УДК 168, 165.0
DOI: 10.17223/1998863X/40/16

Л.Д. Ламберов, Т.С. Козьякова

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА Г.В. ЛЕЙБНИЦА И ПЕРСПЕКТИВНЫЕ РАЗРАБОТКИ В ОБЛАСТИ ОСНОВАНИЙ МАТЕМАТИКИ[1]

Исследуются идеи Лейбница об универсальной характеристике и отражение этих идей в современной философии математики. Рассматриваются контекст возникновения концепции универсального языка, идея универсальной характеристики и варианты её реализации у Лейбница, два принципиально различных пути развития идей Лейбница и отражение идей Лейбница в современных подходах к основаниям математики (в частности, в унивалентных основаниях математики и гомотопической теории типов).
Ключевые слова: *Лейбниц, философия математики, унивалентные основания математики, геометризм.*

Контекст возникновения идей Лейбница об универсальном языке

Идею создания универсального совершенного языка связывают в первую очередь с Г.В. Лейбницем. Тем не менее он был далеко не первым, высказавшим подобную идею: до него похожие программы предлагались Д. Уилкинсом, А. Дестют де Траси, И.Г. Ламбертом и другими. Важным отличием проекта Лейбница являлся его совершенно иной подход к построению универсального языка. В то время как прочие подобные разработки в той или иной мере отталкивались от естественных языков, Лейбниц ставил перед собой задачу построить такой язык, который мог бы быть одинаково доступен для ученых, независимо от их родного языка. Искусственный язык, призванный выполнять данную роль, должен был быть свободен от многозначности языка естественного и представлять собой особый инструмент рассуждения и получения истин.

Стоит заметить, что одним из источников вдохновения для Лейбница являлись идеи универсального языка Р. Луллия, изложенные в его *Ars Magna*. Луллий распределял все термины в шесть категорий: абсолютные начала, относительные, вопросы, объекты, добродетели и пороки, – построение же пропозиций осуществлялось путем комбинации терминов (как простых, так и сложных), принадлежащих каждой из них. Согласно Лейбницу, недостаток системы, предложенной Луллием, состоит в том, что подобное решение не позволяет осуществить анализ самой сути терминов и категорий, а только лишь вычислить количество потенциально возможных пропозиций из комбинаций простых терминов.

[1] Исследование выполнено при поддержке Совета по грантам Президента РФ, проект МК-6552.2016.6.

Цель Лейбница состояла в представлении всего человеческого знания в виде своего рода «всеобщей алгебры». Перевод на данный универсальный язык Лейбниц предполагал осуществить при помощи универсальной характеристики, к которой уже можно было бы применять особые вычислительные операции. В основе лежало разбиение сложных идей на элементарные понятия, которым, в свою очередь, ставились бы в соответствие определённые символы так, чтобы их комбинация отражала отношения, в которых данные понятия состоят в рамках рассматриваемой идеи. Универсальная характеристика выражает интуитивную форму мысли, направляет её и дополняет. Через неё осуществляется замена рассуждения на вычисление, а объекта обозначения символа – на сам символ (характер).

Задача выбора подходящей характеристики для выстраиваемой универсальной символьной системы является, по убеждению Лейбница, критически важной, поскольку символы, соответствующие базовым понятиям, должны быть максимально естественными с точки зрения восприятия и при этом максимально лаконичными и ёмкими, т.е. обладать способностью выражать идеи наиболее точным образом. Следовательно, данный выбор должен иметь под собой достаточно сильные основания.

Универсальная характеристика у Лейбница

Ряд историков логики (например, А.О. Маковельский [1. С. 380]) полагает, что «новая» логика у Лейбница начинается с работы «О комбинаторном искусстве». Дело в том, что число понимается им как простейший случай отношения (отношение величин), в связи с чем Лейбниц предполагает, что именно в математике воплощены многообразные формы дедукции. Таким образом, в качестве идеала характеристики Лейбницем рассматриваются алгебраические символы. В этом смысле аналогичные идеи можно также встретить у Р. Декарта, хотя он, в отличие от Лейбница, и не выстраивает развернутой программы.

По мнению Лейбница, в ряде математических областей уже имеются «локальные» характеры, которые позволяют выстраивать доказательства в этих конкретных дисциплинах. Примером таких характеров, например, в алгебре являются числа. Необходимо отметить, что алгебра для Лейбница представляла собой нечто вроде «общей теории величин», включающей геометрическую теорию величин[1]. Это означает, что под «характерами» Лейбницем понимаются символы, используемые для обозначения как чисел, так и геометрических величин. Что касается конкретно геометрии, то, по мнению Лейбница [3. С. 494 и далее], в ней имеется своя, более подходящая характеристика, поскольку попытка свести геометрию исключительно к числам приводит к тому, что она не может трактоваться исключительно аналитически. Это связано, прежде всего, с тем, что в геометрии важными оказываются не только величины, но и взаимное расположение геометрических фигур. Алгебра же, имеющая дело исключительно с величинами, не может использо-

[1] Например, в одном из писем Гюйгенсу Лейбниц указывает, что необходимо выработать «геометрический анализ», который бы мог использоваться для выражения положений фигур так же, как алгебра выражает количество. См.: [2. P. 43].

ваться для описания взаимного описания фигур. Подобно этим «локальным» характерам алгебры и геометрии, Лейбниц предлагает программу поиска универсальных характеров, т.е., по сути, специальной формы записи, при которой понятия предполагается сводить к «алфавиту человеческих мыслей». Последнее позволило бы свести рассуждения к некоторого рода решению алгебраических или геометрических задач посредством специального исчисления.

Поскольку логика схожа с алгеброй, постольку она, по мнению Лейбница, должна быть построена в качестве «универсальной математики». В рамках развития данной идеи он предпринял ряд попыток арифметизации и алгебраизации силлогистики. Среди прочих им были предложены следующие варианты: (1) приписывать терминам числа по определённым правилам; (2) приписывать терминам простые числа; (3) использовать для соответствующих терминов упорядоченные пары взаимно простых натуральных чисел; (4) выражать суждения через отношения точной делимости и т.д. Тем не менее ни одна из разработанных им систем не была лишена недостатков. Но несмотря на неудачи, постигшие Лейбница в данной работе, необходимо особо подчеркнуть два момента. Во-первых, логика по сути подвергалась арифметизации, т.е. логические отношения представлялись в виде арифметических или алгебраических. Во-вторых, нельзя не отметить интенсиональный характер получавшихся систем: как отношения между понятиями, так и структура предложений приобретали интенсиональную трактовку. К примеру, поскольку Лейбниц предполагал, что методом обнаружения связей между различными элементами служит комбинаторика, являющаяся своего рода методом построения «словаря» языка мыслей, то, по его мнению, предикат оказывается включённым в субъект суждения в том смысле, что термин предиката включается в значение термина субъекта.

В отношении интенсиональности и интерпретации у Лейбница следует отметить и другой интересный момент. Поскольку Лейбниц обнаружил [4] некоторого вида соответствие между утверждениями логики и геометрии в ходе своих изысканий при построении, с одной стороны, теории тождества и включения, а с другой – геометрического исчисления сходства и конгруэнтности, он часто использовал именно геометрические построения для иллюстрации предлагаемых им идей по созданию универсального языка; например, при помощи линий, включающихся друг в друга. Более того, представляется интересным, что в ряде построенных Лейбницем систем знаки (например, знак сложения в *Non Inelegans Specimen Demonstrandi in Abstractis*) получают разную трактовку в зависимости от интерпретации «складываемых» элементов: например, как конъюнкция, если речь идёт об атрибутах, или как дизъюнкция, если речь идёт о классах.

Проект Лейбница по построению универсального языка был встречен его современниками достаточно скептически. Тем не менее, несмотря на критику, он провел долгие годы в поисках подходящих на роль универсальной характеристики символов и соответствующего исчисления, постепенно приходя к осознанию невозможности воплощения проекта подобного масштаба за обозримое время. Большая часть его работ в данной области оказалась не опубликована.

Два пути реализации идей Лейбница

Дальнейшее развитие идей Лейбница осуществлялось двумя [5] в чём-то противоположными путями [6]. Первый – и весьма известный – путь состоит в построении логики как исчисления, свободного от всякого содержания, как изучения чистой логической формы. Данный путь связан в первую очередь с алгеброй логики в лице Д. Буля, У. Джевонса, Д. Маккола, Дж. Венна, А. Де Моргана и англо-саксонской традицией в логике в целом. Именно на этом пути мы встречаем проект *Principia Mathematica* и дальнейшие разработки логики в рамках аналитической философии.

Тем не менее второй путь развития идей Лейбница представляется не менее интересным, а возможно, и даже более важным. Его можно проследить через идеи неокантианства, Грассманов, Дж. Пеано и Г. Фреге, через разработку и развитие теории типов и, наконец, обнаружить его отражение в современных подходах к основаниям математики, и в первую очередь в гомотопической теории типов.

Г. Грассман был одним из первых, кто разделял два направления – проект построения символического исчисления и проект универсального языка на основе реальных символов [7]. Его интерес, прежде всего, касался построения конкретного геометрического исчисления. Результаты своей работы, изложенные в *Geometrische Analyse*, он представлял как реализацию программы Лейбница и воплощение его идей относительно геометрической характеристики. Одним из аргументов являлась широта области применения разработанной им теории: исчисление могло становиться независимым от пространственной интуиции, а следовательно, применяться в том числе и к непространственным объектам, как это и было задумано Лейбницем. Собственно, Г. Грассман ставил перед собой ту же цель [2], что и Лейбниц: его интересовала разработка удобного исчисления или *искусства оперирования символами* в соответствии с жесткими правилами, и выведения с его помощью истинных утверждений о вещах, причём утверждения эти должны были быть выражены в знаковой форме для удобства использования всей системы в качестве *обобщенной математики*. Можно сказать, что геометрические исчисления как Г. Грассмана, так и Лейбница являлись своего рода частными приложениями более общего исчисления конкретно к геометрии. Оба надеялись на применимость своих систем не только в области математики. Однако, несмотря на «универсальность» универсальной характеристики, её окончательное развитие должно, по мнению Г. Грассмана, проходить уж не в рамках философии, а в рамках математики. Последнее, правда, вовсе не означает, что применение универсальной характеристики должно быть чистой математикой или даже конкретно логикой и геометрией.

Дж. Пеано разделял многие идеи Лейбница, касающиеся универсальной характеристики и её роли в построении универсального языка, способного не только передавать знание, но и продуцировать его. Именно как реализацию проекта универсальной характеристики Пеано рассматривал свою работу *Formulaire de Mathématiques* – энциклопедию математики, главной целью создания которой было максимально точное изложение известного на тот момент математического знания, теорем и их доказательств при помощи разработанной им символьной записи. Правильная символьная репрезентация

концепций в математике, согласно Пеано, невозможна без их анализа. Каждый символ соответствовал базовому (примитивному) понятию, а сведение к символам позволяло осуществлять точный анализ сущностей в рамках конкретной математической теории. Исследования Пеано всегда были направлены именно на развитие идей *characteristica universalis*, а не *calculus ratiocinator*, он особо подчеркивал, что его символьная логика должна рассматриваться не как исчисление, а как точный и строгий язык. Тем не менее Пеано понимал, что значение символов остается в определенной мере конвенциональным, приписывается условно или посредством определения и различается в зависимости от контекста. Так, например, символ равенства в одной области может быть определен как отношение эквивалентности между объектами, а в другой – как взаимная импликация между пропозициями.

Стоит более подробно остановиться на идеях Г. Фреге, который зачастую считается одним из основателей современной логики. Необходимо сказать в первую очередь, что сам Фреге отрицательно относился к алгебре логики [8. С. 21]. Он выстраивает свою концепцию математики в соответствии с программой Лейбница, где математические предложения понимаются как аналитические. Подобно Лейбницу, Фреге полагал, что знаки в арифметике, геометрии и химии (во времена Лейбница химия, конечно, ещё не была в такой степени развита) являются «локальными» осуществлениями идеи универсальной характеристики. По его мнению, сами по себе логические формы как отвлечённые от своего содержания крайне нежелательны, поскольку не позволяют создать правильное исчисление [9. С. 156]. Свою задачу Фреге видел не в построении ограниченного чистой логикой исчисления, а в создании языка для выражения некоторого математического содержания, что позволило бы построить основания математики, а разработки в духе Буля, по его мнению, для этой задачи совершенно не подходят, поскольку обладают крайне бедной выразительностью [10. С. 158–193]. Согласно Фреге, логика Буля является исключительно логикой, в то время как, например, понятийная запись Пеано уже идёт дальше, предполагая анализ содержания, к чему стремился и сам Фреге. Он полагал, что логика Буля представляет собой *calculus ratiocinator*, а математическая логика Пеано – *lingua characteristica*, но также и *calculus ratiocinator*, у Фреге же эти две альтернативы уравнены [11. С. 207].

Разработка первого пути развития идей Лейбница привела в том числе к формулировке гильбертовской концепции формализации и аксиоматического метода. Особенностью данной концепции стал сам принцип построения оснований математики. К примеру, начиная с конца XIX в. подавляющее большинство работающих математиков (в особенности тех, кто не интересуется собственно основаниями математики) в качестве оснований принимали теорию множеств, аксиоматический вариант которой, предложенный Цермело и развитый Френкелем, идеально воплощает гильбертовскую концепцию. При построении аксиоматической теории множеств в качестве единственного нелогического выбирается символ, интерпретируемый как отношение принадлежности элемента множеству, а сама она выстраивается как набор содержательных аксиом (определяющих базовые понятия), сформулированных на некотором формальном языке (например, языке логики предикатов первого порядка) с «внешней» (в определённом смысле) логической системой,

обеспечивающей возможность построения выводов из предложенных аксиом. Таким образом, получается, что логика первична в эпистемологическом плане, а работа ведётся с чистой формой, которая образуется благодаря её интерпретации в определённое содержание. Подобная программа построения оснований математики идёт вразрез с общим пафосом универсального языка Лейбница и попытками таких исследователей, как Фреге и Пеано, построить основания математики.

Идеи Лейбница в современных подходах к основаниям математики

Как уже было указано, представляется, что первый путь развития идей Лейбница является скорее маргинальным по отношению к его (Лейбница) общей программе. Во-первых, Лейбниц осуществлял арифметизацию и алгебраизацию логики, что совершенно противоположно идее гильбертовской концепции формализации, предполагающей эпистемологическую первичность логики. Во-вторых, традиционный подход к построению аксиоматической теории множеств состоит в формулировке экстенсиональной формальной системы, а системы Лейбница (по меньшей мере, его поздние попытки воплощения своего же замысла) имели интенсиональный характер [4. P. 336–345]. Следует дополнительно прояснить интенсиональную характеристику систем Лейбница. Дело в том, что согласно Лейбницу, предикат включён в субъект в том смысле, что понятие предиката во всяком истинном утверждении должно включается в понятие субъекта (к примеру, понятие «животности» включается в понятие «человечности», где включение, очевидно, не является отношениями между объёмами указанных понятий). В-третьих, следует ещё раз отметить приведённый выше интересный момент, связанный с интерпретацией в том числе и того, что можно было бы назвать «логическими» символами. Здесь прежде всего имеется в виду, что логические знаки получают *различную* трактовку в зависимости от интерпретации связываемых с их помощью элементов. Последнее никак не похоже на гильбертовскую концепцию формализации, в которой интерпретация избранного набора логических символов фиксируется для конкретной системы *единоразово*. Более того, если ещё раз вернуться к интенсиональному характеру системы Лейбница, то следует отметить стремление последнего к построению максимально абстрактной системы, которая могла бы получать различную интерпретацию. К примеру, если в первую очередь имеется в виду та или иная комбинация атрибутов, то тот же самый результат у Лейбница зачастую может быть получен и «геометрическим» способом – с помощью геометрических построений, сводимых к отношению между соответствующими классами (к примеру, вписывание одних линий в другие). Таким образом, в более поздних работах Лейбница его формальная система может получать как интенсиональную интерпретацию (в терминах атрибутов), так и экстенсиональную (в терминах классов), что предполагает также и различную интерпретацию логических символов и метазнаков (например, знака выводимости)[1].

[1] Нечто подобное можно найти и у Г. Грассмана. К примеру, у последнего «равенство предполагает два отношения – тождественность положения и равенство интенсивности. Таким образом, проек-

В современных вариациях теории типов (прежде всего, в гомотопической и кубической) различие между логической формой и внелогическим содержанием перестаёт быть чётким. В чрезвычайно грубо обобщённом виде можно сказать, что гомотопическая теория типов (ГТТ) представляет собой интерпретацию интуиционистской теории типов П. Мартина-Лёфа при помощи алгебраической топологии (теории гомотопий) с добавлением ряда новых теоретических и выразительных средств, таких как аксиома универлентности и высшие индуктивные типы. Это означает, что в ГТТ логическая форма обладает геометрической природой [12] [13]. К примеру, типы в данной теории представляются как пространства, объекты определённого типа являются точками в этом пространстве, а равенство понимается как существование пути из одной точки в другую. По сути, ГТТ придаёт понятию доказательств «геометрическую трактовку» на основе современной топологии (скажем, доказательство равенства *a* и *b* в рамках ГТТ представляет собой предъявление пути из *a* в *b*, поскольку тип равенств *a=b* является типом всех путей из *a* в *b*). Более того, ГТТ оказывается в определённом смысле более естественной и близкой мышлению математиков, чем классические основания математики, выстраиваемые на базе теории множеств.

В связи с программой Лейбница необходимо отметить, что именно ГТТ обладает искомыми характеристиками: она интенсиональна по своему характеру (однако благодаря аксиоме универлентности имеет экстенсиональность для функций), она имеет вычислительную интерпретацию[1] и непосредственно описывает вычисления, она, как и вообще развитая теория типов, не требует использования внешней дедуктивной системы, её «логическая» и «геометрическая» интерпретации равнозначны, она не предполагает редукции всего многообразия математических сущностей к сущностям какого-то исключительного вида, она имеет структуралистский характер (то есть благодаря той же аксиоме универлентности поддерживает идею равенства изоморфных объектов [15]). Кроме того, необходимо учесть, что поскольку в отличие от метрической геометрии Декарта именно геометрические работы Лейбница заложили начала топологии, то непосредственное использование (даже части) топологии в основаниях математики становится весьма интересным. Безусловно, остаётся открытым вопрос о том, насколько геометризм (или, если хотите, топологизм) Лейбница связан с его проектом по созданию универсального языка. По меньшей мере, используемые в работах Лейбница примеры носят именно геометрический характер.

Литература

1. *Маковельский А.О.* История логики. Жуковский; М.: Кучково поле, 2004.

2. *Heath A.E.* The Geometrical Analysis of Grassmann and its Connection With Leibniz's Characteristic // The Monist. 1917. Vol. 27, No. 1. P. 36–56.

тивные и метрические отношения могут быть выражены в одной форме и рассматриваться как отдельно, так и вместе» [2. P. 51].

[1] Исключение составляет аксиома универлентности, которая в ГТТ не имеет вычислительной интерпретации. Тем не менее последнее обстоятельство «сглаживается» в рамках кубической теории типов, в которой аксиома универлентности выводится в качестве аксиомы чисто конструктивным путём [14].

3. *Лейбниц Г.В.* Об универсальной науке, или философском исчислении // Соч. в четырёх томах. М.: Мысль, 1984. Т. 3. С. 494–500.

4. *Kneale W., Kneal M.* The Development of Logic. Oxford: Clarendon Press, 1962.

5. *Hintikka J.* Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator: An Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

6. *Родин А.* Логический и геометрический атомизм от Лейбница до Воеводского // Вопросы философии. 2016. № 6. С. 135–142.

7. *Cantù P.* The Right Order of Concepts: Graßmann, Peano, Gödel and the Inheritance of Leibniz's Universal Characteristic // Philosophia Scientiæ. 2014. Vol. 18, No. 1. P. 157–182.

8. *Бирюков В.В.* Введение. Готлоб Фреге: современный взгляд // *Фреге Г.* Логика и логическая семантика: Сборник трудов. М.: Аспект Пресс, 2000. С. 8–62.

9. *Фреге Г.* О научной правомерности исчисления понятий // *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. М.: Аспект Пресс, 2000. С. 153–157.

10. *Фреге Г.* Булева вычислительная логика и моё исчисление понятий // *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. М.: Аспект Пресс, 2000. С. 158–193.

11. *Фреге Г.* Об исчислении понятий господина Пеано и о моём собственном исчислении // *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. М.: Аспект Пресс, 2000. С. 201–212.

12. *Monroe D.* A New Type of Mathematics? // Communications of the ACM. 2014. Vol. 57, No. 2. P. 13–15.

13. *Ламберов Л.Д.* Основания математики: теория множества vs. теория типов // Философия науки. 2017. №1 (72). С. 41–60.

14. *Cohen C., Coquand T., Huber S., Mörtberg A.* Cubical Type Theory: A Constructive Interpretation of the Univalence Axiom // ArXiv e-prints, URL: https://arxiv.org/abs/1611.02108.

15. *Awodey S.* Structuralism, Invariance, and Univalence. Philosophia Mathematica. 22. 2014. P. 1–11.

Lev D. Lamberov. Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yelstin (Ekaterinburg, Russian Federation)

E-mail: lev.lamberov@urfu.ru

DOI: 10.17223/1998863X/40/16

Tatiana S. Kozyakova. Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yelstin (Ekaterinburg, Russian Federation)

E-mail: t.kozyakova@yandex.ru

DOI: 10.17223/1998863X/40/16

THE UNIVERSAL CHARACTERISTIC OF G. W. LEIBNIZ AND THE PROSPECTIVE DEVELOPMENTS IN THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

Key words: Leibniz, philosophy of mathematics, univalent foundations of mathematics, geometrism

G. W. Leibniz was not the first who expressed the idea of creating a universal perfect language, but he proposed a very different approach in his project. The purpose of Leibniz's project was to represent all human knowledge in the form of a kind of "universal algebra." Leibniz intended to implement the translation into this universal language with the help of a universal characteristic, to which some special computing operations could be applied. By "characters" Leibniz meant symbols used to denote both numbers and geometric quantities. Since logic is similar to algebra, according to Leibniz, it must be built as a "universal mathematics." As part of the development of this idea, he undertook a number of attempts to arithmeticize and algebraize syllogistics. Despite the setbacks that befell Leibniz in this work, two points must be specially emphasized. First, logic was subjected to arithmetization (logical relations were represented in the form of arithmetic or algebraic ones). Secondly, it should be noted that the resulting systems were intensional (the relationship between concepts, as well as the structure of propositions acquired an intensional interpretation). Leibniz discovered some kind of correspondence between the statements of logic and the statements of geometry in the course of his research. Further development of the ideas of Leibniz was carried out by two somewhat opposite ways. The first way is to build up logic as a calculus free of all content, as a study of a pure logical form. This path is associated primarily with the algebra of logic. The second way can be traced through the ideas of Neo-Kantianism, Grassmann, J. Peano and G. Frege, through the emergence and development of type theory and, finally, in modern approaches to the foundations of mathematics, and primarily in the homotopy type theory. In modern variations of the type theory, the distinction between logical form and non-logical content ceases to be clear. In the homotopy type theory, the logical form has a geometric

nature. In connection with the Leibniz's program, it should be noted that indeed the homotopy type theory has the required characteristics: it is intensional, it has a computational interpretation and directly describes calculations, it does not require the use of an external deductive system, its "logical" and "geometric" interpretations are equivalent, it does not assumes the reduction of the whole variety of mathematical entities to the entities of some special kind, and it is structuralist in its nature.

References

1. Makovelskiy, A.O. (2004) *Istoriya logiki* [History of Logic]. Zhukovskiy; Moscow: Kuchkovo pole.

2. Heath, A.E. (1917) The Geometrical Analysis of Grassmann and its Connection With Leibniz's Characteristic. *The Monist*. 27(1). pp. 36–56. DOI: 10.5840/monist19172716

3. Leibniz, G.V. (1984) *Sochineniya v chetyrekh tomakh* [Works in 4 vols]. Vol. 3. Moscow: Mysl'. pp. 494–500.

4. Kneale, W. & Kneal, M. (1962) *The Development of Logic*. Oxford: Clarendon Press.

5. Hintikka, J. (1997) *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator: An Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

6. Rodin, A. (2016) Logicheskiy i geometricheskiy atomizm ot Leybnitsa do Voevodskogo [Logical and geometric atomism from Leibniz to Voevodsky]. *Voprosy filosofii*. 6. pp. 135–142.

7. Cantù, P. (2014) The Right Order of Concepts: Graßmann, Peano, Gödel and the Inheritance of Leibniz's Universal Characteristic. *Philosophia Scientiæ*. 18(1). pp. 157–182. DOI: 10.4000/philosophiascientiae.921

8. Biryukov, V.V. (2000) Vvedenie. Gottlob Frege: sovremennyy vzglyad [Introduction. Gottlob Frege: a modern view]. In: Frege, G. *Logika i logicheskaya semantika* [Logic and Logical Semantics]. Translated from German by B.V. Biryukov. Moscow: Aspekt Press. pp. 8–62.

9. Frege, G. (2000a) *Logika i logicheskaya semantika* [Logic and Logical Semantics]. Moscow: Aspekt Press. pp. 153–157.

10. Frege, G. (2000b) *Logika i logicheskaya semantika* [Logic and Logical Semantics]. Moscow: Aspekt Press. pp. 158–193.

11. Frege, G. (2000c) *Logika i logicheskaya semantika* [Logic and Logical Semantics]. Moscow: Aspekt Press. pp. 201–212.

12. Monroe, D. (2014) A New Type of Mathematics? *Communications of the ACM*. 57(2). pp. 13–15.

13. Lamberov, L.D. (2017) Osnovaniya matematiki: teoriya mnozhestva vs. teoriya tipov [Foundations of mathematics: Theory of the set of vs. type theory]. *Filosofiya nauki*. 1(72). pp. 41–60. DOI: 10.15372/PS20170104

14. Cohen, S., Coquand, T., Huber, S. & Mörtberg, A. (2016) *Cubical Type Theory: A Constructive Interpretation of the Univalence Axiom*. [Online] Available from: https://arxiv.org/abs/1611.02108.

15. Awodey, S. (2014) Structuralism, Invariance, and Univalence. *Philosophia Mathematica*. 22. pp. 1–11. DOI: 10.1093/philmat/nkt030