УДК 517.977.58
DOI 10.17223/19988621/50/3

Р.К. Тагиев, В.М. Габибов

РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Рассматривается задача оптимального управления для параболического уравнения с интегральным граничным условием и управлениями в коэффициентах. Установлены оценки точности разностных аппроксимаций по состоянию и функционалу. Проведен процесс регуляризации аппроксимаций по А.Н.Тихонову.

Ключевые слова: *оптимальное управление*, *параболическое уравнение*, *интегральное граничное условия*, *разностная аппроксимация.*

Задачи оптимального управления для параболических уравнений имеют большое прикладное значение при оптимизации процессов теплофизики, диффузии, фильтрации и т.п. [1, 2]. Многие физические и биологические процессы описываются нелокальными краевыми задачами для уравнений параболического типа. Среди них особое место занимают краевые задачи с интегральными граничными условиями, и такие задачи изучены в работах [3–7] и др. Задачи оптимального управления для уравнений параболического типа с интегральным условием и управлениями в коэффициентах исследованы существенное слабее [8, 9].

Численная реализация многих методов решения задач оптимального управления практически невозможна без их конечномерных аппроксимаций. Одним из эффективных методов такой аппроксимации является разностный метод. Вопросы о сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления для параболических уравнений при классических краевых условиях и с управлениями в коэффициентах изучены в работах [10, 11] и др. Однако эти вопросы исследованы существенно слабее для задач оптимального управления параболическими уравнениями с интегральными граничными условиями [12].

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для параболического уравнения с интегральным граничным условием и управлениями в коэффициентах. Установлены оценки точности разностных аппроксимаций по состоянию и функционалу. Проведен процесс регуляризации аппроксимаций по А.Н.Тихонову.

1. Постановка задачи и ее корректность.

Пусть управляемый процесс описывается в области

$$Q_T = \{(x,t):\ 0 < x < \ell,\ 0 < t \le T\}$$

следующей краевой задачи для линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,t)u = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T; \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le \ell; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, 0<t\le T; \tag{3}$$

$$k(\ell,t)\,\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)=\int\limits_0^\ell H(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dx+g(t),\quad 0<t\le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)\in W_2^1(0,l),\ f(x,t)\in L_2(Q_T),\ g(t)\in W_2^1(0,T),\ H(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$ – заданные функции, $k(x,t), q(x,t)-$ управляющие функции, а $u=u(x,t)=u(x,t,v)-$решение задачи (1) – (3), т.е. состояние процесса, соответствующее управлению υ.

Введем множество допустимых управлений:

$$V=\{\upsilon=(k(x,t),q(x,t))\in H=W_2^1(Q_T)\times L_2(Q_T):0<\nu\le k(x,t)\le\mu,$$
$$\left|\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right|\le\mu_1,\left|\frac{\partial k(x,t)}{\partial t}\right|\le\mu_2,\ |q(x,t)|\le\mu_3\ п.в.на\,Q_T\}, \tag{5}$$

где $\nu,\mu,\mu_1,\mu_2,\mu_3>0-$ заданные числа.

Зададим функционал цели $J:V\to R$ равенством

$$J(\upsilon)=\int\limits_0^T|u(x,T;\upsilon)-u_T(x)|^2\,dx, \tag{6}$$

где $u_T(x)\in W_2^1(0,l)$ – заданная функция.

Поставим следующую задачу оптимального управления: требуется минимизировать функционал (6) на множестве V при условиях (1) – (4). Эту задачу ниже будем называть задачей (1) – (6).

Обозначения используемых в работе функциональных пространств и их норм соответствуют принятым в монографии [13, с. 23]. Ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин, от допустимых управлений и от шагов вводимых далее сеток, обозначаем через M.

Под решением краевой задачи (1) – (4) , соответствующем управлению $\upsilon\in V$, будем понимать обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$. Используя результаты работ [13, с. 165; 7], можно показать, что при сделанных предположениях задача (1) – (4) имеет единственное обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ при каждом фиксированном $\upsilon\in V$ и справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)}\le M\left(\|f\|_{2,Q_T}+\|\varphi\|_{2,(0,\ell)}+\|g\|_{2,(0,T)}\right). \tag{7}$$

Более того, обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$ принадлежит также пространству $W_2^{2,1}(Q_T)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{2,Q_T}^{(2,1)}\le M\left(\|f\|_{2,Q_T}+\|\varphi\|_{2,(0,\ell)}^{(1)}+\|g\|_{2,(0,T)}^{(1)}\right). \tag{8}$$

В работе [9] доказано, что задача (1) – (6) корректно поставлена в слабой топологии пространства H , т.е. множество оптимальных управлений задачи (1) – (6) $V_*=\{\upsilon_*\in V:J(\upsilon_*)=J_*\equiv\inf\{J(\upsilon):\upsilon\in V\}\}$ не пусто, слабо компактно в H и любая минимизирующая последовательность $\{\upsilon_n=(k_n(x,t),q_n(x,t))\}\subset V$ функционала $J(\upsilon)$ слабо в H сходится к множеству V_*.

2. Разностная аппроксимация задачи и ее корректность

Для аппроксимаций задачи (1) – (6) и исследования сходимости разностных аппроксимаций введем следующие сетки на отрезках $[0,\ell]$, $[0,T]$ и в прямоугольнике $\overline{Q}_T$:

$$\overline{\omega}_h=\{x_i=ih\in[0,\ell]:\ i=0,1,\cdots,N,\ Nh=\ell\},$$

$$\omega_h=\overline{\omega}_h\bigcap(0,\ell),\ \omega_h^+=\overline{\omega}_h\cap(0,\ell],\omega_h^-=\omega\times[0,\ell),$$

$$\overline{\omega}_{h*}=\{\overline{x}_i=(i-0.5)h:i=1,2,...,N,Nh=\ell\},$$

$$\overset{\circ}{\omega}_h=\overline{\omega}_{h*}\setminus\{\overline{x}_N=(N-0.5)h\};$$

$$\omega_\tau=\{t_j=j\tau\in[0,T]:\ j=1,2,\cdots,L,\ L\tau=T\},$$

$$\overline{\omega}_\tau=\{t_0=0\}\cup\omega_\tau,\overset{\circ}{\omega}_\tau=\omega_\tau\cap(0,T)\};$$

$$\omega_T=\omega_h\times\omega_\tau,\ \overline{\omega}_T=\overline{\omega}_h\times\omega_\tau,\omega_T^+=\omega_h^+\times\omega_\tau,\gamma_T^{(-1)}=\{x=0\}\times\omega_\tau,$$

$$\gamma_T^{(+1)}=\{x=\ell\}\times\omega_\tau,\omega_{T*}=\overline{\omega}_{h*}\times\omega_\tau.$$

Пусть $\hbar=\hbar(x)=h$, если $x\in\omega_h$, и $\hbar=0,5h$, если $x=0$ или $x=\ell$. Введем следующие скалярные произведения и нормы для сеточных функции, заданных на соответствующих сетках:

$$(y,\upsilon)_{\overline{\omega}_h}=\sum_{\overline{\omega}_h}\hbar y\upsilon,\ \|y\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}=(y,y)_{\overline{\omega}_h}^{1/2},\ (y,\upsilon)_{\omega_h^+}=\sum_{\omega_h^+}hy\upsilon,\ \|y\|_{L_2\left(\omega_h^+\right)}=(y,y)_{\omega_h^+}^{1/2},$$

$$(y,\upsilon)_{\omega_\tau}=\sum_{\omega_\tau}\tau y\upsilon,\ \|y\|_{L_2(\omega_\tau)}=(y,y)_{\omega_\tau}^{1/2},(y,\upsilon)_{\overline{\omega}_T}=\sum_{\omega_\tau}\tau(y,\upsilon)_{\overline{\omega}_h},\ \|y\|_{L_2(\overline{\omega}_T)}=(y,y)_{\overline{\omega}_T}^{1/2},$$

$$(y,\upsilon)_{\omega_T^+}=\sum_{\omega_\tau}\tau(y,\upsilon)_{\omega_h^+},\ \|y\|_{L_2\left(\omega_T^+\right)}=(y,y)_{\omega_T^+}^{1/2},$$

$$\|y\|_{L_{2,1}\left(\omega_T^+\right)}=\sum_{\omega_\tau}\tau\|y(x,t)\|_{L_2(\omega_h^+)},\|y\|_{L_{2,1}(\overline{\omega}_T)}=\sum_{\omega_\tau}\tau\|y(x,t)\|_{L_2(\overline{\omega}_h)},$$

$$\|y\|_{\infty,\overline{\omega}_T}=\max_{\overline{\omega}_T}|y(x,t)|,\|y\|_{V_2^{1,0}(\overline{\omega}_T)}=\max_{t\in\overline{\omega}_\tau}\|y(x,t)\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\|y_{\overline{x}}\|_{L_2\left(\omega_T^+\right)},$$

$$\|y\|_{L_2(\omega_{T*})}^2=\sum_{\omega_\tau}\tau\sum_{\overline{\omega}_{h*}}hy^2,|y|_{W_2^1(\omega_{T*})}^2=\sum_{\omega_\tau}\tau\left(\sum_{\overset{\circ}{\omega}_h}hy_x^2+\sum_{\overline{\omega}_{h*}}hy_t^2\right),$$

$$\|y\|_{W_2^1(\omega_{T*})}=\left(\|y\|_{L_2(\overline{\omega}_{T*})}^2+|y|_{W_2^1(\overline{\omega}_{T*})}^2\right)^{1/2}.$$

Введем также элементарные ячейки

$$e_1(x)=\{\xi:x-0,5h\le\xi<x+0,5h\},\ x\in\omega_h;$$

$$e_1(0)=\{\xi:0\le\xi<0,5h\},\quad e_1(\ell)=\{\xi:\ell-0,5h\le\xi\le\ell\};$$

$$e_2(t)=\{\theta:t-\tau\le\theta<t\},\ t\in\omega_\tau;$$

$$e(x,t)=e_1(x)\times e_2(t),\ (x,t)\in\overline{\omega}_T.$$

Пусть S^x, S_-^x и S_-^t – одномерные усредняющие операторы по Стеклову:

$$S^x u(x,t) = \frac{1}{\hbar}\int\limits_{e_1(x)} u(\xi,t)\,d\xi,\ x\in\overline{\omega}_h\ ,\ S_-^x u(x,t) = \frac{1}{h}\int\limits_{x-h}^{x} u(\xi,t)d\xi, x\in\omega_h^+\ ,$$

$$S_-^t u(x,t) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{e_2(t)} u(x,\theta)\,d\theta,\ t\in\omega_\tau\ .$$

Кроме того, пусть $S^{tx} = S_-^t S^x$ – произведение усредняющих операторов S_-^t и S^x.

Задаче оптимального управления (1) – (5) поставим в соответствие следующую разностную аппроксимацию: минимизировать сеточный функционал

$$J_{h\tau}(\upsilon_{h\tau}) = \left\| y(x,T;\upsilon_{h\tau}) - u_T^h(x)\right\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \tag{9}$$

на множестве сеточных управлений

$$V_{h\tau} = \Big\{\upsilon_{h\tau} = \left(k_{h\tau}(x,t), q_{h\tau}(x,t)\right)\in H_{h\tau} = W_2^1(\omega_{T*})\times L_2(\overline{\omega_T}) : 0<\nu\le k_{h\tau}(x,t)\le\mu,$$
$$(x,t)\in\overline{\omega}_{T*}, \left|k_{h\tau x}(x,t)\right|\le\mu_1, (x,t)\in\omega_{h*}\times\overset{\circ}{\omega}_\tau, \left|k_{h\tau t}(x,t)\right|\le\mu_2, (x,t)\in\overline{\omega}_{h*}\times\overset{\circ}{\omega}_\tau,$$
$$\left|q_{h\tau}(x,t)\right|\le\mu_3, (x,t)\in\overline{\omega}_T\}, \tag{10}$$

при условии, что сеточная функция $y = y(x,t) = y(x,t;\upsilon_{h\tau})$ является решением разностной краевой задачи

$$y_{\overline{t}} - (k_{h\tau}(x-0{,}5h,t)y_{\overline{x}})_x + q_{h\tau}(x,t)y = f_{h\tau}(x,t),\ (x,t)\in\omega_T; \tag{11}$$

$$y(x,0) = \varphi_h(x),\ x\in\overline{\omega}_h; \tag{12}$$

$$k_{h\tau}(0{,}5h,t)y_x(0,t) = 0{,}5h\left[y_{\overline{t}}(0,t) - q_{h\tau}(0,t)\,y(0,t) - f_{h\tau}(0,t)\right],\ t\in\omega_\tau; \tag{13}$$

$$k_{h\tau}(\ell-0.5h,t)y_{\overline{x}}(\ell,t) = \sum_{x\in\omega_h^+} hH_h(x)y_{\overline{x}}(x,t) -$$
$$-0{,}5h\left[y_{\overline{t}}(\ell,t) - q_{h\tau}(\ell,t)\,y(\ell,t) - f_{h\tau}(\ell,t)\right] + g(t),\ t\in\omega_\tau. \tag{14}$$

Здесь

$$u_T^h(x) = S^x u_T(x),\ \varphi_h(x) = S^x\varphi(x), x\in\overline{\omega}_h;$$
$$H_h(x) = S_-^x H(x),\ x\in\omega_h^+,\ q_{h\tau}(x,t) = S^{xt}q(x,t);$$
$$f_{h\tau}(x,t) = S^{tx}f(x,t),\ (x,t)\in\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau,\ g_\tau(t) = S_-^t g(t), t\in\omega_\tau.$$

Разностную краевую задачу (11) – (14) представим в следующей форме:

$$y_{\overline{t}} = Ay + F_{h\tau}(x,t),\ (x,t)\in\overline{\omega}_T, \tag{15}$$

$$y(x,0) = \varphi_h(x),\ x\in\overline{\omega}_h, \tag{16}$$

где

$$Ay = \begin{cases} (k_{h\tau}(x-0.5h,t)y_{\overline{x}})_x - q_{h\tau}(x,t)y, \quad (x,t)\in\omega_T, \\ 2h^{-1}k_{h\tau}(0.5h,t)y_x - q_{h\tau}(x,t)y,\ (x,t)\in\gamma_T^{(-1)}, \\ -2h^{-1}k_{h\tau}(x-0.5h,t)y_{\overline{x}} - q_{h\tau}(x,t)y + 2h^{-1}\sum\limits_{\omega_h^+} hH_h(x)\,y_{\overline{x}}(x,t),\ (x,t)\in\gamma_T^{(+1)}; \end{cases} \tag{17}$$

$$F_{h\tau}(x,t)=\begin{cases} f_{h\tau}(x,t), & (x,t)\in\omega_T\cup\gamma_T^{(-1)},\\ f_{h\tau}(x,t)+2h^{-1}g(t), & (x,t)\in\gamma_T^{(+1)}.\end{cases} \tag{18}$$

Будем предполагать, что шаг τ по переменной t удовлетворяет условию

$$\tau<\tau_0=\frac{\nu^3\ell}{4\|H\|^2_{2,(0,\ell)}(4\|H\|^2_{2,(0,\ell)}+\nu^2)(2+\nu^{-1/2})^2}. \tag{19}$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия, принятые в п.1, и неравенство (19). Тогда задача (11) – (14) однозначно разрешима для каждого $\upsilon_{h\tau}(x,t)\in V_{h\tau}$ и имеет место априорная оценка

$$\begin{gathered}\|y(x,t;\upsilon_{h\tau})\|_{V_2^{1,0}(\overline{\omega}_T)}+\sqrt{\tau}\,\|y_{\bar t}(x,t;\upsilon_{h\tau})\|_{L_2(\overline{\omega}_T)}\le\\ \le M\Big[\|\varphi_h\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\|f_{h\tau}\|_{L_{2,1}(\overline{\omega}_T)}+\|g_\tau\|_{L_2(\omega_\tau)}\Big].\end{gathered} \tag{20}$$

Доказательство. Умножим уравнение (15) скалярно $(,)_{\overline{\omega}_h}$ на $\tau y(x,t';\upsilon_{h\tau})$ и просуммируем полученное равенство по t' от $t'=\tau$ до $t'=t$, где $t\in\omega_\tau$ – некоторая точка сетки ω_τ. Затем, используя формулы суммирования по частям [14, с. 52] и тождество $y_{\bar t}y=0,5\left(y^2\right)_{\bar t}+0,5\tau y_{\bar t}^2$, придем к равенству

$$\begin{gathered}\frac12\|y(x,t)\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\tau\sum_{t'=\tau}^{t}h\sum_{x\in\omega_h^+}k_h(x-0.5h,t)y_{\bar x}^2(x,t')+\\ +\frac12\tau^2\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar t}(x,t')\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\tau\sum_{t'=\tau}^{t}(q_{h\tau}(x,t'),y^2(x,t'))_{\overline{\omega}_h}=\\ =\frac12\|y(x,0)\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\tau\sum_{t'=\tau}^{t}(f_{h\tau}(x,t'),y(x,t'))_{\overline{\omega}_h}+\\ +\tau\sum_{t'=\tau}^{t}(H_h(x),y_{\bar x}(x,t'))_{\omega_h^+}y(\ell,t')+\tau\sum_{t'=\tau}^{t}g_\tau(t')y(\ell,t'),t\in\omega_\tau.\end{gathered} \tag{21}$$

Используя условия $\kappa_{h\tau}(x,t)\ge\nu>0,\ (x,t)\in\overline{\omega}_{T*},\ q_{h\tau}(x,t)\ge q_0>0,\ (x,t)\in\overline{\omega}_T$, неравенство Коши – Буняковского, неравенство Коши с ε [13, с. 33], неравенство

$$y^2(\ell,t)\le\varepsilon\|y_{\bar x}(x,t)\|^2_{L_2(\omega_h^+)}+\left(\frac1\varepsilon+\frac1\ell\right)\|y(x,t)\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)},t\in\omega_\tau$$

которое справедливо для любой сеточной функции $y(x,t),x\in\overline{\omega}_h$, при каждом фиксированном $t\in\omega_\tau$ и для любого $\varepsilon>0$ [14, с. 190], и мажорируя левую и правую части равенства (21), придем к неравенству

$$\begin{gathered}\frac12\|y(x,t)\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\nu\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar x}(x,t')\|^2_{L_2(\omega_h^+)}+\frac12\tau^2\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar t}(x,t')\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\le\\ \le\frac12\|y(x,0)\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|f_{h\tau}(x,t')\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}\max_{0\le t'\le t}\|y(x,t')\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\end{gathered}$$

$$+\|H\|_{2,(0,\ell)}\left(\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon}{2\varepsilon_1}\right)\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar{x}}(x,t')\|^2_{L_2(\omega_h^+)}+\frac{\|H\|_{2,(0,\ell)}}{2\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\ell}\right)\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|y(x,t')\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}+$$

$$+\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}g_\tau^2(t')\right)^{\frac{1}{2}}\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar{x}}(x,t')\|^2_{L_2(\omega_h^+)}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{1+\frac{1}{\ell}}\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}g_\tau^2(t')\right)^{\frac{1}{2}}\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|y(x,t')\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall\varepsilon,\varepsilon_1>0.$$

Положим здесь $\varepsilon_1=\nu/2\|H\|_{2,(0,\ell)}, \varepsilon=\varepsilon_1^2=\nu^2/4\|H\|^2_{2,(0,\ell)}$, затем умножим обе части этого неравенства на 2, приведем подобные члены, положим $\alpha(t)\equiv\max\limits_{0\le t'\le t}\|y(x,t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}$, величину $\tau\sum\limits_{t'=\tau}^{t}\|y(x,t')\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}$ заменим на $t\alpha^2(t)$, а $\|y(x,0)\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}$ на $\alpha(t)\|y(x,0)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}$. Это даст неравенство

$$\|y(x,t)\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}+\nu\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar{x}}(x,t')\|^2_{L_2(\omega_h^+)}+\tau^2\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar{t}}(x,t')\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\le$$

$$\le\alpha(t)\left[\|y(x,0)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}+2\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|f_{2h\tau}(x,t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}+2\sqrt{T(1+\ell^{-1})}\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}g_\tau^2(t')\right)^{\frac{1}{2}}\right]+$$

$$+ct\alpha^2(t)+2\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}g_{3\tau}^2(t')\right)^{\frac{1}{2}}\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar{x}}(x,t')\|^2_{L_2(\omega_h^+)}\right)^{\frac{1}{2}}\equiv\beta(t), t\in\omega,$$

где $c=\dfrac{2\|H\|_{2,(0,\ell)}}{\nu}\left(\dfrac{4\|H\|^2_{2,(0\ell)}}{\nu^2}+\dfrac{1}{\ell}\right)$. Из него следуют три неравенства:

$$\alpha^2(t)\le\beta(t),\ \ \tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar{x}}(x,t')\|^2_{L_2(\omega_h^+)}\le\frac{1}{\nu}\beta(t),\ \ \tau^2\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar{t}}(x,t')\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\le\beta(t).$$

Извлечем из обеих частей этих неравенств корень квадратный, полученные неравенства сложим. Тогда, используя условие (19), для $t<2\tau_0$ получим оценку

$$\max_{0\le t'\le t}\|y(x,t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}+(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar{x}}(x,t')\|^2_{L_2(\omega_h^+)})^{\frac{1}{2}}+\sqrt{\tau}\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar{t}}(x,t')\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le 2(2+\nu^{-1/2})^2[1-(2+\nu^{-1/2})\sqrt{ct}]^{-2}[1+\sqrt{T(1+\ell^{-1})}]\times$$

$$\times\left[\|y(x,0)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}+\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|f_{h\tau}(x,t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}+\tau\sum_{t'=\tau}^{t}g_\tau^2(t')\right]. \qquad (22)$$

Разобьем отрезок $[0,T]$ на интервалы $\Delta_1=[0,\tau_0]$, $\Delta_2=[\tau_0,2\tau_0],\dots,\Delta_n$ длиной, не большей τ_0. Для каждого из них справедлива оценка вида (22). Отсюда, учитывая

$$\|y(x,t)\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}\le\max_{0\le t'\le t}\|y(x,t')\|_{L_2(\bar{\omega}_h)},$$

выведем неравенство

$$\max_{0\le t'\le t}\|y(x,t')\|_{L_2(\bar\omega_h)}+\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar x}(x,t')\|^2_{L_2(\omega_h^+)}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{\tau}\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|y_{\bar t}(x,t')\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)^{1/2}\le$$

$$\le c(t)\Big[\|y(x,0)\|_{L_2(\bar\omega_h)}+\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|f_{h\tau}(x,t')\|_{L_2(\bar\omega_h)}+\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}g_\tau^2(t')\right)^{\frac{1}{2}}\Big],t\in\omega_\tau,$$

где функция $c(t)$ определяется величинами ℓ,T,ν и $\|H\|_{2,(0,\ell)}$. Полагая здесь $t=T$, получаем оценку (20). Однозначная разрешимость задачи (11) – (14) при каждом $\upsilon_{h\tau}\in V_{h\tau}$ очевидна. Теорема 1 доказана.

3. Априорная оценка погрешности разностного метода по состоянию

Пусть $\upsilon(\xi,\theta)=(k(\xi,\theta),q(\xi,\theta))\in V$, $\upsilon_{h\tau}(x,t)=(k_{h\tau}(x,t),q_{h\tau}(x,t))\in V_{h\tau}$ – произвольные управления, $u(\xi,\theta)=u(\xi,\theta;\upsilon)$, $y(x,t)=y(x,t;\upsilon_{h\tau})$ – решения задач (2) – (4) и (11) – (14), соответствующие управлениям $\upsilon(\xi,\theta)$ и $\upsilon_{h\tau}(x,t)$. Через $\bar u(x,t)=\bar u(x,t;\upsilon)$ обозначим усреднение решения задачи (2) – (4), определяемое по формуле

$$\bar u(x,t)=\begin{cases}S_-^t u(x,t), & (x,t)\in\bar\omega_T,\\ S^x\varphi(x), & x\in\omega_h,\quad t=0.\end{cases}\qquad(23)$$

Используя условия (15), (16), для погрешности разностного метода по состоянию

$$z(x,t)=z(x,t;\upsilon,\upsilon_{h\tau})=y(x,t;\upsilon_{h\tau})-\bar u(x,t;\upsilon)$$

получим задачу

$$z_{\bar t}=Az+\psi_{h\tau}(x,t),\quad (x,t)\in\bar\omega_T;\qquad(24)$$

$$z(x,0)=0,\quad x\in\bar\omega_h,\qquad(25)$$

где $\psi_{h\tau}(x,t)=F_{h\tau}(x,t)+A\bar u-\bar u_{\bar t}$, $(x,t)\in\overline{\omega_T}$ – погрешность аппроксимации задачи (15), (16).

Применяя к уравнению (2) в узлах $(x,t)\in\bar\omega_T$ усредняющий оператор S^{tx}, с помощью некоторых преобразований получим следующее представление для $\psi_{h\tau}$:

$$\psi_{h\tau}(x,t)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{2}[\eta_{1x}^{(k)}(x,t)+\eta_2^{(k)}(x,t)]+\eta_{\bar t}^{(3)}(x,t),\ (x,t)\in\omega_T,\\ \frac{2}{h}[\eta_1^{(1)}(x,t)+\eta_1^{(2)}(x,t)]+\eta_2^{(1)}(x,t)+\eta_2^{(2)}(x,t)+\eta_{\bar t}^{(3)}(x,t),\ (x,t)\in\gamma_T^{(-1)},\\ -\frac{2}{h}[\eta_1^{(1)}(x,t)+\eta_1^{(2)}(x,t)]+\eta_2^{(1)}(x,t)+\eta_2^{(2)}(x,t)+\eta_{\bar t}^{(3)}(x,t)+\\ +\frac{2}{h}\eta^{(4)}(t),\ (x,t)\in\gamma_T^{(+1)},\end{cases}\qquad(26)$$

где

$$\eta_1^{(1)}(x,t)=\begin{cases} S_-^t k(x-0.5h,t)\bar{u}_{\bar{x}}(x,t)-S_-^t k(x-0.5h,t)\dfrac{\partial u(x-0,5h,t)}{\partial x}, \ (x,t)\in\omega_T^+, \\ S_-^t k(x+0.5h)\bar{u}_x(x,t)-S_-^t k(x+0.5h,t)\dfrac{\partial u(x+0.5h,t)}{\partial x}, \ (x,t)\in\gamma_T^{(-1)}; \end{cases} \tag{27}$$

$$\eta_1^{(2)}(x,t)=\begin{cases} [k_{h\tau}(x-0.5h,t)-S_-^t k(x-0.5h,t)]\bar{u}_{\bar{x}}(x,t),(x,t)\in\omega_T^+, \\ k_{h\tau}(x+0.5h,t)-S_-^t k(x+0.5h,t)]\bar{u}_{\bar{x}}(x,t),(x,t)\in\gamma_T^{(-1)}; \end{cases} \tag{28}$$

$$\eta_2^{(1)}(x,t)=S^{tx}(q(x,t)u(x,t))-S^{tx}(q(x,t))\bar{u}(x,t), \quad (x,t)\in\bar{\omega}_T; \tag{29}$$

$$\eta_2^{(2)}(x,t)=\left[S^{tx}(q(x,t)-q_{h\tau}(x,t)\right]\bar{u}(x,t), \quad (x,t)\in\bar{\omega}_T; \tag{30}$$

$$\eta^{(3)}(x,t)=S^{tx}u(x,t)-\bar{u}(x,t), \quad (x,t)\in\bar{\omega}_T; \tag{31}$$

$$\eta^{(4)}(t)=\sum_{x\in\omega_h^+} hH_h(x)\bar{u}_{\bar{x}}(x,t)-S_-^t\left(\int_0^\ell H(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dx\right), \ t\in\omega_\tau. \tag{32}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия, принятые в п.1. Тогда для решения задачи (24), (25) справедлива оценка

$$\|z(x,t)\|_{V_2^{1,0}(\bar{\omega}_T)}+\sqrt{\tau}\,\|z_{\bar{t}}(x,t)\|_{L_2(\bar{\omega}_T)}\le$$

$$\le M\left[\sum_{k=1}^{2}(\left\|\eta_1^{(k)}\right\|_{L_2\left(\omega_T^+\right)}+\left\|\eta_2^{(k)}\right\|_{L_2(\bar{\omega}_T)})+\left(\sum_{t\in\bar{\omega}_\tau}\left\|\eta^{(3)}(x,t)\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right)^{1/2}+\left\|\eta^{(4)}\right\|_{L_2\ (\omega_\tau)}\right]. \tag{33}$$

Доказательство. Умножая уравнение (24) скалярно $(,)_{\bar{\omega}_h}$ на $\tau z(x,t')$ и рассуждая аналогично получению равенства (21), имеем

$$\frac{1}{2}\|z(x,t)\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}+\tau\sum_{t'=\tau}^{t}hk_h(x-0.5h,t')z_{\bar{x}}^2(x,t')+\frac{1}{2}\tau^2\sum_{t'=\tau}^{t}\|z_{\bar{t}}(x,t')\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}$$

$$+\tau\sum_{t'=\tau}^{t}(q_{h\tau}(x,t'),z^2(x,t'))_{\bar{\omega}_h}=-\tau\sum_{t'=\tau}^{t}[\left(\sum_{k=1}^{2}\eta_1^{(k)}(x,t),z_{\bar{x}}(x,t')\right)_{\omega_h^+}-$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{2}\eta_2^{(k)}(x,t),z(x,t')\right)_{\bar{\omega}_h}-\tau\sum_{t'=0}^{t-\tau}\left(\eta^{(3)}(x,t'),z_t(x,t')\right)_{\bar{\omega}_h}+$$

$$+\left(\eta^{(3)}(x,t),z(x,t)\right)_{\bar{\omega}_h}+\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\eta^{(k)}(t')z(\ell,t'),t\in\omega_\tau.$$

Затем мажорируя левую и правую части этого равенства, можно получить следующее неравенство:

$$\|z(x,t)\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}+2\nu\tau\sum_{\bar{t}=\tau}^{t}\|z_{\bar{x}}(x,t')\|^2_{L_2(\omega_h^+)}+\tau^2\sum_{t'=\tau}^{t}\|z_{\bar{t}}(x,t')\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\le$$

$$\le 2\left[\sum_{k=1}^{2}\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\left\|\eta_1^{(k)}(x,t')\right\|^2_{L_2(\omega_h^+)}\right)^{1/2}+\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}(\eta^{(4)}(t'))^2\right)^{1/2}\right]\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|z_{\bar{x}}(x,t')\|^2_{L_2(\omega_h^+)}\right)^{1/2}+$$

$$+2\max_{0\le t'\le t}\|z(x,t')\|_{L_2(\bar\omega_h)}\left\{T\sum_{k=1}^{2}\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\left\|\eta_2^{(k)}(x,t')\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)^{1/2}\right.$$

$$\left.+\left\|\eta^{(3)}(x,t)\right\|_{L_2(\bar\omega_h)}+\sqrt{T(1+\ell^{-1})}\left(\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\left(\eta^{(4)}(t')\right)^2\right)^{1/2}\right\}+$$

$$+2\left(\sum_{t'=0}^{t-\tau}\left\|\eta^{(3)}(x,t')\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)^{1/2}\left(\tau^2\sum_{t'=\tau}^{t}\|z_{\bar t}(x,\bar t)\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)^{1/2}\equiv\delta(t),t\in\omega_\tau.$$

Из него следует три неравенства:

$$\gamma^2(t)\le\delta(t),$$

$$\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\|z_{\bar x}(x,t')\|^2_{L_2(\omega_h^+)}\le(2\nu)^{-1}\delta(t),$$

$$\tau\sum_{t'=\tau}^{t}\tau\|z_{\bar t}(x,t')\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\le\delta(t),$$

где

$$\gamma(t)=\max_{0\le t'\le t}\|z(x,t')\|_{L_2(\bar\omega_h)}.$$

Извлекая из обеих частей этих неравенств корень квадратный, складывая полученные неравенства, после некоторых преобразований приходим к оценке (33). Теорема 2 доказана.

Для получения оценки скорости сходимости аппроксимаций (11) – (14) по состоянию достаточно установить оценки величин (27) – (32).

Лемма 1. Пусть выполнены условия, принятые в п.1. Тогда для составляющих погрешности аппроксимации (27) – (32) справедливы оценки

$$\left\|\eta_1^{(1)}\right\|_{L_2\left(\omega_T^+\right)}\le\sqrt2(h+\tau)\|k\|^{(0,1)}_{\infty,Q_T}\sqrt{\sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial^j u}{\partial\xi^j}\right\|^2_{2,Q_T}};\qquad(34)$$

$$\left\|\eta_1^{(2)}\right\|_{L_2\left(\omega_T^+\right)}\le T\left\|k_{h\tau}(x,t)-S_-^t k(x,t)\right\|_{\infty,\omega_{T*}}\left\|\frac{\partial u}{\partial\xi}\right\|_{2,Q_T};\qquad(35)$$

$$\left\|\eta_2^{(1)}\right\|_{L_2(\bar\omega_T)}\le\sqrt2(h+\tau)\|q\|_{\infty,Q_T}\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial\xi}\right\|_{2,Q_T}+\left\|\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\|_{2,Q_T}\right);\qquad(36)$$

$$\left\|\eta_2{}^{(2)}\right\|_{L_2(\bar\omega_T)}\le M\left\|S^{tx}q-q_{h\tau}\right\|_{\infty,\bar\omega_T}\|u\|^{(2,0)}_{2,Q_T};\qquad(37)$$

$$\left[\sum_{\bar\omega_\tau}\left\|\eta^{(3)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right]^{1/2}\le M\left(\frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}}+\tau^{1/2}\right)\|u\|^{(2,1)}_{2,Q_T};\qquad(38)$$

$$\left\|\eta^{(4)}\right\|_{L_2(\omega_\tau)}\le h\ell\|H\|_{\infty,(0,\ell)}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right\|_{2,Q_T}.\qquad(39)$$

Доказательство. Ввиду ограниченности объема работы рассмотрим лишь доказательство оценок (34) и (39).

Используя определение (23) сеточной функции $\bar{u}(x,t)$, $(x,t)\in\omega_T^+\cup\gamma_T^{(-1)}$, можно показать, что справедливо представление

$$\eta^{(1)}(x,t)=\frac{1}{\tau^2 h}\int\limits_{t-\tau}^{t}\int\limits_{t-\tau}^{t}\int\limits_{x-h}^{x}[k(x-0.5h,\theta_1)\int\limits_{x-0.5h}^{\xi}\frac{\partial^2 u(\xi_1,\theta)}{\partial\xi_1^2}d\xi_1+$$
$$+\int\limits_{0}^{\theta_1}\frac{\partial k(x-0.5h,\theta_2)}{\partial\theta_2}d\theta_2\frac{\partial u(\xi,\theta)}{\partial\xi}]d\xi d\theta_1 d\theta,\ (x,t)\in\omega_T^+.$$

Проводя оценку этого представления, имеем

$$\left|\eta_1^{(1)}(x,t)\right|\le\|k\|_{\infty,Q_T}\sqrt{\frac{h}{\tau}}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right\|_{2,e^*(x,t)}+\left\|\frac{\partial k}{\partial\theta}\right\|_{\infty,Q_T}\sqrt{\frac{\tau}{h}}\left\|\frac{\partial u}{\partial\xi}\right\|_{2,e^*(x,t)},\quad (x,t)\in\omega_T^+,$$

из которого следует оценка (34), где

$$e^*(x,t)=e_1^*(x)\times e_2(t),e_1^*(x)=\{\xi:x-h\le\xi<x\},\ x\in\omega_h^+.$$

Докажем оценку (39). Используя (23), можно показать, что для функции $\eta^{(4)}(t)$, $t\in\omega_\tau$, определяемой равенством (32), справедливо представление

$$\eta^{(4)}(t)=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t}\sum_{x\in\omega_h^+}\int\limits_{x-h}^{x}H(\xi)\left[\int\limits_{x-h}^{x}\left(\int\limits_{\xi}^{\xi_1}\frac{\partial^2 u(\xi_2,\theta)}{\partial\xi_2^2}d\xi_2\right)\right]d\xi_1 d\xi d\theta,\ t\in\omega_\tau.$$

Проводя оценку полученного представления, получаем

$$\eta^{(4)}(t)\le\frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}}\sum_{x\in\omega_h^+}\max_{x-h\le\xi\le x}|H(\xi)|\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right\|_{2,e^*(x,t)},\quad t\in\omega_\tau.$$

На основе полученного неравенства установим оценку (39). Лемма 1 доказана.

Теорема 2 и лемма 1 позволяют установить справедливость следующей априорной оценки погрешности разностного метода по состоянию в сеточной норме $V_2^{1,0}(\bar{\omega}_T)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия принятые в п.1. Тогда для любых управлений $\upsilon\in V$ и $\upsilon_{h\tau}\in V_{h\tau}$ справедлива оценка погрешности разностного метода по состоянию

$$\|y(x,t;\upsilon_{h\tau}-\bar{u}(x,t;\upsilon)\|_{V_2^{1,0}(\bar{\omega}_T)}+\sqrt{\tau}\|y_{\bar{t}}(x,t;\upsilon_{h\tau}-\bar{u}_{\bar{t}}(x,t;\upsilon)\|_{L_2(\bar{\omega}_T)}\le$$
$$\le M\left[h+\frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}}+\tau^{1/2}+\left\|k_{h\tau}(x,t)-S_-^t k(x,t)\right\|_{\infty,\omega_{T^*}}+\left\|S^{tx}q-q_{h\tau}\right\|_{\infty,\bar{\omega}_T}\right]\equiv M\gamma_{h\tau}.\quad(40)$$

Следствие 1. Пусть

$$k_{h\tau}(x,t)=S_-^t k(x,t),(x,t)\in\omega_{T^*},q_{h\tau}(x,t)=S^{tx}q(x,t),\ (x,t)\in\bar{\omega}_T.$$

Тогда разностная схема (11) – (14) имеет в сеточной норме $V_2^{1,0}(\bar{\omega}_T)$ при $\tau\sim h^{3/2}$ оценки скорости сходимости $O\left(h^{3/4}\right)$, а при $\tau\sim h^2$ оценки скорости сходимости $O\left(\sqrt{h}\right)$.

4. Оценка погрешности и скорости сходимости аппроксимаций по функционалу. Регуляризация аппроксимаций и сходимость по управлению

Оценку погрешности сеточного функционала устанавливает

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых управлений $\upsilon \in V$ и $\upsilon_{h\tau} \in V_{h\tau}$ для погрешности сеточного функционала справедлива оценка

$$\left|J(\upsilon) - J_{h\tau}(\upsilon_{h\tau})\right| \le M\left(h + \sqrt{\tau} + \gamma_{h\tau}\right). \tag{41}$$

Доказательство теоремы проводится с помощью специального представления погрешности сеточного функционала, использующего некоторые кусочно-постоянные продолжения сеточных функций, и опирается на оценки (8), (20), (40). Ввиду ограниченности объема работы подробности опускаем.

Определим некоторые восполнения на Q_T сеточных управлений. Для сеточного управления $k_{h\tau}(x,t),(x,t) \in \omega_{T^*}$ построим полилинейное восполнение на Q_T. Введем расширенную область $\tilde{Q}_T = \{(\xi,\theta): -0.5h \le \xi \le \ell + 0.5h, 0 \le t \le T\}$ и сетку $\tilde{\omega}_{T^*} = \tilde{\omega}_{h*} \times \overline{\omega}_\tau$ области $\tilde{Q}_T$, где $\tilde{\omega}_{h*} = \{-0.5h\} \cup \overline{\omega}_{h*} \cup \{\ell + 0.5h\}$. Продолжим функцию $k_{h\tau}(x,t),(x,t) \in \omega_{T*}$ на $\tilde{\omega}_{T*} \backslash \omega_{T*}$, полагая

$$k_{h\tau}(-0.5,t) = k_{h\tau}(0.5h,t),\ k_{h\tau}(\ell + 0.5h,t) = k_{h\tau}(\ell - 0.5h,t),$$
$$t \in \omega_\tau,\ k_{h\tau}(x,0) = k_{h\tau}(x,\tau),\ x \in \tilde{\omega}_{h*}.$$

Пусть $P_{h\tau}^{(1)} k_{h\tau}(\xi,\theta),(\xi,\theta) \in \tilde{Q}_T$ – полилинейное восполнение сеточного управления $k_{h\tau}(x,t),(x,t),(x,t) \in \tilde{\omega}_{T*}$ на Q_T, определяемое формулой

$$P_{h\tau}^{(1)} k_{h\tau}(\xi,\theta) = k_{h\tau}(x - 0.5h, t - \tau) + k_{h\tau x}(x - 0.5h, t - \tau)(\xi - x + 0.5h) +$$
$$+ k_{h\tau t}(x - 0.5h, t - \tau)(\theta - t + \tau) + k_{h\tau xt}(x - 0.5h, t - \tau)(\xi - x + 0.5h)(\theta - t + \tau),$$
$$(\xi,\theta) \in \tilde{e}_1(x,t) = \tilde{e}_1(x) \times e_2(t),\ (x,t) \in \overline{\omega}_h \times \omega_\tau,$$

где $\tilde{e}_1(x) = \{\xi : x - 0.5h \le \xi \le x + 0.5h\},\ x \in \overline{\omega}_h.$

Сужение функции $P_{h\tau}^{(1)} k_{h\tau}(\xi,\theta),(\xi,\theta) \in \tilde{Q}_T$ на Q_T назовем полилинейным восполнением сеточного управления $k_{h\tau}(x,t),\ (x,t) \in \omega_{T*}$ на Q_T и также обозначим через $P_{h\tau}^{(1)} k_{h\tau}(\xi,\theta),(\xi,\theta) \in Q_T$.

Для сеточного управления $q_{h\tau}(x,t),\ (x,t) \in \overline{\omega}_T$ построим кусочно-постоянное восполнение на Q_T, определяемое формулой

$$P_{h\tau}^{(2)} q_{h\tau}(\xi,\theta) = q_{h\tau}(x,t),\ (\xi,\theta) \in e(x,t),\ (x,t) \in \overline{\omega}_T.$$

Кроме того, определим усреднения управлений непрерывного аргумента $k(\xi,\theta)$ и $q(\xi,\theta)$:

$$Q_{h\tau}^{(1)} k(x,t) = S_-^t k(x,\theta),\ (x,t) \in \omega_{T*},$$
$$Q_{h\tau}^{(2)} q(x,t) = S^{tx} q(\xi,\theta),\ (x,t) \in \overline{\omega}_T.$$

Для исследования связи между задачами (1) – (6) и (9) – (14) введем два отображения $P_{h\tau} : H_{h\tau} \to H$ и $Q_{h\tau} : H \to H_{h\tau}$, действующие по правилам

$$P_{h\tau}\upsilon_{h\tau}=\upsilon,\text{ где }\upsilon_{h\tau}=(k_{h\tau}(x,t),q_{h\tau}(x,t)),\ \upsilon=(P^{(1)}_{h\upsilon}k_{h\tau}(\xi,\theta),P^{(2)}_{h\tau}q_{h\tau}(\xi,\theta)),$$

$$Q_{h\tau}\upsilon=\upsilon_{h\tau},\text{ где }\upsilon=(k(\xi,\theta),q(\xi,\theta)),\ \upsilon_{h\tau}=(Q^{(1)}_{h\tau}k(x,t),Q^{(2)}_{h\tau}q(x,t)).$$

Нетрудно показать, что для любых управлений $\upsilon_{h\tau}\in V_{h\tau},\upsilon\in V$ имеют места включения $P_{h\tau}\upsilon_{h\tau}\in V,Q_{h\tau}\upsilon\in V_{h\tau}$.

Лемма 2. Для произвольных управлений $\upsilon\in V$, $\upsilon_{h\tau}\in V_{h\tau}$ справедливы оценки

$$\max\ \{|J(\upsilon)-J_{h\tau}(Q_{h\tau}\upsilon)|,|J(P_{h\tau}\upsilon_{h\tau})-J_{h\tau}(\upsilon_{h\tau})|\}\le M[h+\frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}}+\tau^{1/2}].$$

Доказательство этой леммы опирается на определения отображений $P_{h\tau},Q_{h\tau}$ и следует из оценки (41).

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для аппроксимации (9) – (14) верна оценка

$$|J_{h\tau*}-J_*|\le M\left[h+\frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}}+\tau^{1/2}\right],$$

где $J_{h*}=\inf\{J_{h\tau}(\upsilon_{h\tau}):\upsilon_{h\tau}\in V_{h\tau}\}$.

Следствие 2. Если $\tau\sim h^{3/2}$ и $\tau\sim h^2$, то сеточные задачи управления (9) – (14) аппроксимирует задачи (1) – (6) по функционалу, причем при $\tau\sim h^{3/2}$ справедлива оценка $|J_{h\tau*}-J_*|\le Mh^{3/4}$, а при $\tau\sim h^2$ – оценка $|J_{h\tau*}-J_*|\le Mh^{1/2}$. Если , кроме того, последовательность управлений $\{\upsilon_{h\tau}\}\subset V_{h\tau}$ определена из условий $J_{h\tau*}\le J_{h\tau}(\upsilon_{h\tau})\le J_{h\tau*}+\varepsilon_{h\tau}$, где $\varepsilon_{h\tau}\ge 0$, $\varepsilon_{h\tau}\to 0$ при $h,\tau\to 0$, то последовательность управлений $\{P_{h\tau}\upsilon_{h\tau}\}$ является минимизирующей для задачи (1) – (6), слабо в H сходится к V_* и справедлива оценка $|J_{h\tau*}-J_*|\le Mh^{3/4}+\varepsilon_{h\tau}$ при $\tau\sim h^{3/2}$ и $|J_{h\tau*}-J_*|\le Mh^{1/2}+\varepsilon_{h\tau}$ при $\tau\sim h^2$.

Построим теперь минимизирующую последовательность, сходящуюся по норме H . Для этого воспользуемся методом Тихонова [2] и проведем регуляризации задачи (9) – (14). Введем на V стабилизатор

$$\Omega(\upsilon)=\|\upsilon\|^2_H=\left(\|k\|^{(1)}_{2,Q_T}\right)^2+\|q\|^2_{2,Q_T}$$

и его сеточный аналог

$$\Omega_{h\tau}(\upsilon_{h\tau})=\|\upsilon_{h\tau}\|^2_{H_{h\tau}}=\left(\|k_{h\tau}\|_{W^1_2(\omega_{T*})}\right)^2+\|q_{h\tau}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_T)}.$$

При каждом (h,τ) рассмотрим сеточный функционал Тихонова задачи (9) – (14):

$$T_{h\tau\alpha_{h\tau}}(\upsilon_{h\tau})=J_{h\tau}(\upsilon_{h\tau})+\alpha_{h\tau}\Omega_{h\tau}(\upsilon_{h\tau}),\ \upsilon_{h\tau}\in V_{h\tau},$$

где $\{\alpha_{h\tau}\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $h,\tau\to 0$.

Пусть при каждом (h,τ) найдено сеточное управление $\tilde{\upsilon}_{h\tau}\in V_{h\tau}$, такое, что

$$T_{h\tau\alpha_{h\tau*}}\equiv\inf\left\{T_{h\tau\alpha_{h\tau}}(\upsilon_{h\tau}):\upsilon_{h\tau}\in V_{h\tau}\right\}\le T_{h\tau\alpha_{h\tau}}(\tilde{\upsilon}_{h\tau})\le T_{h\tau\alpha_{h\tau*}}+\xi_{h\tau}, \tag{42}$$

где $\xi_{h\tau}\ge 0$ и $\xi_{h\tau}\to 0$ при $h,\tau\to 0$.

Теорема 6. Пусть, последовательность сеточных управлений $\{\tilde{\upsilon}_{h\tau}\}$ определена из условия (42) и $(\xi_{h\tau}+\varepsilon_{h\tau})/\alpha_{h\tau}\to 0$ при $h,\tau\to 0$. Тогда последовательность управлений $\{P_{h\tau}\tilde{\upsilon}_{h\tau}\}$ является минимизирующей для задачи (1) – (4) и сильно в H сходится к множеству Ω-нормальных решений $V_{**}=\{\upsilon_{**}\in V_*:\Omega(\upsilon_{**})=\inf\{\Omega(\upsilon_*):\upsilon_*\in V_*\}\}$ задачи (1) – (4).

Доказательство теоремы 6 проводится по методике [2, с. 325] на основе полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 436с.
2. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
3. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
4. *Нахушев А.З.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
5. *Иванчов. Н.И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 4. С. 547–564.
6. *Кожанов А.Н.* О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2004. № 30. С. 63–69.
7. *Данилкина О.Ю.* Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием // Вести. Самар. гос. тех. ун-та. Сер : Физ.-мат. науки. 2007. № 1 (14). С. 5–9.
8. *Тагиев Р.К.*, *Габибов В.М.* Об одной задаче оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием // Вестн. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 1. С. 54–64. https://doi.org/10.14498/vsgtu1463.
9. *Тагиев Р.К.*, *Гашимов С.А.*, *Габибов В.М.* Об одной задаче оптимального управления для параболического уравнения с интегральным условием и с управлениями в коэффициентах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 3(41). С. 31–41. DOI 10.17223/19988621/41/3.
10. *Лубышев Ф.В.* Аппроксимации и регуляризация задач оптимального управления коэффициентами параболических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 8. С. 1166–1183.
11. *Лубышев Ф.В.* Разностные аппроксимации и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 9. С. 1313–1333.
12. *Габибов В.М.* Разностная аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием // Научные известия Ленкоранского государственного университета. Сер. Матем. и естеств. науки. 2015. С. 47–62.
13. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
14. *Самарский А.А.*, *Андреев В.Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 325 с.

Статья поступила 19.06.2017 г.

Tagiev R.K., Gabibov V.M. (2017) DIFFERENCE APPROXIMATION AND REGULARIZATION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH AN INTEGRAL CONDITION *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 50. pp. 30–44

DOI 10.17223/19988621/50/3

Let a controlled process be described in the region $Q_T = \{(x,t):\ 0 < x < \ell,\ 0 < t \le T\}$ by the following boundary-value problem for a linear parabolic equation with an integral boundary condition:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,t)u = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le \ell,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, 0 < t \le T,$$

$$k(\ell,t)\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = \int_0^\ell H(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dx + g(t),\quad 0 < t \le T,$$

where $\varphi(x) \in W_2^1(0,l), f(x,t) \in L_2(Q_T), g(t) \in W_2^1(0,T), H(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$ are given functions, $k(x,t), q(x,t) -$ are control functions, and $u = u(x,t) = u(x,t,v) -$ is solution of the boundary value problem, i.e. the process state corresponding to the control υ.

We introduce the set of admissible controls

$$V = \{\upsilon = (k(x,t), q(x,t)) \in H = W_2^1(Q_T) \times L_2(Q_T) : 0 < \nu \le k(x,t) \le \mu,$$
$$\left|\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right| \le \mu_1, \left|\frac{\partial k(x,t)}{\partial t}\right| \le \mu_2,\ |q(x,t)| \le \mu_3 \text{ a.e. on } Q_T\},$$

where $\nu, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0 -$ are given numbers.

We define the target functional

$$J(\upsilon) = \int_0^T |u(x,T;\upsilon) - u_T(x)|^2\, dx,$$

where $u_T(x) \in W_2^1(0,l) -$ the given function.

In the present work, the optimal control problem for a parabolic equation with an integral boundary condition and control coefficients is considered. Estimates of the accuracy of the difference approximations by state and function are established. The process of A.N. Tikhonov's regularization of the approximations is carried out.

Keywords: optimal control, parabolic equation, integral boundary condition, difference approximation.

TAGIYEV Rafig Kalandar oghli (D.Scs., Professor, Baku State University, Baku, Azerbaijan)
E-mail: r.tagiyev@list.ru

GABIBOV Vaxab Mexdi oghli (Senior Lecturer, Lenkaran State University, Azerbaijan)
E-mail: vahab.hebibov@mail.ru

REFERENCES

1. Egorov A.I. (1978) *Optimal'noye upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami* [Optimum control of thermal and diffusion processes]. Moscow: Nauka.
2. Vasil'ev F.P. (1981) *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extreme problems]. Moscow: Nauka.
3. Samarsky A.A. (1980) O nekotorykh problemakh teorii differentsial'nykh uravneniy [On some problems of the theory of differential equations]. *Diff. equation.* 16(11). pp. 1925–1935.
4. Nakhushev A.Z. (1995) *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow: Vysshaya shkola.

5. Ivanchev N.I. (2004) Boundary value problems for a parabolic equation with integral conditions. *Diff. equation.* 40(4). pp. 547–564.
6. Kozhanov A.N. (2004) O razreshimosti kraevoy zadachi s nelokal'nym granichnym usloviem dlya lineynykh parabolicheskikh uravneniy [On solvability of a boundary value problem with a nonlocal boundary condition for linear parabolic equations]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki – J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* (30). pp. 63–69.
7. Danilkina O.Yu. (2007) Ob odnoy nelokal'noy zadache dlya uravneniya teploprovodnosti s integral'nym usloviem [On a nonlocal problem for the heat conduction equation with an integral condition] *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki – J. Samara State Tech.Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 1 (14). pp. 5–9.
8. Tagiev R.K., Gabibov V.M. (2016) Ob odnoy zadache optimal'nogo upravleniya dlya uravneniya teploprovodnosti s integral'nym granichnym usloviem [On an optimal control problem for the heat equation with an integral boundary condition]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki – J. Samara State Tech.Univ., Ser. Phys. Math. Sci*. 20(1). pp. 54–64.
9. Tagiev R.K., Gashimov S.A., Gabibov V.M. (2016) On a problem of optimal control for a parabolic equation with an integral condition and with controls in the coefficients, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(41). pp. 31–41.
10. Lubyshev F.V. (1993) Approximation and regularization of problems of the optimal control of the coefficients of parabolic equations. *Comput. Math. Math. Phys.* 33(8). pp. 1027–1042.
11. Lubyshev F.V. (1995) Difference approximations and regularization of optimal control problems for parabolic equations with controls in the coefficients. *Comput. Math. Math. Phys.* 35(9). pp. 1053–1069.
12. Gabibov V.M. (2015) Difference approximation and regularization of the optimal control problem for the heat equation with an integral boundary condition. *Scientific news of the Lenkoran State University. Ser. Matem. and nat. sciences.* pp. 47–62.
13. Ladyzhenskaya O.A. (1973) *Krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary value problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka. pp. 408.
14. Samarsky A.A., Andreev V.B. (1976) *Raznostnyye metody dlya ellipticheskikh uravneniy* [Difference methods for elliptic equations]. Moscow: Nauka. pp. 325.