее утверждение, в соответствии с которым осуществляется дискретизация ГИУ (2b) по длине дуги.

Теорема 4. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\breve{\boldsymbol{G}}_i \boldsymbol{P}_L$ $[C_n^3(\partial\Omega) \to H_L^n]$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $i=\overline{0,2}$) сходятся при $L \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{P}_L \tilde{\boldsymbol{G}}_i$ $[C_n^3(\partial\Omega) \to H_L^n]$ равномерно по N с порядком аппроксимации $O\left(h_s^3\right)$.

Операторы $\breve{\boldsymbol{G}}_i$ ($i=\overline{0,2}$) могут быть представлены в виде конечных сумм:

$$\breve{\boldsymbol{G}}_i = \sum_{n=0}^{N-1} \breve{\boldsymbol{G}}_{i,n} \boldsymbol{U}(\tau_n)\ , \tag{11}$$

$$\breve{\boldsymbol{G}}_{i,0} \equiv \int_{\tau_0}^{\tau_2} \breve{\boldsymbol{A}}_i(\tau) e(\tau)\Lambda_0(\tau)\, d\tau\ ,\ \breve{\boldsymbol{G}}_{i,2n+1} \equiv \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \breve{\boldsymbol{A}}_i(\tau) e(\tau)\Lambda_1(\tau)\, d\tau \ \ (n=\overline{0,N/2-1}),$$

$$\breve{\boldsymbol{G}}_{i,2n} \equiv \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \breve{\boldsymbol{A}}_i(\tau) e(\tau)\Lambda_2(\tau)\, d\tau + \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \breve{\boldsymbol{A}}_i(\tau) e(\tau)\Lambda_0(\tau)\, d\tau \ \ (n=\overline{1,N/2-1}).$$

Операторы $\breve{\boldsymbol{A}}_i(\tau) \equiv \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{A}_i(\tau)\breve{\boldsymbol{P}}_L$ $[H_L]$ при любом фиксированном $\tau > 0$ имеют вид скалярных квадратных матриц порядка $2L$:

$$\left(\breve{\boldsymbol{A}}_i(\tau)\boldsymbol{f}\right)_k = \sum_{l=-L}^{L-1} \hat{g}_{i,k,l}(\tau)\boldsymbol{f}_l \ \ (k=\overline{-L,L-1},\ \boldsymbol{f} \in H_L);$$

$$\hat{g}_{i,k,2l+1}(\tau) \equiv \int_{s_{2l-k}}^{s_{2l+2-k}} \breve{g}_{i,1,k}(\sigma,\tau)\, d\sigma\ ,\ \hat{g}_{i,k,2l}(\tau) \equiv \int_{s_{2l-2-k}}^{s_{2l-k}} \breve{g}_{i,2,k}(\sigma,\tau)\, d\sigma + \int_{s_{2l-k}}^{s_{2l+2-k}} \breve{g}_{i,0,k}(\sigma,\tau)\, d\sigma$$

$$(k=\overline{-L,L-1},\ l=\overline{-L/2,L/2-1}).$$

Здесь $\breve{g}_{i,m,k}(\sigma,\tau) \equiv g_i(s_k, s_k+\sigma,\tau)\breve{\Lambda}_m(s_k+\sigma)$, где $\breve{\Lambda}_m(s)$ – кусочно-квадратичная функция, определенная на множестве $\overline{I_S}$: $\breve{\Lambda}_m(s) = \Lambda_m(s)$ ($s \in [s_{2l}, s_{2l+2}]$, $l=\overline{-L/2,L/2-1}$).

Все интегралы $J_{i,m,k,l}(\tau) \equiv \int_{s_l}^{s_{l+1}} \breve{g}_{i,m,k}(\sigma,\tau)\, d\sigma$ ($l=\overline{-L/2,L/2-1}$) при произвольном $M > 1$ можно представить в виде суммы интегралов $J'_{i,m,k,l}(\tau)+J''_{i,m,k,l}(\tau)$: $J'_{i,m,k,l}(\tau)\equiv\int_{s'_l}^{s'_{l+1}} \breve{g}_{i,m,k}(\sigma,\tau)d\sigma$, $J''_{i,m,k,l}(\tau)\equiv\int_{s''_l}^{s''_{l+1}} \breve{g}_{i,m,k}(\sigma,\tau)d\sigma$, где $s'_l \equiv \min\{s_l, \Sigma\}$,

$s_l'' \equiv \max\{s_l, \Sigma\}$, если $s_l \ge 0$; $s_l' \equiv \max\{s_l, -\Sigma\}$, $s_l'' \equiv \min\{s_l, -\Sigma\}$, если $s_l < 0$, а число $\Sigma > 0$ выбрано в соответствии с теоремой 2.

В интегралах $J'_{i,m,k,l}(\tau)$ на основании следствия 1 сделаем замену переменной $\sigma = \sigma_s(\rho)$:

$$J'_{i,m,k,l}(\tau) = \int\limits_{\rho_k(s_l')}^{\rho_k(s_{l+1}')} a_i(\rho,\tau)\breve{b}_{i,m,k}(\rho)\,d\rho \quad (i,m=\overline{0,2},\ k,l=\overline{-L,L-1}),$$

$$\breve{b}_{i,m,k}(\rho) \equiv \tilde{b}_i(s_k,\rho)\breve{\Lambda}_m(s_k+\sigma_k(\rho)),$$

$\rho_k(\sigma) \equiv \rho(s_k, s_k+\sigma)$, $\sigma_k(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_k(\sigma)$. Введем в рассмотрение соответствующие интегралы, аппроксимирующие $J'_{i,m,k,l}(\tau)$:

$$\tilde{J}'_{i,m,k,l}(\tau) \equiv \int\limits_{\rho_k(s_l')}^{\rho_k(s_{l+1}')} a_i(\rho,\tau)\hat{b}_{i,m,k}(\rho)\,d\rho \quad (i,m=\overline{0,2},\ k,l=\overline{-L,L-1}),$$

$$\hat{b}_{i,m,k}(\rho) \equiv \sum_{m'=0}^{2} \breve{b}_{i,m,k}(\bar{\rho}_{k,l}+\tilde{q}_{m'}h_{k,l})\tilde{\Lambda}_{m'}(\rho) \quad (\rho\in[\rho_k(s_l'),\rho_k(s_{l+1}')]),$$

$$h_{k,l} \equiv 2^{-1}[\rho_k(s_{l+1}')-\rho_k(s_l')],\ \bar{\rho}_{k,l} \equiv 2^{-1}[\rho_k(s_l')+\rho_k(s_{l+1}')].$$

Интегралы $J''_{i,m,k,l}(\tau)$ аппроксимируем с помощью ПКФГ с γ узлами:

$$\tilde{J}''_{i,m,k,l}(\tau) \equiv 2^{-1}h_s\sum_{j=1}^{\gamma}\hat{w}_j\,\breve{g}_{i,m,k}(\bar{s}_l+2^{-1}h_s z_j,\tau),\ \bar{s}_l \equiv 2^{-1}(s_l+s_{l+1}) \quad (i,m=\overline{0,2},$$

$$k,l=\overline{-L,L-1}),$$

при этом z_j – корни многочлена $P_\gamma(z) \equiv [\gamma!/(2\gamma)!]\left(d^\gamma/dz^\gamma\right)\left(z^2-1\right)^\gamma$ на промежутке $[-1;1]$ [9, с. 258]; для весовых коэффициентов $\hat{w}_j$ выполняется равенство $\sum_{j=1}^{\gamma}\hat{w}_j = 2$ ($w_j > 0$) [9, с. 255].

Операторы $\breve{\boldsymbol{G}}_i$, $\breve{\boldsymbol{G}}_{i,n}$ ($n=\overline{0,N-1}$), в которых интегралы $J_{i,m,k,l}(\tau)$ заменены выражениями $\tilde{J}'_{i,m,k,l}(\tau)$ и $\tilde{J}''_{i,m,k,l}(\tau)$, обозначим через $\hat{\boldsymbol{G}}'_i$, $\hat{\boldsymbol{G}}'_{i,n}$ и $\hat{\boldsymbol{G}}''_i$, $\hat{\boldsymbol{G}}''_{i,n}$ соответственно. В силу следствия 1, теоремы 2 и неравенства $r \ge c_r\Sigma$, имеющего место при $|\sigma| \ge \Sigma$, при указанной гладкости границы могут быть определены константы

$$\breve{c}'_{i,j} \equiv \max_{(s,\rho)\in\overline{I_S}\times\rho_s(I_\Sigma)}\left|\partial_\rho^j\tilde{b}_i(s,\rho)\right| \ (\partial\Omega\in C^{n+2}),\ \breve{c}''_{i,j} \equiv \sup_{s\in\overline{I_S},\sigma\ge\Sigma,\tau>0}\left|\partial_\sigma^j g_i(s,s+\sigma,\tau)\right|$$

$$(\partial\Omega\in C^n)\ (j=\overline{0,n},\ i=\overline{0,2}).$$

Учитывая неравенства (4b), (6) и $h_{k,l} \le 2^{-1}h_s$, при условиях $\partial\Omega\in C^5$ и $\boldsymbol{f}\in C^2(\partial\Omega)$ при любых $i=\overline{0,2}$, $k=\overline{-L,L-1}$, $l=\overline{-L/2,L/2-1}$ и $\tau>0$ имеем оценку

$$\left\| \sum_{m=0}^{2} \sum_{l'=0}^{1} \left(\tilde{J}'_{i,m,k,2l+l'-k}(\tau) - J'_{i,m,k,2l+l'-k}(\tau) \right) \boldsymbol{f}_{2l+m} \right\|_{L_2} \leq$$

$$\leq 8^{-1} h_s^3 \tilde{c}_\omega \max_{\rho \in \rho_k([s'_{2l-k}, s'_{2l+2-k}])} \left\| \partial_\rho^3 \left[\tilde{b}_i(s_k, \rho) \tilde{\boldsymbol{f}}(s_k + \sigma_k(\rho)) \right] \right\|_{L_2} \int\limits_{\rho_k(s'_{2l-k})}^{\rho_k(s'_{2l+2-k})} a_i(\rho, \tau) \, d\rho \leq$$

$$\hat{c}'_i h_s^3 \| \boldsymbol{f} \|_{C^2(\partial\Omega)} \int\limits_{\rho_k(s'_{2l-k})}^{\rho_k(s'_{2l+2-k})} a_i(\rho, \tau) \, d\rho ,$$

$$\hat{c}'_i \equiv 8^{-1} \tilde{c}_\omega \left[\breve{c}'_{i,3} c_\Lambda + \left(3\breve{c}'_{i,2} \breve{c}'_{0,0} + 3\breve{c}'_{i,1} \breve{c}'_{0,1} + \breve{c}'_{i,0} \breve{c}'_{0,2} \right) c'_\Lambda + 3 \left(\breve{c}'_{i,1} \breve{c}'^2_{0,0} + \breve{c}'_{i,0} \breve{c}'_{0,1} \breve{c}'_{0,0} \right) c''_\Lambda \right], \quad (12a)$$

где $\boldsymbol{f}_l = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_l)$, $\tilde{\boldsymbol{f}} \equiv \breve{\boldsymbol{P}}_L \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f}$. Если $\partial\Omega \in C^{2\gamma}$, то при любых $i = \overline{0,2}$, $k, l = \overline{-L, L-1}$ и $\tau > 0$ имеем оценку

$$\left\| \sum_{m=0}^{2} \sum_{l'=0}^{1} \left(\tilde{J}''_{i,m,k,2l+l'-k}(\tau) - J''_{i,m,k,2l+l'-k}(\tau) \right) \boldsymbol{f}_{2l+m} \right\|_{L_2} \leq \hat{c}''_i h_s^{2\gamma+1} \| \boldsymbol{f} \|_{C^2(\partial\Omega)} ,$$

$$\hat{c}''_i \equiv \frac{(\gamma!)^4 \left[\breve{c}''_{i,2\gamma} c_\Lambda + 2\gamma \breve{c}''_{i,2\gamma-1} c'_\Lambda + \gamma(2\gamma-1) \breve{c}''_{i,2\gamma-2} c''_\Lambda \right]}{[(2\gamma)!]^3 (2\gamma+1)} \quad (12b)$$

[9, с. 259]. В силу оценок (12) и замкнутости оператора $\boldsymbol{B}$ имеем при условии $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ оценку аппроксимирущих свойств операторов $\hat{\boldsymbol{G}}_i \equiv \hat{\boldsymbol{G}}'_i + \hat{\boldsymbol{G}}''_i$ [H_L^n] ($i = \overline{0,2}$)

$$\left\| \hat{\boldsymbol{G}}_i \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f} - \breve{\boldsymbol{G}}_i \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f} \right\|_{H_L^n} \leq 2 c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda \left(\sqrt{T} \tilde{c}_i \hat{c}'_i h_s^3 + S T \hat{c}''_i h_s^{2\gamma} \right) \| \boldsymbol{f} \|_{C_n^2(\partial\Omega)}$$

$$(\boldsymbol{f} \in C_n^2(\partial\Omega), \ n \in \mathbf{Z}_+),$$

из которой вытекает следующее утверждение:

Теорема 5. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_i \boldsymbol{P}_L$ [$C_n^2(\partial\Omega) \to H_L^n$] ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $i = \overline{0,2}$) сходятся при $L \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\breve{\boldsymbol{G}}_i \boldsymbol{P}_L$ [$C_n^2(\partial\Omega) \to H_L^n$] равномерно по N с порядком аппроксимации $O\left(h_s^3\right)$.

Заметим, что при вычислении операторов $\hat{\boldsymbol{G}}'_i$, соответствующих сингулярным и околосингулярным ГЭ, интегрирование по межточечному расстоянию r и параметру полугруппы τ осуществляется аналитически с помощью формулы Ньютона – Лейбница, при этом первообразная выражается через интегральную показательную функцию $\mathrm{Ei}(x)$ и функцию Лапласа $\Phi(x)$. Значения $\sigma_k(\bar{\rho}_{k,l} + \tilde{q}_m h_{k,l})$ ($l = \overline{-L, L-1}$, $m = \overline{0,2}$) в общем случае могут быть получены как численные решения уравнений $\rho_k(\sigma) = \bar{\rho}_{k,l} + \tilde{q}_m h_{k,l}$. Производные $x'_i(s)$ ($i = 1,2$) вычисляются аналитически, если известны аналитические выражения функций $x_i(s)$.

На основании теорем 3–5 делаем следующий вывод:

Следствие 2. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_i \boldsymbol{P}_L$ $[\,C^3_{n,3}(\partial\Omega) \to H^n_L\,]$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $i = \overline{0,2}$) сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{P}_L \boldsymbol{G}_i$ $[\,C^3_{n,3}(\partial\Omega) \to H^n_L\,]$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$.

Введем в рассмотрение операторы в пространстве H_L: $\hat{\boldsymbol{G}}_1^{\pm} \equiv \pm 2^{-1} + \hat{\boldsymbol{G}}_1$, $\hat{\boldsymbol{G}}_2^{\pm} \equiv \mp 2^{-1} + \hat{\boldsymbol{G}}_2 - \eta \hat{\boldsymbol{G}}_0$, $\hat{\boldsymbol{G}}_{1,0}^{\pm} \equiv \pm 2^{-1} + \widehat{\boldsymbol{G}}_{1,0}$, $\hat{\boldsymbol{G}}_{2,0}^{\pm} \equiv \mp 2^{-1} + \widehat{\boldsymbol{G}}_{2,0}$, $\widehat{\boldsymbol{G}}_{1,n} \equiv \hat{\boldsymbol{G}}_{1,n}$, $\widehat{\boldsymbol{G}}_{2,n} \equiv \hat{\boldsymbol{G}}_{2,n} - \eta \hat{\boldsymbol{G}}_{0,n}$ ($n = \overline{0, N-1}$). Используя неравенство $\sqrt{b} - \sqrt{a} \le \sqrt{b-a}$, справедливое при $0 \le a \le b$, и оценки $\left|\Lambda_m(\tau)\right| \le 1$, получаем оценки

$$\sum_{n=n'}^{n''} \left\|\widehat{\boldsymbol{G}}_{i,n}\right\| \le E_i\left((n''+1-n')h_\tau\right) \ (0 \le n' \le n'' \le N-1;\ i = 1,2); \tag{13}$$

$$E_1(\tau) \equiv 4 c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda \left(\sqrt{2}\, \tilde{c}_1 \tilde{c}_\Lambda \tilde{c}'_{1,0} \sqrt{\tau} + 2 S \tilde{c}''_{1,0} \tau\right),$$

$$E_2(\tau) \equiv 4 c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda \left[\sqrt{2}\, \tilde{c}_\Lambda \left(\tilde{c}_2 \tilde{c}'_{2,0} + \eta \tilde{c}_0 \tilde{c}'_{0,0}\right)\sqrt{\tau} + 2 S \left(\tilde{c}''_{2,0} + \eta \tilde{c}''_{0,0}\right)\tau\right].$$

Существует $N_{\min} \in \mathbf{N}$, такое, что при $N \in \mathbf{N}_{\min} \equiv \{N_{\min}, N_{\min}+1, \ldots\}$ выполняются условия

$$E_i\left(h_\tau\right) < 2^{-1} \ (i = 1,2). \tag{14}$$

С учетом (13) при $N \in \mathbf{N}_{\min}$ получаем оценки $\left\|\widehat{\boldsymbol{G}}_{i,0}\right\| < 2^{-1}$ ($i = 1,2$), вследствие которых в силу теоремы Банаха операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_{i,0}^{\pm}$ ($i = 1,2$) ограниченно обратимы. Тогда операторы $\hat{\boldsymbol{G}}_i^{\pm}$ ($i = 1,2$) также ограниченно обратимы. А именно, учитывая, что $\boldsymbol{U}(\tau) = \boldsymbol{O}$ при $\tau \ge T$, на основании равенств (11) имеем формулы

$$\left(\hat{\boldsymbol{G}}_i^{\pm}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\boldsymbol{G}}_{i,n}^{\pm(-1)} \boldsymbol{U}(\tau_n);$$

$$\hat{\boldsymbol{G}}_{i,0}^{\pm(-1)} \equiv \left(\hat{\boldsymbol{G}}_{i,0}^{\pm}\right)^{-1},\ \hat{\boldsymbol{G}}_{i,n}^{\pm(-1)} \equiv -\left(\sum_{m=1}^{n} \hat{\boldsymbol{G}}_{i,m-1}^{\pm(-1)} \widehat{\boldsymbol{G}}_{i,n+1-m}\right) \hat{\boldsymbol{G}}_{i,0}^{\pm(-1)} \ (n = \overline{1, N-1}). \tag{15}$$

Теорема 6. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\left(\hat{\boldsymbol{G}}_i^{\pm}\right)^{-1}$ $[\,H_L\,]$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}_{\min}$, $i = 1,2$) ограничены в совокупности.

Доказательство. Имеем $N = K N_{\min} + N'K + N''$, где $K \in \boldsymbol{N}$, $N', N'' \in \mathbf{Z}_+$: $N'K + N'' < N_{\min}$, $N'' < K$. Пусть $h'_\tau \equiv K h_\tau$. Тогда оператор $\hat{\boldsymbol{G}}_i^{\pm}$ может быть представлен в виде

$$\hat{\boldsymbol{G}}_i^{\pm} = \hat{\boldsymbol{G}}'^{\pm}_{i,0} + \sum_{n=1}^{2N_{\min}-1} \hat{\boldsymbol{G}}'_{i,n} \boldsymbol{U}(nh'_\tau);\ \hat{\boldsymbol{G}}'^{\pm}_{i,0} \equiv \mp(-1)^i\, 2^{-1} + \hat{\boldsymbol{G}}'_{i,0},\ \hat{\boldsymbol{G}}'_{i,n} = \sum_{k=0}^{K-1} \widehat{\boldsymbol{G}}_{i,nK+k} \boldsymbol{U}(\tau_k)$$

$$(n = \overline{0,\, N_{\min} + N' - 1});$$

$$\hat{\boldsymbol{G}}'_{i,N_{\min}+N'} \equiv \sum_{k=0}^{N''-1} \widehat{\boldsymbol{G}}_{i,(N_{\min}+N')K+k} \boldsymbol{U}(\tau_k),\ \text{если}\ N'' > 0;\ \hat{\boldsymbol{G}}'_{i,N_{\min}+N'} \equiv \boldsymbol{O},\ \text{если}\ N'' = 0;$$

$$\hat{\boldsymbol{G}}'_{i,n} \equiv \boldsymbol{O} \ (n = \overline{N_{\min} + N' + 1,\, 2N_{\min} - 1}).$$

При $h_\tau = h''_\tau \equiv T/N_{\min}$ выполняются неравенства (14). Поэтому с учетом оценок (13) получаем

$$\left\|\hat{\boldsymbol{G}}'_{i,n}\right\| \le E_i(h'_\tau) \le E_i(h''_\tau) < 2^{-1} \ (n = \overline{0, 2N_{\min}-1}). \tag{16}$$

В силу (16) (при $n=0$) существуют операторы $\left(\hat{\boldsymbol{G}}'^{\pm}_{i,0}\right)^{-1}$, и операторы $\left(\hat{\boldsymbol{G}}^{\pm}_{i}\right)^{-1}$ могут быть представлены в виде

$$\left(\hat{\boldsymbol{G}}^{\pm}_{i}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{2N_{\min}-1} \hat{\boldsymbol{G}}'^{\pm(-1)}_{i,n} \boldsymbol{U}(nh'_\tau), \ \hat{\boldsymbol{G}}'^{\pm(-1)}_{i,0} \equiv \left(\hat{\boldsymbol{G}}'^{\pm}_{i,0}\right)^{-1},$$

$$\hat{\boldsymbol{G}}'^{\pm(-1)}_{i,n} \equiv -\left(\sum_{m=1}^{n} \hat{\boldsymbol{G}}'^{\pm(-1)}_{i,m-1} \hat{\boldsymbol{G}}'_{i,n+1-m}\right)\hat{\boldsymbol{G}}'^{\pm(-1)}_{i,0} \ (n = \overline{1, 2N_{\min}-1}). \tag{17}$$

С учетом оценок (16) и равенств (17) получаем оценки

$$\left\|\hat{\boldsymbol{G}}'^{\pm(-1)}_{i,0}\right\| \le \left(2^{-1} - E_i(h'_\tau)\right)^{-1}, \ \left\|\hat{\boldsymbol{G}}'^{\pm(-1)}_{i,n}\right\| \le 2^{-n+1} E_i(h'_\tau)\left(2^{-1} - E_i(h'_\tau)\right)^{-n-1}$$

$$n = \overline{1, 2N_{\min}-1}),$$

следствием которых является равномерная по L и N ограниченность операторов $\left(\hat{\boldsymbol{G}}^{\pm}_{i}\right)^{-1}$:

$$\left\|\left(\hat{\boldsymbol{G}}^{\pm}_{i}\right)^{-1}\right\| \le \left\|\hat{\boldsymbol{G}}'^{\pm(-1)}_{i,0}\right\| + \sum_{n=1}^{2N_{\min}-1} \left\|\hat{\boldsymbol{G}}'^{\pm(-1)}_{i,n}\right\| \le 2^{-2N_{\min}+1}\left(2^{-1} - E_i(h'_\tau)\right)^{-2N_{\min}} \le C_i$$

(здесь $C_i \equiv 2^{-2N_{\min}+1}\left(2^{-1} - E_i(h''_\tau)\right)^{-2N_{\min}}$ – константы, не зависящие от L и N). Теорема доказана.

В силу равенств $\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{U}(\tau)\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{f} \in D(\boldsymbol{B}^n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$) и (15) имеем равенства $\boldsymbol{B}^n\left(\hat{\boldsymbol{G}}^{\pm}_{i}\right)^{-1}\boldsymbol{f} = \left(\hat{\boldsymbol{G}}^{\pm}_{i}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{f} \in H^n_L$). На основании теорем 1, 6 и следствия 2 делаем следующий вывод:

Следствие 3. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда операторы $\left(\hat{\boldsymbol{G}}^{\pm}_{i}\right)^{-1}\boldsymbol{P}_L$ $[C^3_{n,3}(\partial\Omega) \to H^n_L]$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}_{\min}$, $n \in \mathbf{Z}_+$; $i = 1,2$) сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{P}_L\left(\boldsymbol{G}^{\pm}_{i}\right)^{-1}$ $[C^3_{n,3}(\partial\Omega) \to H^n_L]$ с порядком аппроксимации $O\left(h^3_\tau + h^3_s\right)$.

Введем в рассмотрение $2L \times N$-мерные пространства $C_{L,N}$ сеточных функций $\boldsymbol{f} \in C_{L,N}$ со скалярными значениями $f_{l,j}$, заданными в узлах $\left(\boldsymbol{x}_l, t_j\right)$ ($l = \overline{-L, L-1}$, $t_j \equiv jh_\tau$, $j = \overline{0, N}$). Определим в $C_{L,N}$ норму $\|\boldsymbol{f}\|_{C_{L,N}} = \max\limits_{l=\overline{-L,L-1},\, j=\overline{0,N}} \left|f_{l,j}\right|$.

Зададим проекционные операторы $\boldsymbol{P}_N$ $[H_L^1 \to C_{L,N}]$: $(\boldsymbol{P}_N \boldsymbol{f})_{l,j} = f_l\left(t_j\right)$ ($l = \overline{-L, L-1}$, $j = \overline{0, N}$). В силу соотношений (3a) имеем $\|\boldsymbol{P}_N\| \le \sqrt{T}$. Зададим операторы правого сдвига $\boldsymbol{U}_n$ $[C_{L,N}]$ ($n = \overline{0, N-1}$): $(\boldsymbol{U}_n \boldsymbol{f})_{l,j} \equiv f_{l,j-n}$, если $j \ge n$; $(\boldsymbol{U}_n \boldsymbol{f})_{l,j} = 0$, если $j < n$. Зададим операторы $\ddot{\boldsymbol{G}}_i^{\pm(-1)}$ $[C_{L,N}]$: $\ddot{\boldsymbol{G}}_i^{\pm(-1)} \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\boldsymbol{G}}_{i,n}^{\pm(-1)} \boldsymbol{U}_n$.

Заметим, что имеют место равенства $\boldsymbol{U}_n \boldsymbol{P}_N \boldsymbol{f} = \boldsymbol{P}_N \boldsymbol{U}(\tau_n) \boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{f} \in H_L^1$, $n = \overline{0, N-1}$). Следовательно, имеют место равенства $\ddot{\boldsymbol{G}}_i^{\pm(-1)} \boldsymbol{P}_N \boldsymbol{f} = \boldsymbol{P}_N \left(\hat{\boldsymbol{G}}_i^{\pm}\right)^{-1} \boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{f} \in H_L^1$), позволяющие осуществить дискретизацию решения ГИУ (2b) по временно́й переменной $t \in I_T$. В силу следствия 3 и оценки $\|\boldsymbol{P}_N\| \le \sqrt{T}$ справедливо следующее утверждение:

Следствие 4. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда операторы $\ddot{\boldsymbol{G}}_i^{\pm(-1)} \boldsymbol{P}_N \boldsymbol{P}_L$ $[C_{1,3}^3(\partial\Omega) \to C_{L,N}]$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}_{\min}$; $i = 1,2$) сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\boldsymbol{P}_N \boldsymbol{P}_L \left(\boldsymbol{G}_i^{\pm}\right)^{-1}$ $[C_{1,3}^3(\partial\Omega) \to C_{L,N}]$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$.

Следствие 4 позволяет получить сеточные решения ГИУ (2b). Благодаря ограниченности совокупности операторов $\ddot{\boldsymbol{G}}_i^{\pm(-1)} \boldsymbol{P}_N \boldsymbol{P}_L$ $[C_1(\partial\Omega) \to C_{L,N}]$: $\left\|\ddot{\boldsymbol{G}}_i^{\pm(-1)} \boldsymbol{P}_N \boldsymbol{P}_L\right\| \le \sqrt{T} \left\|\left(\hat{\boldsymbol{G}}_i^{\pm}\right)^{-1}\right\|$, такие решения устойчивы к возмущениям граничной функции $\boldsymbol{w}_i^{\pm}$ в норме $C_1(\partial\Omega)$.

Следствие 5. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда, если $\boldsymbol{w}_i^{\pm} \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, то функции $\tilde{\boldsymbol{v}}_i^{\pm}$: $\tilde{\boldsymbol{v}}_i^{\pm} \equiv \ddot{\boldsymbol{G}}_i^{\pm(-1)} \boldsymbol{P}_N \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{w}_i^{\pm}$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}_{\min}$; $i = 1,2$), сходятся в норме $C_{L,N}$ при $L, N \to \infty$ к сеточным проекциям $\boldsymbol{P}_N \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{v}_i^{\pm}$ решений ГИУ: $\boldsymbol{v}_i^{\pm} = \left(\boldsymbol{G}_i^{\pm}\right)^{-1} \boldsymbol{w}_i^{\pm}$, с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$. Кроме того, $\left\|\tilde{\boldsymbol{v}}_i^{\pm[\delta]} - \boldsymbol{P}_N \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{v}_i^{\pm}\right\|_{C_{L,N}} \to 0$ при $L, N \to \infty$, $\delta \to 0$, где $\tilde{\boldsymbol{v}}_i^{\pm[\delta]} \equiv \ddot{\boldsymbol{G}}_i^{\pm(-1)} \boldsymbol{P}_N \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{w}_i^{\pm[\delta]}$, $\boldsymbol{w}_i^{\pm[\delta]} \in C_1(\partial\Omega)$: $\left\|\boldsymbol{w}_i^{\pm[\delta]} - \boldsymbol{w}_i^{\pm}\right\|_{C_1(\partial\Omega)} \le \delta$.

Пусть $C(I_T)$ – банахово пространство непрерывных на промежутке I_T скалярных функций $f(t)$ с нормой $\|f\|_{C(I_T)} = \max\limits_{t \in I_T} |f(t)|$. Введем в рассмотрение пространства C_L векторных сеточных функций $\boldsymbol{f} \in C_L$ со значениями $\boldsymbol{f}_l \in C(I_T)$, заданными в узлах $\boldsymbol{x}_l$ ($l = \overline{-L, L-1}$). Определим в C_L норму: $\|\boldsymbol{f}\|_{C_L} = \max\limits_{-L \le l \le L-1} \|\boldsymbol{f}_l\|_{C(I_T)}$. Зададим операторы $\breve{\boldsymbol{P}}_N$ $[C_{L,N} \to C_L]$:

$$\left(\breve{\boldsymbol{P}}_N \boldsymbol{f}\right)_l(t) \equiv \sum_{m=0}^{2} f_{l,2j+m}\,\Lambda_m(t) \ \ (t \in \left[t_{2j}, t_{2j+2}\right],\ j=\overline{0, N/2-1},\ l=\overline{-L, L-1},\ \boldsymbol{f} \in C_{L,N}).$$

Операторы $\boldsymbol{P}_L$ $[\,C(\Xi) \to C_L\,]$, $\boldsymbol{P}_N$ $[\,C_L \to C_{L,N}\,]$, $\breve{\boldsymbol{P}}_N$ $[\,C_{L,N} \to C_L\,]$, $\breve{\boldsymbol{P}}_L$ $[\,C_L \to C(\Xi)\,]$ ограничены: $\|\boldsymbol{P}_L\| = 1$, $\|\boldsymbol{P}_N\| = 1$, $\|\breve{\boldsymbol{P}}_N\| \le c_\Lambda$, $\|\breve{\boldsymbol{P}}_L\| \le c_\Lambda$, и имеют место оценки

$$\left\|\breve{\boldsymbol{P}}_L \breve{\boldsymbol{P}}_N \boldsymbol{P}_N \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}\right\|_{C(\Xi)} \le c_\omega \left(\left\|\partial_s^3 f\right\|_{C(\Xi)} h_s^3 + c_\Lambda \left\|\partial_t^3 f\right\|_{C(\Xi)} h_\tau^3\right) \ (\boldsymbol{f} \in C_3^3(\Xi)). \quad (18)$$

Введем в рассмотрение функционалы $G_i(\boldsymbol{x},t)$ $[\,C(\Xi) \to \mathbf{C}\,]$ и $\hat{G}_i(\boldsymbol{x},t)$ $[\,C_{L,N} \to \mathbf{C}\,]$ ($x \in \Omega^\pm$, $t \in I_T$, $i = 0,1$; $\mathbf{C}$ – множество комплексных чисел):

$$G_i(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{f} \equiv \left(\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}\right)(t) = \int_{I_S}\int_0^t g_i\left(\boldsymbol{x}, s', t-\tau\right) e^{-p(t-\tau)} f(s',\tau)\,d\tau\,ds' \ \ (\boldsymbol{f} \in C(\Xi)),$$

$$\hat{G}_i(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{f} \equiv 2^{-1} h_s \sum_{l=-L}^{L-1} \sum_{j=1}^{\gamma} \hat{w}_j \int_0^t g_i\left(\boldsymbol{x}, s_{l,j}, t-\tau\right) e(t-\tau) f_{L,N}(s_{l,j},\tau)\,d\tau,\ \ \boldsymbol{f}_{L,N} \equiv \breve{\boldsymbol{P}}_L \breve{\boldsymbol{P}}_N \boldsymbol{f}$$

$$(\boldsymbol{f} \in C_{L,N}),\ \ g_i\left(\boldsymbol{x}, s, \tau\right) \equiv g_i\left(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}(s), \tau\right),\ \ s_{l,j} \equiv \overline{s}_l + 2^{-1} h_s z_j\,.$$

На основании оценок (18) при условии $\partial\Omega \in C^{2\gamma}$ получаем следующие оценки при $(x,t) \in \Omega' \times I_T$:

$$\left|\hat{G}_i(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{P}_N \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{f} - G_i(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{f}\right| \le 2ST\,(c_{i,0}^{\Omega'} c_\omega \|\boldsymbol{f}\|_{C^3(\Xi)} h_s^3 + c_{i,0}^{\Omega'} c_\Lambda c_\omega \|\boldsymbol{f}\|_{C_3(\Xi)} h_\tau^3 +$$

$$+ c_{i,0}^{\Omega'} \tilde{c}_\omega \left(p^3 / \tilde{N}^3\right) c_\Lambda^2 \|\boldsymbol{f}\|_{C(\Xi)} h_\tau^3 + \hat{c}_i^{\Omega'} \tilde{c}_\Lambda c_\Lambda \|\boldsymbol{f}\|_{C^2(\Xi)} h_s^{2\gamma}) \ \ (\boldsymbol{f} \in C_3^3(\Xi)),$$

$$\hat{c}_i^{\Omega'} \equiv \frac{(\gamma!)^4 \left[c_{i,2\gamma}^{\Omega'} c_\Lambda + 2\gamma c_{i,2\gamma-1}^{\Omega'} c_\Lambda' + \gamma(2\gamma-1) c_{i,2\gamma-2}^{\Omega'} c_\Lambda''\right]}{\left[(2\gamma)!\right]^3 (2\gamma+1)},$$

$$c_{i,j}^{\Omega'} \equiv \sup_{x \in \Omega', s \in \underline{I_S}, \tau > 0} \left|\partial_s^j g_i(\boldsymbol{x}, s, \tau)\right| \ \ (j = \overline{0, 2\gamma}). \quad (19)$$

Здесь Ω' – произвольное конечное замкнутое подмножество области $\Omega^\pm$. В силу оценок (19) справедливо утверждение:

Теорема 7. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда функционалы $\hat{G}_i(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{P}_N \boldsymbol{P}_L$ $[\,C_3^3(\Xi) \to \mathbf{C}\,]$ сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим функционалам $G_i(\boldsymbol{x},t)$ $[\,C_3^3(\Xi) \to \mathbf{C}\,]$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$ равномерно по $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega' \times I_T$.

Заметим, что при вычислении функционалов $\hat{G}_i(\boldsymbol{x},t)$ интегрирование по параметру полугруппы τ осуществляется аналитически с помощью формулы Ньютона – Лейбница, при этом первообразная выражается через интегральную показательную функцию $\mathrm{Ei}(x)$.

Используя следствие 4, теоремы 7, 1, соотношения (3b) и равномерную ограниченность на множестве $\Omega' \times I_T$ совокупности функционалов $\hat{G}_i(\boldsymbol{x},t)$ $[C_{L,N} \to \boldsymbol{C}]$: $\left|\hat{G}_i(\boldsymbol{x},t)\right| \le 2\,S\,T\,c_{i,0}^{\Omega'}\,\tilde{c}_\Lambda\,c_\Lambda^2$, приходим к утверждению:

Следствие 6. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда функционалы $\hat{G}_i(\boldsymbol{x},t)\ddot{\boldsymbol{G}}_i^{\pm(-1)}\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{P}_L$ $[C_{1,3}^3(\partial\Omega) \to \mathbf{C}]$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}_{\min}$, $i = 1,2$) сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим функционалам $G_i(\boldsymbol{x},t)\left(\boldsymbol{G}_i^{\pm}\right)^{-1}$ $[C_{1,3}^3(\partial\Omega) \to \mathbf{C}]$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$ равномерно по $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega' \times I_T$.

Следствие 6 позволяет получить приближенные решения задач (1). Благодаря равномерной ограниченности на множестве $\Omega' \times I_T$ совокупности функционалов $\hat{G}_i(\boldsymbol{x},t)$ $[C_{L,N} \to \mathbf{C}]$, а также ограниченности совокупности операторов $\ddot{\boldsymbol{G}}_i^{\pm(-1)}\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{P}_L$ $[C_1(\partial\Omega) \to C_{L,N}]$, такие решения устойчивы к возмущениям граничной функции $\boldsymbol{w}_i^{\pm}$ в норме $C_1(\partial\Omega)$. Сформулируем заключительное утверждение:

Следствие 7. Пусть $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ и $\gamma \ge 2$. Тогда, если $\boldsymbol{w}_i^{\pm} \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, то функции $\tilde{u}_i^{\pm}(\boldsymbol{x},t)$: $\tilde{\boldsymbol{u}}_i^{\pm}(\boldsymbol{x},t) \equiv \hat{G}_i(\boldsymbol{x},t)\tilde{\boldsymbol{v}}_i^{\pm}$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}_{\min}$; $i = 1,2$), сходятся при $L, N \to \infty$ к решениям соответствующих задач (1) $u_i^{\pm}(\boldsymbol{x},t)$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$ равномерно по $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega' \times I_T$. Кроме того, $\left|\tilde{u}_i^{\pm[\delta]}(\boldsymbol{x},t) - u_i^{\pm}(\boldsymbol{x},t)\right| \to 0$ равномерно по $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega' \times I_T$ при $L, N \to \infty$, $\delta \to 0$, где $\tilde{u}_i^{\pm[\delta]}(\boldsymbol{x},t) \equiv \hat{G}_i(\boldsymbol{x},t)\tilde{\boldsymbol{v}}_i^{\pm[\delta]}$, $\boldsymbol{w}_i^{\pm[\delta]} \in C_1(\partial\Omega)$: $\left\|\boldsymbol{w}_i^{\pm[\delta]} - \boldsymbol{w}_i^{\pm}\right\|_{C_1(\partial\Omega)} \le \delta$.

Вычислительные эксперименты

Рассмотрим численное решение внутренних задач (1) в случае, когда граница $\partial\Omega$ представляет собой окружность радиуса $R = 1$. Решения $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{i}}^{+}(x,t)$ ($i = \overline{1,3}$) получаем согласно следствию 7. Далее через $\boldsymbol{u}_2$ обозначим решения $\boldsymbol{u}_2$ при $\eta = 0$, через $\boldsymbol{u}_3$ – решения $\boldsymbol{u}_2$ при $\eta = 1$. Вычисления проводим при $T = 1$, $a = 1$, $\tilde{N} = 2$, $\gamma = 4$, $M = 2$, $w_i^{+}(\varphi,t) = 16t^2(1-t)^2\sin\varphi$ ($i = \overline{1,3}$, φ – полярный угол). «Точные» решения $\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{i}}^{+}$ находим с помощью функций Грина, при этом интегрирование по временно́й переменной на промежутке $[0; 9 \times 10^{-7}]$ осуществляется численно с помощью ПКФГ с 12 узлами, а все остальные интегралы вычисляются аналитически с помощью формулы Ньютона – Лейбница. Оба решения $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{i}}^{+}$, $\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{i}}^{+}$ вычисляются на окружностях $\partial\Omega'$ с радиусами $R' < 1$, концентрических с окружностью $\partial\Omega$, в узлах $(\boldsymbol{x}_l', t_j)$ ($l = \overline{-L, L-1}$, $t_j \equiv jh_\tau$, $j = \overline{0,N}$), причем точки $\boldsymbol{x}_l'$ получаются из граничных точек $\boldsymbol{x}_l$ в результате сжимающего отображения $\partial\Omega$ на $\partial\Omega'$. Вычисления проводятся с обычной точностью (7 десятичных разрядов).

В следующей таблице представлены относительные среднеквадратичные отклонения $\delta u_i\left(h_\tau, h_s\right)$: $\delta u_i \equiv \left\|\Delta \boldsymbol{u}_i\right\| / \left\|\overline{\boldsymbol{u}}_i^+\right\|$ ($\Delta \boldsymbol{u}_i = \tilde{\boldsymbol{u}}_i^+ - \overline{\boldsymbol{u}}_i^+$, $\|\cdot\|$ – среднеквадратичная норма), и степени скорости сходимости ν_i, вычисляемые по формуле $\nu_i \equiv \ln\left[\delta u_i\left(h_\tau, h_s\right)/\delta u_i\left(h_\tau/2, h_s/2\right)\right]/\ln 2$. В каждой основной ячейке представлены три значения δu_i или ν_i при $R' = 0.9$, $R' = 0.5$, $R' = 0.1$ в соответствующем порядке сверху вниз.

Относительные среднеквадратичные отклонения δu_i

и степени скорости сходимости ν_i

		$p=0$			$p=\pi^2$		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$h_\tau = 1/8$ $h_s = \pi/4$	δu_i	3.17×10^{-2} 2.24×10^{-2} 1.65×10^{-2}	2.39×10^{-2} 2.54×10^{-2} 2.28×10^{-2}	1.77×10^{-2} 2.01×10^{-2} 1.79×10^{-2}	4.39×10^{-2} 2.63×10^{-2} 2.34×10^{-2}	2.04×10^{-2} 2.89×10^{-2} 2.42×10^{-2}	1.76×10^{-2} 2.67×10^{-2} 2.27×10^{-2}
$h_\tau = 1/16$ $h_s = \pi/8$	δu_i	2.26×10^{-3} 8.82×10^{-4} 1.05×10^{-3}	1.05×10^{-3} 9.06×10^{-4} 1.06×10^{-3}	1.05×10^{-3} 9.19×10^{-4} 9.95×10^{-4}	3.40×10^{-3} 1.28×10^{-3} 1.19×10^{-3}	1.48×10^{-3} 1.07×10^{-3} 1.24×10^{-3}	1.50×10^{-3} 1.11×10^{-3} 1.29×10^{-3}
	ν_i	3.81 4.67 3.97	4.51 4.81 4.43	4.08 4.45 4.17	3.69 4.36 4.30	3.78 4.76 4.29	3.55 4.59 4.14
$h_\tau = 1/32$ $h_s = \pi/16$	δu_i	3.60×10^{-4} 1.06×10^{-4} 1.03×10^{-4}	7.05×10^{-5} 6.28×10^{-5} 6.00×10^{-5}	1.02×10^{-4} 8.98×10^{-5} 8.60×10^{-5}	3.63×10^{-4} 1.23×10^{-4} 1.38×10^{-4}	1.34×10^{-4} 9.57×10^{-5} 8.67×10^{-5}	1.52×10^{-4} 1.15×10^{-4} 1.04×10^{-4}
	ν_i	2.65 3.06 3.35	3.90 3.85 4.14	3.36 3.36 3.53	3.23 3.38 3.11	3.47 3.48 3.84	3.30 3.27 3.63
$h_\tau = 1/64$ $h_s = \pi/32$	δu_i	4.16×10^{-5} 1.53×10^{-5} 1.32×10^{-5}	9.20×10^{-6} 6.88×10^{-6} 6.55×10^{-6}	2.23×10^{-5} 1.48×10^{-5} 1.42×10^{-5}	4.39×10^{-5} 1.65×10^{-5} 1.79×10^{-5}	1.30×10^{-5} 1.13×10^{-5} 1.13×10^{-5}	1.63×10^{-5} 1.19×10^{-5} 1.20×10^{-5}
	ν_i	3.11 2.79 2.96	2.94 3.19 3.20	2.19 2.60 2.60	3.05 2.90 2.95	3.37 3.08 2.94	3.22 3.27 3.12

Экспериментальные данные достаточно хорошо согласуются с теоретическими: скорость сходимости для всех задач близка к кубической и почти однородна в широком диапазоне значений R' и p. Было замечено, что вычисляя интегралы $J'_{i,m,k,l}(\tau)$ ($i = 1,2$) с помощью ПКФГ с $\gamma = 4 \div 12$ узлами, всегда получаем практически ту же точность δu_i, что и с помощью аппроксимации $\tilde{J}'_{i,m,k,l}(\tau)$.

Описанная аппроксимация интегральных операторов простого и двойного слоев с помощью аналитического интегрирования по межточечному расстоянию была использована здесь для непрямого КМГЭ [1, с. 67] на основе ГИУ второго рода. Но также она может быть использована для решения плоских задач нестационарной теплопроводности с помощью прямого КМГЭ [1, с. 70, 167], в том числе на основе ГИУ первого рода [5]. Кроме того, такая аппроксимация может быть использована для решения двумерных ГИУ (2b) с операторными ядрами, выраженными через произвольную экспоненциально убывающую C_0-полугруппу $\boldsymbol{U}(\tau)$ [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреббия К.*, *Теллес Ж.*, *Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
2. *Onishi K.* Convergence in the boundary element method for heat equation // Teaching for Robust Understanding of Mathematics. 1981. V. 17. P. 213–225.
3. *Costabel M.*, *Onishi K.*, *Wendland W.L.* A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation // Inverse and Ill-Posed Problems (H.W. Engl and C.W. Groetsch, ed.). Boston: Academic Press, 1987. P. 369–384.
4. *Hongtao Y.* On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation // Mathematics of Computation. 1999. V. 68. No. 226. P. 547–557.
5. *Hamina M.*, *Saranen J.* On the spline collocation method for the single layer heat operator equation // Mathematics of Computation. 1994. V. 62. No. 205. P. 41–64.
6. *Иванов Д.Ю.* Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103.
7. *Иванов Д.Ю.*, *Дзержинский Р.И.* Решение задач Робена для двумерных дифференциально-операторных уравнений, описывающих теплопроводность в прямом цилиндре // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 1. С. 15–17.
8. *Иванов Д.Ю.* Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6 (38). С. 33–45.
9. *Березин И.С.*, *Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: ГИФМЛ, 1962. 464 с.
10. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 810 с.
11. *Иванов Д.Ю.* Вычисление операторов, разрешающих задачи теплопроводности в прямых цилиндрах, с использованием полугрупповой симметрии // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 4(22). С. 26–38.

Статья поступила 07.09.2017 г.

Ivanov D.Yu. (2017) ON SOLVING PLANE PROBLEMS OF NON-STATIONARY HEAT CONDUCTION BY THE COLLOCATION BOUNDARY ELEMENT METHOD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 9–29

DOI 10.17223/19988621/50/2

In this paper, we propose a fully justified collocation boundary element method allowing one to obtain numerical solutions of internal and external initial-boundary value problems (IBVPs) with boundary conditions of the first, second, and third kind for the equation $\partial_t u = a^2\Delta_2 u - pu$ with constants $a, p > 0$ in a plane spatial domain Ω (in a bounded one Ω^+ or in its exterior Ω^-) on a finite time interval $I_T \equiv [0,T]$ at a zero initial condition. The solutions are found in the form of the double-layer potential for the Dirichlet IBVP and in the form of the simple layer potential for the Neumann–Robin IBVP with unknown density functions determined from the boundary integral equations (BIEs) of the second kind.

In this paper, instead of the usual piecewise-polynomial interpolation of the density function on time variable τ, the BIEs are approximated by the piecewise-quadratic interpolation (PQI) of the C_0 -semigroup of right shifts on time. Also, on the basis of the PQI, the approximation of the multiplier $e^{-p\tau}$ in kernels of the integral operators is carried out. In addition, the PQI of density functions is performed: for the BIE, only on arc-length s; for the potentials, on both variables s and τ. Then, the integration with respect to the variable τ on the boundary elements (BEs) is performed exactly. The integration with respect to the variable s on the BE for the potentials is performed approximately by using the Gaussian quadrature with $\gamma \geq 2$ points. For the BIE, the integration with respect to the arc-length s is carried out in two ways. On singular BEs and on nearby singular BEs, adjacent to a singular BE in some fixed arc-length region, an exact integration with respect to the variable r is carried out (r is the distance from the boundary point at which the integral is calculated as a function of parameter to the current boundary point of the integration). In this integration, functions of the variable r are taken as the weighting functions. The functions of r are generated by the fundamental solution of the heat equation and the rest of the integrand is approximated by quadratic interpolation on r. The integrals with respect to s on the remaining BEs are calculated using the Gaussian quadrature with γ points.

The cubic convergence of approximate solutions of the IBVP at any point of the set $\Omega \times I_T$ is proved under conditions $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$ and $\boldsymbol{w} \in C^3_{1,3}(\partial\Omega)$. It is also proved that such solutions are resistant to perturbations of the boundary function $\boldsymbol{w}$ in the norm of the space $C^0_1(\partial\Omega)$. Here, $C^k_{m,n}(\partial\Omega) \equiv C^k_m(\partial\Omega) \cap C^0_{m+n}(\partial\Omega)$ and $C^k_m(\partial\Omega)$ is the Banach space of k times continuously differentiable on $\partial\Omega$ vector functions with values in Sobolev's space which is the domain of definition of the operator $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{m}}$ ($(\boldsymbol{Bf})(t) = f'(t)$, $f(t=0) = 0$).

In conclusion, results of the numerical experiments are presented. They confirm the cubic convergence of approximate solutions for all three IBVPs in a circular domain.

Keywords: boundary integral equation, boundary element method, singular boundary elements, non-stationary heat conduction, collocation, operator, approximation, stability.

IVANOV Dmitrii Yurievich (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State University of Railway Engeneering (MIIT), Moscow, Russian Federation)
E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

REFERENCES

1. *Brebbia C.A.*, *Telles J.C.F.*, *Wrobel L.C.* (1984) *Boundary element techniques*. New York: Springer-Verlag. 464 p.
2. *Onishi K.* (1981) Convergence in the boundary element method for heat equation. *Teaching for Robust Understanding of Mathematics*. 17. pp. 213–225.
3. Costabel M., Onishi K., Wendland W.L. (1987) A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation. *Inverse and Ill-Posed Problems* (*H.W. Engl and C.W.Groetsch, ed.*). Boston: Academic Press. pp. 369–384.
4. Hongtao Y. (1999) On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation. *Mathematics of Computation*. 68 (226). pp. 547–557.
5. Hamina M., Saranen J. (1994) On the spline collocation method for the single layer heat operator equation. *Mathematics of Computation*. 62 (205). pp. 41–64.
6. Ivanov D.Y. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations*. 46 (8). pp. 1104–1113. https://doi.org/10.1134/S0012266110080045.
7. Ivanov D.Yu., Dzerzhinskiy R.I. (2016) Reshenie zadach Robena dlya dvumernykh different-sial'no-operatornykh uravneniy, opisyvayushchikh teploprovodnost' v pryamom tsilindre [Solution of the Robin problems for two-dimensional differential-operator equations describ-

ing the thermal conductivity in a straight cylinder]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Journal of the Volga Region.* 1. pp. 15–17.
8. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost' v prostranstvakh differentsiruemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integralnykh uravneniy teploprovodnosti s operatorno-polugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6. pp. 33–45. DOI 10.17223/19988621/38/4.
9. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1962) *Metody vychisleniy* [Methods of computations]. Vol. 2. Moscow: GIFML.
10. Fihktengol'ts G.M. (2001) *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course of differential and integral calculus]. Vol. 2. Moscow: FIZMATLIT.
11. Ivanov D.Yu. (2014) Vychislenie operatorov, razreshayushchikh zadachi teploprovodnosti v pryamykh tsilindrakh, s ispol'zovaniem polugruppovoy simmetrii [Calculation of operators solving problems of heat conduction in straight cylinders using semigroup symmetry]. *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI – Proceedings of Moscow State Technical University MAMI*. 4(4). pp. 26–38.