

# ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

---

---

*Научный журнал*

---

---

2018

№ 42

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере  
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия  
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,  
Высшей аттестационной комиссии

## Founder – Tomsk State University

### EDITORIAL BOARD

**Alexander Gortsev** – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Operation Research Department, Tomsk State University. Tel: +72822529599  
**Valery Smagin** – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Operation Research Department Tomsk State University. Tel: +72822529599  
**Lyudmila Nezhelskaya** – Executive Editor, Doctor. of Sc., Docent of the Operation Research Department.  
E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

**Sergey Vorobeychikov** – Doctor of Sc., Prof. of the Higher Mathematics and Mathematical Modeling Department Tomsk State University  
**Vladimir Vishnevsky** – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).  
**Gennady Koshkin** – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Cybernetics Department Tomsk State University  
**Yury Kostyuk** – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University  
**Anjela Matrosova** – Doctor of Sc., Prof., Head of the Programming Department Tomsk State University  
**Anatoly Nazarov** – Doctor of Sc., Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University  
**Konstantin Samouylov** – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)  
**Eugene Semenkina** – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State Aerospace University (Krasnoyarsk, Russia)  
**Sergey Sushchenko** – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department, Director of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science Tomsk State University  
**Mais Farkhadov** – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).  
**Gurami Tsitsiasvili** – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)  
**Editorial address:**  
Faculty of applied mathematics and cybernetics  
National Research Tomsk State University  
36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050  
Telephone / fax: +72822529599  
E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

### EDITORIAL COUNCIL

|                                                                                                             |                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Ana Rosa Cavalli</b><br>PhD, Prof.<br>University VII<br>Paris, France                                    | <b>Gilbert Saporta</b><br>PhD, Prof.<br>Pierre and Marie Curie<br>University, Paris, France             |
| <b>Vladimir Dombrovskii</b><br>Doctor of Sc., Prof.<br>Tomsk State University<br>Russia                     | <b>Raimund Ubar</b><br>Doctor of Sc., Prof.<br>University of Technology<br>Tallinn, Estonia             |
| <b>Alexander Dudin</b><br>Doctor of Sc., Prof.<br>Belarusian State University<br>Minsk, Republic Belorussia | <b>Reindert Nobel</b><br>Doctor of Sc., Associate Prof.<br>Vrije University of Amsterdam<br>Netherlands |
| <b>Enco Orsingher</b><br>PhD, Prof.<br>University of Rome<br>Italy                                          | <b>Nina Yevtushenko</b><br>Doctor of Sc., Prof.<br>Tomsk State University<br>Russia                     |
| <b>Paolo Prinetto</b><br>Prof.<br>Politechnic Institute<br>Torino, Italy                                    | <b>Yervant Zorian</b><br>PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA                |

### JORNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world. Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031). The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English. The topics of the journal are the following:

- control of dynamical systems,
- mathematical modeling,
- data processing,
- informatics and programming,
- discrete function and automation,
- designing and diagnostics of computer systems.

Rules of registration articles are given in a site:  
<http://journals.tsu.ru/informatics/>  
ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

## Учредитель – Томский государственный университет

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Горцев Александр Михайлович** – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой исследования операций ТГУ. Тел. +72822529599  
**Смагин Валерий Иванович** – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры исследования операций ТГУ. Тел. +72822529599  
**Нежельская Людмила Алексеевна** – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, доц. кафедры исследования операций ТГУ  
E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

**Воробейчиков Сергей Эрикович** – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики и математического моделирования ТГУ  
**Вишневский Владимир Миронович** – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)  
**Коскин Геннадий Михайлович** – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры теоретической кибернетики ТГУ  
**Костюк Юрий Леонидович** – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ  
**Матросова Анжела Юрьевна** – проф., д-р техн. наук, зав. кафедры программирования ТГУ  
**Назаров Анатолий Андреевич** – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ  
**Самуйлов Константин Евгеньевич** – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)  
**Семенкин Евгений Станиславович** – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СГАУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)  
**Сущенко Сергей Петрович** – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики, директор института прикладной математики и компьютерных наук ТГУ  
**Фархадов Маис Паша Оглы** – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)  
**Цицашвили Гурами Шалвович** – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

**Адрес редакции и издателя:** 634050, Томск, пр. Ленина, 36  
Национальный исследовательский Томский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики  
Телефон / факс: +72822529599  
E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

|                                                                                           |                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Ана Роза Кавалли</b><br>д-р философии, проф.<br>Университет VII,<br>Париж, Франция     | <b>Жильберт Сапорта</b><br>д-р философии, проф.<br>Университет им. Пьера и Марии,<br>Кюри, Париж, Франция |
| <b>Владимир Домбровский</b><br>д-р техн. наук, проф.<br>ТГУ, Томск, Россия                | <b>Раймонд Убар</b><br>д-р, проф.<br>Технологический университет,<br>Таллинн, Эстония                     |
| <b>Александр Дудин</b><br>д-р физ.-мат. наук, проф.<br>БГУ, Минск,<br>Республика Беларусь | <b>Рейндерт Нобель</b><br>д-р, доцент<br>Свободный университет,<br>Амстердам, Нидерланды                  |
| <b>Енцо Орзингер</b><br>д-р философии, проф.<br>Римский университет,<br>Италия            | <b>Нина Евтушенко</b><br>д-р техн. наук, проф.<br>ТГУ, Томск, Россия                                      |
| <b>Паоло Принетто</b><br>проф.<br>Политехнический институт,<br>Турин, Италия              | <b>Ервант Зориан</b><br>д-р философии, гл. науч. сотр.<br>фирмы «Синописис», США                          |

### О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке. Статьи публикуются на русском и английском языках. Тематика публикаций журнала:

- управление динамическими системами,
- математическое моделирование,
- обработка информации,
- информатика и программирование,
- дискретные функции и автоматы,
- проектирование и диагностика вычислительных систем.

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ). Правила оформления статей приведены на сайте:  
<http://journals.tsu.ru/informatics/>  
ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ  
ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

|                                                                                                                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Домбровский В.В., Пашинская Т.Ю.</b><br>Прогнозирующее управление стохастическими<br>нелинейными системами с сериально коррели-<br>рованными параметрами при ограничениях..... | 4  |
| <b>Мамедова Т.Ф., Мансимов К.Б.</b><br>Об оптимальности особых управлений в задаче<br>управления ступенчатыми дискретными<br>двухпараметрическими системами.....                  | 12 |
| <b>Параев Ю.И., Грекова Т.И., Полуэктова К.О.</b><br>Оптимальное управление односекторной<br>экономикой при случайном изменении<br>фондовооруженности труда.....                  | 23 |

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

|                                                                                                                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Гуменюк А.С.</b> Сериальное и комплексное<br>описание строя компонентов в массивах данных.....                                                                                               | 30 |
| <b>Игнатьев Н.А.</b> Обобщающая способность<br>алгоритмов по мере компактности.....                                                                                                             | 37 |
| <b>Медведев Г.А.</b> Об одном семействе<br>неаффиных моделей временной<br>структуры доходности.....                                                                                             | 48 |
| <b>Матальцкий М.А., Копать Д.Я.</b> Анализ<br>в переходном режиме сети с нетерпеливыми<br>положительными и отрицательными заявками<br>различных типов.....                                      | 60 |
| <b>Назаров А.А., Измайлова Я.Е.</b> Исследование<br>RQ-системы M E2 1 с вытеснением заявок и<br>сохранением фазовой реализации обслуживания.....                                                | 72 |
| <b>Уваров В.Е.</b> Распознавание неполных<br>последовательностей, описываемых<br>скрытыми марковскими моделями,<br>в пространстве первых производных<br>от логарифма функции правдоподобия..... | 79 |

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

|                                                                                                                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Matrosova A.Yu., Mitrofanov E.V., Ostanin S.A.,<br/>Butorina N.B., Pakhomova E.G., Shulga S.A.</b><br>Detection and masking of trojan circuits<br>in sequential logic..... | 89  |
| <b>Сведения об авторах .....</b>                                                                                                                                              | 100 |

CONTENTS

CONTROL  
OF DYNAMICAL SYSTEMS

|                                                                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Dombrovskii V.V., Pashinskaya T.Y.</b><br>Model predictive control for nonlinear<br>stochastic systems with serially correlated<br>parameters under constraints..... | 4  |
| <b>Mammadova T.F., Mansimov K.B.</b><br>On optimality of singular controls<br>in control problem of the step discrete<br>two-parametric systems.....                    | 12 |
| <b>Paraev Yu. I., Grekova T. I., Poluektova K.O.</b><br>Optimal control of one-sector economy<br>under random variation<br>labor funds.....                             | 23 |

DATA PROCESSING

|                                                                                                                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Gumenyuk A.S.</b> Serial and complex description<br>of the order of components in data sets.....                                                                  | 30 |
| <b>Ignatiev N.A.</b> The generalizing ability<br>of algorithms by the measure of compactness.....                                                                    | 37 |
| <b>Medvedev G.A.</b> On a family<br>of non-affine models of the term<br>structure of yield.....                                                                      | 48 |
| <b>Matalytski M.A., Kopat D.Ya.</b> Analysis<br>in the transient regime of the network<br>with impatient positive and negative<br>customers of multiple classes..... | 60 |
| <b>Nazarov A.A., Izmailova Ya.E.</b> Research<br>of RQ-system M E2 1 with request displacement<br>and conserving phase realization of servicing.....                 | 72 |
| <b>Uvarov V.E.</b> Recognition of incomplete<br>sequences described by hidden<br>Markov models using<br>first derivatives of likelihood<br>function logarithm.....   | 79 |

DESIGNING AND DIAGNOSTICS  
OF COMPUTER SYSTEMS

|                                                                                                                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Matrosova A.Yu., Mitrofanov E.V., Ostanin S.A.,<br/>Butorina N.B., Pakhomova E.G., Shulga S.A.</b><br>Detection and masking of trojan circuits<br>in sequential logic..... | 89  |
| <b>Brief information about the authors .....</b>                                                                                                                              | 100 |

## УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.865.5

DOI: 10.17223/19988605/42/1

**В.В. Домбровский, Т.Ю. Пашинская**

### **ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С СЕРИАЛЬНО КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ**

Рассматривается задача управления с прогнозированием по квадратичному критерию для нелинейных дискретных систем с сериально коррелированными параметрами. Синтезированы стратегии управления при наличии явных ограничений на управляющие воздействия. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии сводится к решению последовательности задач квадратичного программирования.

**Ключевые слова:** нелинейные стохастические системы; прогнозирующее управление; сериально коррелированные параметры; ограничения.

Системам со случайными параметрами уделяется значительное внимание в современной научной литературе. Это связано с тем, что такие системы нашли широкое практическое применение при управлении сложными реальными объектами.

Эффективным методом решения задач управления такими системами при наличии ограничений является метод управления с прогнозирующей моделью (управление со скользящим горизонтом, model predictive control, receding horizon control) [1–3]. В работах [4–8] синтезированы алгоритмы прогнозирующего управления линейными стохастическими системами со случайными параметрами при ограничениях на управления. При этом в [4] рассматриваются системы с мультипликативными шумами, в [5] предполагается, что динамика вектора параметров описывается разностным стохастическим уравнением авторегрессии, в работе [6] предполагается, что известны только первые и вторые моменты распределения сериально коррелированных параметров, в [7, 8] рассматривается задача управления системами со скачкообразными параметрами, меняющимися в соответствии с эволюцией дискретной марковской цепи. В работе [9] исследованы алгоритмы синтеза прогнозирующего управления для систем с запаздываниями.

Обзор литературы показывает, что большинство работ посвящено управлению линейными системами, в то время как многие реальные процессы описываются уравнениями, содержащими нелинейные компоненты [10]. Метод прогнозирующего управления с генерацией сценариев для стохастических нелинейных систем с независимыми параметрами рассматривается в [11]. В работе [12] синтезированы стратегии управления со скользящим горизонтом для класса стохастических систем с аддитивной нелинейностью без учета ограничений. При этом предполагается, что нелинейная составляющая системы зависит от состояний, управлений и вектора шумов [13]. В [14] рассматривается задача прогнозирующего управления для этого класса нелинейных систем при ограничениях на управляющие переменные. В работе [15] предложен метод синтеза стратегий прогнозирующего управления по квадратичному критерию при ограничениях для дискретных стохастических систем с марковскими переключениями, состоящих из конечного множества нелинейных подсистем с аддитивной нелинейностью.

В данной работе рассматривается задача синтеза стратегий управления с прогнозирующей моделью для дискретных нелинейных систем со случайными коррелированными параметрами. Относительно параметров предполагаются известными только первые и вторые условные моменты распределений. Синтезированы стратегии управления с прогнозированием по квадратичному критерию при наличии явных ограничений на управляющие переменные.

## 1. Постановка задачи

Пусть объект управления описывается уравнением

$$x(k+1) = Ax(k) + B[\eta(k+1), k+1]u(k) + f(x(k), u(k), w(k+1)), \quad (1)$$

где  $x(k)$  –  $n_x$ -мерный вектор состояния,  $u(k)$  –  $n_u$ -мерный вектор управления,  $w(k)$  – вектор белых шумов размерности  $n_w$  с нулевым средним и единичной матрицей ковариации,  $\eta(k)$  – последовательность  $q$ -мерных случайных векторов; последовательности  $w(k)$  и  $\eta(k)$  независимы;  $A$ ,  $B[\eta(k), k]$  – матрицы соответствующих размерностей, причем элементы матрицы  $B[\eta(k), k]$  зависят от  $\eta(k)$  линейно.

Характер нелинейной зависимости в функции  $f$  таков [13], что для любых  $x(k)$

$$E\{f(x(k), u(k), w(k+1))/x(k)\} = 0, \quad (2)$$

$$E\{f(x(k), u(k), w(k+1))f^T(x(k), u(k), w(k+1))/x(k)\} = T^0 + \sum_{i=1}^r T^i (x^T(k)W^i x(k) + u^T(k)M^i u(k)), \quad (3)$$

где  $E\{\dots/\dots\}$  – оператор условного математического ожидания;  $r = n(n+1)/2$ ,  $T^i$  ( $i = \overline{0, r}$ ),  $W^i$  и  $M^i$  ( $i = \overline{1, r}$ ) – неотрицательно определенные симметричные матрицы.

Пусть  $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_k)_{k \geq 1}$  – поток  $\sigma$ -алгебр, где каждая из  $\sigma$ -алгебр  $\mathfrak{F}_k$  порождается последовательностью  $\{\eta(s): s = 0, 1, 2, \dots, k\}$  и интерпретируется как доступная информация до момента времени  $k$  включительно.

Для процесса  $\eta(k)$  предполагаются известными условные моменты распределений

$$E\{\eta(k+i)/\mathfrak{F}_k\} = \bar{\eta}(k+i),$$

$$E\{\eta(k+i)\eta^T(k+j)/\mathfrak{F}_k\} = \Theta_{ij}(k), (k = 0, 1, 2, \dots), (i, j = 0, 1, 2, \dots, d).$$

В дальнейшем будем использовать обозначения: для любой матрицы  $\psi[\eta(k), k]$ , зависящей от  $\eta(k)$ ,  $\bar{\psi}(k) = E\{\psi[\eta(k), k]/\mathfrak{F}_k\}$ , не указывая зависимость матриц от  $\eta(k)$ .

На управляющие воздействия наложены ограничения вида:

$$u_{\min}(k) \leq S(k)u(k) \leq u_{\max}(k), \quad (4)$$

где  $S(k)$  – матрица соответствующей размерности.

Необходимо определить закон управления системой (1) при ограничениях (4) из условия минимума критерия со скользящим горизонтом управления

$$J(k+m/k) = E\left\{\sum_{i=1}^m x^T(k+i)R_1(k+i)x(k+i) - R_2(k+i)x(k+i) + u^T(k+i-1/k)R(k+i-1)u(k+i-1/k)/x(k), \mathfrak{F}_k\right\}, \quad (5)$$

где  $m$  – горизонт прогноза;  $k$  – текущий момент времени;  $R_1(k+i) \geq 0$ ,  $R(k+i) > 0$  – весовые матрицы соответствующих размерностей;  $R_2(k+i)$  – весовой вектор соответствующей размерности.

## 2. Синтез стратегий прогнозирующего управления

Для решения сформулированной задачи используем методологию управления с прогнозирующей моделью. Данный подход позволяет получить стратегии управления с обратной связью с учетом явных ограничений на управляющие воздействия.

Стратегии управления с прогнозированием определяются по следующему правилу. На каждом шаге  $k$  минимизируем функционал (5) по последовательности прогнозирующих управлений  $u(k/k), \dots, u(k+m-1/k)$ , зависящих от состояния системы в момент времени  $k$ . В качестве управления в момент времени  $k$  берем  $u(k) = u(k/k)$ . Тем самым получаем управление  $u(k)$  как функцию состояний  $x(k)$ , т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление  $u(k+1)$  на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента  $k+1$  и т.д.

**Теорема.** Вектор прогнозирующих управлений  $U(k)=[u^T(k/k), \dots, u^T(k+m-1/k)]^T$ , минимизирующий критерий (5) при ограничениях вида (4), на каждом шаге  $k$  определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида

$$Y(k+m/k) = [2x^T(k)G(k) - F(k)]U(k) + U^T(k)H(k)U(k)$$

при ограничениях

$$U_{\min}(k) \leq \bar{S}(k)U(k) \leq U_{\max}(k), \quad (6)$$

где

$$\bar{S}(k) = \text{diag}(S(k), \dots, S(k+m-1)),$$

$$U_{\min}(k) = [u_{\min}^T(k), \dots, u_{\min}^T(k+m-1)]^T, U_{\max}(k) = [u_{\max}^T(k), \dots, u_{\max}^T(k+m-1)]^T,$$

$H(k), G(k), F(k)$  – блочные матрицы вида

$$H(k) = \begin{bmatrix} H_{11}(k) & H_{12}(k) & \dots & H_{1m}(k) \\ H_{21}(k) & H_{22}(k) & \dots & H_{2m}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{m1}(k) & H_{m2}(k) & \dots & H_{mm}(k) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$G(k) = [G_1(k) \ G_2(k) \ \dots \ G_m(k)], \quad (8)$$

$$F(k) = [F_1(k) \ F_2(k) \ \dots \ F_m(k)], \quad (9)$$

блоки которых равны:

$$H_{t,t}(k) = R(k+t-1) + E\{B^T[\eta(k+t), k+t]Q(m-t)B[\eta(k+t), k+t] / \mathfrak{F}_k\} + \sum_{j=1}^r \text{tr}\{Q(m-t)T^j\}M^j, \quad (10)$$

$$H_{t,f}(k) = E\{B^T[\eta(k+t), k+t](A^{f-t})^T Q(m-f)B[\eta(k+f), k+f] / \mathfrak{F}_k\}, t < f, \quad (11)$$

$$H_{t,f}(k) = H_{f,t}^T(k), t > f, \quad (12)$$

$$G_t(k) = (A^t)^T Q(m-t)\bar{B}(k+t), \quad (13)$$

$$F_t(k) = Q_2(m-t)\bar{B}(k+t), t, f = \overline{1, m}, \quad (14)$$

где

$$Q(i) = A^T Q(i-1)A + \sum_{j=1}^r \text{tr}\{Q(i-1)T^j\}W^j + R_1(k+m-i), Q(0) = R_1(k+m), \quad (15)$$

$$Q_2(i) = Q_2(i-1)A + R_2(k+m-i), Q_2(0) = R_2(k+m). \quad (16)$$

Закон управления с прогнозированием в каждый момент времени  $k$  определяется соотношением

$$u(k) = [I_{n_u} \ 0_{n_u} \ \dots \ 0_{n_u}]U(k), \quad (17)$$

где  $I_{n_u}$  – единичная матрица размерности  $n_u$ ,  $0_{n_u}$  – квадратная матрица с элементами, равными нулю, размерности  $n_u$ .

Оптимальная стратегия прогнозирующего управления системой (1) без учета ограничений определяется уравнением (17), где

$$U(k) = -\frac{1}{2}H^{-1}(k)[2G^T(k)x(k) - F^T(k)]. \quad (18)$$

При этом оптимальное значение критерия (5) определяется выражением

$$J^{opt}(k+m/k) = -\frac{1}{4}[2x^T(k)G(k) - F(k)]H^{-1}(k)[2G^T(k)x(k) - F^T(k)] + \\ + x^T(k)[Q(m) - R_1(k)]x(k) + Q_2(m-1)Ax(k) + \sum_{i=1}^m \text{tr}\{Q(i-1)T^0\}. \quad (19)$$

**Замечание.** В силу линейной зависимости матриц от случайных параметров, условные математические ожидания в выражениях (10)–(14) можно вычислить без затруднений.

**Доказательство.** Критерий (5) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} J(k+m/k) = & E \left\{ x^T(k+1)R_1(k+1)x(k+1) - R_2(k+1)x(k+1) + u^T(k/k)R(k)u(k/k) + \right. \\ & + E \left\{ x^T(k+2)R_1(k+2)x(k+2) - R_2(k+2)x(k+2) + u^T(k+1/k)R(k+1)u(k+1/k) + \right. \\ & \quad \dots + E \left\{ x^T(k+m)R_1(k+m)x(k+m) - R_2(k+m)x(k+m) + \right. \\ & \quad \left. + u^T(k+m-1/k)R(k+m-1)u(k+m-1/k) / x(k+m-1), \mathfrak{F}_{k+m-1} \right\} / \dots / x(k+1), \mathfrak{F}_{k+1} \right\} / x(k), \mathfrak{F}_k \}. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} J_{k+s} = & E \left\{ x^T(k+s+1)R_1(k+s+1)x(k+s+1) - R_2(k+s+1)x(k+s+1) + u^T(k+s/k)R(k+s)u(k+s/k) + \right. \\ & + E \left\{ x^T(k+s+2)R_1(k+s+2)x(k+s+2) - R_2(k+s+2)x(k+s+2) + u^T(k+s+1/k)R(k+s+1)u(k+s+1/k) + \dots \right. \\ & \quad \left. + E \left\{ x^T(k+m)R_1(k+m)x(k+m) - R_2(k+m)x(k+m) + u^T(k+m-1/k)R(k+m-1)u(k+m-1/k) / \right. \right. \\ & \quad \left. \left. / x(k+m-1), \mathfrak{F}_{k+m-1} \right\} / \dots / x(k+s+1), \mathfrak{F}_{k+s+1} \right\} / x(k+s), \mathfrak{F}_{k+s} \}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} J_{k+s} = & E \left\{ x^T(k+s+1)R_1(k+s+1)x(k+s+1) - R_2(k+s+1)x(k+s+1) + \right. \\ & \left. + u^T(k+s/k)R(k+s)u(k+s/k) + J_{k+s+1} / x(k+s), \mathfrak{F}_{k+s} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

и

$$J(k+m/k) = J_k. \quad (21)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} J_{k+m-1} = & E \left\{ x^T(k+m)R_1(k+m)x(k+m) - R_2(k+m)x(k+m) + \right. \\ & \left. + u^T(k+m-1/k)R(k+m-1)u(k+m-1/k) / x(k+m-1), \mathfrak{F}_{k+m-1} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Выражая  $x(k+m)$  через  $x(k+m-1)$  из (1), будем иметь

$$x(k+m) = Ax(k+m-1) + B[\eta(k+m), k+m]u(k+m-1) + f(x(k+m-1), u(k+m-1), w(k+m)). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) и взяв условное математическое ожидание с учетом (2) и (3), получим

$$\begin{aligned} J_{k+m-1} = & x^T(k+m-1) \left[ A^T Q(0)A + \sum_{j=1}^r \text{tr}(Q(0)T^j)W^j \right] x(k+m-1) + \\ & + 2x^T(k+m-1)A^T Q(0)E \{ B[\eta(k+m), k+m] / \mathfrak{F}_{k+m-1} \} u(k+m-1/k) + \\ & + u^T(k+m-1/k) [ E \{ B^T(k+m)Q(0)B(k+m) / \mathfrak{F}_{k+m-1} \} + \sum_{j=1}^r \text{tr} \{ Q(0)T^j \} M^j + R(k+m-1) ] u(k+m-1/k) - \\ & - Q_2(0)Ax(k+m-1) - Q_2(0)E \{ B[\eta(k+m), k+m] / \mathfrak{F}_{k+m-1} \} u(k+m-1/k) + \text{tr} \{ Q(0)T^0 \}, \end{aligned}$$

где  $Q(0) = R_1(k+m)$ ,  $Q_2(0) = R_2(k+m)$ .

Предположим далее, что для некоторого  $q$  верно:

$$\begin{aligned} J_{k+m-q} = & x^T(k+m-q) \left[ A^T Q(q-1)A + \sum_{j=1}^r \text{tr} \{ Q(q-1)T^j \} W^j \right] x(k+m-q) + \\ & + 2x^T(k+m-q)A^T \sum_{i=1}^q (A^T)^{q-i} Q(i-1)E \{ B[\eta(k+m-i+1), k+m-i+1] / \mathfrak{F}_{k+m-q} \} u(k+m-i/k) + \\ & + \sum_{i=1}^q u^T(k+m-i/k) [ E \{ B^T[\eta(k+m-i+1), k+m-i+1]Q(i-1)B[\eta(k+m-i+1), k+m-i+1] / \mathfrak{F}_{k+m-q} \} + \\ & \quad + \sum_{j=1}^r \text{tr} \{ Q(i-1)T^j \} M^j + R(k+m-i) ] u(k+m-i/k) + \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{l=i+1}^q u^T(k+m-i/k) E\{B^T[\eta(k+m-i+1), k+m-i+1] Q(i-1) \times \\
& \times A^{l-i} B[\eta(k+m-l+1), k+m-l+1] / \mathfrak{F}_{k+m-q}\} u(k+m-l/k) + \sum_{i=1}^q \text{tr}\{Q(i-1)T^0\} - \\
& - Q_2(q-1)Ax(k+m-q) - \sum_{i=1}^q Q_2(i-1)E\{B[\eta(k+m-i+1), k+m-i+1] / \mathfrak{F}_{k+m-q}\} u(k+m-i/k),
\end{aligned}$$

где  $Q(i)$ ,  $Q_2(i)$  определяются выражениями (15)–(16).

Покажем, что данная формула верна и для  $q+1$ . Действительно, из (20) следует, что

$$\begin{aligned}
J_{k+m-(q+1)} = & E\left\{x^T(k+m-q)R_1(k+m-q)x(k+m-q) - R_2(k+m-q)x(k+m-q) + \right. \\
& \left. + u^T(k+m-(q+1)/k)R(k+m-(q+1))u(k+m-(q+1)/k) + J_{k+m-q} / x(k+m-(q+1)), \mathfrak{F}_{k+m-(q+1)}\right\}. \quad (25)
\end{aligned}$$

Подставим в (25) вместо  $J_{k+m-q}$  его выражение из (24), вместо  $x(k+m-q)$  его выражение через  $x(k+m-(q+1))$ , используя (23); возьмем условное математическое ожидание и, преобразовав выражение, получим, что

$$\begin{aligned}
J_{k+m-(q+1)} = & x^T(k+m-(q+1)) \left[ A^T Q(q) A + \sum_{j=1}^r \text{tr}\{Q(q)T^j\} W^j \right] x(k+m-(q+1)) + \quad (26) \\
& + 2x^T(k+m-(q+1))A^T \sum_{i=1}^{q+1} (A^T)^{(q+1)-i} Q(i-1)E\{B[\eta(k+m-i+1), k+m-i+1] / \mathfrak{F}_{k+m-(q+1)}\} u(k+m-i/k) + \\
& + \sum_{i=1}^{q+1} u^T(k+m-i/k) [E\{B^T[\eta(k+m-i+1), k+m-i+1] Q(i-1) B[\eta(k+m-i+1), k+m-i+1] / \mathfrak{F}_{k+m-(q+1)}\} + \\
& + \sum_{j=1}^r \text{tr}\{Q(i-1)T^j\} M^j + R(k+m-i)] u(k+m-i/k) + \\
& + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{l=i+1}^{q+1} u^T(k+m-i/k) E\{B^T[\eta(k+m-i+1), k+m-i+1] Q(i-1) \times \\
& \times A^{l-i} B[\eta(k+m-l+1), k+m-l+1] / \mathfrak{F}_{k+m-(q+1)}\} u(k+m-l/k) + \sum_{i=1}^{q+1} \text{tr}\{Q(i-1)T^0\} - \\
& - Q_2(q)Ax(k+m-(q+1)) - \sum_{i=1}^{q+1} Q_2(i-1)E\{B[\eta(k+m-i+1), k+m-i+1] / \mathfrak{F}_{k+m-(q+1)}\} u(k+m-i/k).
\end{aligned}$$

Формула (26) совпадает с (24), если в (24)  $q$  заменить на  $q+1$ , а значит, согласно принципу математической индукции формула (24) верна для всех  $q = \overline{1, m}$ .

Из (24) и (21) следует, что

$$\begin{aligned}
J(k+m/k) = & x^T(k) \left[ A^T Q(m-1) A + \sum_{j=1}^r \text{tr}\{Q(m-1)T^j\} W^j \right] x(k) + \quad (27) \\
& + 2x^T(k)A^T \sum_{i=1}^m (A^T)^{m-i} Q(i-1)\bar{B}(k+m-i+1)u(k+m-i/k) + \\
& + \sum_{i=1}^m u^T(k+m-i/k) [E\{B^T[\eta(k+m-i+1), k+m-i+1] Q(i-1) B[\eta(k+m-i+1), k+m-i+1] / \mathfrak{F}_k\} + \\
& + \sum_{j=1}^r \text{tr}\{Q(i-1)T^j\} M^j + R(k+m-i)] u(k+m-i/k) + \\
& + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{l=i+1}^m u^T(k+m-i/k) E\{B^T[\eta(k+m-i+1), k+m-i+1] Q(i-1) \times \\
& \times A^{l-i} B[\eta(k+m-l+1), k+m-l+1] / \mathfrak{F}_k\} u(k+m-l/k) + \sum_{i=1}^m \text{tr}\{Q(i-1)T^0\} - \\
& - Q_2(m-1)Ax(k) - \sum_{i=1}^m Q_2(i-1)\bar{B}(k+m-i+1)u(k+m-i/k).
\end{aligned}$$

Выражение (27) можно записать в матричном виде:

$$J(k+m/k) = x^T(k)A^T[Q(m) - R_1(k)]Ax(k) - Q_2(m-1)Ax(k) + \\ + [2x^T(k)G(k) - F(k)]U(k) + U^T(k)H(k)U(k) + \sum_{i=1}^m tr\{Q(i-1)T^0\}, \quad (28)$$

где матрицы  $H(k)$ ,  $G(k)$ ,  $F(k)$  имеют вид (7)–(14).

Таким образом, имеем задачу минимизации критерия (28) при ограничениях (6), которая эквивалентна задаче квадратичного программирования с критерием (5) при ограничениях (4).

Очевидно, что если ограничения на управляющие воздействия отсутствуют, то оптимальный вектор прогнозирующих управлений  $U(k)$ , минимизирующий критерий (28) на траекториях системы (1), определяется уравнением (18). Нетрудно показать, что при этом оптимальное значение критерия (28) имеет вид (19).

### Заключение

В данной работе предложен метод синтеза стратегий прогнозирующего управления по квадратичному критерию для нелинейных дискретных систем с сериально коррелированными параметрами. Для синтеза стратегий управления достаточно знать только условные первые и вторые моменты распределений вектора случайных параметров. Данный подход позволяет в явном виде учесть ограничения на управления. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии включает решение последовательности задач квадратичного программирования. Синтезированы стратегии управления с учетом явных ограничений на управляющие воздействия.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Mayne D.Q. Model predictive control: Recent developments and future promise // *Automatica*. 2014. V. 50 (12). P. 2967–2986.
2. Goodwin G.S., Carrasco D.C., Seron M.M. Predictive control: a historical perspective // *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*. 2012. V. 22. P. 1296–1313.
3. Farina M., Giulioni L., Scattolini R. Stochastic linear model predictive control with chance constraints : a review // *J. of Process Control*. 2016. V. 44. P. 53–67.
4. Primbs J.A., Sung C.H. Stochastic receding horizon control of constrained linear systems with state and control multiplicative noise // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2009. V. AC-54, No. 2. P. 221–230.
5. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // *Автоматика и телемеханика*. 2006. № 12. С. 71–85.
6. Dombrovskii V., Obyedko T. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization // *Automatica*. 2015. V. 54 (4). P. 325–331.
7. Смагин В.И., Поползухина Е.В. Синтез следящих систем управления для объектов со случайными скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями // *Вестник Томского государственного университета*. 2000. № 271. С. 171–174.
8. Домбровский В.В., Обыедко Т.Ю. Управление с прогнозированием системами с марковскими скачками при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // *Автоматика и телемеханика*. 2011. № 5. С. 96–112.
9. Kiseleva M.Y., Smagin V.I. Model Predictive Control of Discrete Systems with State and Input Delays // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2011. № 1 (14). С. 5–12.
10. Mhaskar P., El-Farra N.H., Christofides P.D. Robust hybrid predictive control of nonlinear systems // *Automatica*. 2005. V. 41. P. 209–217.
11. Kantas N., Maciejowski J.M., Lecchini-Visintini A. Sequential monte Carlo for model predictive control // *Nonlinear Model Predictive Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences* / L. Magni, D.M. Raimondo, F. Allgöwer (eds). Berlin, Heidelberg : Springer, 2009. V. 384. P. 263–273.
12. Yaz E. A control scheme for a class of discrete nonlinear stochastic systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1987. V. AC-32, No. 1. P. 77–80.
13. Jacobson D.H. A general result in stochastic optimal control of nonlinear discrete-time systems with quadratic performance criteria // *J. of Mathematical Analysis and Applications*. 1974. V. 47 (1). P. 153–161.
14. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием нелинейными стохастическими системами при ограничениях // *Вестник Томского государственного университета*. 2006. № 18. С. 320–323.
15. Dombrovskii V., Obyedko T., Samorodova M. Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions // *Automatica*. 2018. V. 87 (1). P. 61–68. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.09.018>.

Домбровский Владимир Валентинович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

Томский государственный университет

Пашинская Татьяна Юрьевна, канд. физ.-мат. наук. E-mail: tatyana.obedko@mail.ru

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 5 сентября 2017 г.

Dombrovskii Vladimir V., Pashinskaya Tatiana Y. (National Research Tomsk State University, Russian Federation).

**Model predictive control for nonlinear stochastic systems with serially correlated parameters under constraints.**

**Keywords:** stochastic nonlinear systems; model predictive control; serially correlated parameters; constrains.

DOI: 10.17223/19988605/42/1

Let the control object is described by the equation:

$$x(k+1) = Ax(k) + B[\eta(k+1), k+1]u(k) + f(x(k), u(k), w(k+1)), \quad (1)$$

where  $x(k)$  is the  $n_x$ -dimensional vector of state;  $u(k)$  is the  $n_u$ -dimensional vector of control;  $w(k)$  is the  $n_w$ -dimensional vector of white noises with zero-mean and identity covariance matrix;  $\eta(k)$  is the  $q$ -dimensional stochastic vector;  $w(k)$  is independent of  $\eta(k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ );  $A$ ,  $B[\eta(k), k]$  are the matrices of corresponding dimensions. All of the elements of  $B[\eta(k), k]$  are assumed to be linear functions of  $\eta(k)$ .

The function  $f$  is defined by its statistical properties as follows:

$$E\{f(x(k), u(k), w(k+1))/x(k)\} = 0,$$

$$E\{f(x(k), u(k), w(k+1))f^T(x(k), u(k), w(k+1))/x(k)\} = T^0 + \sum_{i=1}^r T^i (x^T(k)W^i x(k) + u^T(k)M^i u(k)),$$

for all  $x(k)$ , where  $r = n(n+1)/2$ ,  $T^i$  ( $i = \overline{0, r}$ ),  $W^i$  and  $M^i$  ( $i = \overline{1, r}$ ) are positive semidefinite and symmetric matrices.

Let  $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_k)_{k \geq 1}$  be the complete filtration with  $\sigma$ -field  $\mathfrak{F}_k$  generated by the  $\{\eta(s): s = 0, 1, 2, \dots, k\}$  that models the flow of information to the moment  $k$ .

We allow the parameters  $\eta(k)$  to be serially correlated. Let us assume that we know the first- and second-order conditional moments for the stochastic vector  $\eta(k)$  about  $\mathfrak{F}_k$ :

$$E\{\eta(k+i)/\mathfrak{F}_k\} = \bar{\eta}(k+i),$$

$$E\{\eta(k+i)\eta^T(k+j)/\mathfrak{F}_k\} = \Theta_{ij}(k), (k = 0, 1, 2, \dots), (i, j = 0, 1, 2, \dots, d).$$

We impose the following inequality constraints on the control inputs (element-wise inequality):

$$u_{\min}(k) \leq S(k)u(k) \leq u_{\max}(k), \quad (2)$$

where  $S(k)$  is the matrix of corresponding dimension.

For control of system (1) we synthesize the strategies with a predictive control model. At each step  $k$  we minimize the quadratic criterion with a receding horizon

$$J(k+m/k) = E\left\{\sum_{i=1}^m x^T(k+i)R_1(k+i)x(k+i) - R_2(k+i)x(k+i) + u^T(k+i-1/k)R(k+i-1)u(k+i-1/k)/x(k), \mathfrak{F}_k\right\},$$

on trajectories of system (1) over the sequence of predictive controls  $u(k/k), \dots, u(k+m-1/k)$  dependent on information up to moment  $k$ , under constraints (2), where  $R_1(k+i) \geq 0$ ,  $R(k+i) > 0$  are given symmetric weight matrices of corresponding dimensions,  $R_2(k+i)$  is a given vector of corresponding dimension,  $m$  is the prediction horizon,  $k$  is the current moment. The synthesis of predictive control strategies is reduced to the sequence of quadratic programming tasks.

## REFERENCES

1. Mayne, D.Q. (2014) Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*. 50. pp. 2967–2986. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.10.128
2. Goodwin, G.S., Carrasco, D.C. & Seron, M.M. (2012) Predictive control: a historical perspective. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 22. pp. 1296–1313. DOI: 10.1002/rnc.2824
3. Farina, M., Giullioni, L. & Scattolini, R. (2016) Stochastic linear model predictive control with chance constraints – A review. *Journal of Process Control*. 44. pp. 53–67. DOI: 10.1016/j.jprocont.2016.03.005
4. Primbs, J.A. & Sung, C.H. (2009) Stochastic receding horizon control of constrained linear systems with state and control multiplicative noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*. AC-54(2). pp. 221–230. DOI: 10.1109/TAC.2008.2010886
5. Dombrovskii, V.V., Dombrovskii, D.V. & Lyashenko, E.A. (2006) Model predictive control of systems with random dependent parameters under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 67(12). pp. 1927–1939. DOI: 10.1134/S000511790612006X
6. Dombrovskii, V. & Obedko, T. (2015) Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization. *Automatica*. 54. pp. 325–331. DOI: 10.1016/j.automatica.2015.02.021

7. Smagin, V.I. & Popolzukhina, E.V. (2000) Synthesis tracking control systems for objects with random jump parameters and multiplicative disturbances. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 271. pp. 171–174. (In Russian).
8. Dombrovskii, V.V. & Obedko, T.Yu. (2011) Predictive control of systems with Markovian jumps under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 72(5). pp. 989–1003. DOI: 10.1134/S0005117911050079
9. Kiseleva, M.Y. & Smagin, V.I. (2011) Model Predictive Control of Discrete Systems with State and Input Delays. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 5–12.
10. Mhaskar, P., El-Farra, N.H. & Panagiotis, D.C. (2005) Robust hybrid predictive control of nonlinear systems. *Automatica*. 41. pp. 209–217. DOI: 10.1016/j.automatica.2004.08.020
11. Kantas, N., Maciejowski, J.M. & Lecchini-Visintini, A. (2009) Sequential monte Carlo for model predictive control. In: Magni, L., Raimondo, D.M. & Allgöwer, F. (eds) *Nonlinear Model Predictive Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences*. 384. Berlin, Heidelberg: Springer. pp. 263–273. DOI: 10.1007/978-3-642-01094-1\_21
12. Yaz, E.A (1987) Control scheme for a class of discrete nonlinear stochastic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. AC-3 (1). pp. 77–80. DOI: 10.1109/TAC.1987.1104428
13. Jacobson, D.H. (1974) A general result in stochastic optimal control of nonlinear discrete-time systems with quadratic performance criteria. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 47(1). pp. 153–161. DOI: 10.1016/0022-247X(74)90043-2
14. Dombrovskii, V.V., Dombrovskii, D.V. & Lyashenko, E.A. (2006) Model predictive control for nonlinear stochastic systems under constraints. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 18. pp. 320–323. (In Russian).
15. Dombrovskii, V., Obyedko, T. & Samorodova, M. (2018) Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions. *Automatica*. 87(1). pp. 61–68. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.09.018

Т.Ф. Мамедова, К.Б. Мансимов

# ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СТУПЕНЧАТЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Рассматривается ступенчатая задача оптимального управления, описываемая дискретными двухпараметрическими системами типа Форназини–Маркезини. Установлено необходимое условие оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина и исследован особый случай.

**Ключевые слова:** ступенчатая система; дискретная двухпараметрическая система типа Форназини–Маркезини; необходимое условие оптимальности; особые управления.

В работах [1–8 и др.] изучаются различные аспекты задач оптимального управления системами, описываемых дискретными двухпараметрическими системами типа Форназини–Маркезини.

В предлагаемой работе исследуется одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая системой Форназини–Маркезини. Получен аналог дискретного принципа максимума. Исследован случай его вырождения (особый случай). Частный случай рассматриваемой задачи изучен в [9, 10 и др.].

## 1. Постановка задачи

Пусть требуется минимизировать функционал

$$S(u, v) = \varphi_1(z(t_1, X)) + \varphi_2(y(t_2, X)) \quad (1)$$

при ограничениях:

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D_1 = \{(t, x): t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1; x = x_0, x_0 + 1, \dots, X - 1\},$$

$$v(t, x) \in V \subset R^q, \quad (t, x) \in D_2 = \{(t, x): t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2 - 1; x = x_0, x_0 + 1, \dots, X - 1\}, \quad (2)$$

$$z(t + 1, x + 1) = f(t, x, z(t, x), u(t, x)), \quad (t, x) \in D_1, \quad (3)$$

$$z(t_0, x) = \alpha(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X,$$

$$z(t, x_0) = \beta_1(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \quad (4)$$

$$\alpha(x_0) = \beta_1(t_0),$$

$$y(t + 1, x + 1) = g(t, x, y(t, x), v(t, x)), \quad (t, x) \in D_2, \quad (5)$$

$$y(t_1, x) = G(x, z(t_1, x)), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X,$$

$$y(t, x_0) = \beta_2(t), \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2, \quad (6)$$

$$G(x_0, z(t_1, x_0)) = \beta_2(t_1).$$

Здесь  $f(t, x, z, u)$ ,  $(g(t, x, y, v))$  – заданная  $n$  ( $m$ )-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $z$  ( $y$ ) до второго порядка включительно;  $\varphi_1(z)$ ,  $\varphi_2(y)$  – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции;  $\alpha(x)$ ,  $\beta_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  – заданные дискретные вектор-функции соответствующих размерностей;  $u(t, x)$  ( $v(t, x)$ ) –  $r$  ( $q$ )-мерный вектор управляющих воздействий;  $U$ ,  $V$  – заданные, непустые и ограниченные множества;  $G(x, z)$  – заданная  $m$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $z$  до второго порядка включительно;  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $x_0$ ,  $X$  – заданные числа, причем разности  $t_2 - t_1$  и  $X - x_0$  есть натуральные числа.

Отметим, что ступенчатый характер модели заключается в скачкообразном изменении модели при переходе точки  $(t, x)$  из области  $D_1$  в  $D_2$ .

Пару  $(u(t, x), v(t, x))$  с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Допустимое управление  $(u(t, x), v(t, x))$ , доставляющее минимум функционалу (1) при ограничениях (2)–(6), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс  $(u(t, x), v(t, x), z(t, x), y(t, x))$  – оптимальным процессом.

## 2. Формула для приращения критерия качества.

### Дискретный принцип максимума

Считая  $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x), z^\circ(t, x), y^\circ(t, x))$  фиксированным допустимым процессом, введем обозначения:

$$H(t, x, z, u, \psi_1^\circ) = \psi_1^{\circ'} f(t, x, z, u),$$

$$M(t, x, y, v, \psi_2^\circ) = \psi_2^{\circ'} g(t, x, y, v).$$

Здесь  $\psi_i^\circ$ ,  $i = 1, 2$  – пока неизвестные  $n$ - и  $m$ -мерные вектор-функции соответственно.

Через  $(\bar{u}(t, x) = u^\circ(t, x) + \Delta u(t, x), \bar{v}(t, x) = v^\circ(t, x) + \Delta v(t, x), \bar{z}(t, x) = z^\circ(t, x) + \Delta z(t, x), \bar{y}(t, x) = y^\circ(t, x) + \Delta y(t, x))$ , обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение функционала качества (1):

$$\Delta S(u^\circ, v^\circ) = S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^\circ, v^\circ) = [\varphi_1(\bar{z}(t_1, X)) - \varphi_1(z^\circ(t_1, X))] + [\varphi_2(\bar{y}(t_2, X)) - \varphi_2(y^\circ(t_2, X))]. \quad (7)$$

Ясно, что приращение  $(\Delta z(t, x), \Delta y(t, x))$  состояния  $(z^\circ(t, x), y^\circ(t, x))$  является решением краевой задачи

$$\Delta z(t+1, x+1) = f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x)) - f(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x)), \quad (8)$$

$$\Delta z(t_0, x) = 0, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \quad (9)$$

$$\Delta z(t, x_0) = 0, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1,$$

$$\Delta y(t+1, x+1) = g(t, x, \bar{y}(t, x), \bar{v}(t, x)) - g(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x)), \quad (10)$$

$$\Delta y(t_1, x) = G(x, \bar{z}(t_1, x)) - G(x, z^\circ(t_1, x)), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \quad (11)$$

$$\Delta y(t, x_0) = 0, \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2.$$

С учетом (8) и (10) будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_1^{\circ'}(t, x) \Delta z(t+1, x+1) = \\ & = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) - H(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x))], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_2^{\circ'}(t, x) \Delta y(t+1, x+1) = \\ & = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} [M(t, x, \bar{y}(t, x), \bar{v}(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) - M(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x))]. \end{aligned} \quad (13)$$

Выполнив замену переменных  $t+1 = \tau$ ,  $x+1 = s$  получим

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_1^{\circ'}(t, x) \Delta z(t+1, x+1) &= \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \sum_{x=x_0+1}^X \psi_1^{\circ'}(t-1, x-1) \Delta z(t, x) = \sum_{x=x_0+1}^X \psi_1^{\circ'}(t_1-1, x-1) \Delta z(t_1, x) - \\ &- \sum_{x=x_0+1}^X \psi_1^{\circ'}(t_0-1, x-1) \Delta z(t_0, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0+1}^X \psi_1^{\circ'}(t-1, x-1) \Delta z(t, x) = \psi_1^{\circ'}(t_1-1, X-1) \Delta z(t_1, X) - \\ &- \psi_1^{\circ'}(t_1-1, x_0-1) \Delta z(t_1, x_0) + \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_1^{\circ'}(t_1-1, x-1) \Delta z(t_1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1^{\circ'}(t-1, X-1) \Delta z(t, X) - \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1^{\circ'}(t-1, x_0-1) \Delta z(t, x_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_1^{\circ'}(t-1, x-1) \Delta z(t, x), \\
& \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_2^{\circ'}(t, x) \Delta y(t+1, x+1) = \sum_{t=t_1+1}^{t_2} \sum_{x=x_0+1}^X \psi_2^{\circ'}(t-1, x-1) \Delta y(t, x) = \sum_{x=x_0+1}^X \psi_2^{\circ'}(t_2-1, x-1) \Delta y(t_2, x) - \\
& - \sum_{x=x_0+1}^X \psi_2^{\circ'}(t_1-1, x-1) \Delta y(t_1, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0+1}^X \psi_2^{\circ'}(t-1, x-1) \Delta y(t, x) = \psi_2^{\circ'}(t_2-1, X-1) \Delta y(t_2, X) - \\
& - \psi_2^{\circ'}(t_2-1, x_0-1) \Delta y(t_2, x_0) + \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_2^{\circ'}(t_2-1, x-1) \Delta y(t_2, x) - \psi_2^{\circ'}(t_1-1, X-1) \Delta y(t_1, X) + \\
& + \psi_2^{\circ'}(t_1-1, x_0-1) \Delta y(t_1, x_0) - \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_2^{\circ'}(t_1-1, x-1) \Delta y(t_1, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \psi_2^{\circ'}(t-1, X-1) \Delta y(t, X) - \\
& - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \psi_2^{\circ'}(t-1, x_0-1) \Delta y(t, x_0) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_2^{\circ'}(t-1, x-1) \Delta y(t, x).
\end{aligned} \tag{15}$$

Полагая

$$N(\psi_2^{\circ}, z, x) = \psi_2^{\circ'}(t_1-1, x-1) y(t_1, x) \equiv \psi_2^{\circ'}(t_1-1, x-1) G(x, z(t_1, x))$$

и учитывая тождества (14), (15), в (7) имеем

$$\begin{aligned}
& \Delta S(u^{\circ}, v^{\circ}) = \frac{\partial \phi_1(z^{\circ}(t_1, X))}{\partial z} \Delta z(t_1, X) + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 \phi_1(z^{\circ}(t_1, X))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, X) + \\
& + \frac{\partial \phi_2(y^{\circ}(t_2, X))}{\partial y} \Delta y(t_2, X) + \frac{1}{2} \Delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \phi_2(y^{\circ}(t_2, X))}{\partial y^2} \Delta y(t_2, X) + \psi_1^{\circ'}(t_1-1, X-1) \Delta z(t_1, X) + \\
& + \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_1^{\circ'}(t_1-1, x-1) \Delta z(t_1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1^{\circ'}(t-1, X-1) \Delta z(t, X) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_1^{\circ'}(t-1, x-1) \Delta z(t, x) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ H(t, x, z^{\circ}(t, x), \bar{u}(t, x), \psi^{\circ}(t, x)) - H(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi^{\circ}(t, x)) \right] - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H_z'(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ H_z(t, x, z^{\circ}(t, x), \bar{u}(t, x), \psi^{\circ}(t, x)) - H_z(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi^{\circ}(t, x)) \right]' \Delta z(t, x) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta z'(t, x) \left[ H_{zz}(t, x, z^{\circ}(t, x), \bar{u}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x)) - H_{zz}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x)) \right] \Delta z(t, x) + \\
& + o_1(\|\Delta z(t_1, X)\|^2) + o_2(\|\Delta y(t_2, X)\|^2) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} o_3(\|\Delta z(t, x)\|^2) + \\
& + \psi_2^{\circ'}(t_2-1, X-1) \Delta y(t_2, X) - \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_2^{\circ'}(t_2-1, x-1) \Delta y(t_2, x) - N_z'(\psi_2^{\circ}, z^{\circ}, X) \Delta z(t_1, X) + \\
& + \Delta z'(t_1, X) N_{zz}(\psi_2^{\circ}, z^{\circ}(t_1, X)) \Delta z(t_1, X) - \sum_{x=x_0}^{X-1} N_z'(\psi_2^{\circ}, z^{\circ}(t_1, x), x) \Delta z(t_1, x) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta z'(t_1, x) N_{zz}(\psi_2^{\circ}, z^{\circ}(t_1, x), x) \Delta z(t_1, x) - \sum_{x=x_0}^{X-1} o_4(\|\Delta z(t_1, x)\|^2) + \\
& + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \psi_2^{\circ'}(t-1, X-1) \Delta y(t, X) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_2^{\circ'}(t-1, x-1) \Delta y(t, x) -
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ M(t, x, y^\circ(t, x), \bar{v}(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) - M(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \right] - \\
& -\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ M_y(t, x, y^\circ(t, x), \bar{v}(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) - M_y(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \right]' \Delta y(t, x) - \\
& -\frac{1}{2} \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta z'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \Delta y(t, x) - \\
& -\frac{1}{2} \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta z'(t, x) \left[ M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), \bar{v}(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) - M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \right] \Delta y(t, x) - \\
& -\sum_{t=t_0}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} o_5(\|\Delta y(t, x)\|^2) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_y(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \Delta y(t, x).
\end{aligned}$$

Если предполагать, что  $(\psi_1^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x))$  является решением системы разностных уравнений

$$\psi_1^\circ(t-1, x-1) = H_z(t, x), \quad (17)$$

$$\psi_1^\circ(t_1-1, x-1) = G'_z(x, z^\circ(t_1, x)) \psi_1^\circ(t_1-1, x),$$

$$\psi_1^\circ(t-1, X-1) = 0,$$

$$\psi_1^\circ(t_1-1, X-1) = -\frac{\partial \varphi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z} + G'_z(X, z^\circ(t_1, X)) \psi_2^\circ(t_1-1, X-1),$$

$$\psi_2^\circ(t-1, x-1) = M_y(t, x), \quad (18)$$

$$\psi_2^\circ(t-1, X-1) = 0,$$

$$\psi_2^\circ(t_2-1, x-1) = 0,$$

$$\psi_2^\circ(t_2-1, X-1) = -\frac{\partial \varphi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y},$$

то формула приращения (16) примет вид

$$\begin{aligned}
\Delta S(u^\circ, v^\circ) &= -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ H(t, x, z^\circ(t, x), \bar{u}(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) - H(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 \varphi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, X) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ H_z(t, x, z^\circ(t, x), \bar{u}(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) - H_z(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \right]' \Delta z(t, x) + \\
& + \frac{1}{2} \Delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \Delta y(t_2, X) - \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, X) N_{zz}(\psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X), X) \Delta z(t_1, X) - \\
& - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ M(t, x, y^\circ(t, x), \bar{v}(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) - M(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \right] - \\
& - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ M_y(t, x, y^\circ(t, x), \bar{v}(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) - M_y(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \right]' \Delta y(t, x) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \Delta y(t, x) + o(\|\Delta z(t_1, X)\|^2) + \\
& + o(\|\Delta y(t_2, X)\|^2) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} o(\|\Delta z(t, x)\|^2) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} o(\|\Delta y(t, x)\|^2) - o(\|\Delta y(t, x)\|^2).
\end{aligned} \quad (19)$$

Предположим, что множества

$$\begin{aligned} f(t, x, z^\circ(t, x), U) &= \{\gamma_1 : \gamma_1 = f(t, x, z^\circ(t, x), u(t, x)), u(t, x) \in U, (t, x) \in D_1\}, \\ g(t, x, y^\circ(t, x), V) &= \{\gamma_2 : \gamma_2 = g(t, x, y^\circ(t, x), v(t, x)), v(t, x) \in V, (t, x) \in D_2\} \end{aligned} \quad (20)$$

выпуклы.

Пусть  $\varepsilon \in [0, 1]$  – произвольное число, а  $u(t, x) \in U$ ,  $(t, x) \in D_1$ ,  $v(t, x) \in V$ ,  $(t, x) \in D_2$  – произвольные допустимые управляющие функции. Используя произвольность допустимых управляющих функций  $\bar{u}(t, x)$ ,  $\bar{v}(t, x)$ , вместо них возьмем допустимые управляющие функции  $\bar{u}(t, x; \varepsilon)$ ,  $\bar{v}(t, x; \varepsilon)$  таким образом, чтобы выполнялись соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{z}(t+1, x+1; \varepsilon) &= \varepsilon f(t, x, \bar{z}(t, x; \varepsilon), u(t, x)) + (1-\varepsilon) f(t, x, \bar{z}(t, x; \varepsilon), u^\circ(t, x)) = \\ &= f(t, x, \bar{z}(t, x; \varepsilon), \bar{u}(t, x; \varepsilon)), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}(t_0, x; \varepsilon) &= \alpha(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\ \bar{z}(t, x_0; \varepsilon) &= \beta_1(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}(t+1, x+1; \varepsilon) &= g(t, x, \bar{y}(t, x; \varepsilon), \bar{v}(t, x; \varepsilon)) \equiv \\ &\equiv \varepsilon g(t, x, \bar{y}(t, x; \varepsilon), v(t, x)) + (1-\varepsilon) g(t, x, \bar{y}(t, x; \varepsilon), v^\circ(t, x)), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}(t_1, x; \varepsilon) &= G(x, \bar{y}(t_1, x; \varepsilon)), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\ \bar{y}(t, x_0; \varepsilon) &= \beta_2(t), \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Введем обозначения

$$\alpha(t, x) = \left. \frac{\partial \bar{z}(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (25)$$

$$\beta(t, x) = \left. \frac{\partial \bar{y}(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (26)$$

Учитывая условия, наложенные на правые части уравнений (8), (10), получим, что

$$\bar{z}(t, x; \varepsilon) - z^\circ(t, x) = \Delta z_\varepsilon(t, x; \varepsilon) = \varepsilon \alpha(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \quad (27)$$

$$\bar{y}(t, x; \varepsilon) - y^\circ(t, x) = \Delta y_\varepsilon(t, x; \varepsilon) = \varepsilon \beta(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \quad (28)$$

где  $\alpha(t, x)$  и  $\beta(t, x)$  являются решениями краевых задач

$$\alpha(t+1, x+1) = \frac{\partial f(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x))}{\partial z} \alpha(t, x) + \Delta_{u(t, x)} f(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x)), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \alpha(t_0, x) &= 0, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\ \alpha(t, x_0) &= 0, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\beta(t+1, x+1) = \frac{\partial g(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x))}{\partial y} \beta(t, x) + \Delta_{v(t, x)} g(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x)), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \beta(t_1, x) &= G_z(x, z(t_1, x)) \alpha(t_1, x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\ \beta(t, x_0) &= 0, \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Учитывая разложения (27), (28), из формулы (19) получим

$$\begin{aligned} \Delta S_\varepsilon(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x)) &= S(\bar{u}(t, x; \varepsilon), v^\circ(t, x; \varepsilon)) - S(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x)) = \\ &= -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ H(t, x, z^\circ(t, x), u(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) - H(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \right] - \\ &- \varepsilon \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ M(t, x, y^\circ(t, x), v(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) - M(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \alpha'(t_1, X) \frac{\partial^2 \varphi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \alpha(t_1, X) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ \alpha'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi^\circ(t, x)) \alpha(t, x) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\Delta_u H'_z(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi^\circ(t, x)) \alpha(t, x) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \beta'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \beta(t_2, X) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \beta'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \beta(t, x) + 2\Delta_{v(t, x)} M'_y(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \beta(t, x) \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\varepsilon^2}{2} \alpha'(t_1, X) N_{zz}(\psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X), X) \alpha(t_1, X) + o(\varepsilon^2) \right]. \tag{33}
\end{aligned}$$

Из разложения (33) в силу независимости и произвольности допустимых управлений  $u(t, x)$  и  $v(t, x)$  получаем справедливость следующего утверждения.

**Теорема 1.** Если множества (20) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления  $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$  в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_{u(t, x)} H(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \leq 0, \tag{34}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_{v(t, x)} M(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \leq 0, \tag{35}$$

выполнялись для всех  $u(t, x) \in U$ ,  $(t, x) \in D_1$ ,  $v(t, x) \in V$ ,  $(t, x) \in D_2$  соответственно.

Пара соотношений (34), (35) является аналогом дискретного условия принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи.

### 3. Особый случай дискретного принципа максимума

Рассмотрим случай вырождения аналога дискретного условия максимума.

**Определение.** Допустимое управление  $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$  назовем особым в смысле принципа максимума Понтрягина управлением в задаче (1)–(6), если для всех  $u(t, x) \in U$ ,  $(t, x) \in D_1$ ,  $v(t, x) \in V$ ,  $(t, x) \in D_2$  выполняются соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_{u(t, x)} H(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) = 0, \tag{36}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_{v(t, x)} M(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) = 0. \tag{37}$$

Случай выполнения тождеств (36), (37) назовем особым случаем.

В особом случае из разложения (33) вытекает справедливость утверждения.

**Теорема 2.** При сделанных предположениях для оптимальности особого управления  $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$  необходимо, чтобы вдоль процесса  $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x), z^\circ(t, x), y^\circ(t, x))$  выполнялись неравенства

$$\begin{aligned}
& \alpha'(t_1, X) \left[ \frac{\partial^2 \varphi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} - N_{zz}(\psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X)) \right] \alpha(t_1, X) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ \alpha'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi^\circ(t, x)) \alpha(t, x) + \right. \\
& \quad \left. + 2\Delta_u H'_z(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi^\circ(t, x)) \alpha(t, x) \right] -
\end{aligned} \tag{38}$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \beta'_1(t, x) M_{yy}(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)) \beta_1(t, x) + \beta'_1(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2, X))}{\partial y^2} \beta_1(t_2, X) \geq 0,$$

где  $\alpha(t, x)$  есть решение краевой задачи (29), (30), а  $\beta_1(t, x)$  есть решение задачи

$$\beta_1(t+1, x+1) = g_y(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x)) \beta_1(t, x), \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \beta_1(t_1, x) &= G_z(x, z^o(t_1, x)) \alpha(t_1, x), x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\ \beta_1(t, x_0) &= 0, t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \beta'_2(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2, X))}{\partial y^2} \beta_2(t_2, X) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ \beta'_2(t, x) M_{yy}(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)) \beta_2(t, x) + \right. \\ \left. + 2\Delta_{v(t, x)} M'_y(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)) \beta_2(t, x) \right] \geq 0, \end{aligned} \quad (41)$$

где  $\beta_2(t, x)$  есть решение задачи

$$\beta_2(t+1, x+1) = g_z(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x)) \beta_2(t, x) + \Delta_{v(t, x)} g(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x)), \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \beta_2(t_1, x) &= 0, x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\ \beta_2(t, x_0) &= 0, t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2. \end{aligned} \quad (43)$$

Неравенства (38), (41) являются неявными необходимыми условиями оптимальности особых управлений. Используя их, получим явное необходимое условие оптимальности.

Решение  $\alpha(t, x)$  краевой задачи (29), (30) допускает представление [8]

$$\alpha(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} R_1(t, x; \tau, s) \Delta_{u(\tau, s)} f(\tau, s, z^o(\tau, s), u^o(\tau, s)), \quad (44)$$

где  $R_1(t, x; \tau, s)$  —  $(n \times n)$  матричная функция — решение задачи

$$\begin{aligned} R_1(t, x; \tau-1, s-1) &= R(t, x; \tau, s) f_z(\tau, s, z^o(\tau, s), u^o(\tau, s)), \\ R_1(t, x; \tau-1, x-1) &= 0, \\ R_1(t, x; t-1, s-1) &= 0, \\ R_1(t, x; t-1, x-1) &= E_1 \\ (E_1 - (n \times n) \text{ единичная матрица}). \end{aligned}$$

Через  $R_2(t, x; \tau, s)$  обозначим  $(m \times m)$  матричную функцию, являющуюся решением задачи

$$\begin{aligned} R_2(t, x; \tau-1, s-1) &= R_2(t, x; \tau, s) g_y(\tau, s, y^o(\tau, s), v^o(\tau, s)), \\ R_2(t, x; \tau-1, x-1) &= 0, \\ R_2(t, x; t-1, s-1) &= 0, \\ R_2(t, x; t-1, x-1) &= E_2 \\ (E_2 - (m \times m) \text{ единичная матрица}). \end{aligned}$$

Тогда решения задач (39)–(40) и (42), (43) допускают соответственно представления

$$\beta_1(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x; \tau, s) \Delta_{u(\tau, s)} f(\tau, s, z^o(\tau, s), u^o(\tau, s)), \quad (45)$$

$$\beta_2(t, x) = \sum_{\tau=t_1}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} R_2(t, x; \tau, s) \Delta_{u(\tau, s)} g(\tau, s, y^o(\tau, s), v^o(\tau, s)), \quad (46)$$

где  $Q(t, x; \tau, s)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} Q(t, x; \tau, s) &= R_2(t, x; t_1-1, x-1) G_z(x, z^o(t_1, x)) R_1(t_1, x; \tau, s) + \\ &+ \sum_{\beta=s+1}^{x-1} R_2(t, x; t_1-1, \beta-1) G_z(x, z^o(t_1, x)) R_1(t_1, \beta; \tau, s). \end{aligned}$$

Используя представление (44), (45), получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \alpha'(t, x) H_{zz} \left( t, x, z^o(t, x), u^o(t, x), \psi_1^o(t, x) \right) \alpha(t, x) = \\
& = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left( \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} R_1(t, x; \tau, s) \Delta_{u(\tau, s)} f \left( \tau, s, z^o(\tau, s), u^o(\tau, s) \right) \right) H_{zz} \left( t, x, z^o(t, x), u^o(t, x), \psi_1^o(t, x) \right) \times \\
& \times \left( \sum_{\ell=t_0}^{t-1} \sum_{m=x_0}^{x-1} R(t, x; \ell, m) \Delta_{u(\ell, m)} f \left( \ell, m, z^o(\ell, m), u^o(\ell, m) \right) \right) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \sum_{\ell=t_0}^{t-1} \sum_{m=x_0}^{x-1} \Delta_{u(\tau, s)} f' \left( \tau, s, z^o(\tau, s), u^o(\tau, s) \right) \times \\
& \times \left\{ \sum_{t=\max(\tau, \ell)+1}^{t_1-1} \sum_{x=\max(s, m)+1}^{X-1} R'(t, x; \tau, s) H_{zz} \left( t, x, z^o(t, x), u^o(t, x), \psi_1^o(t, x) \right) R(t, x; \ell, m) \right\} \times \\
& \times \Delta_{u(\ell, m)} f \left( \ell, m, z^o(\ell, m), u^o(\ell, m) \right), \tag{47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_{v(t, x)} H_z' \left( t, x, z^o(t, x), u^o(t, x), \psi_1^o(t, x) \right) \alpha(t, x) = \\
& = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left( \sum_{\tau=t+1}^{t_1-1} \sum_{s=x+1}^{X-1} \Delta_{u(\tau, s)} H_z \left( \tau, s, z^o(\tau, s), u^o(\tau, s), \psi_1^o(\tau, s) \right) R_1(\tau, s; t, x) \right) \Delta_{u(t, x)} f \left( t, x, z^o(t, x), u^o(t, x) \right), \\
& \alpha'(t_1, X) \frac{\partial^2 \varphi_1(z^o(t_1, X))}{\partial z^2} \alpha(t_1, X) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=x_0}^{X-1} \sum_{\ell=t_0}^{t_1-1} \sum_{m=x_0}^{X-1} \Delta_{v(\tau, s)} f' \left( \tau, s, z^o(\tau, s), u^o(\tau, s) \right) R_1(t, X; \tau, s) \times \\
& \times \frac{\partial^2 \varphi_1(z^o(t_1, X))}{\partial z^2} R_1(t_1, X; \ell, m) \Delta_{v(\ell, m)} f \left( \ell, m, z^o(\ell, m), u^o(\ell, m) \right), \tag{49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \beta_1'(t, x) M_{yy} \left( t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x) \right) \beta_1(t, x) = \\
& = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left( \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(t, x; \tau, s) \Delta_{v(\tau, s)} f \left( \tau, s, z^o(\tau, s), u^o(\tau, s) \right) \right)' M_{yy} \left( t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x) \right) \times \\
& \times \left( \sum_{\ell=t_0}^{t_1-1} \sum_{m=x_0}^{x-1} Q(t, x; \ell, m) \Delta_{u(\ell, m)} f \left( \ell, m, z^o(\ell, m), u^o(\ell, m) \right) \right) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=x_0}^{X-1} \sum_{\ell=t_0}^{t-1} \sum_{m=x_0}^{X-1} \Delta_{u(\tau, s)} f' \left( \tau, s, z^o(\tau, s), u^o(\tau, s) \right) \times \\
& \times \left\{ \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=\max(s, m)+1}^{X-1} Q_1'(t, x; \tau, s) M_{yy} \left( t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x) \right) \right\} \Delta_{v(\ell, m)} f \left( \ell, m, z^o(\ell, m), u^o(\ell, m) \right), \\
& \beta_1'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2, X))}{\partial y^2} \beta_1(t_2, X) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=x_0}^{X-1} \Delta_{v(\tau, s)} f' \left( \tau, s, z^o(\tau, s), u^o(\tau, s) \right) Q'(t_2, X; \tau, s) \times \\
& \times \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2, X))}{\partial y^2} Q(t_2, X; \ell, m) \sum_{\ell=t_0}^{t_1-1} \sum_{m=x_0}^{X-1} Q(t_2, X; \ell, m) \Delta_{v(\ell, m)} f \left( \ell, m, z^o(\ell, m), u^o(\ell, m) \right). \tag{51}
\end{aligned}$$

Далее при помощи представления (46) получаем, что

$$\begin{aligned}
& \beta_2'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2, X))}{\partial y^2} \beta_2(t_2, X) = \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \sum_{s=x_0}^{X-1} \sum_{\ell=t_1}^{t_2-1} \sum_{m=x_0}^{X-1} \Delta_{v(\tau, s)} g' \left( \tau, s, y^o(\tau, s), v^o(\tau, s) \right) R_2'(t_2, X; \tau, s) \times \\
& \times \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2, X))}{\partial y^2} R_2(t_2, X; \ell, m) \Delta_{v(\ell, m)} g \left( \ell, m, y^o(\ell, m), v^o(\ell, m) \right), \tag{52}
\end{aligned}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_{v(t, x)} M_y' \left( t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x) \right) \beta_2(t, x) = \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ \sum_{\tau=t+1}^{t_2-1} \sum_{s=x+1}^{X-1} \Delta_{v(\tau,s)} M'_y(\tau, s, y^o(\tau, s), v^o(\tau, s), \psi_2^o(\tau, s)) R_2(\tau, s; t, x) \right] \Delta_{v(t,x)} g(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x)), \\
&\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \beta'_2(t, x) M_{yy}(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)) \beta_2(t, x) = \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \sum_{s=x_0}^{X-1} \sum_{\ell=t_1}^{t_2-1} \sum_{m=x_0}^{X-1} \Delta_{v(\tau,s)} g'(\tau, s, y^o(\tau, s), v^o(\tau, s)) \times \\
&\times \left\{ \sum_{t=\max(\tau, \ell)+1}^{t_2-1} \sum_{x=\max(s, m)+1}^{X-1} R'_2(t, x; \tau, s) M_{yy}(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)) R_2(t, x; \ell, m) \right\} \times \\
&\times \Delta_{v(\ell, m)} g(\ell, m, y^o(\ell, m), v^o(\ell, m)). \tag{54}
\end{aligned}$$

Введем матричные функции  $K(\tau, s, \ell, m)$ ,  $L(\tau, s, \ell, m)$ :

$$\begin{aligned}
K(\tau, s, \ell, m) &= \sum_{t=\max(\tau, \ell)+1}^{t_1-1} \sum_{x=\max(s, m)+1}^{X-1} R'_1(t, x; \tau, s) H_{zz}(t, x, z^o(t, x), u^o(t, x), \psi_1^o(t, x)) R(t, x; \ell, m) - \\
&- R'_1(t_1, X; \tau, s) \frac{\partial^2 \phi_1(z^o(t_1, X))}{\partial z^2} R_1(t_1, X; \ell, m) + \\
&+ \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=\max(s, m)+1}^{X-1} Q'_1(t, x; \tau, s) M_{yy}(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)) - \\
&- Q'(t_2, X; \tau, s) \frac{\partial^2 \phi_2(y^o(t_2, X))}{\partial y^2} Q(t_2, X; \ell, m), \\
L(\tau, s, \ell, m) &= -R'_2(t_2, X; \tau, s) \frac{\partial^2 \phi_2(y^o(t_2, X))}{\partial y^2} R_2(t_2, X; \ell, m) + \\
&+ \sum_{t=\max(\tau, \ell)+1}^{t_2-1} \sum_{x=\max(s, m)+1}^{X-1} R'_2(t_2, X; \tau, s) M_{yy}(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)) R_2(t_2, X; \ell, m).
\end{aligned}$$

Учитывая тождества (47)–(54) и выражения для  $K(\tau, s, \ell, m)$ ,  $L(\tau, s, \ell, m)$  неравенства (38), (39) записывается в виде:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=x_0}^{X-1} \sum_{\ell=t_0}^{t_1-1} \sum_{m=x_0}^{X-1} \Delta_{u(\tau,s)} f'(\tau, s, z^o(\tau, s), u^o(\tau, s)) K(\tau, s, \ell, m) \Delta_{v(\ell, m)} f(\ell, m, z^o(\ell, m), u^o(\ell, m)) + \tag{55} \\
&+ 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ \sum_{\tau=t+1}^{t_1-1} \sum_{s=x+1}^{X-1} \Delta_{u(\tau,s)} H'_z(\tau, s, z^o(\tau, s), u^o(\tau, s), \psi_1^o(\tau, s)) R_1(\tau, s; t, x) \right] \Delta_{u(t,x)} f(t, x, z^o(t, x), u^o(t, x)) \leq 0, \\
&\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \sum_{s=x_0}^{X-1} \sum_{\ell=t_1}^{t_2-1} \sum_{m=x_0}^{X-1} \Delta_{v(\tau,s)} g'(\tau, s, y^o(\tau, s), v^o(\tau, s)) L(\tau, s, \ell, m) \Delta_{v(\ell, m)} g(\ell, m, y^o(\ell, m), v^o(\ell, m)) + \\
&+ 2 \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \left[ \sum_{\tau=t+1}^{t_2-1} \sum_{s=x+1}^{X-1} \Delta_{v(\tau,s)} M'_y(\tau, s, y^o(\tau, s), v^o(\tau, s), \psi_2^o(\tau, s)) R_2(\tau, s; t, x) \right] \times \\
&\times \Delta_{v(t,x)} g(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x)) \leq 0. \tag{56}
\end{aligned}$$

**Теорема 3.** Пусть множества (20) выпуклы. Тогда для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления  $(u^o(t, x), v^o(t, x))$  необходимо, чтобы неравенства (55), (56) выполнялись для всех  $u(t, x) \in U$ ,  $(t, x) \in D_1$ ,  $v(t, x) \in V$ ,  $(t, x) \in D_2$  соответственно.

### Заключение

В статье изучается одна дискретная двухпараметрическая задача оптимального управления, описываемая системой Форназини–Маркензини. При помощи метода приращений доказаны необходимые

условия оптимальности в форме дискретного принципа максимума. Исследован случай вырождения дискретного условия максимума. Установлено необходимое условие оптимальности особых управлений.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания, способствующие улучшению первоначального варианта статьи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fornazini E., Marchesini G. State-space realization theory of two-dimensional filters // IEEE Trans. Automat. Contr. 1976. V. AC-21, No. 4. P. 484-492.
2. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. Berlin, 1985.
3. Гайшун И.В., Хоанг Ван Куанг. Условия полной управляемости дискретных двухпараметрических систем // Дифференциальные уравнения. 1991. № 2. С. 187-193.
4. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Минск : Изд-во ИМ НАН Беларуси, 1996. 200 с.
5. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах // Доклады АН СССР. 1967. Т. 175, № 1. С. 17-19.
6. Васильев О.В. К оптимальным процессам в непрерывных и дискретных двухпараметрических системах // Информационный сборник трудов ВЦ Иркутского госуниверситета. Иркутск, 1968. Вып. 2. С. 87-104.
7. Степанюк Н.Н. Некоторые задачи управляемости и наблюдаемости двухпараметрических дискретных систем // Дифференциальные уравнения. 1978. № 12. С. 2190-2195.
8. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку : Изд-во Бакинск. гос. ун-та, 2013. 151 с.
9. Мансимов К.Б., Насияти М.М. Необходимые условия оптимальности в одной многоэтапной дискретной задаче управления // Математическое и компьютерное моделирование. 2011. Вып. 5. С. 162-179.
10. Насияти М.М. Условия оптимальности в ступенчатых дискретных двухпараметрических задачах управления : автореф. дис. ... д-ра филос. по математике. Баку, 2015. 22 с.
11. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2010. 362 с.

**Мамедова Туркан Фарман кызы.** E-mail: kmansimov@mail.ru

Институт систем управления НАН Азербайджана.

**Мансимов Камил Байрамали оглы,** д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Бакинский государственный университет (Азербайджан).

Поступила в редакцию 1 октября 2017 г.

*Mammadova Turkan F.* (Institute of Control Systems of NAS Azerbaijan, Baku, Azerbaijan).

*Mansimov Kamil Bayramali* (Baku State University, Azerbaijan).

**On optimality of singular controls in control problem of the step discrete two-parametric systems.**

**Keywords:** step system; Fornasini-Marchesini type discrete two-parameter system; necessary optimality condition; special controls.

DOI: 10.17223/19988605/42/2

Let be required to minimize the functional

$$S(u, v) = \varphi_1(z(t_1, X)) + \varphi_2(y(t_2, X)), \quad (1)$$

with constraints

$$\begin{aligned} u(t, x) &\in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D_1 = \{(t, x): t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1; x = x_0, x_0 + 1, \dots, X - 1\}, \\ v(t, x) &\in V \subset R^q, \quad (t, x) \in D_2 = \{(t, x): t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2 - 1; x = x_0, x_0 + 1, \dots, X - 1\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$z(t+1, x+1) = f(t, x, z(t, x), u(t, x)), \quad (t, x) \in D_1, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= \alpha(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\ z(t, x_0) &= \beta_1(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \\ \alpha(x_0) &= \beta_1(t_0), \end{aligned} \quad (4)$$

$$y(t+1, x+1) = g(t, x, y(t, x), v(t, x)), \quad (t, x) \in D_2, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y(t_1, x) &= G(x, z(t_1, x)), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\ y(t, x_0) &= \beta_2(t), \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2, \\ G(x_0, z(t_1, x_0)) &= \beta_2(t_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Here  $f(t, x, z, u)$ ,  $(g(t, x, y, v))$  is a given  $n$  ( $m$ )-dimensional vector function that is continuous with respect to the set of variables together with its partial derivatives with respect to  $z$  ( $y$ ) up to the second order inclusive,  $\varphi_1(z)$ ,  $\varphi_2(y)$  are given twice continuously differentiable scalar functions,  $\alpha(x)$ ,  $\beta_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  are given discrete vector-valued functions of corresponding dimensions,  $u(t, x)$  ( $v(t, x)$ ) is  $r$  ( $q$ )-dimensional control actions vector,  $U$ ,  $V$  are given non-empty and bounded sets,  $G(x, z)$  is a given  $m$ -dimensional vector-valued function continuous with respect to the set of variables together with its partial derivatives with respect to  $z$  up to second order inclusive,  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $x_0$ ,  $X$  are given numbers, and the differences  $t_2 - t_0$  and  $X - x_0$  are integers.

The first order necessary optimality conditions of the Pontryagin maximum principle type is established and singular case is investigated.

## REFERENCES

1. Fornazini, E. & Marchesini, G. (1976) State-space realization theory of two-dimensional filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*. AC-21(4). pp. 484–492.
2. Kaczorek, T. (1985) *Two-dimensional linear systems*. Berlin: Springer.
3. Gayshun, I.B. & Xoang, Van Kuang (1991) Conditions for complete controllability of discrete two-parameter systems. *Differential Equations*. 27(2). pp. 187–193. (In Russian).
4. Gayshun, I.B. (1996) *Mnogoparametricheskie sistemy upravleniya* [Multiparameter control systems]. Minsk: IM NAS of Belarus. (In Russian).
5. Vasilyev, O.B. & Kirillova, F.M. (1967) Ob optimal'nykh protsessakh v dvukhparametricheskikh diskretnykh sistemakh [On Optimal Processes in Two-Parameter Discrete Systems]. *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*. 175(1). pp. 17–19. (In Russian).
6. Vasilyev, O.B. (1968) K optimal'nykh protsessam v nepreryvnykh i diskretnykh dvukhparametricheskikh sistemakh [To optimal processes in continuous and discrete two-parameter systems]. *Informatsionnyy sbornik trudov VTs Irkutskogo gosuniversiteta*. 2. pp. 87–104.
7. Stepanyuk, N.N. (1978) Some problems of controllability and observability of two-parameter discrete systems. *Differential Equations*. 12. pp. 2190–2195. (In Russian).
8. Mansimov, K.B. (2013) *Diskretnye sistemy* [Discrete systems]. Baku: BSU.
9. Mansimov, K.B. & Nasiyati, M.M. (2011) Necessary conditions of optimality in a discrete multi-stage control problem. *Matematichne ta komp'yuterne modelyuvannya – Mathematical and Computer Modeling*. 5. pp. 162–179. (In Russian).
10. Nasiyati, M.M. (2015) *Usloviya optimal'nosti v stupenchatykh diskretnykh dvukhparametricheskikh zadachakh upravleniya* [Optimality conditions in stepwise discrete two-parameter control problems]. Abstract of PhD in Mathematics.
11. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.Dzh. (2013) *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa–Darbu* [Qualitative theory of optimal control of the Goursat–Darboux systems]. Baku: ELM.

Ю.И. Параев, Т.И. Грекова, К.О. Полуэктова

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКОЙ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ ФОНДОВОООРУЖЕННОСТИ ТРУДА

Рассматривается задача оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении фондовооруженности труда. В качестве критерия оптимальности выбирается максимум среднего значения непроизводственного потребления на заданном периоде производства. Решение проводится с помощью метода динамического программирования.

**Ключевые слова:** односекторная экономика; фондовооруженность труда; непроизводственное потребление; оптимальное управление; динамическое программирование.

Проблема управления односекторной экономикой восходит к [1, 2]. Ей посвящено большое количество работ, в которых рассматриваются и решаются разные варианты задач, в том числе и задачи оптимального управления такой экономикой (например, [3–6]). Естественным продолжением этих исследований является решение задач с учетом каких-либо случайных возмущений, действующих в процессе производства. Состояние односекторной экономики определяется двумя величинами:  $K(t)$  – основной капитал и  $L(t)$  – трудовые ресурсы. Вообще говоря, изменение основного капитала во времени происходит случайным образом из-за таких факторов, как случайный износ основных производственных фондов, приобретение новых фондов, цена на которые зависит от курса валют, производственная неопределенность, экономическая конъюнктура и т.п. Если основной капитал изменяется случайным образом, то фондовооруженность труда  $k = K/L$  и непроизводственное потребление  $c = C/L$ , приходящиеся на одного работника, также будут изменяться случайным образом. В [7] на основании изучения статистических данных приводится определенное обоснование того, что влияние экзогенных случайных факторов на экономическую динамику можно моделировать процессом броуновского движения.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении фондовооруженности труда. В качестве критерия оптимальности выбирается максимум среднего значения непроизводственного потребления на заданном периоде производства. Решение задачи проводится с помощью метода динамического программирования.

### 1. Постановка задачи

Состояние экономики характеризуется двумя величинами: фондовооруженностью труда  $k(t)$  и непроизводственным потреблением  $c(t)$ , приходящимися на одного работника, а также производственной функцией  $F(k)$  – валовым продуктом, произведенным в единицу времени. В детерминированном случае эти переменные удовлетворяют уравнениям

$$\dot{k} = uF - \mu k, \quad k(0) = k_0, \quad (1)$$

$$\dot{c} = \delta c + (1 - u)F, \quad c(0) = 0, \quad (2)$$

где  $\mu$  – коэффициент амортизации,  $\delta$  – норма дисконтирования ( $\mu \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ ),  $uF$  – часть продукта, которая идет на увеличение основного капитала,  $(1 - u)F$  – часть продукта, которая идет на увеличение непроизводственного потребления. Таким образом, в задаче управляющим параметром является коэффициент  $u$ , который должен удовлетворять условию

$$0 \leq u \leq 1. \quad (3)$$

Далее используется производственная функция Кобба–Дугласа, т.е.  $F(k) = Ak^\alpha$ , где  $A$  – масштаб темпа производства ( $A > 0$ ),  $\alpha$  – коэффициент эластичности по основным фондам. Предполагается, что планируемый период производства  $[0, T]$  задан и достаточно велик. Согласно (2) общее непроизводственное потребление на интервале  $[0, T]$  при заданном управлении  $u$  равно

$$c(T) = \int_0^T e^{\delta(T-t)} (1-u) F(k) dt. \quad (4)$$

*Детерминированная задача:* в течение интервала времени  $[0, T]$  найти такое управление  $u(t)$  с учетом (3), при котором функционал (4) достигает максимума. Эта задача с помощью принципа максимума Понтрягина подробно решена в [8].

В [7] предложено учет случайных воздействий на фондовооруженность труда представить в виде уравнения

$$\dot{k} = uF - \mu k + \sigma k \xi(t), \quad k(0) = k_0, \quad (5)$$

где  $\xi(t)$  – стандартный белый гауссовский шум (или  $\xi(t) = d\omega(t)/dt$ , где  $\omega(t)$  – винеровский процесс),  $\sigma$  – коэффициент волатильности. Таким образом, процесс  $k(t)$  становится случайным. Однако этот процесс измеряется, т.е. в каждый момент времени  $t$  значение  $k(t)$  известно.

*Стохастическая задача:* в течение интервала времени  $[0, T]$  найти такое управление  $u(t)$  для (2) и (5) с учетом (3), при котором среднее значение функционала (4) максимально. В статье задача решается с помощью метода динамического программирования [9].

## 2. Решение стохастической задачи

Согласно методу динамического программирования, введем функцию Беллмана

$$s(k; t, T) = \max_{u[t, T]} M \left\{ \int_t^T e^{\delta(T-t)} (1-u) F(k) dt \mid k, t \right\}$$

– среднее значение величины  $c(T)$  при условии, что процесс продолжается на интервале времени  $[t, T]$  с начальным условием  $k(t) = k$  и на этом интервале применяется оптимальное управление. Для этой функции можно записать уравнение Беллмана:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial s(k; t, T)}{\partial t} &= \max_{0 \leq u(t) \leq 1} \left\{ \frac{\partial s(k; t, T)}{\partial k} (uF(k) - \mu k) + e^{\delta(T-t)} (1-u) F(k) + \frac{1}{2} \sigma^2 k^2 \frac{\partial^2 s(k; t, T)}{\partial k^2} \right\} = \\ &= \max_{0 \leq u(t) \leq 1} \left\{ uF(k) \left( \frac{\partial s(k; t, T)}{\partial k} - e^{\delta(T-t)} \right) - \mu k \frac{\partial s(k; t, T)}{\partial k} + e^{\delta(T-t)} F(k) + \frac{1}{2} \sigma^2 k^2 \frac{\partial^2 s(k; t, T)}{\partial k^2} \right\}, \\ s(k; T, T) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из решения этого уравнения получается решение стохастической задачи. Здесь  $k$  – аргумент функции  $s(k; t, T)$ , а не случайный процесс, определяемый уравнением (5).

Если взять детерминированную задачу и решать ее с помощью динамического программирования, то приходим к уравнению (6) при  $\sigma = 0$ . Но поскольку решения с помощью принципа максимума и динамического программирования эквивалентны, то решение уравнения (6) при  $\sigma = 0$  должно совпадать с решением, полученным в [8]. Это решение состоит в том, что интервал  $[0, T]$  точками  $t_1$  и  $t_2$  ( $0 < t_1 < t_2 < T$ ) разбивается на три интервала:  $[0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$  и  $[t_2, T]$ . Интервал  $[0, t_1]$  соответствует выходу на магистраль, интервал  $[t_1, t_2]$  – магистрали (если она существует), интервал  $[t_2, T]$  – заключительному этапу (сходу с магистрали). На магистрали  $k = k_{oc} = \text{const}$ , причем

$$k_{oc}^\beta = \frac{\alpha A}{\delta + \mu}, \quad u_{oc} = \frac{\mu k_{oc}}{F(k_{oc})}, \quad (7)$$

где  $\beta = 1 - \alpha$ . Далее рассматривается основной вариант, когда  $k(0) < k_{oc}$  и на интервале  $[0, t_1]$   $u = 1$ .

На заключительном интервале  $[t_2, T]$   $u = 0$ . Таким образом, структура оптимального управления для детерминированной задачи имеет вид:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < t_1, \\ u_{oc} & \text{при } t_1 < t < t_2, \\ 0 & \text{при } t_2 < t < T. \end{cases} \quad (8)$$

Получается, что решение задачи сводится к нахождению моментов  $t_1$  и  $t_2$ .

Можно предположить, что в стохастическом случае при достаточно малом коэффициенте  $\sigma$  структура оптимального управления имеет такой же вид. Поэтому решение стохастической задачи фактически сводится к нахождению оптимальных моментов  $t_1$  и  $t_2$ . Эти моменты находятся в процессе решения уравнения (6). Максимум правой части этого уравнения по  $u$  с учетом (3) достигается при

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{\partial s(k;t,T)}{\partial k} > e^{\delta(T-t)}, \\ u_{oc}, & \text{если } \frac{\partial s(k;t,T)}{\partial k} = e^{\delta(T-t)}, \\ 0, & \text{если } \frac{\partial s(k;t,T)}{\partial k} < e^{\delta(T-t)}. \end{cases} \quad (9)$$

### 3. Сход с магистрали

В этом случае решение уравнения (6) начинается с правого конца. Обозначим через  $s_1(k;t,\cdot)$ ,  $s_2(k;t,\cdot)$ ,  $s_3(k;t,\cdot)$  функции Беллмана, если момент  $t$  относится к интервалам  $[0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$ ,  $[t_2, T]$  соответственно.

На интервале  $[t_2, T]$   $u = 0$ . Поэтому уравнение (6) принимает вид:

$$-\frac{\partial s_3(k;t,T)}{\partial t} = -\mu k \frac{\partial s_3(k;t,T)}{\partial k} + e^{\delta(T-t)} F(k) + \frac{1}{2} \sigma^2 k^2 \frac{\partial^2 s_3(k;t,T)}{\partial k^2}, s_3(k;T,T) = 0. \quad (10)$$

Его решение можно записать в виде:

$$s_3(k;t,T) = F(k) w_3(t,T), \quad (11)$$

где  $w_3(t,T)$  – искомая функция. Подставляя (11) в (10), получаем

$$-F(k) \dot{w}_3(t,T) = -\mu k F'(k) w_3(t,T) + \frac{1}{2} \sigma^2 k^2 F''(k) w_3(t,T) + F(k) e^{\delta(T-t)}$$

или

$$-F(k) \dot{w}_3(t,T) = -\alpha \mu F(k) w_3(t,T) + \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha (\alpha - 1) F(k) w_3(t,T) + F(k) e^{\delta(T-t)}.$$

Сократив на  $F(k)$ , получаем

$$-\dot{w}_3(t,T) = -\vartheta w_3(t,T) + e^{\delta(T-t)}, w_3(T,T) = 0,$$

где  $\vartheta = \alpha \mu + \frac{1}{2} \alpha \beta \sigma^2$ . Решение этого уравнения:

$$w_3(t,T) = \frac{e^{\delta(T-t)} - e^{-\vartheta(T-t)}}{\delta + \vartheta}. \quad (12)$$

Согласно (9) на интервале  $[t_1, t_2]$  должно выполняться условие

$$\frac{\partial s_2(k;t,T)}{\partial k} \equiv e^{\delta(T-t)} \quad (13)$$

и, следовательно, условие

$$\frac{\partial^2 s_2(k;t,T)}{\partial k^2} \equiv 0. \quad (14)$$

Кроме того, из принципа оптимальности Беллмана следует, что  $s_2(k;t,T) = s_2(k;t,t_2) + s_3(k(t_2);t_2,T)$ . Поэтому из (6) получаем

$$-\frac{\partial s_2(k; t, t_2)}{\partial t} = -\mu k \frac{\partial s_2(k; t, t_2)}{\partial k} + e^{\delta(T-t)} F(k), \quad s_2(k; t_2, t_2) = 0. \quad (15)$$

Согласно методу разделения переменных его решение ищем в виде:

$$s_2(k; t, t_2) = H(k)e^{\delta(T-t)} + B, \quad (16)$$

где  $H(k)$  – искомая функция,  $B$  – некоторая константа. Подставляя (16) в (15) и сокращая на  $\exp\{\delta(T-t)\}$ , получаем дифференциальное уравнение первого порядка с независимым аргументом  $k$ :

$$\mu k H'(k) + \delta H(k) = F(k).$$

Его решение состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, что приводит к выражению [10]

$$H(k) = Ck^{-\frac{\delta}{\mu}} + \frac{Ak^{\alpha}}{\alpha\mu + \delta}, \quad (17)$$

где  $C$  – константа интегрирования. Эта константа находится из условия (13) или, как следует из (16), из условия  $H' = 1$ . В результате имеем

$$H'(k) = -\frac{\delta}{\mu k} Ck^{-\frac{\delta}{\mu}} + \frac{\alpha Ak^{\alpha-1}}{\alpha\mu + \delta} = 1.$$

Находя отсюда константу  $C$  и подставляя в (17), получаем

$$H(k) = \frac{F - \mu k}{\delta}. \quad (18)$$

К выражению (18) еще раз применим условие  $H' = 1$ . Получаем

$$H'(k) = \frac{\alpha Ak^{\alpha-1} - \mu}{\delta} = 1.$$

Отсюда следует (7). Выражение для  $u_{oc}$  получается из (1), так как  $k_{oc} = const$ . Таким образом, свойства магистрали в детерминированном и стохастическом случаях совпадают. Константа  $B$  находится из условия  $s_2(k; t_2, t_2) = 0$ . Из (16) следует, что

$$B = -H(k(t_2))e^{\delta(T-t_2)}.$$

Этот же результат можно получить непосредственно. Так как на интервале  $[t_1, t_2]$   $k = k_{oc} = const$  и  $(1-u)F = F - \mu k = const$ , то получаем

$$s_2(k; t, t_2) = \int_t^{t_2} e^{\delta(T-t)} (1-u)F(k) dt = (F - \mu k) \frac{e^{\delta(T-t)} - e^{\delta(T-t_2)}}{\delta},$$

что совпадает с (16).

#### 4. Выбор оптимального параметра $t_2$

Из полученного выше следует, что при  $t < t_2$

$$s_2(k; t, T) = H(k)(e^{\delta(T-t)} - e^{\delta(T-t_2)}) + Q(e^{\delta(T-t_2)} - e^{-\vartheta(T-t_2)}), \quad (19)$$

где

$$Q = \frac{F(k_2)}{\delta + \vartheta}.$$

Поскольку эта функция зависит от параметра  $t_2$ , то естественно выбрать его так, чтобы функция достигала максимума. Вычислим производную

$$\frac{ds_2}{dt_2} = H(k)\delta e^{\delta(T-t_2)} - Q(\delta e^{\delta(T-t_2)} + \vartheta e^{-\vartheta(T-t_2)}) = 0.$$

Отсюда

$$e^{-(\delta+\vartheta)(T-t_2)} = \frac{\delta(H-Q)}{\vartheta Q}, \quad (20)$$

$$T - t_2 = r_3 = \frac{1}{\delta + \vartheta} \ln \left( \frac{\vartheta Q}{\delta(H - Q)} \right). \quad (21)$$

Таким образом, длина интервала  $[t_2, T]$  равна значению  $r_3$ .

## 5. Выход на магистраль

На интервале  $[0, t_1]$   $u = 1$ . Поэтому непроизводственное потребление равно нулю и поэтому при  $t < t_1$   $s_1(k; t, t_1) \equiv 0$  и  $s_1(k; t, T) = s_2(k(t_1); t_1, T)$ . Поскольку  $s_1(k; t, t_1) \equiv 0$ , то вторая производная этой функции по  $k$  равна нулю. Поэтому уравнение (6) принимает вид:

$$-\frac{\partial s_1(k; t, t_1)}{\partial t} = \frac{\partial s_1(k; t, t_1)}{\partial k} (F(k) - \mu k), \quad s_1(k; t_1, t_1) = 0.$$

Это уравнение можно решать методом характеристик. В результате получается, что переменная  $k$  удовлетворяет уравнению (1), решение которого на интервале  $[t_0, t]$  с начальным условием  $k(t_0) = k_0$  имеет вид [2]:

$$k^\beta(t) = \frac{A}{\mu} (1 - e^{-\beta\mu(t-t_0)}) + k_0^\beta e^{-\beta\mu(t-t_0)}. \quad (22)$$

Момент времени  $t_1$  определяется из условия  $k(t_1) = k_{oc}$ , что приводит к выражению

$$t_1 = \frac{1}{\mu\beta} \ln \left( \frac{A - \mu k_0^\beta}{A - \mu k_{oc}^\beta} \right). \quad (23)$$

Таким образом, выражения (21) и (23) определяют структуру управления и дают решение задачи. Для существования данного решения необходимо, чтобы сумма длин интервалов  $[0, t_1]$  и  $[t_2, T]$  была меньше  $T$ , т.е.  $t_1 + r_3 < T$ .

## 6. Общее непроизводственное потребление

Из полученных результатов следует, что максимальное среднее значение непроизводственного потребления на интервале  $[0, T]$  равно

$$\begin{aligned} s(k_0; 0, T) &= s_2(k(t_1); t_1, t_2) + s_3(k(t_2); t_2, T) = \\ &= H(k(t_1))(e^{\delta(T-t_1)} - e^{\delta(T-t_2)}) + Q(k(t_2))(e^{\delta(T-t_2)} - e^{-\vartheta(T-t_2)}). \end{aligned} \quad (24)$$

Сюда нужно подставить (21) и (23). При этом в формулах (21) и (24)  $k = k(t_1) = k(t_2) = k_{oc}$ , т.е. нужно учитывать (7). В частности, получается

$$Q = \frac{F(k_{oc})}{\delta + \vartheta}, \quad (25)$$

$$T - t_2 = r_3 = \frac{1}{\delta + \vartheta} \ln \left( \frac{\vartheta(\delta + \mu)}{(\delta + \beta\mu)\vartheta - \alpha\mu\delta} \right). \quad (26)$$

Можно рассмотреть, как ведет себя функционал (24) с ростом  $\sigma$  или, что то же самое, параметра  $\vartheta$ . Из (26) видно, что при увеличении  $\vartheta$  длина интервала  $[t_2, T]$  стремится к нулю. Также стремится к нулю и величина  $Q$ . В результате получаем, что с ростом параметра  $\vartheta$  функционал (24) стремится к величине

$$s(k_0; 0, T) = H(k_{oc})(e^{\delta(T-t_1)} - 1).$$

На рисунках приведены результаты численного моделирования при следующих значениях параметров:  $A = 1$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\mu = 0,1$ ,  $\delta = 0,1$ ,  $T = 12$ ,  $k_0 = 5$ ,  $k_{oc} = 6,25$ ,  $t_1 = 0,7$ . На рис. 1 приведено изменение во времени фондовооруженности труда при разных значениях коэффициента волатильности  $\sigma$ . На рис. 2 приведено изменение во времени непроизводственного потребления при разных значениях коэффициента волатильности  $\sigma$ . Видно, что эта величина убывает с ростом  $\sigma$ .

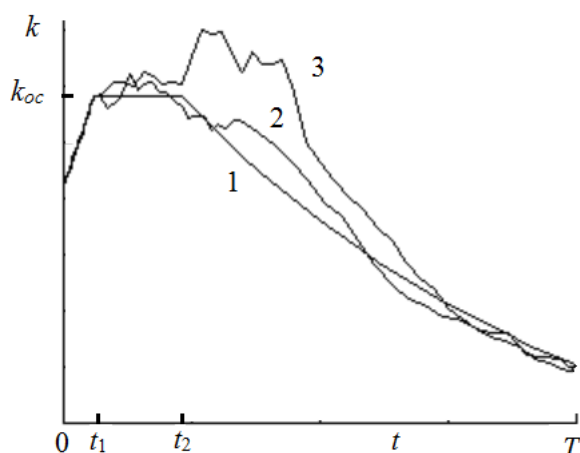


Рис.1. Изменение фондовооруженности труда  
(кривая 1 соответствует  $\sigma = 0$ ;  
кривая 2 –  $\sigma = 0,1$ ; кривая 3 –  $\sigma = 0,2$ )

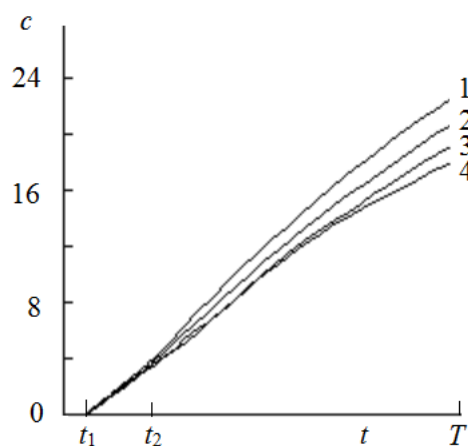


Рис. 2. Изменение непроизводственного потребления  
(кривая 1 соответствует  $\sigma = 0$ ; кривая 2 –  $\sigma = 0,1$ ;  
кривая 3 –  $\sigma = 0,2$ , кривая 4 –  $\sigma = 0,3$ )

### Заключение

В результате исследования установлено, что структура управления решения детерминированной и стохастической задач совпадают и определяются значениями моментов  $t_1$  и  $t_2$ . При этом стохастическая составляющая влияет только на момент  $t_2$ . Увеличение коэффициента волатильности  $\sigma$  приводит к уменьшению среднего значения непроизводственного потребления.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Эрроу К. Применение теории управления к экономическому росту // Математическая экономика. М. : Мир, 1974. 745 с.
2. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М. : Наука, 1984. 286 с.
3. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Максимизация потребления работодателей в случае производственной функции общего вида // Обзор прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11, вып. 2. С. 326–327.
4. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом потребления работодателей // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 140–155.
5. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Принцип магистрали в задаче управления односекторной экономикой при наличии ограничений на накопление и потребление // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 2 (7). С. 5–23.
6. Анисимов А.В., Григоренко Н.Л., Лукьянова Л.Н. Задача оптимального управления для односекторной модели экономического роста со смешанными ограничениями // Прикладная математика и информатика : труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва : МАКС Пресс, 2013. Т. 44. С. 5–21.
7. Соловьев В.И. Стохастические методы в экономике и финансах. М. : Гос. ун-т управления, 2000. 154 с.
8. Параев Ю.И., Грекова Т.И., Данилюк Е.Ю. Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4 (17). С. 5–15.
9. Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М. : Сов. радио, 1976. 184 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : ГИФМЛ, 1961. 702 с.

**Параев Юрий Иванович**, д-р техн. наук, профессор. E-mail: paraev@mail.ru  
**Грекова Татьяна Ивановна**, канд. техн. наук, доцент. E-mail: ti\_gre@mail.ru  
**Полуктובה Ксения Олеговна**. E-mail: poluekt.kseni@mail.ru  
 Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 28 сентября 2017 г.

Paraev Jury. I., Grekova Tatiana. I., Poluektova Ksenia O. (National Research Tomsk State University, Russian Federation).

**Optimal control of one-sector economy under random variation labor funds.**

**Keywords:** the one-sector economy; capital-labor ratio; non-productive consumption; optimal control; dynamic programming.

DOI: 10.17223/19988605/42/3

The problem of optimal control of one-sector economy under random variation labor funds is considered. The state of the economy is characterized by two variables: capital-labor ratio  $k(t)$  and non-productive consumption per an employee  $c(t)$  along with the production function  $F(k)$  being the gross product made per one unit of time. In this study the Kobb-Douglas production function is considered, that is  $F(k) = Ak^\alpha$ , where  $A$  denotes the scale of rate of production ( $A > 0$ ),  $\alpha$  is the elasticity coefficient on fixed assets. Variables  $k(t)$  and  $c(t)$  satisfy the following equations:

$$\begin{aligned}\dot{k} &= uF - \mu k + \sigma k \xi(t), \quad k(0) = k_0, \\ \dot{c} &= \delta c + (1-u)F, \quad c(0) = 0,\end{aligned}$$

where  $\mu$  is the depreciation rate,  $\delta$  is the discount rate ( $\mu \geq 0, \delta \geq 0$ ),  $\xi(t)$  denotes the standard white Gaussian noise (or  $\xi(t) = d\omega(t)/dt$ , where  $\omega(t)$  is the Wiener process),  $\sigma$  is the coefficient of volatility,  $uF$  is the product fraction which is used to increase a fixed capital,  $(1-u)F$  is the product fraction which is used to increase a non-productive consumption. Thus, the coefficient  $u$  is the controlling parameter in considered problem. This coefficient should satisfy the following condition:  $0 \leq u \leq 1$ . It is assumed that the planned production period  $[0, T]$  is specified and sufficiently long. The general non-productive consumption on the interval  $[0, T]$  for a given control  $u$  is defined as follows:

$$c(T) = \int_0^T e^{\delta(T-t)} (1-u)F(k) dt.$$

The objective of this study is to find such control  $u(t)$  on the interval  $[0, T]$  for which the average value of  $c(T)$  reaches its maximum. This problem is solved using a dynamic programming method. Bellman's function  $s(k; t, T)$  is introduced;  $s(k; t, T)$  is an average value of value  $c(T)$  provided that process continues on time interval  $[t, T]$  with an initial condition  $k(t) = k$  and on this interval is applied optimal control. For this function Bellman's equation is specified. The formulated objective is a solution of the Bellman's equation. This solution consists that an interval  $[0, T]$  by points  $t_1$  and  $t_2$  ( $0 < t_1 < t_2 < T$ ) breaks into three intervals:  $[0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$ , and  $[t_2, T]$ . The interval  $[0, t_1]$  corresponds to the output to the highway, the interval  $[t_1, t_2]$  – to the highway (if it exists), the interval  $[t_2, T]$  – to the final stage (to a descent from the highway). On the highway, there is  $k = k_{oc} = \text{const}$ , and

$$k_{oc}^{1-\alpha} = \frac{\alpha A}{\delta + \mu}, \quad u = u_{oc} = \frac{\mu k_{oc}}{F(k_{oc})}.$$

If  $k(0) < k_{oc}$ , then  $u$  is equal to 1 on the interval  $[0, t_1]$ ;  $u$  is equal to 1 on the interval  $[t_2, T]$ . As a result, it turns out that the control structure is determined by values of  $t_1$  and  $t_2$ . The moment  $t_1$  depends only on initial condition  $k(0)$  and doesn't depend on a stochastic component, the moment  $t_2$  doesn't depend on initial condition, but it depends on  $\sigma$ . Thus, the greater  $\sigma$ , the less length of the interval  $[t_2, T]$  and average value of non-productive consumption.

## REFERENCES

1. Arrow, K. (1974) *Primenenie teorii upravleniya k ekonomicheskomu rostu* [Application of Control Theory to Economic Growth]. Translated from English. Moscow: Mir.
2. Ashmanov, S.A. (1984) *Vvedenie v matematicheskuyu ekonomiku* [Introduction to mathematical economy]. Moscow: Nauka.
3. Demin, N.S. & Kuleshova, E.V. (2004) Maximizing consumption of employers in case of production function of a general view. *Review of Applied and Industrial Mathematics*. 11(2). pp. 326–327. (In Russian).
4. Demin, N.S. & Kuleshova, E.V. (2008) Control of single-sector economy over a finite time interval with allowance for employer consumption. *Automation and Remote Control*. 69(9). pp. 140–155. (In Russian).
5. Demin, N.S. & Kuleshova, E.V. (2009) Turnpike principle in a problem of management onesectoreconomy in the presence of restrictions on saving and consumption. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(7). pp. 5–23. (In Russian).
6. Anisimov, A.V., Grigorenko, N.L. & Lukyanova, L.N. (2013) Problem of optimum control for one-sector model of economic growth with the mixed restrictions *Prikladnaya matematika i informatika*. 44. pp. 5–21. (In Russian).
7. Solov'yev, V.I. (2000) *Stokhasticheskie metody v ekonomike i finansakh* [Stochastic methods in economy and finance]. Moscow: GUU.
8. Paraev, Yu.I., Grekova, T.I. & Daniliuk, E.Yu. (2011) The analytical decision of a problem of optimumcontrol one-sector economy on a final interval of time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17). pp. 5–15 (In Russian).
9. Paraev, Yu.I. (1976) *Vvedenie v statisticheskuyu dinamiku protsessov upravleniya i fil'tratsii* [Introduction to statistical dynamics of control processes and filtrations]. Moscow: Sovetskoe Radio.
10. Kamke, E. (1961) *Spravochnik po obyknovennym differentsial'ny'm uravneniyam* [A reference-book on the ordinary differential equations]. Moscow: GIFML.

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 004.8:575

DOI: 10.17223/19988605/42/4

А.С. Гуменюк

СЕРИАЛЬНОЕ И КОМПЛЕКСНОЕ ОПИСАНИЕ СТРОЯ КОМПОНЕНТОВ  
В МАССИВАХ ДАННЫХ

Отмечено «интервальное» представление строя информационной цепи, числовые характеристики которого показали высокую чувствительность к расположению компонентов в «текстовых» массивах данных. Предложено «сериальное» представление строя цепи, числовые характеристики которого оценивают массивы, состоящие из чередующихся серий одинаковых данных. Вводится комплексное представление массивов, сформированных как отдельно стоящими разными элементами, так и чередующимися сериями одинаковых данных.

**Ключевые слова:** строй цепи; числовые характеристики строя; удаленность сообщения; протяженность серии; межнуклеотидное расстояние.

В работах [1, 2] введено понятие «строй цепи». Представим его компактное описание. Рассмотрим кортежи, представляющие собой комбинации типа «перестановки с повторениями», компонентами которых являются натуральные числа, не превышающие  $n$  (длина кортежа). В теоретико-множественном представлении такой кортеж называется вектором. Рассмотрим в множестве таких векторов подмножество векторов, первый компонент которых «единица», каждый следующий компонент с номером  $i \leq n$  либо представлен натуральным числом, равным компоненту-числу с номером  $j < i$ , либо этот компонент на единицу больше, чем максимальное компонент-число с номером  $k < i$  (где  $k \neq j$ ). Назовем элемент этого подмножества «вектор строя» (далее – строй). Другими словами, строй цепи определен как особого рода кортеж, компонентами которого являются натуральные числа  $\langle a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n \rangle$ , где  $a_1 = 1$ ,  $a_n \leq n$ ; если  $a_k \notin \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$ , то  $a_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\} + 1$ . Заменяем в любом кортеже длины  $n$  первые встречные разные компоненты (элементы алфавита мощностью  $m \leq n$ ) возрастающими на единицу натуральными числами (начиная с единицы). Другие повторяющиеся одинаковые компоненты отметим теми же числами. Очевидно, что в результате любой кортеж преобразуется в вектор строя.

В работах, представляющих средства формального описания и анализа строя цепи сообщений (ФОАС), рассматривались такие длинные кортежи (знаковые последовательности, большие массивы данных), в которых отдельные различные компоненты на протяжении цепи почти всегда чередуются, а серии (одинаковых подряд расположенных) сообщений редкие и короткие. Исследования таких разных по природе цепей, как литературные тексты, нотные записи музыкальных произведений, нуклеотидные цепи (геномов прокариот), показали высокую чувствительность «интервальных» числовых характеристик строя (представленных целым комплексом) к расположению сообщений в цепи. Эффективность средств ФОАС при исследовании больших массивов данных, кроме прочего, обусловлена линейной зависимостью вычислительной сложности от длины последовательностей. Функции числовых характеристик строя эффективно представляют локальное расположение сообщений на разных участках цепи [2]. Заметим, что числовое отображение знаковой цепи позволяет применять разнообразные средства анализа сигналов (математический, спектральный, статистический и корреляционный анализ и др.). Наше особое внимание к исследованию символьных последовательностей объясняется недостатком адекватных средств для их описания и анализа.

Предложенные ранее средства предполагают отображение знаковой цепи ее строем, в результате декомпозиции которого выделяются  $j$ -е неполные однородные цепи, в каждой из которых отмечены (натуральным числом) занятые места расположения одинаковых сообщений в количестве  $n_j$  (остальные места на позиции всей цепи пусты). В качестве первичной измеримой единицы используется очередной ( $i$ -й) интервал между ближайшими занятыми местами, размер которого  $\Delta_{ij}$  определяется числом пустых мест плюс один. Таким образом, определяется расстояние от одного сообщения до ближайшего такого же (по-английски distance). Заметим, что учет интервалов между однородными заявками (событиями) издавна используется в теории массового обслуживания при моделировании потоков однородных и неоднородных случайных событий [3]. В последние годы [4, 5] учет интервалов находит распространение, в частности, при анализе нуклеотидных цепей (inter-nucleotide distance). Однако использование массивов интервалов знаковых последовательностей осуществляется традиционными математическими средствами, которые не позволяют осуществлять непосредственное описание и анализ расположения компонентов в целостной цепи.

Очевидна необходимость разработки средств описания и анализа строя таких массивов данных, которые преимущественно представлены чередующимися сериями одинаковых сообщений. Это могут быть, например, оцифрованные изображения, последовательности измеряемых величин и т.п.

В работе [2] представлены более подходящие для таких данных числовые характеристики строя. При этом используется декомпозиция знаковой цепи на неполные неоднородные цепи. Вначале считается неоднородная цепь, содержащая только первые встречные разные знаки. Такая цепь содержит весь алфавит или словарь (мощностью  $m$ ) рассматриваемого массива. Затем – другая цепь, содержащая вторые встречные разные знаки, и т.д.

## 1. Сериальное описание строя цепи

Для непосредственного учета чередующихся серий в массиве данных введем необходимые далее понятия и их обозначения. Назовем отрезком или серией упорядоченное множество одинаковых данных, выделенных подряд в составе  $j$ -й неполной однородной цепи. Допустим, что на позиции некоторого отрезка можно «считать» несколько серий по числу элементов в этом отрезке. В качестве первичной измеримой единицы используем длину серии, размер которой определяется числом занятых подряд мест в  $j$ -й однородной цепи. Наименьшая длина отрезка – единица. Для краткости будем употреблять термин «длина», величину которой обозначим  $\tau_{ij}$  ( $i$  – номер элемента в  $j$ -й однородной цепи). Назовем протяженностью данной серии логарифм ее длины  $l_{ij} = \log_2 \tau_{ij}$ . Очевидно, протяженность отдельно стоящего элемента равна нулю.

Сериальный объем  $j$ -й однородной цепи, составленной отрезками, определим в виде:

$$V_{\tau_j} = \prod_{i=1}^{n_j} \tau_{ij}, \quad (1)$$

где  $i$  – номер элемента в  $j$ -й однородной цепи, а  $n_j$  – число серий в  $j$ -й однородной цепи (при чтении серий начиная с каждого отмеченного в ней сообщения).

Средняя геометрическая длина серий в  $j$ -й однородной цепи определяется в виде:

$$\tau_{gj} = \sqrt[n_j]{V_{\tau_j}}. \quad (2)$$

При этом сериальный объем  $j$ -й однородной цепи можно определить как

$$V_{\tau_j} = \tau_{gj}^{n_j}. \quad (3)$$

Подставляя (1) в (2) определим  $\tau_{gj}$  в виде:

$$\tau_{gj} = \sqrt[n_j]{\prod_{i=1}^{n_j} \tau_{ij}}.$$

Логарифмируя (1), получим суммарную протяженность (далее – протяжение) всех серий  $j$ -й однородной цепи:

$$L_j = \sum_{i=1}^{n_j} \log_2 \tau_{ij}.$$

Определим из (3) протяжение серий в  $j$ -й однородной цепи на основе их средней геометрической длины:

$$L_j = n_j \cdot \log_2 \tau_{gj} . \quad (4)$$

Из (4) средняя протяженность серии в данной однородной цепи определится как

$$l_j = \log_2 \tau_{gj} .$$

Суммарная и средняя длины всех серий  $j$ -й однородной цепи определяются, соответственно, в виде:

$$s_j = \sum_{i=1}^{n_j} \tau_{ij} , \quad \tau_{aj} = s_j / n_j .$$

Отношение средних длин (геометрического и арифметического) определим в виде:

$$\delta \tau_j = \tau_{gj} / \tau_{aj} .$$

Эта величина является средней относительной (нормированной) длиной серий в  $j$ -й однородной цепи. В некотором смысле она аналогична длительности ноты в музыке, измеряемой в долях такта. Очевидно,  $\delta \tau_j$  максимально и равно единице, когда все отрезки в однородной цепи равны. Вероятно, эту величину можно назвать длительностью серий, или равносерийностью, или просто серийностью  $j$ -й однородной цепи.

Сериальный объем полной неоднородной цепи определим произведением всех  $m$   $j$ -х сериальных объемов:

$$V_\tau = \prod_{j=1}^m V_{\tau_j} . \quad (5)$$

Суммарная и средняя длины всех серий  $m$  разных однородных цепей данного массива, соответственно, определяются как

$$s = \sum_{j=1}^m s_j , \quad \tau_a = s / n ,$$

где  $n$  – длина всей цепи данных.

Определим среднюю геометрическую длину всех серий данного массива в виде:

$$\tau_g = \sqrt[n]{V_\tau} . \quad (6)$$

Подставляя (1) в (5) и (5) в (6), определим эту величину как

$$\tau_g = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} \tau_{ij}} .$$

При этом сериальный объем массива данных можно определить из (6) в виде:

$$V_\tau = \tau_g^n . \quad (7)$$

Отношение средних длин (геометрического и арифметического) назовем средней относительной (нормированной) длиной серий в строе цепи определим в виде:

$$\delta \tau = \tau_g / \tau_a .$$

Эту величину можно назвать длительностью серий, или равносерийностью, или серийностью строя цепи.

Логарифмируя (7) получим суммарную протяженность (протяжение) всех серий в полной неоднородной цепи:

$$L = n \cdot \log_2 \tau_g .$$

Средняя протяженность серий в полной неоднородной цепи определится в виде:

$$l = \log_2 \tau_g .$$

Назовем «полным» сериальным описанием строя цепи, образованного только сериями данных, распределения суммарных и средних протяженностей  $j$ -х однородных цепей вида:  $\{L_j\}$ ,  $\{<l_j, n_j>\}$ ,

где  $j = 1, m$ . При компактном описании сериальных данных применимы разного рода числовые характеристики протяженности серий, а именно средняя протяженность, дисперсия, или СКО, протяженностей и централизованные моменты более высоких порядков.

Наконец, отметим, что строй цепи, содержащий кроме «разряженных» данных также и их серии, следует описывать комплексами числовых характеристик и их распределений, учитывающих как интервалы и удаленности, так и длины серий и их протяженности.

## 2. Интервально-сериальное описание строя цепи

Рассмотрим массив, содержащий как отдельно стоящие чередующиеся разные сообщения, так и серии идущих подряд одинаковых данных. Для описания строя такой информационной цепи также необходима предварительная ее декомпозиция на однородные цепи.

Неполная  $j$ -я однородная цепь, на позиции которой некоторые места заняты (одинаковыми сообщениями), а другие пусты, может быть отображена как «интервальными», так и «сериальными» данными. При интервальном рассмотрении определяется упорядоченное множество интервалов вида:

$$\langle \Delta_{1j}, \Delta_{2j}, \dots, \Delta_{ij}, \dots, \Delta_{n_j j} \rangle. \quad (8)$$

При сериальном отображении получается кортеж длин серий вида:

$$\langle \tau_{1j}, \tau_{2j}, \dots, \tau_{ij}, \dots, \tau_{n_j j} \rangle. \quad (9)$$

Последовательности интервалов и длин  $j$ -й однородной цепи (8) и (9) комплементарно дополняют друг друга следующим образом: если  $\Delta_{ij} \geq 2$ , то  $\tau_{ij} = 1$ ; если  $\tau_{ij} \geq 2$ , то  $\Delta_{ij} = 1$ .

При сериальном отображении всех  $m$   $j$ -х неполных однородных цепей и целого массива данных получаем **набор сериальных характеристик строя**  $\tau_{ij}$ ,  $V_{\tau j}$ ,  $V_{\tau}$ ,  $\tau_{gj}$ ,  $\tau_g$ ,  $l_{ij} = \log_2 \tau_{ij}$ ,  $l_j = \log_2 \tau_{gj}$ ,  $L_j = n_j \cdot \log_2 \tau_{gj}$ ,  $l = \log_2 \tau_g$ ,  $L = n \cdot \log_2 \tau_g$ .

При интервальном отображении  $j$ -х неполных однородных цепей и полной неоднородной последовательности ранее получен аналогичный набор интервальных характеристик строя со следующими (уточненными здесь) обозначениями и наименованиями:

$\Delta_{ij}$  – интервал от  $i$ -го до  $(i + 1)$ -го ближайшего такого же сообщения в  $j$ -й однородной цепи;

$V_{\Delta j}$  – интервальный объем  $j$ -й однородной цепи;

$V_{\Delta}$  – интервальный объем полной неоднородной цепи;

$\Delta_{gj}$  – средний геометрический интервал в  $j$ -й однородной цепи;

$\Delta_g$  – средний геометрический интервал в полной неоднородной цепи;

$g_{ij} = \log_2 \Delta_{ij}$  – удаленность  $(i + 1)$ -го сообщения относительно  $i$ -го в  $j$ -й однородной цепи;

$g_j = \log_2 \Delta_{gj}$  – средняя удаленность сообщений в  $j$ -й однородной цепи;

$g = \log_2 \Delta_g$  – средняя удаленность сообщений в полной неоднородной цепи;

$G_j = n_j \cdot \log_2 \Delta_{gj}$  – суммарная удаленность, или удаление, сообщений в  $j$ -й однородной цепи (ранее – глубина  $j$ -й цепи);

$G = n \cdot \log_2 \Delta_g$  – суммарная удаленность, или удаление, полной неоднородной цепи (ранее – глубина цепи).

Отдельно запишем выражение, аналогичное (3), в котором интервальный объем  $j$ -й однородной цепи определен через средний геометрический интервал как

$$V_{\Delta j} = \Delta_{gj}^{n_j}.$$

Произведение интервального и сериального объемов  $j$ -й однородной цепи назовем (полным) объемом  $j$ -й однородной цепи и запишем в виде:

$$V_j = V_{\Delta j} \cdot V_{\tau j}. \quad (10)$$

Используя комплементарную дополнительную интервального (8) и сериального (9) представлений всех  $n_j$  сообщений  $j$ -й однородной цепи, произведения пар интервалов и длин серий для каждого  $i$ -го сообщения запишем в виде:

$$\prod_{i=1}^{n_j} (\Delta_{ij} \cdot \tau_{ij}) = \prod_{i=1}^{n_j} \Delta_{ij} \cdot \prod_{i=1}^{n_j} \tau_{ij} = V_{\Delta j} \cdot V_{\tau j}. \quad (11)$$

Из сравнения (10) и (11) видно, что одна и та же комплексная характеристика  $V_j$  может быть вычислена либо с раздельным определением интервальной и сериальной характеристик, либо – без раздельной оценки этих свойств  $j$ -й однородной цепи.

Назовем емкостью  $i$ -го сообщения в  $j$ -й цепи произведение вида

$$v_{ij} = \Delta_{ij} \cdot \tau_{ij}.$$

«Емкостное» представление  $j$ -й однородной цепи, определенное кортежем вида

$$\langle v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{n_j j} \rangle,$$

не содержит компонентов, равных единице, так как  $v_{ij} \geq 2$  для любых компонентов, однако при этом интервальные и сериальные свойства цепи неразличимы.

Для получения емкостных характеристик строя цепи применимы выражения, представленные выше. Введем обозначения и названия для некоторых из них

$v_{ij}$  – емкость  $i$ -го сообщения в  $j$ -й однородной цепи;

$V_j$  – (емкостной) объем  $j$ -й однородной цепи;

$V$  – (емкостной) объем массива данных;

$v_{gj}$  – средняя геометрическая емкость сообщений в  $j$ -й однородной цепи;

$v_g$  – средняя геометрическая емкость сообщений в массиве данных;

$c_{ij} = \log_2 v_{ij}$  – размер  $i$ -го сообщения в  $j$ -й однородной цепи;

$c_j = \log_2 v_{gj}$  – средний размер сообщений  $j$ -й однородной цепи;

$c = \log_2 v_g$  – средний размер сообщений в массиве данных;

$C_j = n_j \cdot \log_2 v_{gj}$  – (полный) размер  $j$ -й однородной цепи;

$C = n \cdot \log_2 v_g$  – (полный) размер массива данных.

Используя представленные характеристики, легко получить следующие выражения для комплексных характеристик строя цепи:

$$V = V_{\Delta} \cdot V_{\tau}, \quad v_g = \Delta_g \cdot \tau_g, \quad C = G + L, \quad c = g + l, \quad (12)$$

Формула (12) в более подробном представлении имеет вид:

$$c = \sum_{j=1}^m \frac{n_j}{n} \cdot \log_2 \Delta_{gj} + \sum_{j=1}^m \frac{n_j}{n} \cdot \log_2 \tau_{gj}, \quad (13)$$

Для псевдотекстовых регулярных массивов данных, у которых  $\Delta_{gj} = \Delta_{aj} = n/n_j$ , первое слагаемое в (13) для  $n \rightarrow \infty$  совпадает с энтропией; при любых других расположениях символов средняя удаленность сообщений в цепи, представленная первыми слагаемыми в (12) и (13), меньше числа идентифицирующих информации (по М. Мазуру, [6]), т.е.  $g < H$ , а средний геометрический интервал меньше числа описательных информации (по М. Мазуру), т.е.  $\Delta_g < D$ .

Важно заметить, что так же, как и у интервальных характеристик, время вычисления сериальных и емкостных характеристик линейно зависит от размера входных данных (длины последовательности). И, как следствие, они эффективны для обработки длинных последовательностей (больших массивов данных).

### Заключение

Очевидно, что интервальные, сериальные и емкостные характеристики строя цепи попарно дополняют друг друга. Однако емкостные характеристики дают «полное» количественное описание массива данных, которое нельзя получить только интервальными или сериальными характеристиками. Полное

описание строя интервальными характеристиками возможно только для «текстовых» массивов данных, где  $\tau_{ij} = 1$ . Сериальные характеристики дают полное описание таких массивов, которые практически не имеют «точечных» данных, но состоят из длинных повторов (серий) одинаковых данных, где  $\Delta_{ij} = 1$ .

Дальнейшая разработка средств описания и анализа строя предполагает исследование свойств введенных здесь характеристик, а также возможную их модификацию. Так как представленные сериальные оценки предусматривают неоднократное чтение серий на позиции некоторого отрезка, в дальнейшем предусматривается разработка средств для однократного чтения отрезков с последующими исследованиями и сравнением чувствительности сериальных и «отрезочных» характеристик строя цепи.

Компьютерная обработка больших «текстовых» массивов данных (проза, стихотворения, нотные записи, нуклеотидные последовательности) показала высокую чувствительность интервальных характеристик строя к оригинальному расположению компонентов (букв, слов, нот и т.п.) в длинных и очень длинных кортежах. Предполагается, что сериальные и емкостные характеристики строя обеспечат такие же свойства для массивов данных, содержащих длинные последовательности повторяющихся компонентов. Наконец, отметим, что разрабатываемые средства формального описания и анализа и большой набор его числовых характеристик отражают разнообразные свойства нового абстрактного объекта – строя информационной цепи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gumenyuk A., Kostyshin A., Simonova S. An approach to the research of the structure of linguistic and musical texts // *Glottometrics*. 2002. No. 3. P. 61–69.
2. Гуменюк А.С., Поздниченко Н.Н., Шпынов С.Н., Родионов И.Н. О средствах формального анализа строя нуклеотидных цепей // *Математическая биология и биоинформатика*. 2013. Т. 8, № 1. С. 373–397. URL: [http://www.matbio.org/article.php?journ\\_id=15&id=158](http://www.matbio.org/article.php?journ_id=15&id=158) (дата обращения: 15.04.2016).
3. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988. 208 с.
4. Nair A.S., Mahalakshmi T. Visualization of genomic data using inter-nucleotide distance signals // *Proc. of IEEE Genomic Signal Processing*. Bucharest, 2005. URL: <http://www.ece.iit.edu/~biitcomm/research/references/Achuthsankar%20S%20Nair/Visualization%20of%20genomic%20data%20using%20inter-nucleotide%20distance%20signals.pdf> (access date: 21.12.17).
5. Afreixo V., Bastos C.A.C., Pinho A.J., Garcia S.P., Ferreira P.J.S.G. Genome analysis with inter-nucleotide distances // *Bioinformatics*. 2009. V. 25 (23). P. 3064–3070.
6. Мазур М. Качественная теория информации. М.: Мир, 1974. 240 с.

**Гуменюк Александр Степанович**, канд. техн. наук, доцент. E-mail: [gumas45@mail.ru](mailto:gumas45@mail.ru)  
Омский государственный технический университет

Поступила в редакцию 2 октября 2017 г.

*Gumenyuk Alexander S.* (Omsk State Technical University, Russian Federation).

**Serial and complex description of the order of components in data sets.**

**Keywords:** order; order characteristics; remoteness; spread of series; inter-nucleotide distance.

DOI: 10.17223/19988605/42/4

The paper describes the concept of «order of data sequence», which is defined as a special kind of tuple – «vector of order». The components of order are integer numbers  $i$  that are not more than its length  $n$ ; first encountered different numbers  $j \leq m \leq n$  are increasing by one.

The works representing the means of formal description and analysis of order of data sequences, considered such long tuples (symbolic sequences, data sets), in which separate different components throughout the chain nearly always alternate, and the series (of the same elements arranged in row) are rare and short. Computer processing of large «text» data sets (prose, poems, musical compositions, nucleotide sequences) showed high sensitivity of characteristics of order to the arrangement of components (letters, words, notes, etc.) in long and very long tuples. The proposed means suggest representation of symbolic sequence with its order. The result of decomposition of order is congeneric sequences in each of which places occupied by similar elements (in amount of  $n_j$ ) are marked with integer number and all other positions are empty. In these congeneric sequences interval between the nearest occupied positions is used as basic measure and calculated as  $\Delta_{ij}$  – number of empty positions plus one.

This paper discusses means for analysis of ordered data sets, which are mainly represented by alternating series of identical messages. This may be, for example, digitized images, sequences of measured values, etc. These means are represented by a set of «serial» characteristics of order, which are defined, named, marked in a similar way to the previously introduced «interval» characteristics

of order. Series length is used as basic measured value and its size is calculated as a number of occupied places in a row in the  $j$ -th congeneric sequence. The length of series is marked  $\tau_{ij}$  ( $i$  is the number of element in the  $n$ -th partial congeneric sequence). Below, some of the serial characteristics of the system are given.

Serial volume of the  $j$ -th congeneric sequence is defined as (1), and serial volume of the complete sequence is defined as (2):

$$V_{\tau_j} = \prod_{i=1}^{n_j} \tau_{ij}, \quad (1)$$

$$V_{\tau} = \prod_{j=1}^m V_{\tau_j}. \quad (2)$$

The total spread of all series of the  $j$ -th congeneric sequence is defined as (3), and the total spread of all the series in the complete sequence is defined as (4):

$$L_j = n_j \cdot \log_2 \tau_{gj}, \quad (3)$$

$$L = n \cdot \log_2 \tau_g. \quad (4)$$

where  $\tau_{gj}$  is the geometric mean length of the series in the  $j$ -th congeneric sequence;  $\tau_g$  is the geometric mean length of the series in the complete sequence;  $l_j = \log_2 \tau_{gj}$  is the average spread of the series in the  $j$ -th congeneric sequence;  $l = \log_2 \tau_g$  is the average spread of the series in the complete sequence.

The «complete» serial description of an order is defined by the following distributions:  $\{L_j\}$ ,  $\{<l_j, n_j>\}$ .

The order of sequence containing, in addition to «sparse» data also a series of elements described by complexes of numerical characteristics and their distributions, taking into account both intervals  $\Delta_{ij}$  and remoteness  $g_{ij} = \log_2 \Delta_{ij}$  and length of series  $\tau_{ij}$  and their spread  $l_{ij} = \log_2 \tau_{ij}$ . Description of order of such sequence also requires preliminary decomposition into congeneric sequences. It is possible to carry out a separate interval and a serial description of an order.

The concept of capacity of  $i$ -th message  $v_{ij} = \Delta_{ij} \tau_{ij}$  is introduced. Based on the capacity of messages set of «capacitive» characteristics of an order is defined, among which are following:

$$V = V_{\Delta} \cdot V_{\tau}, \quad v_g = \Delta_g \cdot \tau_g, \quad C = G + L, \quad c = g + l,$$

where  $V$  and  $V_{\Delta}$  are complete and interval volume of order;  $G$  is the total remoteness (depth) of order;  $\Delta_g$  is the geometric mean interval and  $g$  is the average remoteness of messages in a complete sequence;  $C = \log_2 V$  is the complete size of the data array;  $c = \log_2 v_g$  is the average size of messages in the data array.

Developed tools and a large set of numerical characteristics reflect a variety of properties of the new abstract object – the order of information chain.

## REFERENCES

1. Gumenyuk, A., Kostyshin, A. & Simonova, S. (2002) An approach to the research of the structure of linguistic and musical texts. *Glottometrics*. 3. pp. 61–69.
2. Gumenuk, A.S., Pozdnichenko, N.N., Shpynov, S.N. & Rodionov, I.N. (2013) Formal analysis of structures of nucleotide chains. *Matematicheskaya biologiya i bioinformatika – Mathematical Biology and Bioinformatics*. 8(1). pp. 373–397. [Online] Available from: [http://www.matbio.org/article.php?journ\\_id=15&id=158](http://www.matbio.org/article.php?journ_id=15&id=158). (Accessed: 15th April 2016). (In Russian).
3. Ventsel, E.S. (1988) *Issledovanie operatsiy: zadachi, printsipy, metodologiya* [Operations research: tasks, principles, methodology]. Moscow: Nauka.
4. Nair, A.S. & Mahalakshmi, T. (2005) Visualization of genomic data using inter-nucleotide distance signals. *Proc. of IEEE Genomic Signal Processing*. [Online] Available from: <http://www.ece.iit.edu/~biitcomm/research/references/Achuthsankar%20S%20Nair/Visualization%20of%20genomic%20data%20using%20inter-nucleotide%20distance%20signals.pdf> (Accessed: 21st December).
5. Afreixo, V., Bastos, A.C., Pinho, A.J., Garcia, S.P. & Ferreira, P.J.S.G. (2009) Genome analysis with inter-nucleotide distances. *Bioinformatics*. 25(23). pp. 3064–3070. DOI: 10.1093/bioinformatics/btp546
6. Mazur, M. (1974) *Kachestvennaya teoriya informatsii* [Qualitative information theory]. Moscow: Mir.

УДК 519.95

DOI: 10.17223/19988605/42/5

**Н.А. Игнатьев****ОБОБЩАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ АЛГОРИТМОВ ПО МЕРЕ КОМПАКТНОСТИ**

Рассматривается вычисление обобщающей способности семейств алгоритмов распознавания с бесконечной емкостью. Для оценки обобщающей способности предлагается использовать меру компактности, значения которой определяются в зависимости от размерности и состава набора признаков, количества удаляемых шумовых объектов и числа объектов-эталонов минимального покрытия.

**Ключевые слова:** мера компактности; шумовые объекты; информативные признаки; объекты-эталоны.

Обобщающая способность относится к числу основных показателей, характеризующих качество распознающих алгоритмов [1]. Эта способность проявляется в умении определять принадлежность объектов к классам, которых алгоритм не видел в процессе обучения. Проверка истинности гипотезы о компактности лежит в основе многих критериев и методов теории распознавания образов. Так, в [1] описан профиль компактности для вычисления обобщающей способности семейств алгоритмов, имеющих бесконечную емкость в пространстве VC (Ванника–Червоненкиса) [2]. Для определения принадлежности произвольного допустимого объекта к классам при использовании таких семейств алгоритмов необходимо хранить в памяти всю выборку. Представителем семейства с бесконечной емкостью является алгоритм «ближайший сосед» (БС).

В практических целях при вычислении обобщающей способности достаточно использовать локальные свойства (локальные ограничения) выборки объектов [1]. Локальным ограничением в [3] можно считать предложенный Н.Г. Загоруйко показатель компактности, определяемый по числу объектов-эталонов минимального покрытия, при котором распознавание объектов классов фиксированной выборки было корректным.

Кроме показателя компактности кандидатами для включения в набор локальных ограничений являются число шумовых объектов, размерность признакового пространства, множество объектов оболочек (подмножества граничных объектов) классов [4] по заданной метрике. Интерес представляет предельное значение размерности, при превышении которого показатель компактности [3] увеличивается. Набор признаков, определяющий предельное значение, рассматривается как информативный для используемой меры близости. Размерность выше предельной приводит к размыванию сходства между объектами выборки.

Существует потребность во введении новой меры измерения компактности с помощью безразмерных величин со значениями в  $[0, 1]$ . Значения этих величин требуются для анализа того, насколько реально получаемая (по заданной мере близости) структура обучающей выборки отличается от идеальной для распознавания. Идеальной считается структура, в которой число объектов-эталонов минимального покрытия равно числу классов.

Меру компактности можно использовать для сравнения метрик и преобразований признакового пространства по отношению «лучше» на фиксированных выборках объектов. Анализ структуры выборок основывается на использовании свойств этого отношения. Методика анализа ориентирована на количественные показатели, вычисляемые по результатам разбиения объектов классов на непересекающиеся группы [4]. Гарантацией единственности разбиения по числу групп и составу входящих в них объектов служит устойчивость используемого алгоритма.

Влияние шумовых объектов на показатели обобщающей способности алгоритмов многократно рассматривалось в научных публикациях. По обширному перечню работ в [5] приводится обзор различных

методов обнаружения и удаления шумовых объектов. Большинство из этих методов ориентировано на использование правила БС.

Качество распознавания по правилу БС существенно зависит от чувствительности метрики к размерности признакового пространства. Изменение размерности связано как с отбором информативных признаков, так и с переходом к описанию объектов в пространстве из латентных признаков.

В качестве инструментария для перехода к латентным признакам в [4, 6] предлагалось использовать два типа правил иерархической агломеративной группировки исходных признаков. Первый тип ориентирован на последовательное объединение двух признаков в один путем нелинейного отображения их значений на числовую ось. Группировка по правилам второго типа производится на основе значений критерия устойчивости объектов по заданной метрике в двухклассовой задаче распознавания. По каждой группе признаков вычисляется обобщенная оценка объекта.

Методы, реализующие два типа правил иерархической группировки, можно идентифицировать как нелинейные и линейные. Нелинейные методы являются инвариантными к масштабам измерений признаков. У линейных методов свойство инвариантности отсутствует. Последовательность формирования групп и латентных признаков на их основе по двум типам правил определяет порядок по отношению степени информативности. Информативность признака вычисляется как экстремум критерия разбиения его (признака) значений на непересекающиеся интервалы в форме проверки степени истинности гипотезы: *«Множества значений признака в описании объектов из разных классов при числе интервалов, равном числу классов, не пересекаются между собой»*.

В данной работе рассматриваются непустые классы (множества) метрик, кластерные структуры обучающих выборок по которым совпадают (являются эквивалентными) по числу групп и составу входящих в них объектов. Информация о кластерной структуре позволяет вести последовательный отбор объектов-эталонов минимального покрытия, в каждом из которых определена локальная метрика. Способ вычисления весов локальных метрик аналогичен используемому в методе FRiS STOLP [3].

Для оценки обобщающей способности алгоритмов метода БС предлагается применять критерий, значения которого вычисляются в зависимости от размерности и состава набора признаков, количества удаляемых шумовых объектов и числа объектов-эталонов минимального покрытия. Оценки по критерию использовались для демонстрации устойчивости результатов отбора информативных признаков методом кросс-валидации на случайных выборках.

## 1. О разбиении объектов классов на непересекающиеся группы

Использование частично обученной выборки (ЧОВ) для задания условий группировки описано в [7]. Примером условия служит указание подмножества из пар объектов выборки, которые при разбиении не должны попадать в одну группу. Принадлежность объектов к непересекающимся классам служит источником дополнительной информации для исследования кластерной структуры с помощью различных мер близости.

Основные идеи приводимого ниже метода изложены в [4]. Целями разбиения объектов классов на непересекающиеся группы являются:

- вычисление и анализ значений компактности объектов классов и выборки в целом;
- поиск минимального покрытия обучающей выборки объектами-эталонами.

Рассматривается задача распознавания в стандартной постановке. Считается, что задано множество  $E_0 = \{S_1, \dots, S_m\}$  объектов, разделенное на  $l$  ( $l > 2$ ) непересекающихся подмножеств (классов)  $K_1, \dots, K_l$ ,  $E_0 = \bigcup_{i=1}^l K_i$ . Описание объектов производится с помощью набора из  $n$  разнотипных признаков

$X(n) = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\xi$  из которых измеряются в интервальных шкалах,  $(n - \xi)$  – в номинальной. На множестве объектов  $E_0$  задана метрика  $\rho(x, y)$ .

Обозначим через  $L(E_0, \rho)$  подмножество граничных объектов классов, определяемое на  $E_0$  по метрике  $\rho(x, y)$ . Объекты  $S_i, S_j \in K_t$ ,  $t = 1, \dots, l$  считаются связанными между собой ( $S_i \leftrightarrow S_j$ ), если

$\{S \in L(E_0, \rho) | \rho(S, S_i) < r_i \text{ and } \rho(S, S_j) < r_j\} \neq \emptyset$ , где  $r_i(r_j)$  – расстояние до ближайшего от  $S_i(S_j)$  объекта из  $CK_t$  ( $CK_t = E_0 \setminus K_t$ ) по метрике  $\rho(x, y)$ .

Множество  $G_{tv} = \{S_{v_1}, \dots, S_{v_c}\}$ ,  $c \geq 2$ ,  $G_{tv} \subset K_t$ ,  $v < |K_t|$  представляет область (группу) со связанными объектами в классе  $K_t$ , если для любых  $S_{v_i}, S_{v_j} \in G_{tv}$  существует путь  $S_{v_i} \leftrightarrow S_{v_k} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow S_{v_j}$ . Объект  $S_i \in K_t$ ,  $t = 1, \dots, l$  принадлежит группе из одного элемента и считается несвязанным, если не существует пути  $S_i \leftrightarrow S_j$  ни для одного объекта  $S_j \neq S_i$  и  $S_j \in K_t$ . Требуется определить минимальное число непересекающихся групп из связанных и несвязанных объектов по каждому классу  $K_t$ ,  $t = 1, \dots, l$ .

Данная задача может рассматриваться и в альтернативной постановке (без задания признаков), если определена квадратная матрица близости  $\{a_{ij}\}_{m \times m}$  между  $m$  объектами и вектор  $F = (f_1, \dots, f_m)$ ,  $f_i \in \{1, \dots, l\}$  принадлежности объектов к классам  $K_1, \dots, K_l$ . Вектор  $F$  служит дополнительной информацией для задания условий группировки.

При определении минимального числа групп из связанных и несвязанных объектов классов используется  $L(E_0, \rho)$  – подмножество граничных объектов (оболочка) классов по заданной метрике  $\rho$  и описание объектов в новом пространстве из бинарных признаков. Для выделения оболочки классов для каждого  $S_i \in K_t$ ,  $t = 1, \dots, l$  строится упорядоченная по  $\rho(x, y)$  последовательность

$$S_{i_0}, S_{i_1}, \dots, S_{i_{m-1}}, S_i = S_{i_0}. \quad (1)$$

Пусть  $S_{i_\beta} \in CK_t$  – ближайший к  $S_i$  объект из (1), не входящий в класс  $K_t$ . Обозначим через  $O(S_i)$  окрестность радиуса  $r_i = \rho(S_i, S_{i_\beta})$  с центром в  $S_i$ , включающую все объекты, для которых  $\rho(S_i, S_{i_\tau}) < r_i$ ,  $\tau = 1, \dots, \beta - 1$ . В  $O(S_i)$  всегда существует непустое подмножество объектов

$$\Delta_i = \left\{ S_{i_\alpha} \in O(S_i) | \rho(S_{i_\beta}, S_{i_\alpha}) = \min_{S_{i_\tau} \in O(S_i)} \rho(S_{i_\beta}, S_{i_\tau}) \right\}. \quad (2)$$

По (2) принадлежность объектов к оболочке классов определяется как  $L(E_0, \rho) = \bigcup_{i=1}^m \Delta_i$ .

Множество объектов оболочки из  $K_t \cap L(E_0, \rho)$  обозначим как  $L_t(E_0, \rho) = \{S^1, \dots, S^\pi\}$ ,  $\pi \geq 1$ . Значение  $\pi = 1$  однозначно определяет вхождение всех объектов класса в одну группу. При  $\pi \geq 2$  преобразуем описание каждого объекта  $S_i \in K_t$  в  $S_i = (y_{i1}, \dots, y_{i\pi})$ , где

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \rho(S_i, S^j) < r_i, \\ 0, \rho(S_i, S^j) \geq r_i. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть по (3) получено описание объектов класса  $K_t$  в новом (бинарном) признаковом пространстве,  $\Omega = K_t$ ,  $\theta$  – число непересекающихся между собой групп объектов,  $S_\mu \vee S_\eta$ ,  $S_\mu \wedge S_\eta$  – соответственно операции дизъюнкции и конъюнкции по бинарным признакам объектов  $S_\mu, S_\eta \in K_t$ . Пошаговое выполнение алгоритма разбиения объектов  $K_t$  на непересекающиеся группы  $G_1, \dots, G_\theta$  таково.

Шаг 1:  $\theta = 0$ .

Шаг 2: Выделить объект  $S \in \Omega$ ,  $\theta = \theta + 1$ ,  $Z = S$ ,  $G_\theta = \emptyset$ .

Шаг 3: **Выполнять** Выбор  $S \in \Omega$  and  $S \wedge Z = \text{true}$ ,  $\Omega = \Omega \setminus S$ ,  $G_\theta = G_\theta \cup S$ ,  $Z = Z \vee S$  пока  $\{S \in \Omega | S \wedge Z = \text{true}\} \neq \emptyset$ .

Шаг 4: Если  $\Omega \neq \emptyset$ , то идти 2.

Шаг 5: Конец.

Разбиение объектов  $E_0$  на непересекающиеся группы по описанному выше алгоритму используется для поиска минимального покрытия [4] обучающей выборки объектами-эталоны. Обозначим через  $R_S = \rho(S, \bar{S})$  расстояние от объекта  $S \in K_t$  до ближайшего объекта  $\bar{S}$  из противоположного к  $K_t$  класса ( $\bar{S} \in CK_t$ ), через  $\delta$  – минимальное число непересекающихся групп из связанных и несвязанных объектов классов на  $E_0$ .

Упорядочим объекты каждой группы  $G_u \cap K_t$ ,  $u = 1, \dots, \delta$ ,  $t = 1, \dots, l$  по множеству значений  $\{R_S\}_{S \in G_u}$ .

В качестве меры близости между  $S \in G_u$ ,  $u = 1, \dots, \delta$  и произвольным допустимым объектом  $S'$  используется взвешенное расстояние по локальной метрике  $d(S, S') = \rho(S, S')/R_S$ . Решение о принадлежности  $S'$  к одному из классов  $K_1, \dots, K_l$  принимается по правилу:  $S' \in K_t$  если

$$d(S_\mu, S') = \min_{S_j \in E_0} d(S_j, S') \text{ and } S_\mu \in K_t \text{ and } d(S_\mu, S') \neq \min_{S_j \in CK_t} d(S_j, S'). \quad (4)$$

Согласно принципа *последовательного исключения*, используемого в процессе поиска покрытия, выборка  $E_0$  делится на два подмножества: множество эталонов  $E_{ed}$  и контрольное множество  $E_k$ ,  $E_0 = E_{ed} \cup E_k$ . В начале процесса  $E_{ed} = E_0$ ,  $E_k = \emptyset$ . Упорядочение по значениям из  $\{R_S\}_{S \in G_u}$ ,  $u = 1, \dots, \delta$  используется для определения кандидата на удаление из числа объектов-эталонов по группе  $G_u$ . Идея отбора заключается в поиске минимального числа эталонов, при котором алгоритм распознавания по (4) остается корректным (без ошибок распознающих объекты) на  $E_0$ .

Будем считать, что нумерация групп объектов отражает порядок  $|G_1| \geq \dots \geq |G_\delta|$  и по группе  $G_p$ ,  $p = 1, \dots, \delta$  не производился отбор объектов-эталонов. Кандидаты на удаление из  $E_{ed}$  последовательно выбираются начиная с  $S \in G_p$  с минимальным значением  $R_S$ . Если включение  $S$  в  $E_k$  нарушает корректность решающего правила (4), то  $S$  возвращается в множество  $E_{ed}$ .

## 2. О мерах компактности в задачах распознавания с учителем

Меры компактности востребованы для оценки обобщающей способности распознающих алгоритмов. При вычислении оценок используются результаты поиска и удаления шумовых объектов, отбора информативных наборов признаков, число объектов-эталонов минимального покрытия обучающих выборок. Рассмотрим метод формирования множества шумовых объектов, мощность которого зависит от проверки предлагаемого ниже условия.

Пусть  $S_k \in K_i$ ,  $\rho(S_k, S_r) = \min_{S_j \in CK_i} \rho(S_k, S_j)$  и  $Z = |\{S_\mu \in K_i | \rho(S_k, S_\mu) < \rho(S_k, S_r)\}|$ . Обозначим через  $D_i$  ( $D_i \in CK_i$ )

множество шумовых объектов класса  $K_i$ . Объект  $S_r \in CK_i$  включается в  $D_i$  и рассматривается как шумовой, если выполняется условие:

$$\frac{ZZ - \lambda}{|K_i|} > \frac{1}{m - |K_i|}, \quad (5)$$

где  $ZZ = |\{S_\mu \in K_i | \rho(S_r, S_k) < \rho(S_p, S_k) < \rho(S_n, S_k)\}|$ ,  $|\lambda| < \min_{1 \leq i \leq l} |K_i|$ ,  $\rho(S_n, S_k) = \min_{S_j \in CK_i \setminus \{S_r\}} \rho(S_j, S_k)$ . Значения  $Z$  и

$Z + ZZ$  можно рассматривать как число представителей класса  $K_i$  в гипершаре с центром в  $S_k \in K_i$  соответственно до и после удаления шумового объекта  $S_r$ .

Селекция объектов обучающих выборок при некоторых ограничениях способствует повышению обобщающей способности алгоритмов распознавания. Считается, что обобщающая способность алгоритма повышается, если дать ему возможность ошибаться на определяемых объектах выборки.

В нашем случае в качестве таковых рассматриваются объекты из  $\bigcup_{i=1}^l D_i$ .

Пусть представители класса  $K_i \cap \left(E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^l D_j\right)$ ,  $i = 1, \dots, l$  разделены на минимальное число  $\mu$  не-

пересекающихся групп объектов по алгоритму из п. 1,  $m_{ij} = |G_{ij}|$ ,  $j = 1, \dots, \mu$ ,  $\sum_{j=1}^{\mu} m_{ij} = m_i$ . Для анализа

результатов разбиения класса  $K_i$  на непересекающиеся группы с учетом их числа, представительности (по количеству объектов) и удаления шумовых объектов предлагается использовать такую структурную характеристику, как оценка компактности:

$$\Theta_i = \frac{\sum_{j=1}^{\mu} m_{ij}^2}{m_i^2}. \quad (6)$$

Очевидно, что множество допустимых значений  $\Theta_i$  по (6) лежат в интервале  $\left[\frac{1}{m_i}, 1\right]$ . Если группа

$G_{i1}$  содержит все объекты из  $K_i \cap \left(E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^l D_j\right)$ , то  $\Theta_i = 1$ . Усредненная оценка компактности обучаю-

щей выборки в целом производится с учетом доли  $\left(\frac{\left|E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i\right|}{m}\right)$  исключенных из рассмотрения по (5)

шумовых объектов как

$$R(E_0, \rho) = \left(\frac{\left|E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i\right|}{m}\right) \frac{\sum_{i=1}^l m_i \Theta_i}{\left|E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i\right|} = \frac{\sum_{i=1}^l m_i \Theta_i}{m}. \quad (7)$$

Значения (6) и (7) косвенно свидетельствуют об однородности (неоднородности) структуры обучающей выборки. Чем ближе сходство групп по числу входящих в них объектов класса, тем ближе значение (6) к  $\frac{1}{m_i}$ , а (7) – к  $\frac{l}{m}$ .

Очевидно, что число и состав шумовых объектов зависят как от значения параметра  $\lambda$  в (5), так и от наборов признаков в описании объектов. Проблемой реализации вычислительных процедур является согласование процессов отбора информативных признаков и удаления шумовых объектов.

Пусть структура объектов классов на выборке  $E_0$  вычисляется по алгоритму группировки из п. 1. Обозначим через  $Sh(\lambda, X(k))$  число шумовых объектов  $E_0$ , определяемых в зависимости от значения  $\lambda$  по (5) на наборе признаков  $X(k) \subset X(n)$ ,  $CF$  – число объектов-эталонов минимального покрытия обучающей выборки, из которой удалены  $Sh(\lambda, X(k))$  шумовых объектов. Так как невозможно получить точное решение задачи отбора информативных признаков без перебора всех их сочетаний с учетом удаления шумовых объектов, на практике рекомендуется использовать различные эвристические методы.

Независимо от используемых методов качество отбора информативных признаков предлагается определять путем проверки двух условий:

– при удалении шумовых объектов  $Sh(\lambda, X(k))$  из  $E_0$  показатель минимального покрытия выборки объектами-эталонами

$$F(X(k), \lambda) = \left(\frac{m - Sh(\lambda, X(k))}{m}\right) \left(\frac{m - Sh(\lambda, X(k))}{CF}\right) \quad (8)$$

стремится к максимальному допустимому значению  $\frac{m}{l}$ ;

– произведение числа объектов-эталонов минимального покрытия на размерность признакового пространства

$$\frac{k \times CF}{m - Sh(\lambda, X(k))} \rightarrow \min_{E_0}. \quad (9)$$

Первое условие (8) необходимо для оценки компактности покрытия выборки объектами-эталоны, второе (9) – для оценки сложности вычислений.

Для поиска информативных наборов  $\{X(k) | X(k) \subset X(n)\}$  предлагается два критерия. Оба критерия явно не используют число объектов-эталонных минимального покрытия  $CF$ . Число шумовых объектов  $Sh(\lambda, X(k))$  по (5) вычисляется по фиксированному значению  $\lambda$ . Такое  $\lambda$  для всех наборов  $X(k) \subset X(n)$ ,  $k \geq 2$  определяется как

$$\lambda = \arg \max_{0 \leq |\eta| < \min_{1 \leq i \leq l} |K_i|} F(X(n), \eta). \quad (10)$$

Использование (10) основано на предположении, что вероятность отбора информативных наборов признаков с более высоким значением компактности по (8) близка к нулю при  $\lambda$ , отличной от (10). В первом (в порядке изложения) критерии используются результаты покрытия объектов выборки гипершарами с учетом удаления шумовых объектов, во втором – оценки компактности по (7) на основе свойства связанности по объектам оболочек классов.

Пусть  $O(S_i, X(k))$  ( $1 \leq k < n$ ) – окрестность объекта  $S_i \in E_0 \cap K_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , определяемая как  $O(S_i, X(k)) = \{S \in K_j | \rho(S, \bar{S}_i) < \rho(S_i, \bar{S}_i)\}$ , где  $\bar{S}_i \in CK_j$  – ближайший к  $S_i$  объект по метрике  $\rho(x, y)$  из дополнения к классу  $K_j$  по множеству признаков  $X(k)$ . Определим оценку  $S_i \in E_0$  на  $X(k)$  как

$$Z(S_i, X(k)) = \max_{S_i \in O(S, X(k))} |O(S, X(k))|. \quad (11)$$

Признак  $x_d \in X(n)$  является кандидатом на включение в набор  $X(k)$ , если

$$\sum_{S_i \in T} Z(S_i, X(k+1)) > \sum_{S_i \in T} Z(S_i, X(k)), \quad (12)$$

где  $X(k+1) = X(k) \cup \{x_d\}$ ,  $T \subset E_0$ .

Обозначим через  $P$  подмножество индексов признаков из  $X(n)$ ;  $D_j(P)$  – множество шумовых объектов класса  $K_j$  по (5) на наборе  $\{x_a\}_{a \in P}$  при значении  $\lambda$ , вычисленное по (10). Пошаговый отбор информативных наборов признаков с использованием (11) и (12) реализуется следующим образом.

Шаг 1: Выбор  $i_1, j_1 \in \{1, \dots, n\}$ .  $P = \{i_1, j_1\}$ .

Шаг 2: Выделить  $\bigcup_{j=1}^l D_j(P)$  по (5) на  $\{x_a\}_{a \in P}$ .  $T = E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^l D_j(P)$ . Вычислить  $\theta(P) = \{\theta_i(P)\}_1^m$  по  $\{x_a\}_{a \in P}$ ,

где  $\theta_i(P) = \{S_\mu, S_i \in K_j | \rho(S_i, S_\mu) < r_i, r_i = \min_{S_t \in CK_j \cap T} \rho(S_i, S_t)\}$ .

Шаг 3:  $u = 0$ .  $Z(P) = \{z_i(P)\}_1^m$ , где  $z_i(P) = \max_{S_i \in \theta_j(P)} |\theta_j(P)|$ .  $Y = 0$ .

Для всех  $v \in \{1, \dots, n\} \setminus P$

выделить  $\bigcup_{j=1}^l D_j(P \cup \{v\})$  по (5) на  $\{x_a\}_{a \in P \cup \{v\}}$ ,  $T = E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^l D_j(P \cup \{v\})$ ,  $C = \sum_{S_i \in T} z_i(P)$ ,

вычислить  $\theta(P \cup \{v\}) = \{\theta_i(P \cup \{v\})\}_1^m$  по  $\{x_a\}_{a \in P \cup \{v\}}$ , где  $\theta_i(P \cup \{v\}) = \{S_\mu, S_i \in K_j | \rho(S_i, S_\mu) < r_i$ ,

$r_i = \min_{S_t \in CK_j \cap T} \rho(S_i, S_t)\}$ ;

вычислить  $Z(P \cup \{v\}) = \{z_i(P \cup \{v\})\}_1^m$ , где  $z_i(P \cup \{v\}) = \max_{S_i \in \theta_j(P \cup \{v\})} |\theta_j(P \cup \{v\})|$ ,  $N = \sum_{S_i \in T} z_i(P \cup \{v\})$ .

Если  $N > C$  и  $N > Y$ , то  $Y = N, u = v$ ;

Шаг 4: Если  $Y > 0$ , то  $P = P \cup \{u\}$ , иди 2.

Шаг 5: Вывод  $P$ .

Шаг 6: Конец.

Для отбора информативных наборов признаков по (7) предлагается следующий алгоритм.

Шаг 1: Выбор  $i_1, j_1 \in \{1, \dots, n\}$ .  $P = \{i_1, j_1\}$ .

Шаг 2: Выделить  $\bigcup_{j=1}^l D_j(P)$  по (5) на  $\{x_a\}_{a \in P}$ .  $T = E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^l D_j(P)$ . Вычислить  $O(P) = \{O_i(P)\}_{S_i \in T}$  по

$\{x_a\}_{a \in P}$ , где  $O_i(P) = \left\{ S_\mu, S_i \in K_j \left| \rho(S_i, S_\mu) < r_i, r_i = \min_{S_t \in CK_j \cap T} \rho(S_i, S_t) \right. \right\}$ . Вычислить разбиение на группы

$G_{11}, \dots, G_{l\eta}, \eta \geq l$  по (2) и (3) алгоритмом из п. 1,  $m_{ij} = |G_{ij}|$ ,  $m_i = \sum_j m_{ij}$ ,  $\sum_{i=1}^l m_i = |T|$ . Вычислить  $\{\Theta_i\}_1^l$  по

$$(6) \text{ и } C = \frac{\sum_{i=1}^l m_i \Theta_i}{m}.$$

Шаг 3:  $u = 0$ .  $Y = C$ .

Для всех  $v \in \{1, \dots, n\} \setminus P$

выделить  $\bigcup_{j=1}^l D_j(P \cup \{v\})$  по (5) на  $\{x_a\}_{a \in P \cup \{v\}}$ ,  $T = E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^l D_j(P \cup \{v\})$ .

Вычислить  $O(P \cup \{v\}) = \{O_i(P \cup \{v\})\}_{S_i \in T}$  по  $\{x_a\}_{a \in P \cup \{v\}}$ , где

$$O_i(P \cup \{v\}) = \left\{ S_\mu, S_i \in K_j \left| \rho(S_i, S_\mu) < r_i, r_i = \min_{S_t \in CK_j \cap T} \rho(S_i, S_t) \right. \right\}.$$

Вычислить разбиение на группы  $G_{11}, \dots, G_{l\eta}, \eta \geq l$  по (2) и (3) алгоритмом из п. 1,  $m_{ij} = |G_{ij}|$ ,  $m_i = \sum_j m_{ij}$ ,

$$\sum_{i=1}^l m_i = |T|. \text{ Вычислить } \{\Theta_i\}_1^l \text{ по (6) и } N = \frac{\sum_{i=1}^l m_i \Theta_i}{m}.$$

Если  $N > Y$ , то  $Y = N$ ,  $u = v$ .

Шаг 4: Если  $u > 0$ , то  $P = P \cup \{u\}$ , идти 2.

Шаг 5: Вывод  $P$ .

Шаг 6: Конец.

Для удобства дальнейшего изложения алгоритмы отбора информативных признаков (в порядке их описания) будем идентифицировать как *ALG1* и *ALG2*. Для ослабления зависимости результатов отбора от выбора начальных приближений можно использовать модификацию этих алгоритмов. Модификация заключается в сочетании принципов пошагового включения в набор информативных признаков и удаления из набора малоинформативных признаков. Для сравнения информативных наборов, полученных по разным критериям, рекомендуется использовать (8) и (9).

### 3. О единственности выбора кластерной структуры на обучающей выборке

Исследование единственности выражается в доказательстве существования множеств (классов) метрик, кластерные структуры фиксированных обучающих выборок при использовании которых совпадают по числу и составу групп объектов. Утверждается, что такому требованию удовлетворяют классы эквивалентных метрик  $\{\Psi\}$ . Например, эквивалентной к метрике  $\rho_1$  является метрика  $\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \rho_1}$ .

Из  $\rho_1, \rho_2 \in \Psi$  следует, что отношения близости между объектами на  $E_0$  по метрике  $\rho_1$  остаются таковыми и по метрике  $\rho_2$ . Другим следствием эквивалентности является сходство объектов оболочек классов, ближайших объектов из противоположных классов, числа групп и их состава на  $E_0$  при реализации алгоритма группировки из п. 1. Для вычисления меры компактности по (6) и (7) можно использовать любую метрику из класса эквивалентности  $\Psi$ .

Кластерные структуры, получаемые по разным метрикам из класса  $\Psi$ , отличаются между собой лишь конфигурацией таксонов. Конфигурация таксонов влияет на значения весов локальных метрик, используемых в (4), а следовательно, на количество и состав объектов-эталонов минимального покрытия.

Для сравнения кластерной структуры по метрике  $\rho \in \Psi$  на данных, отличающихся количеством представителей классов и выборок в целом, предлагается использовать вычисление оценки по (6). Тогда компактность по обучающей выборке  $E_0$  по набору признаков  $X(k)$ ,  $k \leq n$  с учетом удаления шумовых объектов по (5) будет выглядеть так:

$$U(E_0, X(k), \rho, \lambda) = \frac{\sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{|K_i|}{m}\right) |K_i| \Theta_i}{l-1}. \quad (13)$$

Интерес представляет анализ результатов алгоритмов *ALG1* и *ALG2* при отборе информативных наборов признаков. В общем случае наборы, полученные по *ALG1* и *ALG2*, по  $\rho \in \Psi$  при совпадении номеров  $i_1, j_1$  на первом шаге различаются друг от друга. Так как при вычислении оценок по (7) и (11) учитывается порядок следования объектов, то  $\rho \in \Psi$  и множество наборов совпадают по каждому алгоритму (*ALG1* или *ALG2*), но не между алгоритмами.

Локальные метрики объекта  $S \in E_0$ , формируемые из класса  $\Psi$  и используемые в (4), в общем случае не являются эквивалентными. Эта особенность класса  $\Psi$  объясняет различие числа объектов-эталонов минимального покрытия обучающей выборки и его состава.

#### 4. Вычислительный эксперимент

Для демонстрации методики вычисления мер компактности и отбора информативных наборов признаков использовалась выборка данных GERMAN из [8]. Выборка представлена двумя непересекающимися классами  $K_1$  (700 объектов) и  $K_2$  (300 объектов). Объекты описываются 7 количественными и 13 номинальными признаками из набора  $X(20) = (x_1, \dots, x_{20})$ . Для унификации масштабов измерений данных множество значений каждого количественного признака пронормировано в  $[0, 1]$ .

Зафиксируем одну метрику из класса эквивалентности  $\Psi$  и будем считать ее базовой для вычислительного эксперимента. При вычислении меры близости между объектами в качестве базовой использовалась метрика Журавлева

$$\rho(x, y) = \sum_{i \in I} |x_i - y_i| + \sum_{i \in J} \begin{cases} 1, x_i \neq y_i, \\ 0, x_i = y_i, \end{cases} \quad (14)$$

где  $I, J \subset \{1, \dots, 20\}$  – множества номеров соответственно количественных и номинальных признаков.

Из-за особенностей вычисления расстояний по локальным метрикам объектов  $E_0$  число объектов-эталонов минимального покрытия выборки для  $\rho_1, \rho_2 \in \Psi$  в общем случае различаются. Сходство топологических структур эквивалентных метрик выражается в совпадении как числа, так и состава шумовых объектов, определяемых по (5). Связь процесса выбора параметра  $\lambda$  в (5) с оценками компактности (8) показана в табл. 1. В скобках указано число объектов-эталонов, вычисляемых по взвешенным расстояниям на основе эквивалентной (14) метрике  $\rho^*(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$ .

Таблица 1

Оценки компактности по метрике (14) с учетом удаления шумовых объектов

| $\lambda$ | Число            |                   | Оценка компактности по (8) на $X(20)$ |
|-----------|------------------|-------------------|---------------------------------------|
|           | шумовых объектов | объектов-эталонов |                                       |
| 2         | 119              | 203 (200)         | 3,8235                                |
| 1         | 148              | 171 (172)         | 4,2451                                |
| 0         | 217              | 161 (162)         | 3,8080                                |
| -1        | 239              | 141 (140)         | 4,1072                                |
| -2        | 261              | 122 (122)         | 4,4764                                |
| -3        | 261              | 122 (122)         | 4,4764                                |

Результаты анализа структуры выборки из табл. 1 показывают, что оптимальное отношение между числом объектов-эталонов минимального покрытия и числом удаляемых шумовых объектов по (5) на  $X(20)$  достигается при значении параметра  $\lambda = -2$ . На всех последующих этапах эксперимента число шумовых объектов по умолчанию определяется по  $\lambda = -2$  в (5).

Рассмотрим зависимость числа и состава наборов информативных признаков от выбора начальных приближений в алгоритмах  $ALG1$  и  $ALG2$ . Каждое начальное приближение (табл. 2, табл. 3) задано парой индексов-признаков.

Таблица 2

Отбор информативных признаков алгоритмом  $ALG1$

| Начальное приближение | Информативный набор                                            |
|-----------------------|----------------------------------------------------------------|
| $i_1 = 1, j_1 = 2$    | $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{13}, x_{14}$                      |
| $i_1 = 3, j_1 = 4$    | $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{13}, x_{14}$                      |
| $i_1 = 6, j_1 = 13$   | $x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_8, x_{13}, x_{14}, x_{18}, x_{20}$ |

Таблица 3

Отбор информативных признаков алгоритмом  $ALG2$

| Начальное приближение | Информативный набор                            | Компактность по (7) |
|-----------------------|------------------------------------------------|---------------------|
| $i_1 = 1, j_1 = 2$    | $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{12}, x_{20}$ | 0,6688              |
| $i_1 = 3, j_1 = 4$    | $x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{13}$         | 0,6947              |
| $i_1 = 6, j_1 = 13$   | $x_2, x_5, x_6, x_{13}, x_{18}$                | 0,6417              |

Анализ содержимого табл. 2 и табл. 3 показывает, что наборы признаков, полученные по алгоритмам  $ALG1$  и  $ALG2$ , различаются при выборе одинаковых начальных приближений.

Для демонстрации методики точности алгоритмов распознавания на выборке из 1 000 объектов будем использовать набор признаков, полученный по модифицированному алгоритму  $ALG1$ . Смысл модификации сводится к последовательному включению в набор двух информативных и удалению одного малоинформативного признака. При выборе в качестве начального приближения пары признаков ( $x_{17}, x_{18}$ ) информативный набор был представлен  $X(7) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{13}, x_{14})$ . Значения показателей распознавания объектов по исходному  $X(20)$  и информативному  $X(7)$  наборам признаков

с использованием базовой метрики (14) и эквивалентной ей метрике  $\rho^*(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$  приводятся

в табл. 4.

Таблица 4

Точность распознавания по выборке GERMAN

| Вычисляемые показатели     | Исходный набор $X(20)$ | Информативный набор $X(7)$ по метрике |                    |
|----------------------------|------------------------|---------------------------------------|--------------------|
|                            |                        | базовой (14)                          | эквивалентной (14) |
| Число шумовых объектов     | 261                    | 220                                   | 220                |
| Число эталонов             | 122                    | 109                                   | 109                |
| Среднее (8) по эталону     | 4,4764                 | 5,5816                                | 5,5816             |
| Число ошибок (точность, %) | 156 (84,4%)            | 147 (85,3%)                           | 143 (85,7%)        |

Совокупный эффект от использования информативных наборов признаков (см. табл.4) с учетом удаления шумовых объектов более всего заметен по значениям (8) среднего числа объектов, притягиваемых одним объектом-эталонном минимального покрытия.

Для исследования обобщающей способности алгоритмов использовалось случайное деление выборки на обучение и контроль в соотношении 9 : 1. Предварительный анализ результатов показывает, что определенное преимущество в смысле значений показателей обобщающей способности имеют наборы, полученные по алгоритму  $ALG2$ . Из табл. 5 видна прямая корреляционная зависимость между точностью распознавания и средним числом объектов, притягиваемых одним эталоном минимального покрытия.

Обобщающая способность алгоритма по базовой метрике (14)

| Набор признаков                                | Точность распознавания % | Среднее по эталону |
|------------------------------------------------|--------------------------|--------------------|
| Исходный $X(20)$                               | 70,9                     | 4,4407             |
| $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{13}, x_{14}$      | 72,46                    | 5,7088             |
| $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{12}, x_{20}$ | 72,82                    | 5,8802             |
| $x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{13}$         | 73,27                    | 6,0136             |

Оценки компактности (13) для ряда подмножеств объектов GERMAN приводятся в табл. 6. Вычисление оценок производится на исходном  $X(20)$  и информативном  $X(7) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{13}, x_{14})$  наборах признаков.

Таблица 6

Оценки компактности по (13)

| № | $ K_1  +  K_2 $ | Набор признаков |        |
|---|-----------------|-----------------|--------|
|   |                 | $X(20)$         | $X(7)$ |
| 1 | 624 + 276       | 0,2710          | 0,3183 |
| 2 | 633 + 267       | 0,2658          | 0,2470 |
| 3 | 629 + 271       | 0,2596          | 0,2739 |
| 4 | 641 + 259       | 0,2597          | 0,2719 |

Отсутствие прямой коррелированности оценок (13) между наборами  $X(20)$  и  $X(7)$  (см. табл. 6) объясняется тем, что существует подмножество объектов, на котором набор  $X(7)$  не является информативным.

### Заключение

Показаны пути повышения обобщающей способности алгоритмов распознавания через удаление шумовых объектов и отбор информативных наборов признаков с использованием критериев компактности обучающей выборки. Предложенная технология может применяться при интеллектуальном анализе данных для построения информационных моделей с использованием алгоритмов распознавания.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Воронцов К.В. Комбинаторный подход к оценке качества обучаемых алгоритмов // Математические вопросы кибернетики. 2004. № 13. С. 5–34.
2. Валник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М. : Наука, 1979.
3. Загоруйко Н.Г., Кутненко О.А., Зырянов А.О., Леванов Д.А. Обучение распознаванию образов без переобучения // Машинное обучение и анализ данных. 2014. Т. 1, № 7. С. 891–901.
4. Игнатьев Н.А. Кластерный анализ данных и выбор объектов-эталонов в задачах распознавания с учителем // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 6. С. 34–43.
5. Борисова И.А., Кутненко О.А. Цензурирование ошибочно классифицированных объектов выборки // Математические методы распознавания образов – 2015 : 17-я Всерос. конф., 19–25 сент. 2015. Светлогорск, 2015.
6. Мадрахимов Ш.Ф., Саидов Д.Ю. Устойчивость объектов классов и группировка признаков // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2016. № 3 (5). С. 50–55.
7. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. М. : Финансы и статистика, 1989. 608 с.
8. Asuncion A., Newman D.J. UCI Machine Learning Repository // University of California. Irvine. 2007. [www.ics.uci.edu/ml/learn/MLRepository.html](http://www.ics.uci.edu/ml/learn/MLRepository.html).

**Игнатьев Николай Александрович**, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: [ignatov@rambler.ru](mailto:ignatov@rambler.ru)  
Национальный университет Узбекистана (г. Ташкент)

Поступила в редакцию 25 июля 2017 г.

*Ignatiev Nikolay A.* (National University of Uzbekistan. Republic of Uzbekistan).

**The generalizing ability of algorithms by the measure of compactness.**

**Keywords:** measure of compactness; noise objects; informative features; objects-standards.

DOI: 10.17223/19988605/42/5

To estimate the generalizing ability of recognition algorithms, it is offered to use a measure of compactness. It is assumed that a training sample  $E_0 = \{S_1, \dots, S_m\}$  is defined, divided by disjoint classes  $K_1, \dots, K_l$ ,  $l \geq 2$ . The objects of  $E_0$  are described by a set of different-type features of  $X(n) = (x_1, \dots, x_n)$ . The compactness value depends on the dimension and composition of the feature set, the number of noise objects to be deleted, and the number of objects-standards of the minimal coverage of  $E_0$ .

The compactness measure on the sample  $E_0$  in the set of features  $X(k) \subset X(n)$  ( $k \leq n$ ) is calculated as

$$F(X(k), \lambda) = \left( \frac{m - Sh(\lambda, X(k))}{m} \right) \left( \frac{m - Sh(\lambda, X(k))}{CF} \right),$$

where  $CF$  is the number of objects-standards of the minimal coverage of the sample in which  $Sh(\lambda, X(k))$  noise objects are removed.

Let  $S_k \in K_i$ ,  $\rho(S_k, S_r) = \min_{S_j \in CK_i} \rho(S_k, S_j)$  and  $Z = |\{S_\mu \in K_i | \rho(S_k, S_\mu) < \rho(S_k, S_r)\}|$  is the number of objects in the hypersphere with the

center in  $S_k$ . The object  $S_r \in CK_i$  is considered as the noise object if the condition holds

$$\frac{ZZ - \lambda}{|K_i|} > \frac{1}{m - |K_i|},$$

where  $ZZ = |\{S_\mu \in K_i | \rho(S_r, S_k) < \rho(S_p, S_k) < \rho(S_n, S_k)\}|$ ,  $|\lambda| < \min_{1 \leq i \leq l} |K_i|$ ,  $\rho(S_n, S_k) = \min_{S_j \in CK_i \setminus \{S_r\}} \rho(S_j, S_k)$ . The  $ZZ$  value is the number of representatives of the class  $K_i$  added to the hypersphere with center at  $S_k \in K_i$  after removing the noise object  $S_r$ .

To find informative sets  $\{X(k) | X(k) \subset X(n)\}$ , two criteria are proposed. Both criteria do not explicitly use the number of objects-standards of minimum coverage  $CF$ . The generalizing ability of algorithms was calculated by the method of Cross Validation on the initial and informative sets of features. The highest values were on the sets obtained according to the criterion

$$R(E_0, \rho) = \frac{\sum_{i=1}^l m_i \Theta_i}{m} \rightarrow \max,$$

where  $m_i$  is the number of  $K_i$  objects after removing the noise objects,  $\Theta_i$  is the compactness which calculated by the minimal number of disjoint groups of objects of class  $K_i$  by the metric  $\rho$ . The set of admissible values  $R(E_0, \rho)$  belongs to  $(0, 1]$  and can be interpreted in terms of fuzzy logic.

A direct correlation is shown between values by the method of Cross Validation and the average number of objects attracted by the target object of the minimum coverage of the training sample. It is concluded that a measure of compactness  $F(X(k), \lambda)$  can serve as an indicator of the generalizing ability. This measure is recommended for evaluating the quality of recognition algorithms in the data mining.

## REFERENCES

1. Vorontsov, K.V. (2004) Kombinatornyy podkhod k otsenke kachestva obuchaemykh algoritmov [A combinatorial approach to assessing the quality of training algorithm]. In: Lupanov, O.B. (ed.) *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical questions of cybernetics]. Vol. 13. pp. 5–36.
2. Vapnik, V.N. (1979) *Vosstanovlenie zavisimostey po empiricheskim dannym* [Restoration of dependencies on empirical data]. Moscow: Nauka, 448 p. (In Russian).
3. Zagoruiko, N.G., Kutnenko, O.A., Zyryanov, A.O. & Levanov, D.A. (2014) Learning to recognition without overfitting. *Mashinnoe obuchenie i analiz dannykh*. 1(7). pp. 891–901. (In Russian).
4. Ignatiev, N.A. (2015) Cluster analysis and choice of standard objects in supervised pattern recognition problems. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 20(6). pp. 34–43. (In Russian).
5. Borisova, I.A. & Kutnenko, O.A. (2015) [Censoring of erroneously classified sample objects]. *Matematicheskie metody raspoznavaniya obrazov* [Mathematical Methods Of Patterns Recognition]. The 17th All -Russian Conference. Svetlogorsk. September 19–25, 2015. (In Russian).
6. Madrakhimov, Sh.F. & Saidov, D.Y. (2016) Stability of object classes and grouping features. *Problemy vychislitel'noy i prikladnoy matematiki – Problems of Computational and Applied Mathematics*. 3(5). pp. 50–55. (In Russian).
7. Ayvazyan, S.A., Buchstaber, V.M., Yenyukov, I.S. & Meshalkin, L.D. (1989) *Prikladnaya statistika. Klassifikatsiya i snizhenie razmernosti* [Applied statistics [Classification and reduction of dimensionality]. Moscow: Finansy i statistika.
8. Asuncion, A. & Newman, D.J. (2007) *UCI Machine Learning Repository*. Irvine: University of California.

Г.А. Медведев

## ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ НЕАФФИННЫХ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ДОХОДНОСТИ

Рассматривается уравнение временной структуры для цены бескупонной облигации, решение которого в аналитическом виде известно в основном для простейших моделей и имеет аффинную структуру по отношению к краткосрочной ставке. Конструируются решения этого уравнения для некоторого семейства моделей временной структуры, которые основываются на процессах краткосрочной ставки, в стохастических дифференциальных уравнениях которых квадрат волатильности пропорционален третьей степени краткосрочной ставки. Решение уравнения ищется в виде определенного функционального ряда и в итоге приводится к вырожденной гипергеометрической функции. Рассматриваются три версии, лежащие в основе стохастических дифференциальных уравнений для процессов краткосрочной ставки: с нулевым дрейфом, с линейным дрейфом и с квадратичным дрейфом. Приводятся численные примеры для кривой доходности и кривой форвардных ставок для указанных версий. Формулируются некоторые условия существования нетривиальных решений уравнения временной структуры в рассматриваемом семействе процессов.

**Ключевые слова:** уравнение временной структуры доходности; цена бескупонной облигации; модель CIR(1980); модель Ана–Гао; кривая доходности; форвардная кривая.

Предположим, что состояние финансового рынка описывается процентной ставкой  $r(t)$ , которая следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением [1]

$$dr(t) = \mu(r(t))dt + \sigma(r(t))dw(t)$$

с функцией дрейфа  $\mu(x)$ , функцией волатильности  $\sigma(x)$  и стандартным винеровским процессом  $w(t)$ . Для удобства рассуждений будем обозначать функцию дрейфа  $m(r) = \mu(r) - \lambda(r)\sigma(r)$  и функцию диффузии  $s(r) = 0,5 \sigma^2(r)$ . Здесь  $\lambda(r)$  – так называемая рыночная цена риска [2]. Ранее [3] рассматривалась задача определения временной структуры доходности бескупонной облигации [4], когда функции  $m(r)$  и  $s(r)$  являются полиномами. Выяснялось, могут ли в этом случае кривые доходности быть полиномами или степенными рядами по переменной  $r$ . Оказалось, что это имеет место, если только  $m(r)$  и  $s(r)$  – полиномы не более чем первой степени. В этом случае модели временной структуры доходности являются аффинными.

В настоящей статье рассматривается подобная задача, но временная структура цены бескупонной облигации ищется в виде функционального ряда, отличающегося от степенного. Выяснено, что для некоторых случаев такие решения существуют. Получающаяся временная структура оказывается неаффинной и описывается вырожденными гипергеометрическими функциями. В это семейство входят такие известные модели процентных ставок, как модель CIR(1980) [5] и модель Ана–Гао [6].

### 1. Общее уравнение для цены облигации и ее компонентов

Рассмотрим уравнение временной структуры для цены бескупонной облигации  $P(r, \tau)$  [7]:

$$-\frac{\partial P(r, \tau)}{\partial \tau} + m(r) \frac{\partial P(r, \tau)}{\partial r} + s(r) \frac{\partial^2 P(r, \tau)}{\partial r^2} - rP(r, \tau) = 0, \quad P(r, 0) = 1. \quad (1)$$

Здесь  $m(r)$  – функция дрейфа краткосрочной процентной ставки, а  $s(r)$  – квадрат ее волатильности.

Будем искать решение этого уравнения в форме

$$P(r, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n} c_n, \quad (2)$$

где  $a(\tau)$ ,  $\alpha$  и  $c_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , – функция и коэффициенты, подлежащие определению.

Соответствующие производные, использованные в уравнении (1), имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(r, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{a'(\tau)}{a(\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+n) \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n} c_n, \quad \frac{\partial P(r, \tau)}{\partial r} = \frac{1}{a(\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+n) \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n+1} c_n, \\ \frac{\partial^2 P(r, \tau)}{\partial r^2} &= \frac{1}{a(\tau)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+n)(\alpha+n+1) \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n+2} c_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Предположим, что дрейф и волатильность краткосрочной процентной ставки таковы, что функции  $m(r)$  и  $s(r)$  являются полиномами порядка  $p$  и  $q$  соответственно:

$$m(r) = \sum_{k=0}^p m_k r^k, \quad s(r) = \sum_{k=0}^q s_k r^k. \quad (4)$$

Прежде чем подставлять явные выражения производных (3) и полиномов (4) в уравнение (1), преобразуем второе и третье слагаемые в левой части уравнения (1) к более удобной форме.

$$m(r) \frac{\partial P(r, \tau)}{\partial r} = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^p (\alpha+n) m_k a(\tau)^{\alpha+n} \left( \frac{1}{r} \right)^{\alpha+n-k+1} c_n = - \sum_{j=1-p}^{\infty} \left( \sum_{k=\max\{0, 1-j\}}^p (\alpha+j+k-1) m_k a(\tau)^{\alpha+j+k-1} c_{j+k-1} \right) \left( \frac{1}{r} \right)^{\alpha+j}, \quad (5)$$

$$s(r) \frac{\partial^2 P(r, \tau)}{\partial r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^q (\alpha+n)(\alpha+n+1) s_k a(\tau)^{\alpha+n} c_n \left( \frac{1}{r} \right)^{\alpha+n-k+2} = \sum_{j=2-q}^{\infty} \left( \sum_{k=\max\{0, 2-j\}}^q (\alpha+j+k-2)(\alpha+j+k-1) s_k a(\tau)^{\alpha+j+k-2} c_{j+k-2} \right) \left( \frac{1}{r} \right)^{\alpha+j}. \quad (6)$$

Запишем в аналогичной форме также первое и четвертое слагаемые левой части уравнения (1):

$$- \frac{\partial P(r, \tau)}{\partial \tau} = - \sum_{j=0}^{\infty} ((\alpha+j) a'(\tau) a(\tau)^{\alpha+j-1} c_j) \left( \frac{1}{r} \right)^{\alpha+j}, \quad (7)$$

$$- r P(r, \tau) = - \sum_{j=-1}^{\infty} (a(\tau)^{\alpha+j+1} c_{j+1}) \left( \frac{1}{r} \right)^{\alpha+j}. \quad (8)$$

Теперь, подставляя выражения (5)–(8) в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} \sum_j \left( -I(j|0)(\alpha+j) a'(\tau) a(\tau)^{\alpha+j-1} c_j - I(j|-1) a(\tau)^{\alpha+j+1} c_{j+1} - I(j|1-p) \sum_{k=\max\{0, 1-j\}}^p (\alpha+j+k-1) m_k a(\tau)^{\alpha+j+k-1} c_{j+k-1} + \right. \\ \left. + I(j|2-q) \sum_{k=\max\{0, 2-j\}}^q (\alpha+j+k-2)(\alpha+j+k-1) s_k a(\tau)^{\alpha+j+k-2} c_{j+k-2} \right) \left( \frac{1}{r} \right)^{\alpha+j} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Определенную сложность в выражении (9) вызывает тот факт, что суммирование по индексу  $j$  для каждого слагаемого начинается по-разному: для первого слагаемого  $j \geq 0$ , для второго слагаемого  $j \geq -1$ , для третьего слагаемого  $j \geq 1-p$ , для четвертого слагаемого  $j \geq 2-q$ . Поэтому в выражениях слагаемых появились множители  $I(j|k)$ , представляющие индикаторные функции, равные единице, если  $j \geq k$ , и нулю в противном случае. Равенство (9) должно выполняться равномерно по переменной  $r$ . При этом, поскольку функции  $r^{-j}$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) являются линейно независимыми, коэффициенты перед этими функциями в выражении (9) должны быть равными нулю. Это приводит к системе уравнений для неизвестных параметров  $\alpha$ ,  $a(\tau)$  и  $c_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , в представлении (2) решения уравнения (1), если оно существует в таком виде. Заметим, что каждое слагаемое в каждом элементе суммы (9) имеет ненулевой множитель  $a(\tau)^\alpha$ , поэтому для упрощения на него можно сократить во всех элементах суммы.

## 2. Модель с нулевым дрейфом

Среди моделей процессов краткосрочной ставки  $r(t)$  с нулевым дрейфом широко известна модель CIR(1980) [5], в которой ставка порождается в общем случае диффузионным процессом

$$dr = \sigma r^\gamma dw. \quad (10)$$

Для такого процесса плотность вероятностей  $f(x)$  выражается в виде [8]:

$$f(x) = (\gamma - 1)(2\gamma - 1) \frac{2}{r_0} \left( \frac{x}{r_0} - 1 \right) \left( \frac{x}{r_0} \right)^{-2\gamma}, \quad x > r_0 > 0.$$

График этой плотности представлен на рис. 1 для случая  $\gamma = 1,5$ , который чаще всего встречается в литературе. Именно в таком виде эту модель предлагали и авторы оригинальной статьи.

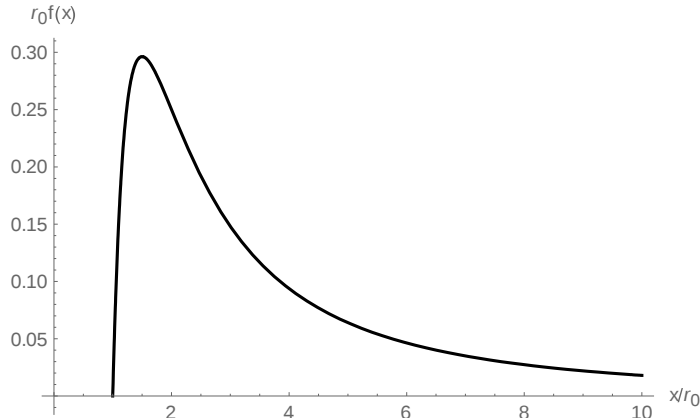


Рис. 1. Плотность вероятностей краткосрочной ставки для модели CIR(1980)

Несмотря на то что модель известна давно, до сих пор не была описана временная структура ее бескупонной доходности. Оказывается, предлагаемый способ нахождения временной структуры позволяет это сделать. Примем в уравнении (10)  $\gamma = 1,5$  и  $s \equiv 0,5 \sigma^2$ . Уравнение (1) для цены бескупонной облигации  $P(r, \tau)$  приобретает вид

$$-\frac{\partial P(r, \tau)}{\partial \tau} + s r^3 \frac{\partial^2 P(r, \tau)}{\partial r^2} - r P(r, \tau) = 0, \quad P(r, 0) = 1. \quad (11)$$

Будем искать решение этого уравнения в форме (2). Соответствующие производные имеют вид:

$$\frac{\partial P(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{a'(\tau)}{a(\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n} c_n, \quad \frac{\partial^2 P(r, \tau)}{\partial r^2} = \frac{1}{a(\tau)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n + 1) \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n+2} c_n.$$

После подстановки этих выражений в уравнение (11) получаем следующее равенство:

$$-\frac{a'(\tau)}{a(\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n} c_n - a(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n-1} c_n + s a(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n + 1) \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n-1} c_n = 0.$$

Это равенство можно переписывается в более удобном виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ (\alpha + n) \frac{a'(\tau)}{a(\tau)} c_n + a(\tau) c_{n+1} - s a(\tau) (\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2) c_{n+1} \right] \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n} + a(\tau) (1 - s \alpha (\alpha + 1)) c_0 \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha-1} = 0.$$

Поскольку выражения  $(a(\tau)/r)^k$  как функции переменной  $r$  для различных значений  $k$  являются линейно независимыми, а равенство должно выполняться равномерно по  $r$ , то коэффициенты перед этими выражениями для различных  $k$  должны быть равны нулю. И мы получаем систему уравнений относительно неизвестных  $\alpha$ ,  $a(\tau)$  и  $c_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$s \alpha (\alpha + 1) = 1, \quad (12)$$

$$(\alpha + n) \frac{a'(\tau)}{a(\tau)^2} c_n + c_{n+1} - s (\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2) c_{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Из уравнения (12) определяется параметр  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4}{s}} - 1 \right) \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{8 + \sigma^2}}{\sigma} - 1 \right) > 0. \quad (14)$$

Вообще говоря, уравнение (12) имеет два корня: положительный и отрицательный. Однако при отрицательном решении, как будет показано ниже, функция цены  $P(r, \tau)$  приобретает свойства, которыми цена бескупонной облигации не обладает. Поэтому принимаем корень (14). Рассмотрим уравнение (13) для  $n = 0$ :

$$a'(\tau) \alpha c_0 + a(\tau)^2 c_1 [1 - s(\alpha + 1)(\alpha + 2)] = 0.$$

С учетом равенства (12) его можно переписать как

$$a'(\tau) = a(\tau)^2 2 \omega / \alpha^2, \quad (15)$$

где для краткости обозначено  $\omega = c_1/c_0$ . Равенство (15) представляет собой дифференциальное уравнение относительно функции  $a(\tau)$ . Решение уравнения имеет вид:

$$a(\tau) = - \frac{\alpha^2}{2\omega\tau + \eta} \quad (16)$$

с точностью до константы  $\eta$ , которая при необходимости определяется из свойств цены облигации. Заметим, что из равенства (15) следует, что

$$\frac{a'(\tau)}{a(\tau)^2} = \frac{2\omega}{\alpha^2}.$$

Теперь рассмотрим уравнение (13) для произвольного  $n \geq 1$ . Его можно записать как рекуррентное соотношение, определяющее коэффициент  $c_{n+1}$  через коэффициент  $c_n$ :

$$c_{n+1} = \frac{2(\alpha + n)\omega}{[s(\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2) - 1]\alpha^2} c_n. \quad (17)$$

Заметим, что

$$\frac{2(\alpha + n)}{[s(\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2) - 1]\alpha^2} = \frac{2(\alpha + n)}{\left( \frac{(\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} - 1 \right) \alpha^2} = \frac{2(\alpha + 1)(n + \alpha)}{(n + 1)\alpha(n + 2(\alpha + 1))} = \frac{\theta}{n + 1} \left( \frac{n + \alpha}{n + \xi} \right),$$

где для краткости обозначено  $\xi = 2(\alpha + 1)$ ,  $\theta = \xi/\alpha$ . Таким образом, последовательность коэффициентов  $\{c_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  выглядит следующим образом:

$$c_0, c_1 = c_0 \omega = c_0 \omega \theta \frac{\alpha}{\xi}, c_2 = c_0 \frac{\omega \theta}{2} \frac{(1 + \alpha)}{(1 + \xi)}, c_3 = c_0 \frac{(\omega \theta)^2}{1 \times 2 \times 3} \frac{(1 + \alpha)(2 + \alpha)}{(1 + \xi)(2 + \xi)}, \dots, c_n = c_0 \frac{(\omega \theta)^{n-1}}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k + \alpha)}{(k + \xi)}, \dots$$

Тогда решение (2) уравнения (11) можно представить в форме:

$$P(r, \tau) = c_0 \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^\alpha \left[ 1 + \left( \frac{\omega \theta a(\tau)}{r} \right) \frac{\alpha}{\xi} + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\omega \theta a(\tau)}{r} \right)^n \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k + \alpha)}{(k + \xi)} \right]. \quad (18)$$

Заметим, что среди специальных функций имеется так называемая вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера)  ${}_1F_1(x, y, z)$  (в обозначениях системы Wolfram Mathematica), которая определяется соотношением

$${}_1F_1(x, y, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \prod_{k=1}^n \frac{(x + k - 1)}{(y + k - 1)} = 1 + \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\Gamma(x + n)}{\Gamma(y + n)}.$$

Используя эти обозначения, цену  $P(r, \tau)$  можно записать в виде:

$$P(r, \tau) = c_0 \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^\alpha \left( 1 + \frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \omega \theta \frac{a(\tau)}{r} \right)^n \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\xi + n)} \right) = c_0 \left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^\alpha {}_1F_1\left( \alpha, \xi, \omega \theta \frac{a(\tau)}{r} \right).$$

По своим экономическим свойствам цена облигации как функция срока до погашения  $\tau$  является непрерывной монотонно убывающей функцией, которая для всякого  $r > 0$  имеет пределы [9]

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} P(r, \tau) = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} P(r, \tau) = 0.$$

Эти требования можно удовлетворить, определяя соответствующим образом до сих пор неопределенные константы  $c_0$  и  $\eta$ . Окончательное выражение для цены бескупонной облигации приобретает вид:

$$P(r, \tau) = \frac{(1+\alpha) \sqrt{\pi}}{2^{1+2\alpha} \Gamma(\alpha+1,5)} \left( \frac{1}{sr\tau} \right)^\alpha {}_1F_1\left(\alpha, 2(1+\alpha), -\frac{1}{sr\tau}\right), \quad (19)$$

где  $s \equiv 0,5 \sigma^2$ ,  $\alpha = 0,5 (\sqrt{1+4/s} - 1) > 0$ , а  $\Gamma(x)$  – гамма функция. Здесь предполагается, что  $\alpha > 0$ . Когда  $\alpha < 0$ , используемая в формуле (19) гамма функция  $\Gamma(x)$  может иметь нежелательные свойства. Например, при целочисленных отрицательных значениях аргумента она имеет неограниченные разрывы, на интервалах  $(2k, 2k+1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , она отрицательна и т.д., что не соответствует свойствам цены облигации. Поэтому отрицательные значения параметра  $\alpha$  нежелательны.

Обычно временную структуру на практике представляют не через цену облигации, а с помощью доходности. По определению доходность до погашения бескупонной облигации (кривая доходности)  $y(r, \tau)$  и доходность форвардных ставок (форвардная кривая)  $f(r, \tau)$  определяются выражениями [10]:

$$y(r, \tau) = -\frac{\ln P(r, \tau)}{\tau}, \quad f(r, \tau) = -\frac{\partial \ln P(r, \tau)}{\partial \tau} \quad (20)$$

и, к сожалению, в компактном аналитическом виде не представляются и могут быть исследованы только численно. На рис. 2 представлены кривая доходности  $y(r, \tau)$  и форвардная кривая  $f(r, \tau)$  для следующих значений параметров:  $s = 0,8$ ;  $r = 0,08$ . Для представления кривых «целиком» для всего интервала возможных значений сроков до погашения  $\tau \in (0, \infty)$  использовано нелинейное преобразование сроков до погашения:  $u = 1 - e^{-r\tau}$ , которое отображает положительную полуось  $(0, \infty)$  в единичный интервал  $(0, 1)$ . Принятое при расчетах численное значение  $\rho = \ln 10/30 = 0,07675$  соответствует тому, что сроки до погашения от 0 до 30 отображаются в интервал  $(0, 0,9)$ . В связи с таким преобразованием изменены и обозначения кривых:  $y(r, \tau) \leftrightarrow Y(u)$ ,  $f(r, \tau) \leftrightarrow F(u)$ .

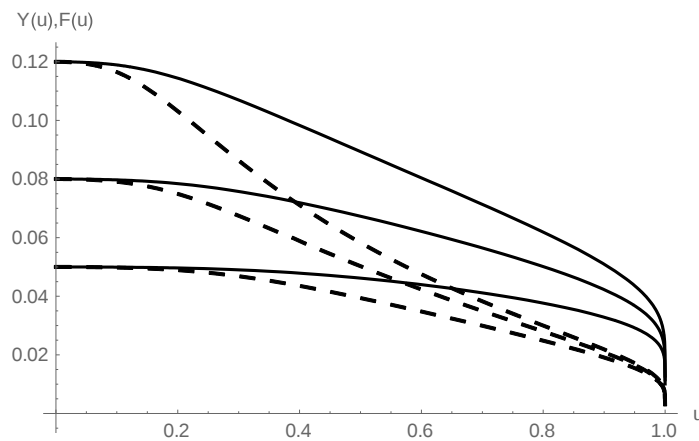


Рис. 2. Кривые доходности  $Y(u)$  (сплошные) и форвардные кривые  $F(u)$  (пунктирные) для модели CIR(1980) для значений ставки  $r \in \{0,05; 0,08; 0,12\}$

Как это обычно бывает, кривые стартуют от одного и того же значения доходности, равного процентной ставке  $r$ , и с увеличением срока до погашения стремятся при  $\tau \rightarrow \infty$  ( $u \rightarrow 1$ ) к одному и тому же пределу, который в данном случае нулевого дрейфа равен нулю.

### 3. Модель с линейным дрейфом

Предположим теперь, что полиномы (4) определены так, что из их коэффициентов отличаются от нуля только два:  $m_1 = m > 0$ ,  $s_3 = s > 0$ , т.е.  $m(r) = mr$ ,  $s(r) = sr^3$ . В этом случае из равенства (9) можно получить соотношения:

$$\begin{aligned}
& -c_0(1-\alpha(\alpha+1)s)a(\tau)^\alpha = 0. \\
& [-(\alpha+j)a'(\tau)a(\tau)^{j-1}c_j - a(\tau)^{j+1}c_{j+1} - (\alpha+j)ma(\tau)^j c_j + \\
& + (\alpha+j+1)(\alpha+j+2)sa(\tau)^{j+1}c_{j+1}]a(\tau)^\alpha = 0, \quad j \geq 0.
\end{aligned}$$

Из этих соотношений получаем следующие уравнения для  $\alpha$ ,  $a(\tau)$  и  $c_j$ ,  $j \geq 1$ :

$$1 - \alpha(\alpha+1)s = 0.$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha a'(\tau)a(\tau)^{-1}c_0 - \alpha m c_0 - a(\tau)c_1 + (\alpha+1)(\alpha+2)sa(\tau)c_1 = 0. \\
& -(\alpha+j)a'(\tau)a(\tau)^{-1}c_j - (\alpha+j)m c_j - a(\tau)c_{j+1} + \\
& + (\alpha+j+1)(\alpha+j+2)sa(\tau)c_{j+1} = 0, \quad j \geq 1.
\end{aligned}$$

Для параметра  $\alpha$  получается квадратное уравнение и, соответственно, два решения – положительное и отрицательное:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{4}{s} + 1} - 1 \right), \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{4}{s} + 1} + 1 \right).$$

Функция  $a(\tau)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка, которое имеет аналитическое решение

$$a(\tau) = \frac{-\alpha m}{(e^{m\tau} - 1)(s(1+\alpha)(2+\alpha) - 1)\omega} = \frac{-\alpha^2 m}{(e^{m\tau} - 1)2\omega}, \quad \omega = \frac{c_1}{c_0}.$$

Наконец, коэффициенты  $c_j$ ,  $j \geq 1$ , удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$c_{j+1} = \frac{(\alpha+j)c_j}{j^2s + js(3+2\alpha) + s(2+3\alpha+\alpha^2) - 1} \frac{a'(\tau) + ma(\tau)}{a(\tau)^2}.$$

Используя уже полученное аналитическое выражение для функции  $a(\tau)$ , можно найти, что второй сомножитель этого выражения не зависит от  $\tau$  и имеет вид:

$$\frac{a'(\tau) + ma(\tau)}{a(\tau)^2} = \frac{s(1+\alpha)(2+\alpha) - 1}{\alpha} \omega,$$

так что рекуррентное соотношение для  $c_j$  можно представить в форме:

$$c_{j+1} = \frac{(\alpha+j)}{(1+j)(\beta+j)} \frac{2\omega}{s\alpha^2} c_j, \quad \beta = 1 + \sqrt{\frac{4}{s} + 1} = 2(1+\alpha) > \alpha.$$

Используя полученные результаты, находим, что  $n$ -е слагаемое ряда (2) можно записать так:

$$\left( \frac{a(\tau)}{r} \right)^{\alpha+n} c_n = c_0 \left( \frac{-m}{sr(e^{m\tau} - 1)} \right)^{\alpha+n} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha+k}{\beta+k}.$$

Таким образом, цена бескупонной облигации  $P(r, \tau)$  может быть представлена в аналитическом виде с помощью вырожденной гипергеометрической функции:

$$P(r, \tau) = c_0 \left( -\frac{m}{sr(e^{m\tau} - 1)} \right)^\alpha {}_1F_1 \left( \alpha, 2(1+\alpha), -\frac{m}{sr(e^{m\tau} - 1)} \right).$$

Наконец, выбирая параметр  $c_0$  так, чтобы удовлетворить поведению функции  $P(r, \tau)$ , получим окончательное выражение для этой функции:

$$P(r, \tau) = \frac{(1+\alpha)\sqrt{\pi}}{2^{1+2\alpha}\Gamma(\alpha+3/2)} \left( \frac{m}{sr(e^{m\tau} - 1)} \right)^\alpha {}_1F_1 \left( \alpha, 2(1+\alpha), -\frac{m}{sr(e^{m\tau} - 1)} \right).$$

Как и в предыдущем случае здесь используется положительный корень  $\alpha$ .

Функции  $y(r, \tau)$  и  $f(r, \tau)$ , определяемые формулами (20) через представление  $P(r, \tau)$ , можно исследовать только численными методами. Правда, предельные значения этих функций могут быть найдены в аналитическом виде:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y(r, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f(r, \tau) = r, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} y(r, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(r, \tau) = \alpha m.$$

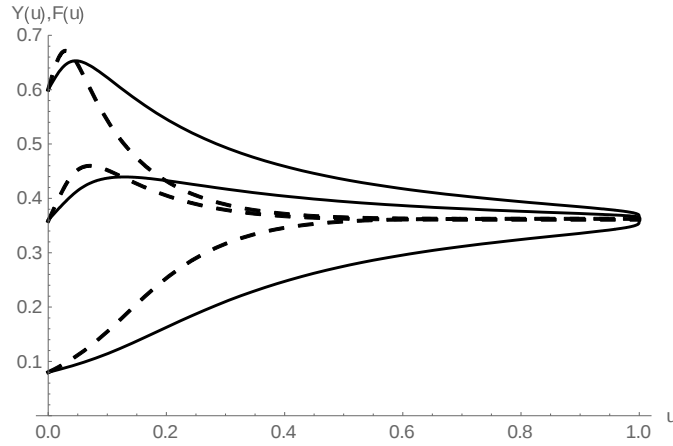


Рис. 3. Функции  $Y(u)$  (сплошные) и  $F(u)$  (пунктирные), вычисленные по формулам (20) для значений ставки  $r \in \{0,08; 0,36; 0,6\}$

Как видно, левый предел определяется только состоянием рынка и не зависит от параметров модели, а правый предел определяется только структурой модели и не зависит от состояния рынка в определенный момент времени. На рис. 3 эти функции в форме  $Y(u)$  и  $F(u)$  представлены для следующих значений параметров:  $s = 0,8$ ;  $m = 0,5$ .

#### 4. Модель с квадратичным дрейфом

Пусть теперь полиномы  $m(r)$  и  $s(r)$  таковы, что  $p = 2$ ,  $q = 3$ , т.е.  $1 - p = 2 - q = -1$ . Тогда компоненты суммы (9) будут отличаться от нуля только для  $j \geq -1$ , причем первое слагаемое отличается от нуля только для  $j \geq 0$ . В этом случае получаем следующую систему уравнений:

при  $j = -1$

$$-c_0 - \alpha m_2 c_0 + \alpha(\alpha + 1) s_3 c_0 = 0; \quad (21)$$

при  $j = 0$

$$-\alpha a'(\tau) a(\tau)^{-1} c_0 - a(\tau) c_1 - \sum_{k=1}^2 (\alpha + k - 1) m_k a(\tau)^{k-1} c_{k-1} + \sum_{k=2}^3 (\alpha + k - 2)(\alpha + k - 1) s_k a(\tau)^{k-2} c_{k-2} = 0; \quad (22)$$

при  $j = 1$

$$-(\alpha + 1) a'(\tau) c_1 - a(\tau)^2 c_2 - \sum_{k=0}^2 (\alpha + k) m_k a(\tau)^k c_k + \sum_{k=1}^3 (\alpha + k - 1)(\alpha + k) s_k a(\tau)^{k-1} c_{k-1} = 0; \quad (23)$$

при  $j > 1$

$$-(\alpha + j) a'(\tau) a(\tau)^{j-1} c_j - a(\tau)^{j+1} c_{j+1} - \sum_{k=0}^2 (\alpha + j + k - 1) m_k a(\tau)^{j+k-1} c_{j+k-1} + \sum_{k=0}^3 (\alpha + j + k - 2)(\alpha + j + k - 1) s_k a(\tau)^{j+k-2} c_{j+k-2} = 0. \quad (24)$$

Из уравнения (21), которое в предположении, что  $c_0 \neq 0$ , имеет вид:  $\alpha(\alpha + 1) s_3 = \alpha m_2 + 1$ , определяется параметр  $\alpha$ :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2s_3} (m_2 - s_3 - \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2s_3} (m_2 - s_3 + \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}). \quad (25)$$

Поскольку уравнение (21) – квадратное, оно имеет два корня, что означает, что решение уравнения (1) может иметь две составляющие вида (2), компромисс между которыми, а также начальное условие  $P(r, 0) = 1$  могут повлиять на выбор коэффициента  $c_0$ .

Уравнение (22) является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции  $a(\tau)$ . Его решение имеет вид:

$$a(\tau) = \frac{\lambda}{\mu + \exp[(\tau + \alpha \xi c_0)(m_1 - (\alpha + 1)s_2)]}, \quad (26)$$

где для компактности обозначено  $\lambda = \alpha c_0((1 + \alpha)s_2\alpha - m_1)$ ,  $\mu = c_1(1 + (\alpha + 1)m_2 - (\alpha + 1)(\alpha + 2)s_3)$ , а  $\xi$  – постоянная интегрирования дифференциального уравнения, выбор которой делается в зависимости от свойств решения уравнения (1).

Из уравнения (23) определяется коэффициент  $c_2$ , а уравнение (24) можно рассматривать как основу для конструирования рекуррентной формулы вычисления коэффициентов  $c_{n+1}$  через предыдущие коэффициенты  $c_j$ ,  $j \leq n$ . Рассмотрим сначала уравнение (24). Оно позволяет выразить коэффициент  $c_{j+1}$  через предыдущие коэффициенты  $c_j$ ,  $c_{j-1}$ ,  $c_{j-2}$  по формуле

$$c_{j+1} = \frac{a(\tau)(\alpha + j)(a'(\tau) + a(\tau)(m_1 - (1 + \alpha + j)s_2)c_j - [a(\tau)(-m_0 + (\alpha + j)s_1)c_{j-1} + (\alpha + j - 2)s_0c_{j-2}](\alpha + j - 1))}{a(\tau)^3[(1 + \alpha + j)(2 + \alpha + j)s_3 - (1 + \alpha + j)m_2 - 1]}. \quad (27)$$

Однако по определению коэффициентов  $c_n$  в выражении (2) они должны быть постоянными коэффициентами, не зависящими от переменной  $\tau$ . То есть что в формуле (27) правая часть равенства не должна зависеть от  $\tau$ . Это будет только тогда, когда  $m_0 = 0$ ,  $s_0 = 0$ ,  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$ . Такое требование является необходимым условием существования нетривиального решения (2) и говорит о том, что нетривиальное решение имеет место не для любых полиномов  $m(r)$  и  $s(r)$  порядка 2 и 3 соответственно, а только для

$$m(r) = m_1r + m_2r^2, \quad s(r) = s_3r^3. \quad (28)$$

Подстановка выявленных необходимых условий в формулу (27) для коэффициента  $c_{n+1}$  приводит к рекуррентному соотношению

$$c_{n+1} = \frac{\alpha + n}{(1 + \alpha + n)(2 + \alpha + n)s_3 - (1 + \alpha + n)m_2 - 1} \frac{a'(\tau) + a(\tau)m_1}{a(\tau)^2} c_n. \quad (29)$$

Заметим, что знаменатель первого сомножителя правой части равенства (29) может быть представлен в виде

$$(1 + \alpha + n)(2 + \alpha + n)s_3 - (1 + \alpha + n)m_2 - 1 = s_3(1 + n)(\beta + n),$$

где

$$\beta = \begin{cases} \beta_1 \equiv \frac{1}{s_3}(s_3 - \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}) & \text{при } \alpha = \alpha_1, \\ \beta_2 \equiv \frac{1}{s_3}(s_3 + \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}) & \text{при } \alpha = \alpha_2. \end{cases} \quad (30)$$

При выполнении выявленных необходимых условий функция  $a(\tau)$ , определяемая по формуле (26), несколько упрощается:

$$a(\tau) = \frac{\lambda}{\mu + \exp[(\tau + \alpha \xi c_0)m_1]}, \quad (31)$$

где  $\lambda = -m_1\alpha c_0$ ,  $\mu = (1 + (\alpha + 1)m_2 - (\alpha + 1)(\alpha + 2)s_3)c_1$ . Подставляя в правую часть формулы (29) явное выражение функции  $a(\tau)$ , определяемой по формуле (20), получим

$$\frac{a'(\tau) + a(\tau)m_1}{a(\tau)^2} = \frac{\mu m_1}{\lambda} = \frac{s_3 \beta \omega}{\alpha},$$

где  $\omega \equiv c_1/c_0$ . При этом зависимость от переменной  $\tau$  в правой части формулы (29) исчезает. Таким образом, рекуррентная формула (29) для коэффициента  $c_{n+1}$  преобразуется к окончательному виду:

$$c_{n+1} = \frac{\beta(\alpha + n)\omega c_n}{\alpha(1 + n)(\beta + n)}. \quad (32)$$

Теперь обратимся к решению последнего уравнения (23), из которого нужно определять  $c_2$ . Поскольку среди необходимых условий есть равенство  $s_0 = 0$ , то уравнение (23) будет совпадать с уравнением (24) при  $n = 1$ , а следовательно, коэффициент  $c_2$  вычисляется по формуле (31) при  $n = 1$ .

Получается, что если полиномы  $m(r)$  и  $s(r)$  порядка 2 и 3 соответственно определяются выражениями (28), решение уравнения (1) может быть представлено в виде суммы двух рядов типа (2), каждый из которых имеет следующую структуру:

$$\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^\alpha c_0 \left(1 + \left(\frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega\beta}{\alpha}\right) \frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega\beta}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}\right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega\beta}{\alpha}\right)^3 \frac{1}{3!} \left(\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}\right) + \dots + \left(\frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega\beta}{\alpha}\right)^n \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha+k}{\beta+k} + \dots\right).$$

Используя вновь вырожденную гипергеометрическую функцию, полученный результат можно компактно записать в аналитическом виде

$$c_0 \left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^\alpha {}_1F_1\left(\alpha, \beta, \frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega\beta}{\alpha}\right). \quad (33)$$

Как уже было сказано, поскольку уравнение (21) имеет два решения (25), решение уравнения (1) может состоять из двух компонентов вида (2) с различными наборами параметров  $(\alpha, \beta)$ , значения которых определяются формулами (25) и (30):

$$P(r, \tau) = c_{01} \left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha_1} {}_1F_1\left(\alpha_1, \beta_1, \frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega\beta_1}{\alpha_1}\right) + c_{02} \left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha_2} {}_1F_1\left(\alpha_2, \beta_2, \frac{a(\tau)}{r} \frac{\omega\beta_2}{\alpha_2}\right). \quad (34)$$

Прежде чем конкретизировать решение, сделаем некоторый предварительный анализ. Вначале рассмотрим свойства диффузионного процесса, задаваемого дрейфом и волатильностью, определяемыми функциями (4) и (28). Согласно принятым предположениям процесс краткосрочной процентной ставки  $r(t)$ , соответствующий этим функциям, описывается уравнением:

$$dr(t) = (m_1 r(t) + m_2 r(t)^2) dt + \sqrt{2s_3} r(t)^{3/2} dt.$$

Маргинальная плотность вероятностей этого процесса имеет вид:

$$f(r) = \frac{\delta^{2-\gamma} e^{-\delta/r}}{r^{3-\gamma} \Gamma(2-\gamma)}, \quad \delta = \frac{m_1}{s_3} > 0, \quad \gamma = \frac{m_2}{s_3} < 2, \quad s_3 > 0, \quad r \geq 0,$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма функция. Принимая во внимание эти неравенства, обратим внимание, что параметры выражения (33) согласно формулам (25) и (30) принимают значения  $\alpha_1 < 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ , а  $\beta_1$  может принимать положительные значения только тогда, когда параметр волатильности  $s_3 > 4$ , что в реальных случаях практически не встречается.

Как известно, цена облигации при  $r > 0$  является монотонно убывающей функцией по переменной  $\tau \in (0, \infty)$  от  $P(r, 0) = 1$  до  $P(r, \infty) = 0$ . Поэтому выражение (33) должно иметь такие же свойства. Функция  ${}_1F_1(x, y, z)$  имеет подходящие свойства только при  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z \in (-\infty, 0)$ . Поэтому первое слагаемое в представлении (34) должно отсутствовать. Кроме того, чтобы аргумент  $z$  у  ${}_1F_1$  принимал значения в интервале  $(-\infty, 0)$  при изменении  $\tau$  в интервале  $(0, \infty)$ , необходимо постоянную интегрирования  $\xi$  в выражении (20) определить равенством  $\xi = \ln(\beta\omega s_3)/\alpha c_0 m_1$ . Тогда

$$a(\tau) = \frac{\lambda}{\mu + \exp[(\tau + \alpha \xi c_0) m_1]} = \frac{-m_1}{(e^{m_1 \tau} - 1) s_3}.$$

Наконец, для того чтобы выполнялось требование  $P(r, 0) = 1$ , необходимо, чтобы не определенный до сих пор параметр  $c_0$  определялся равенством  $c_0 = \Gamma(\beta - \alpha)/\Gamma(\beta)$ . Таким образом, окончательный вид решения (2) уравнения (1) приобретает в рассматриваемом случае окончательный вид:

$$P(r, \tau) = \frac{\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{m_1}{r s_3 (e^{m_1 \tau} - 1)}\right)^\alpha {}_1F_1\left(\alpha, \beta, \frac{-m_1}{r s_3 (e^{m_1 \tau} - 1)}\right), \quad (35)$$

где параметры  $\alpha$  и  $\beta$  определяются с помощью формул (25) и (30):

$$\alpha = \frac{1}{2s_3} (m_2 - s_3 + \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}) > 0, \quad \beta = \frac{1}{s_3} (s_3 + \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}) > 0.$$

Заметим, что это решение полностью совпадает с решением, полученным другим путем в [6], где в обозначениях авторов  $m_1 = \kappa\theta - \lambda_1 > 0$ ,  $m_2 = -\kappa - \lambda_2 < 0$ ,  $s_3 = \sigma^2/2$ . В принципе, используя выражение (23), можно по формулам (20) найти аналитические выражения для кривой доходности  $y(r, \tau)$  и форвардной кривой  $f(r, \tau)$ . Однако эти выражения являются очень громоздкими, и практичнее привлекать численные методы для выражения этих функций для необходимых числовых параметров. На рис. 4 представлены функции  $Y(u)$  и  $F(u)$ , которые взаимно однозначно связаны с кривыми  $y(r, \tau)$  и  $f(r, \tau)$ , как объяснено выше, для модели с квадратичным дрейфом при следующих значениях параметров:  $s = 0,8$ ;  $m_1 = 0,2$ ;  $m_2 = 1$ . Предельные значения этих функций, как и в предыдущей модели, могут быть найдены в аналитическом виде:

$$\lim_{u \rightarrow 0} Y(u) = \lim_{u \rightarrow 0} F(u) = r, \quad \lim_{u \rightarrow 1} Y(u) = \lim_{u \rightarrow 1} F(u) = \alpha m_1.$$

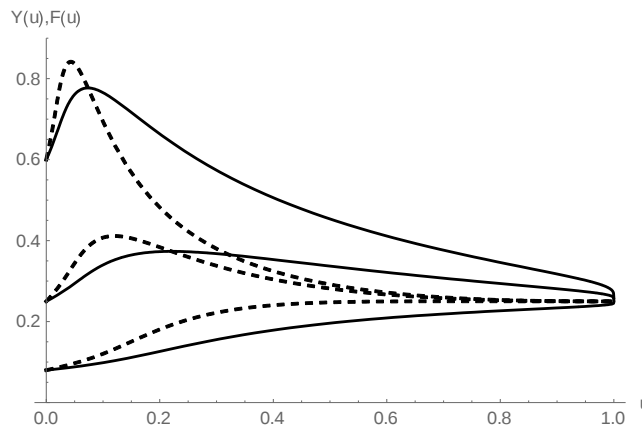


Рис. 4. Кривые доходности  $Y(u)$  (сплошные) и форвардные кривые  $F(u)$  (пунктирные) для модели с квадратичным дрейфом для значений ставки  $r \in \{0,08; 0,25; 0,6\}$

### Закключение

В статье представлены модели, для которых могут быть найдены кривые доходности бескупонных облигаций и соответствующие форвардные кривые, не относящиеся к классу аффинных моделей. К сожалению, модели, допускающие такие решения, немногочисленны и, в частности, включают в себя некоторые известные модели: модель CIR(1980) [5] и модель Ана–Гао [6]. Сформулируем требования к структуре модели краткосрочной процентной ставки, которая допускала бы получение временной структуры цены облигации в форме (2).

Параметры ряда (2) определяются уравнением (9), из которого, собственно, получается система уравнений относительно неизвестных  $\alpha$ ,  $a(\tau)$  и  $c_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

1. Для получения нетривиального решения (т.е. для наличия  $c_n \neq 0$ ) необходимо, чтобы степени  $p$  и  $q$  полиномов  $m(r)$  и  $s(r)$ , определяющих дрейф и волатильность краткосрочной процентной ставки, удовлетворяли одному из следующих условий:  $\{p \leq 2, q = 3\}$ ,  $\{p = 2, q \leq 3\}$ ,  $\{p > 2, q = p + 1\}$ . В этих случаях находятся уравнения, из которых определяется положительный параметр  $\alpha$ .

2. Другое необходимое условие связано с существованием функции  $a(\tau)$ , не зависящей от индекса суммирования ряда (2).

3. Кроме того, необходимо, чтобы коэффициенты  $\{c_n\}$  не зависели от переменной  $\tau$ .

Одновременное выполнение этих необходимых условий существенно сужает семейство моделей, для которых решение уравнения временной структуры (1) имеет вид (2).

Вообще говоря, удастся найти только один основной случай  $\{p = 2, q = 3\}$  – модель с квадратичным дрейфом Ана–Гао [6], из которого при  $m_2 \rightarrow 0$  получается модель с линейным дрейфом. И далее при  $m_1 \rightarrow 0$  имеем модель CIR(1980) [5] с нулевым дрейфом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Merton R. Continuous-Time Finance. Oxford : Blackwell Publ., 1990. 732 p.
2. Duffee G.R. Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models // J. of Finance. 2002. V. 57, No. 1. P. 405–443.
3. Медведев Г.А. Полиномиальные модели временной структуры доходности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 2 (39). С. 39–48.
4. The Handbooks of fixed income securities / F. Fabozzi, T. Fabozzi, eds. New York : IRWIN Prof. Publ., 1995. 1402 p.
5. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. An analysis of variable rate loan contracts // J. of Finance. 1980. V. 35. P. 389–403.
6. Ahn D.-H., Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics // The Review of Financial Studies. 1999. V. 12(4). P. 721–762.
7. Vasiček O.A. An equilibrium characterization of the term structure // J. of Financial Economics. 1977. V. 5. P. 177–188.
8. Медведев Г.А. Плотности вероятностей процессов процентных ставок доходности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 3 (36). С. 35–48.
9. Hull J.C. Options, futures, and other derivatives. Boston : Prentice Hall, 1998. 841 p.
10. Медведев Г.А. Стохастические процессы финансовой математики. Минск : Белорус. гос. ун-т, 2005. 243 с.

**Медведев Геннадий Алексеевич**, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: MedvedevGA@bsu.by  
Белорусский государственный университет (г. Минск, Беларусь).

Поступила в редакцию 24 ноября 2017 г.

Medvedev Gennady A. (Belarusian State University, Minsk, Republic Belarus).

**On a family of non-affine models of the term structure of yield.**

**Keywords:** equation of term structure of yield; price of zero-coupon bond; CIR(1980) model; Ahn-Gao model; yield curve; forward curve.

DOI: 10.17223/19988605/42/6

The equation of term structure for the price of a zero-coupon bond is considered, the solution of which in analytical form is known, basically, for the simplest models and has an affine structure with respect to the short-term rate. In this paper, we construct solutions of this equation for a family of term structure models that are based on short-term rate processes, in which the square of volatility is proportional to the third power of the short-term rate in stochastic differential equations. The solution of the equation is sought in the form of a definite functional series and, as a result, is reduced to a confluent hypergeometric function. Three versions of the underlying stochastic differential equations for short-term rate processes are considered: with zero drift, linear drift, and quadratic drift. Numerical examples are given for the yield curve and the forward rate curve for these versions. Some conditions for the existence of nontrivial solutions of the equation of term structure in the family of processes under consideration are formulated.

Unfortunately, models that admit such solutions are few and, in particular, include some well-known models: the CIR (1980) model and the Ahn-Gao model. The requirements for the structure of the short-term interest rate model, which would allow the receipt of a term structure of the bond price in the form considered in the article, are reduced to the following.

1. To obtain a non-trivial solution, it is necessary that the degrees of polynomials determining the drift and volatility of the short-term interest rate satisfied certain constraints.

2. Another necessary condition is connected with the fact that the functional series is power-law with respect to a function that does not depend on the index of summation of the series.

3. In addition, it is necessary that the coefficients of the functional series do not depend on the maturity of the bond.

Simultaneous fulfillment of these necessary conditions significantly narrows the family of models for which the solution of the time-structure equation has the form considered in the article.

## REFERENCES

1. Merton, R. (1990) *Continuous-Time Finance*. Oxford: Blackwell Publ.
2. Duffee, G.R. (2002) Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models. *Journal of Finance*. 57(1). pp. 405–443. DOI: 10.1111/1540-6261.00426
3. Medvedev, G.A. (2017) Polynomial models of yield term structure. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(39). pp. 39–48. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/39/6
4. Fabozzi, F. & Fabozzi, T. (eds) (1995) *The Handbooks of Fixed Income Securities*. New York: IRWIN Prof.
5. Cox, J.C., Ingersoll, J.E. & Ross, S.A. (1980) An analysis of variable rate loan contracts. *Journal of Finance*. 35. pp. 389–403. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1980.tb02169.x

6. Ahn, D.-H. & Gao, B. (1999) A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *The Review of Financial Studies*. 12(4). pp. 721–762. DOI: 10.1093/rfs/12.4.721
7. Vasiček, O.A. (1977) An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*. 5. pp. 177–188. DOI: 10.1016/0304-405X(77)90016-2
8. Medvedev, G.A. (2016) The probability density of the processes of yield interest rates. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(36). pp. 35–48. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/36/4
9. Hull, J.C. (1998) *Options, futures, and other derivatives*. Boston: Prentice Hall.
10. Medvedev, G.A. (2005) *Stokhasticheskie protsessy finansovoy matematiki* [Stochastic Processes of Financial Mathematics]. Minsk: BSU.

М.А. Маталыцкий, Д.Я. Копать

# АНАЛИЗ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ СЕТИ С НЕТЕРПЕЛИВЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Проведено исследование в переходном режиме открытой сети, в которую поступают простейшие потоки положительных и отрицательных заявок различных типов. Обслуживания требуют только положительных заявки. Время пребывания в очереди СМО для положительных и отрицательных заявок ограничено случайными величинами, имеющими экспоненциальное распределение с параметрами, различными для каждого типа заявок. Отрицательная заявка определенного типа, время ожидания в СМО которой закончилось, уменьшает количество положительных заявок такого же типа в СМО на единицу, если такие заявки в ней есть. Для нахождения нестационарных вероятностей состояний сети предложен модифицированный метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов.

**Ключевые слова:** G-сеть; положительные и отрицательные заявки различных типов; модифицированный метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов.

Рассмотрим открытую G-сеть массового обслуживания [1] с  $n$  однолинейными системами массового обслуживания (СМО), в которую поступают положительные и отрицательные заявки  $r$  типов. В  $i$ -ю СМО из внешней среды поступает простейший поток обычных заявок (положительных) с интенсивностью  $\lambda^+$  и дополнительный поток отрицательных заявок, который также является простейшим, с интенсивностью  $\lambda^-$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Все поступающие потоки независимы. Каждая положительная заявка входного потока независимо от других заявок направляется в  $i$ -ю СМО как заявка типа  $c$  с вероятностью  $p_{0ic}^+$ ,  $\sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^r p_{0ic}^+ = 1$ . Длительности обслуживания положительных заявок в  $i$ -й СМО  $c$ -го типа распределены по экспоненциальному закону с параметром  $\mu_{ic}$ .

В сети циркулируют не только положительные заявки, но и отрицательные [2]. Каждая отрицательная заявка входного потока независимо от других отрицательных заявок направляется в  $i$ -ю СМО как отрицательная заявка типа  $c$  с вероятностью  $p_{0ic}^-$ ,  $\sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^r p_{0ic}^- = 1$  и через случайное время уничтожает одну положительную заявку типа  $c$ . После окончания обслуживания положительной заявки типа  $c$  в  $i$ -й СМО она направляется в  $j$ -ю СМО с вероятностью  $p_{icjs}^+$  опять как положительная заявка типа  $s$ , а с вероятностью  $p_{icjs}^-$  – как отрицательная заявка типа  $s$ , и с вероятностью  $p_{ic0} = 1 - \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^r (p_{icjs}^+ + p_{icjs}^-)$  уходит из сети,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $c, s = \overline{1, r}$ .

Каждая положительная заявка типа  $c$ , находящаяся в системе, имеет время ожидания, ограниченное экспоненциально распределенной случайной величиной (СВ) с параметром  $\theta_{ic}$ . Отрицательная заявка, находящаяся в системе, остается в очереди случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром  $\bar{\mu}_{ic}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $c = \overline{1, r}$ . Положительная заявка типа  $c$ , время ожидания которой в очереди  $i$  истекло, мгновенно переходит в  $j$ -ю СМО и становится положительной заявкой типа  $s$  с вероятностью  $q_{icjs}^+$  или отрицательной заявкой типа  $s$  с вероятностью  $q_{icjs}^-$ , а с вероятностью  $q_{ic0} = 1 - \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^r (q_{icjs}^+ + q_{icjs}^-)$  уходит из сети,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $c, s = \overline{1, r}$ .

Такую сеть можно применить при моделировании реальных сетей связи, в которых при передаче запроса (положительной заявки) в систему связи часто устанавливается так называемый тайм-аут, истечение которого означает, что передача запроса не укладывается в планируемый интервал времени, после чего данный запрос удаляется из очереди. Отрицательные заявки при этом могут описывать вирусы в системе, которые начинают действовать через случайное время.

Под состоянием сети будем понимать вектор

$$(\vec{k}, \vec{l}, t) = (k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1r}, k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2r}, \dots, k_{n1}, k_{n2}, \dots, k_{nr}, l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1r}, l_{21}, l_{22}, \dots, l_{2r}, \dots, l_{n1}, l_{n2}, \dots, l_{nr}, t),$$

который образует цепь Маркова с непрерывным временем и счетным числом состояний, здесь  $k_{ic}$  и  $l_{ic}$  соответственно число положительных и отрицательных заявок типа  $c$  в  $i$ -й СМО в момент времени  $t$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $c = \overline{1, r}$ . Требуется найти вероятности состояний сети в переходном режиме.

Следует отметить, что выражения для таких вероятностей состояний в стационарном режиме в форме произведения, когда под состоянием сети понимается вектор типов заявок, были найдены в работах [1–3]. При этом предполагается, что отрицательные заявки фиксированного типа воздействуют только на положительные заявки того же типа. В работе [4] рассматривалась марковская сеть со случайным временем пребывания в очередях различных типов положительных, отрицательных заявок и сигналов, причем очереди в СМО сеть отдельно формировались для этих типов заявок и сигналов. Под состоянием сети понимался вектор числа заявок; также найдено стационарное распределение вероятностей сети в форме произведения.

Для нахождения вероятностей состояний G-сети в переходном (нестационарном) режиме ранее применялся приближенный метод, основанный на использовании аппарата многомерных производящих функций [5], при предположении, что СМО сети функционируют в условиях высокой нагрузки. В данной работе это предположение снято.

## 1. Система разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний сети

Пусть  $I_{ic}$  – нулевой вектор размерности  $n \times r$ , за исключением компоненты с номером  $r(i-1)+c$ , которая равна единице,  $I_{00}$  –  $n \times r$  вектор, состоящий из нулей,  $P(\vec{k}, \vec{l}, t)$  – вероятность состояния  $(\vec{k}, \vec{l}, t)$ ,  $u(x)$  – единичная функция Хевисайда.

Возможны следующие переходы нашей цепи Маркова процесса в состояние  $(\vec{k}, \vec{l}, t + \Delta t)$  за время  $\Delta t$ :

- 1) из состояния  $(\vec{k} - I_{js}, \vec{l}, t)$ , в этом случае в  $j$ -ю СМО за время  $\Delta t$  поступит положительная заявка типа  $s$  с вероятностью  $\lambda_{0js}^+ u(k_{js}) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $s = \overline{1, r}$ ;
- 2) из состояния  $(\vec{k}, \vec{l} - I_{js}, t)$ , при этом в  $j$ -ю СМО за время  $\Delta t$  поступит отрицательная заявка типа  $s$  с вероятностью  $\lambda_{0ic}^- u(l_{ic}) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $s = \overline{1, r}$ ;
- 3) из состояния  $(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l}, t)$ , в этом случае за время  $\Delta t$  положительная заявка типа  $c$  после обслуживания или по истечении времени ожидания в  $i$ -й СМО уходит из сети во внешнюю среду; суммарная вероятность таких событий равна  $(\mu_{ic} p_{ic0} + \theta_{ic} q_{ic0}) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $c = \overline{1, r}$ ;
- 4) из состояния  $(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{ic}, t)$ , в данном случае в  $i$ -ю СМО после истечения времени ожидания в ней отрицательной заявки типа  $c$  она уничтожает в этой СМО положительную заявку своего типа, вероятность такого события равна  $\mu_{ic}^- \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $c = \overline{1, r}$ ;
- 5) из состояния  $(\vec{k}, \vec{l} + I_{ic}, t)$ , при этом в  $i$ -й СМО время ожидания отрицательной заявки типа  $c$  в  $i$ -й СМО закончилось, и в момент времени  $t$  в ней не было положительных заявок; вероятность такого события равна  $\mu_{ic}^- (1 - u(k_{ic})) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $c = \overline{1, r}$ ;

6) из состояния  $(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, t)$ , в данном случае время обслуживания или ожидания положительной заявки типа  $c$  в  $i$ -й СМО закончилось, и она направляется в  $j$ -ю СМО снова как положительная заявка типа  $s$  с вероятностью  $(\mu_{ic} p_{icjs}^+ + \theta_{ic} q_{icjs}^+) u(k_{js}) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $c, s = \overline{1, r}$ ;

7) из состояния  $(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, t)$ , при этом время обслуживания или ожидания положительной заявки типа  $c$  в  $i$ -й СМО закончилось и она направляется в  $j$ -ю СМО как отрицательная заявка типа  $c$ ; вероятность такого события равна  $(\mu_{ic} p_{icjs}^- + \theta_{ic} q_{icjs}^-) u(l_{js}) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $c, s = \overline{1, r}$ ;

8) из состояния  $(\vec{k}, \vec{l}, t)$ , в этом случае за промежуток времени  $\Delta t$  состояние сети не изменилось, при этом в каждую СМО не поступает ни положительные ни отрицательные заявки любого типа, в них за время  $\Delta t$  не обслужилось, ни ушло из очереди ни одной отрицательной заявки любого типа; вероятность такого события равна  $1 - \left( \lambda^+ + \lambda^- + \sum_{i=1}^n [\mu_{ic} + \theta_{ic} + \mu_{ic}^-] \right) \Delta t + o(\Delta t)$ ;

9) из остальных состояний с вероятностью  $o(\Delta t)$ .

Тогда, используя формулу полной вероятности, получаем, что нестационарные вероятности состояний рассматриваемой сети удовлетворяют следующей системе разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):

$$\begin{aligned} \frac{dP(\vec{k}, \vec{l}, t)}{dt} = & - \left( \lambda^+ + \lambda^- + \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^r [\mu_{ic} + \theta_{ic} + \mu_{ic}^-] \right) P(\vec{k}, \vec{l}, t) + \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^r \lambda^+ p_{0js}^+ u(k_{js}) P(\vec{k} - I_{js}, \vec{l}, t) + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^r \lambda^- p_{0js}^- u(l_{js}) P(\vec{k}, \vec{l} - I_{js}, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^r (\mu_{ic} p_{ic0} + \theta_{ic} q_{ic0}) P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l}, t) + \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^r \mu_{ic}^- P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{ic}, t) + \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^r \mu_{ic}^- (1 - u(k_{ic})) P(\vec{k}, \vec{l} + I_{ic}, t) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r (\mu_{ic} p_{icjs}^+ + \theta_{ic} q_{icjs}^+) u(k_{js}) P(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, t) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r (\mu_{ic} p_{icjs}^- + \theta_{ic} q_{icjs}^-) u(l_{js}) P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, t). \end{aligned} \quad (1)$$

## 2. Нахождение вероятностей состояний G-сети методом последовательных приближений

Систему РДУ (1) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dP(\vec{k}, \vec{l}, t)}{dt} = & - \Lambda(\vec{k}) P(\vec{k}, \vec{l}, t) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) P(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, t) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \sum_{s,c=1}^r \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, t) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{s,c=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}, t), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(\vec{k}) = & \lambda^+ + \lambda^- + \sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^r [\mu_{ic} + \theta_{ic} + \mu_{ic}^-], \\ \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) = & \delta_{0i} \delta_{0c} \lambda^+ p_{0js}^+ + \delta_{0j} \delta_{0s} (\mu_{ic} p_{ic0} + \theta_{ic} q_{ic0}) + (\mu_{ic} p_{icjs}^+ + \theta_{ic} q_{icjs}^+) u(k_{js}), \\ \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) = & \delta_{0i} \delta_{0c} \lambda^- p_{0js}^- u(l_{js}) + (\mu_{ic} p_{icjs}^- + \theta_{ic} q_{icjs}^-) u(l_{js}), \\ \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) = & \mu_{ic}^- \delta_{0j} \delta_{0s} + (1 - u(k_{ic})) \mu_{ic}^- (1 - \delta_{ij}) (1 - \delta_{cs}), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Из (2) следует, что

$$P(\vec{k}, \vec{l}, t) = e^{-\Lambda(\vec{k})t} \left( P(\vec{k}, \vec{l}, 0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x} \left( \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) P(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, x) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{ic}^{++(1)}(\vec{k}) P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{ic}, x) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, x) \right) dx \right). \quad (3)$$

Пусть  $P_q(\vec{k}, \vec{l}, t)$  – приближение  $P(\vec{k}, \vec{l}, t)$  на  $q$ -й итерации,  $P_{q+1}(\vec{k}, \vec{l}, t)$  – решение системы (2), полученное методом последовательных приближений. Тогда из (3) вытекает, что

$$P_{q+1}(\vec{k}, \vec{l}, t) = e^{-\Lambda(\vec{k})t} \left( P(\vec{k}, \vec{l}, 0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x} \left( \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) P_q(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, x) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{ic}^{++(1)}(\vec{k}) P_q(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{ic}, x) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) P_q(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}, x) \right) dx \right). \quad (4)$$

В качестве начального приближения возьмем стационарное распределение

$$P_0(\vec{k}, \vec{l}, t) = P(\vec{k}, \vec{l}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\vec{k}, \vec{l}, t),$$

которое удовлетворяет соотношению

$$\Lambda(\vec{k})P(\vec{k}, \vec{l}) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) P(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}) + \\ + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{ic}^{++(1)}(\vec{k}) P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{ic}) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}).$$

Для последовательных приближений справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** Последовательность  $\{P_q(\vec{k}, \vec{l}, t)\}$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$ , построенная по схеме (4), при любом ограниченном по  $t$  нулевом приближении  $P_0(\vec{k}, \vec{l}, t)$ ,  $0 \leq P(\vec{k}, \vec{l}, t) \leq 1$  сходится при  $m \rightarrow \infty$  к единственному решению системы (2).

**Доказательство.** Так как  $P_0(\vec{k}, \vec{l}, t)$  – ограниченная по  $t$  функция, то в силу (4)  $P_1(\vec{k}, \vec{l}, t)$  также ограничена, поэтому

$$|P_1(\vec{k}, \vec{l}, t) - P_0(\vec{k}, \vec{l}, t)| \leq C(\vec{k}, \vec{l}). \quad (5)$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$|P_q(\vec{k}, \vec{l}, t) - P_{q-1}(\vec{k}, \vec{l}, t)| \leq C^* (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^*)^{q-1} \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}, \quad (6)$$

где

$$\max_{\vec{k}} \alpha_1(\vec{k}) = \alpha_1^*, \max_{\vec{k}} \alpha_2(\vec{k}) = \alpha_2^*, \max_{\vec{l}} \alpha_3(\vec{k}, \vec{l}) = \alpha_3^*, \\ \alpha_1(\vec{k}) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}), \alpha_2(\vec{k}) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{ic}^{++(1)}(\vec{k}), \alpha_3(\vec{k}, \vec{l}) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) \\ \max_{\vec{k}, \vec{l}} C(\vec{k}, \vec{l}) = C^*. \quad (7)$$

При  $q = 1$  согласно (5) это неравенство выполняется. Предположим, что оно выполняется при  $q = N$ , и покажем его справедливость при  $q = N + 1$ . Имеем:

$$|P_{N+1}(\vec{k}, \vec{l}, t) - P_N(\vec{k}, \vec{l}, t)| = \left| e^{-\Lambda(\vec{k})t} \left( P_N(\vec{k}, \vec{l}, 0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x} \left( \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) P_N(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, x) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{ic}^{++(1)}(\vec{k}) P_N(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{ic}, x) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) P_N(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}, x) \right) dx \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -e^{-\Lambda(\vec{k})t} \left( P_{N-1}(\vec{k}, \vec{l}, 0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x} \left( \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) P_{N-1}(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, x) + \right. \right. \\
& + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) P_{N-1}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, x) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{js}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) P_{N-1}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}, x) \Big) dx \Big| \leq \\
& \leq \left| e^{-\Lambda(\vec{k})t} \left( \int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x} \left( \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) \right) P_N(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, x) - P_{N-1}(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, x) \right. \right. \\
& + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) \Big| P_N(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, x) - P_{N-1}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, x) \Big| + \\
& + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^r \Phi_{js}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) \Big| P_N(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}, x) - P_{N-1}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}, x) \Big| dx \Big) \leq \\
& \leq \left| e^{-\Lambda(\vec{k})t} \left( \int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x} \left( \alpha_1^* C^* (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^*)^{N-1} \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \alpha_2^* C^* (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^*)^{N-1} \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \alpha_3^* C^* (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^*)^{N-1} \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} \right) \right) \right| \leq \left| e^{-\Lambda(\vec{k})t} \left( \int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x} C^* (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^*)^N \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} dx \right) \right|.
\end{aligned}$$

Поскольку  $e^{-\Lambda(\vec{k})t} e^{-\Lambda(\vec{k})x} \leq 1$  при  $x \in [0, t]$ , то

$$e^{-\Lambda(\vec{k})t} \int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x} \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} dx \leq \int_0^t \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} dx = \frac{t^N}{N!} \quad (8)$$

и из (8) следует, что неравенство (6) имеет место.

Так как  $\lim_{q \rightarrow \infty} P_q(\vec{k}, \vec{l}, t) = \lim_{q \rightarrow \infty} \left( P_0(\vec{k}, \vec{l}, t) + \sum_{n=0}^{m-1} (P_{q+1}(\vec{k}, \vec{l}, t) - P_q(\vec{k}, \vec{l}, t)) \right) = P_0(\vec{k}, \vec{l}, t) + \sum_{q=0}^{\infty} (P_{q+1}(\vec{k}, \vec{l}, t) - P_q(\vec{k}, \vec{l}, t)) \leq$   
 $\leq P_0(\vec{k}, \vec{l}, t) + C^* \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1^* t + \alpha_2^* t + \alpha_3^* t)^q}{q!} = P_0(\vec{k}, \vec{l}, t) + C^* e^{\alpha_1^* t + \alpha_2^* t + \alpha_3^* t}$ , т.е. предел последовательности  $\{P_q(\vec{k}, \vec{l}, t)\}$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$ , существует, обозначим его  $P_{\infty}(\vec{k}, \vec{l}, t)$ . Если подставить  $P_{\infty}(\vec{k}, \vec{l}, t)$  в (3) вместо  $P(\vec{k}, \vec{l}, t)$ , то видно, что  $P_{\infty}(\vec{k}, \vec{l}, t)$  является решением системы уравнений (2), удовлетворяющим начальным условиям  $P_{\infty}(\vec{k}, \vec{l}, 0) = P(\vec{k}, \vec{l}, 0)$  согласно условиям предыдущей теоремы.

Докажем единственность решения. Предположим, что существует другое решение  $P^*(\vec{k}, \vec{l}, t)$ , тогда для него справедливо (3), если заменить в нем  $P(\vec{k}, \vec{l}, t)$ ,  $P(\vec{k}, \vec{l}, 0)$ ,  $P(\vec{k} + I_{ic} - I_{jc}, \vec{l}, t)$ ,  $P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{jc}, t)$  соответственно на  $P^*(\vec{k}, \vec{l}, t)$ ,  $P^*(\vec{k}, \vec{l}, 0)$ ,  $P^*(\vec{k} + I_{ic} - I_{jc}, \vec{l}, t)$ ,  $P^*(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{jc}, t)$ . Поэтому, используя (3), получаем:

$$\begin{aligned}
& |P_q(\vec{k}, \vec{l}, t) - P^*(\vec{k}, \vec{l}, t)| \leq e^{-\Lambda(\vec{k})t} |P_q(\vec{k}, \vec{l}, t) - P^*(\vec{k}, \vec{l}, t)| + e^{-\Lambda(\vec{k})t} \int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x} \times \\
& \times \int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x} \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) |P_q(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, x) - P^*(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, x)| + \\
& + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) |P_q(\vec{k} + I_{ic} + I_{js}, \vec{l} + I_{js}, x) - P^*(\vec{k} + I_{ic} + I_{js}, \vec{l} + I_{js}, x)| + \\
& + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^r \Phi_{js}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) |P_q(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, x) - P^*(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, x)| dx \Big).
\end{aligned}$$

Аналогично, как при доказательстве неравенства (6), можно показать, что

$$\left| P_q(\vec{k}, \vec{l}, t) - P^*(\vec{k}, \vec{l}, t) \right| \leq M(\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^*)^q \frac{t^q}{q!}.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю, как общий член сходящегося ряда  $\sum_{q=0}^{\infty} M(\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^*)^q \frac{t^q}{q!} = M(\vec{k}) e^{(\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^*)t}$ , поэтому  $\lim_{q \rightarrow \infty} P_q(\vec{k}, \vec{l}, t) = P^*(\vec{k}, \vec{l}, t)$ . Но ранее уже получили, что  $\lim_{q \rightarrow \infty} P_q(\vec{k}, \vec{l}, t) = P(\vec{k}, \vec{l}, t)$ , значит  $P^*(\vec{k}, \vec{l}, t) = P(\vec{k}, \vec{l}, t)$ , что и доказывает единственность.

**Теорема 2.** Любое приближение  $P_q(\vec{k}, \vec{l}, t)$ ,  $q \geq 1$ , представимо в виде сходящегося степенного ряда

$$P_q(\vec{k}, \vec{l}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{qm}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) t^m, \quad (9)$$

коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям (10) с учетом (11), (12), где

$$d_{q+1m}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) = \frac{-\Lambda(\vec{k})^m}{m!} \left\{ P(\vec{k}, \vec{l}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{k})^{u+1}} D_{qu}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) \right\}, m \geq 0, \quad (10)$$

$$d_{q0}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) = P(\vec{k}, \vec{l}, 0), d_{0m}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) = P(\vec{k}, \vec{l}, 0) \delta_{m0}, \quad (11)$$

$$D_{qm}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) = \sum_{i,j=1}^n \left[ \sum_{s,c=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) d_{qm}^{+-}(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}) + \right. \\ \left. + \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=1}^r \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) d_{qm}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) d_{qm}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}) \right]. \quad (12)$$

**Доказательство.** Докажем, что коэффициенты степенного ряда (9) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (10). Подставим последовательные приближения (9) в (4). Тогда, учитывая, что

$$e^{-\Lambda(\vec{k})t} \int_0^t e^{\Lambda(\vec{k})x} x^m dx = \left[ \frac{1}{\Lambda(\vec{k})} \right]^{m+1} l! \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\vec{k})]^m}{j!}, m = 0, 1, 2, \dots,$$

получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_{qm}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) t^m = e^{-\Lambda(\vec{k})t} P(\vec{k}, \vec{l}, 0) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^n \left[ \sum_{s,c=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) d_{qm}^{+-}(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}) + \right. \\ \left. + \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=1}^r \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) d_{qm}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) d_{qm}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}) \right].$$

Используя обозначения (10), этот ряд можно переписать в виде:

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_{qm}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) t^m = e^{-\Lambda(\vec{k})t} P(\vec{k}, \vec{l}, 0) + \sum_{m=0}^{\infty} D_{qm}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) \left[ \frac{1}{\Lambda(\vec{k})} \right]^{m+1} m! \sum_{u=m+1}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\vec{k})]^u}{u!} t^u.$$

Поменяв местами индексы суммирования и разлагая  $e^{-\Lambda(\vec{k})t}$  в ряд по степеням  $t$ , будем иметь

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_{qm}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) t^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\vec{k})]^m}{m!} \left\{ P(\vec{k}, \vec{l}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{[\Lambda(\vec{k})]^{u+1}} D_{qu}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) \right\} t^m. \quad (13)$$

Приравнявая в левой и правой части выражения (13) коэффициенты при  $t^m$ , получим соотношения (10) для коэффициентов ряда (9).

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (9) воспользуемся формулой Коши–Ада-

мара:  $\frac{1}{R(\vec{k}, \vec{l})} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|d_{qm}^{+-}(\vec{k}, \vec{l})|}$ .

Из (10) следует, что  $\left| d_{q+1m}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) \right| = \frac{\Lambda(\vec{k})^m}{m!} \left| P(\vec{k}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{k})^{u+1}} D_{qu}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) \right|, m \geq 0$ .

Покажем, что  $\left| D_{qu}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) \right|, q \geq 1, u = \overline{0, m-1}$ , ограничено конечным значением  $C_1(\vec{k}, \vec{l})$ . Из ограниченности  $P(\vec{k}, \vec{l}, 0)$  и определения  $D_{qu}^{+-}(\vec{k}, \vec{l})$  следует, что

$$\begin{aligned} D_{00}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) &= \sum_{i,j=1}^n \left[ \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) d_{00}^{+-}(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) d_{00}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) d_{00}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}) \right] \leq C_{00}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}). \end{aligned}$$

Здесь  $C_{00}^{+-}(\vec{k}, \vec{l})$  – некоторая ограниченная величина, а все  $D_{0l}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) = 0, l = 1, 2, \dots$ . Поскольку  $D_{q-10}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) = D_{q-20}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) = \dots = D_{10}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) = D_{00}^{+-}(\vec{k}, \vec{l})$ , то из (11) следует, что  $D_{q-10}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) < C_{00}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}), q \geq 1$ .

Используя метод математической индукции, покажем, что

$$\left| D_{q-1l}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) \right| \leq \frac{C_{q-1m}^{+-}(\vec{k}, \vec{l})}{m!}, l = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Для  $m = 1$  имеем:

$$\begin{aligned} D_{q-11}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) &= \sum_{i,j=1}^n \left[ \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) d_{q-11}^{+-}(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) d_{q-11}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) d_{q-11}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}) \right] = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left[ \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) (-\Lambda(\vec{k} + I_{ic} - I_{js})) P(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, 0) + D_{q-10}^{+-}(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}) \right] + \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) (-\Lambda(\vec{k} + I_{ic} + I_{js})) P(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l} + I_{js}, 0) + D_{q-10}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}) + \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) (-\Lambda(\vec{k})) P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}, 0) + D_{q-10}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}) \leq \frac{C_{q-11}^{+-}(\vec{k}, \vec{l})}{1!}, \end{aligned}$$

где  $C_{q-11}^{+-}(\vec{k}, \vec{l})$  – некоторая ограниченная величина. Предположим, что (14) справедливо для  $m - 1$ , т.е.

$$\left| D_{q-1m-1}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) \right| \leq \frac{C_{q-1m-1}^{+-}(\vec{k}, \vec{l})}{(m-1)!}, l = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Докажем справедливость неравенства (12) для  $m$ . Используя (8), получим

$$\begin{aligned} D_{q-1m}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) &= \sum_{i,j=1}^n \left[ \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) d_{q-1m}^{+-}(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}) + \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) d_{q-1m}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) (-\Lambda(\vec{k})) P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}, 0) + D_{q-10}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}) \right] = \sum_{i,j=1}^n \left[ \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) \times \right. \\ &\quad \times \frac{[-\Lambda(\vec{k} + I_{ic} - I_{js})]^m}{m!} \left( P(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{u! (-1)^{u+1}}{[\Lambda(\vec{k} + I_{ic} - I_{js})]^{u+1}} D_{q-1m-1}^{+-}(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}) \right) + \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^n \left[ \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) \frac{[-\Lambda(\vec{k} + I_{ic} + I_{js})]^m}{m!} \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{u!(-1)^{u+1}}{[\Lambda(\vec{k} + I_{ic})]^{u+1}} D_{q-1m-1}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}) \right) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) \left( -\Lambda(\vec{k}) P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{u!(-1)^{u+1}}{[\Lambda(\vec{k} + I_{ic} + I_{js})]^{u+1}} D_{q-1m-1}^{+-}(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}) \right). \end{aligned}$$

Пусть  $C_1(\vec{k}, \vec{l}) = \max_{q,m} C_{qm}^{+-}(\vec{k}, \vec{l})$ , тогда

$$\begin{aligned} D_{q-1m}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) & \leq \sum_{i,j=1}^n \left[ \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) \times \frac{[-\Lambda(\vec{k} + I_{ic} - I_{js})]^m}{m!} \left( P(\vec{k}, \vec{l}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{u!}{[\Lambda(\vec{k} + I_{ic} - I_{js})]^{u+1}} \frac{C_1(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l})}{u!} \right) + \right. \\ & \quad + \sum_{i,j=1}^n \left[ \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) \frac{[-\Lambda(\vec{k} + I_{ic})]^m}{m!} \times \right. \\ & \quad \times \left( P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{u!}{[\Lambda(\vec{k} + I_{ic})]^{u+1}} \frac{C_1(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js})}{u!} \right) + \\ & \quad \left. + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) \left( \Lambda(\vec{k}) P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{u!}{[\Lambda(\vec{k})]^{u+1}} \frac{C_1(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js})}{u!} \right) \right] \leq \\ & \leq \frac{1}{m!} \sum_{i,j=1}^n \left[ \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) [-\Lambda(\vec{k} + I_{ic} - I_{js})]^m \left( P(\vec{k}, \vec{l}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{u!}{[\Lambda(\vec{k} + I_{ic} - I_{js})]^{u+1}} \frac{C_1(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l})}{u!} \right) + \right. \\ & \quad + \sum_{i,j=1}^n \left[ \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k}) [-\Lambda(\vec{k} + I_{ic} + I_{js})]^m \times \right. \\ & \quad \times \left( P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{u!}{[\Lambda(\vec{k} + I_{ic})]^{u+1}} \frac{C_1(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js})}{u!} \right) + \\ & \quad \left. + \sum_{i,j=1}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l}) \left( \Lambda(\vec{k}) P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{u!}{[\Lambda(\vec{k})]^{u+1}} \frac{C_1(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js})}{u!} \right) \right] \leq \frac{C_{q-1l}^{+-}(\vec{k}, \vec{l})}{m!}, \end{aligned}$$

где  $C_{q-1l}^{+-}(\vec{k}, \vec{l})$  – выражение, стоящее в фигурных скобках, т.е. неравенство (14) справедливо.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(\vec{k}, \vec{l})} & = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{\Lambda(\vec{k})^m}{m!} \left| P(\vec{k}, \vec{l}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{k})^{u+1}} D_{qu}^{+-}(\vec{k}, \vec{l}) \right|} \leq \\ & \leq \Lambda(\vec{k}) \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{m!} \left| P(\vec{k}, \vec{l}, 0) + \sum_{u=0}^{m-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{k})^{u+1}} \frac{C_{q-1u}^{+-}(\vec{k}, \vec{l})}{u!} \right|} \leq \Lambda(\vec{k}) \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{m!} \left| P(\vec{k}, \vec{l}, 0) + C_1(\vec{k}, \vec{l}) \sum_{u=0}^{m-1} \frac{(-1)^{u+1}}{\Lambda(\vec{k})^{u+1}} \right|} \leq \\ & \leq \Lambda(\vec{k}) \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{(m-1)!}} \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\left( \frac{P(\vec{k}, \vec{l}, 0)}{m} + \frac{C_1(\vec{k}, \vec{l})}{m} \sum_{u=0}^{m-1} \frac{1}{\Lambda(\vec{k})^{u+1}} \right)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку

$$S_{m-1}(\vec{k}) = \sum_{u=0}^{m-1} \frac{1}{[\Lambda(\vec{k})]^{u+1}} = \begin{cases} \frac{1 - [\Lambda(\vec{k})]^m}{(\Lambda(\vec{k}) - 1)}, & \Lambda(\vec{k}) \neq 1, \\ m, & \Lambda(\vec{k}) = 1 \end{cases}, \text{ то } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_{m-1}}{m} = \begin{cases} 0, & \Lambda(\vec{k}) > 1, \\ 1, & \Lambda(\vec{k}) = 1. \end{cases} \quad (17)$$

В [5] показано, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{(m-1)!}} = 0$ .

При  $0 < \Lambda(\bar{k}) < 1$ , используя (16) в правой части (12), имеем:

$$\sum_{u=0}^{m-1} \frac{1}{[\Lambda(\bar{k})]^{u+1}} = \frac{1 - [\Lambda(\bar{k})]^m}{(\Lambda(\bar{k}) - 1)} = \frac{a^m - 1}{1 - a}, \text{ где } a = \frac{1}{\Lambda(\bar{k})} > 1,$$

поэтому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{m!}} \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{P(\bar{k}, \bar{l}, 0) + C_1(\bar{k}) \sum_{u=0}^{m-1} \frac{1}{[\Lambda(\bar{k})]^{u+1}}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{m!}} \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{P(\bar{k}, \bar{l}, 0) + \frac{C_1(\bar{k})}{1 - \Lambda(\bar{k})} (a^m - 1)},$$

В силу  $\sqrt[m]{b + ca^m} \leq \sqrt[m]{b} + \sqrt[m]{ca^m} = \sqrt[m]{b} + a \sqrt[m]{c}$  имеем  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{b + ca^m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{b} + a \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{c} = 1 + a$ .

Так как верхняя граница ограниченная величина, и учитывая  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{m!}} = 0$ , получаем, что

$$\frac{1}{R(\bar{k}, \bar{l})} = 0.$$

Поэтому, как следует из (11), радиус сходимости степенного ряда (5) равен  $+\infty$ .

Отметим, что в работе [6] описывается метод решения линейных бесконечных систем дифференциальных уравнений (ДУ) с постоянными коэффициентами, основанный на применении преобразований Лапласа к построению решений. В [7] устанавливается взаимно однозначное соответствие между решениями ДУ бесконечного порядка и бесконечной системы линейных ДУ первого порядка. В [6, 7] предложено для нахождения решения ДУ бесконечного порядка использовать метод последовательных приближений, но сами приближения находятся достаточно сложно [8]. В данном подразделе для нахождения ожидаемых доходов в системах открытой G-сети МО предложена методика решения бесконечных систем ДУ методом последовательных приближений, совмещенным с методом рядов.

**Пример 1.** В данном примере количество СМО в сети  $n = 5$ . Пусть вероятности поступления заявок типа  $c$  в  $i$ -ю систему равны соответственно:

$$\begin{aligned} p_{011}^+ &= 0,15; p_{012}^+ = 0,1; p_{013}^+ = 0,05; p_{033}^+ = p_{043}^+ = p_{053}^+ = 0,04; p_{021}^+ = 0,05; \\ p_{022}^+ &= 0,03; p_{023}^+ = 0,02; p_{031}^+ = p_{041}^+ = p_{051}^+ = 0,1; p_{032}^+ = p_{042}^+ = p_{052}^+ = 0,06; p_{011}^- = p_{021}^- = p_{031}^- = p_{041}^- = \\ &= p_{041}^- = p_{051}^- = 0,1; p_{012}^- = p_{022}^- = p_{032}^- = p_{042}^- = p_{052}^- = 0,06; \text{ причем } \sum_{i=1}^5 \sum_{c=1}^3 p_{0ic}^+ = 1, \sum_{i=1}^5 \sum_{c=1}^3 p_{0ic}^- = 1. \end{aligned}$$

Пусть интенсивности входящих потоков положительных и отрицательных заявок равны соответственно  $\lambda^+ = 100$  и  $\lambda^- = 90$ . Пусть интенсивности обслуживания заявок типа  $c$  в СМО сети равны  $\mu_{i1} = 30, \mu_{i2} = 40, \mu_{i3} = 50, i = \overline{1,5}$ . Предположим, что  $\theta_{i1} = 5, \theta_{i2} = 4, \theta_{i3} = 3, \mu_{i1}^- = 10, \mu_{i2}^- = 15, \mu_{i3}^- = 20, i = \overline{1,5}$ . Положим также, что вероятности перехода положительных и отрицательных заявок между СМО сети  $p_{1111}^+ = 0,01, p_{1112}^+ = 0,012, p_{1113}^+ = 0,011, p_{1211}^+ = 0,01, p_{1212}^+ = 0,012, p_{1213}^+ = 0,011, p_{1311}^+ = 0,01, p_{1312}^+ = 0,012, p_{1313}^+ = 0,012, p_{1111}^- = 0,01, p_{1112}^- = 0,012, p_{1113}^- = 0,011, p_{1211}^- = 0,03, p_{1212}^- = 0,036, p_{1213}^- = 0,033, p_{1311}^- = 0,011, p_{1312}^- = 0,01, p_{1313}^- = 0,012, p_{1212}^- = 0,011, p_{1213}^- = 0,011, p_{1311}^- = 0,01, p_{1312}^- = 0,012, p_{1313}^- = 0,012, p_{1221}^+ = 0,03, p_{1222}^+ = 0,036, p_{1223}^+ = 0,033, p_{1321}^+ = 0,03, p_{1322}^+ = 0,036, p_{1323}^+ = 0,036, p_{1121}^- = 0,01, p_{1122}^- = 0,012, p_{1123}^- = 0,011, p_{1221}^- = 0,01, p_{1222}^- = 0,012, p_{1223}^- = 0,011, p_{1321}^- = 0,01, p_{1322}^- = 0,012, p_{1323}^- = 0,012, p_{11i1}^+ = 0,005, p_{12i1}^+ = 0,005, p_{12i2}^+ = 0,006, p_{12i3}^+ = 0,0055, p_{13i1}^+ = 0,005, p_{13i2}^+ = 0,006, p_{13i3}^+ = 0,006, p_{11i1}^- = 0,005, p_{11i2}^- = 0,006, p_{11i3}^- = 0,0055, p_{13i1}^- = 0,005, p_{13i2}^- = 0,006, p_{13i3}^- = 0,006, i = \overline{3,5}, p_{110} = 0,05, p_{2121}^- = 0,01, p_{2122}^- = 0,012,$

$$\begin{aligned}
& p_{120} = 0,03; p_{120} = 0,02; p_{2311}^+ = 0,01, p_{2312}^+ = 0,012, p_{2313}^+ = 0,012, p_{2111}^+ = 0,01, p_{2112}^+ = 0,012, p_{21i3}^- = \\
& = p_{21i3}^+ = 0,0055, p_{2113}^+ = 0,011, p_{2211}^+ = 0,01, p_{2323}^+ = 0,024, p_{12i2}^- = 0,006, p_{12i3}^- = 0,0055, p_{2212}^+ = 0,012, \\
& p_{23i1}^- = p_{23i1}^+ = 0,005, p_{2121}^+ = 0,02, p_{2122}^+ = p_{222}^+ 0,024, p_{2123}^+ = p_{2223}^+ = 0,022, p_{2221}^+ = p_{2321}^+ = 0,02, p_{23i2}^- = \\
& = p_{23i2}^+ = p_{21i2}^- = p_{21i2}^+ 0,006, p_{2123}^- = 0,011, p_{2221}^- = 0,01, p_{2222}^- = 0,012, p_{2223}^- = 0,011, p_{2321}^- = 0,01, \\
& p_{ji1i}^+ = p_{ji1i}^- = 0,01, p_{i1j2}^+ = p_{i1j2}^- = 0,012, p_{i1j3}^+ = p_{i1j3}^- = 0,011, \quad p_{i3j2}^+ = p_{i3j2}^- = 0,012, p_{i3j3}^+ = p_{i3j3}^- 0,012, i, j = \overline{3,5}, \\
& p_{21i1}^- = p_{21i1}^+ = 0,005, p_{i10} = 0,1; p_{i20} = 0,07; p_{i30} = 0,03, i = \overline{2,5}, p_{2321}^- = 0,012, p_{2322}^- = 0,012, p_{2323}^- = 0,01, \\
& q_{icjs} = \frac{1}{45}, i \neq j, q_{icis} = \frac{1}{90}, q_{ic0} = \frac{1}{30}, i, j = \overline{1,5}, c, s = \overline{1,3}, p_{2213}^+ = 0,011, p_{2311}^+ = 0,01, p_{2321}^+ = 0,02, p_{2322}^+ = 0,024.
\end{aligned}$$

Найдём  $P(\vec{k}, t)$ , где  $\vec{k} = (1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5,1,1,1,2,1,1,2,2,1,3,1,1,2,2,2, t)$  при условии, что состояние  $(2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$  было начальным. Расчёты показали, что  $a_0(t) = e^{-1075t}$ .

Количество членов ряда, вычисляемых по формуле (5), находилось при использовании соотношения  $|d_{ql}^{+-}(\vec{k}^*, \vec{l}^*)| \leq \varepsilon$ , где  $\vec{k}^*, \vec{l}^* : d_{qm}^{+-}(\vec{k}^*, \vec{l}^*) = \max_{\vec{k}, \vec{l}} d_{qm}^{+-}(\vec{k}, \vec{l})$ , а количество итераций  $q$ , используя неравенство  $|P_{q+1}(\vec{k}, \vec{l}, t) - P_q(\vec{k}, \vec{l}, t)| \leq \varepsilon$ . Получили, что количество итераций  $q^* = 105$ , а членов ряда  $m^* = 80$ .

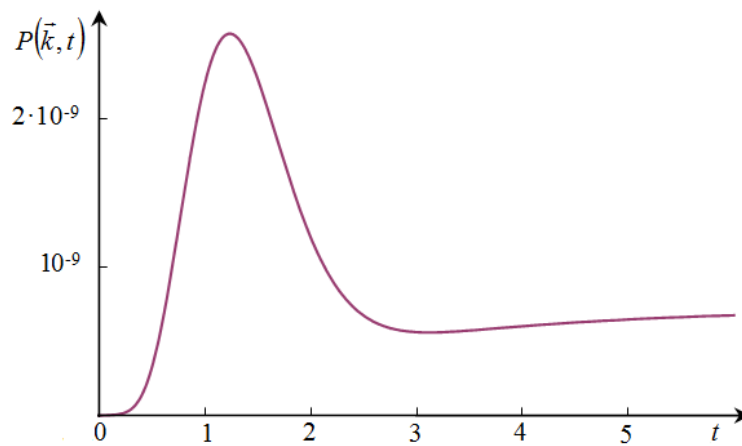


Рис. 1. Вероятность состояния  $\vec{k}$  на отрезке времени  $[0; 6]$

Время выполнения программы на компьютере с параметрами Intel(R) Pentium(R) Dual CPU G860 @ 3.00GHz 4Gb приблизительно равнялось 5 час. На рис. 1 представлен график этой вероятности.

### Заключение

В работе проведено исследование марковской G-сети массового обслуживания с нетерпеливыми положительными и отрицательными заявками различных типов в случае, когда отрицательная заявка может уничтожить одну положительную заявку своего типа. Для нахождения нестационарных вероятностей состояний предложено использовать модифицированный метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов, который позволяет сделать это за приемлемое процессорное время.

Дальнейшие исследования в этом направлении могут быть связаны с нахождением ожидаемых доходов в таких сетях с доходами.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Gelenbe E., Schassberger R. Stability of G-networks. // Probability and its Applications in Engineering and the Information Sciences. 1992. V. 6. P. 271–276.

2. Fourneau J., Gelenbe E. G-networks with multiple classes of negative and positive customers. // Theoretical Computer Science. 1996. V. 155. P. 141–156.
3. Chao X., Pinedo M. On generalized networks of queues with positive and negative arrivals // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 1993. V. 7. P. 301–334.
4. Якубович О.В., Евдокимов В.Е. Сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания различных типов положительных, отрицательных заявок и сигналов // Проблемы физики, математики и техники. 2010. № 4. С. 63–67.
5. Матальцкий М.А., Науменко В.В. Стохастические сети с нестандартными перемещениями заявок. Гродно : Гродненский гос. ун-т, 2017. 347 с.
6. Валеев К.Г., Жаутыков О.А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата : Наука, 1974. 415 с.
7. Коробейник Ю.Ф. Исследование дифференциальных уравнений бесконечного порядка с полиномиальными коэффициентами с помощью операторных уравнений интегрального типа // Математический сборник. 1959. Т. 49, № 2. С. 191–206.
8. Коробейник Ю.Ф. Дифференциальные уравнения бесконечного порядка и бесконечные системы дифференциальных уравнений // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1970. Т. 34, № 4. С. 881–922.

**Матальцкий Михаил Алексеевич**, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: m.matalytski@gmail.com

**Копать Дмитрий Ярославович**. E-mail: dk80395@mail.ru

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (Беларусь)

Поступила в редакцию 6 июня 2017 г.

*Matalytski Mihail A., Kopat Dmitry Ya.* (Grodno State University, Belarus).

**Analysis in the transient regime of the network with impatient positive and negative customers of multiple classes.**

**Keywords:** G-network; positive and negative customers of multiple classes; modified method of successive approximations; combined with the method of series.

DOI: 10.17223/19988605/42/7

The article explores the network with impatient positive and negative applications of multiple classes, in the case where a negative customer removes one positive customer of its type. The  $i$ -th queuing system (QS) from the external environment receives the simplest flow of positive requests with intensity  $\lambda^+$  and an additional flow of negative requests, which is also the simplest with intensity  $\lambda^-$ ,  $i = \overline{1, n}$ . All incoming streams are independent. Each positive request of the input stream, regardless of other requests, is sent to the  $i$ -th QS as a request of type  $c$  with probability  $p_{0ic}^+$ ,  $\sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^r p_{0ic}^+ = 1$ .

Each negative entry of the input stream, regardless of other negative requests, is sent to the  $i$ -th QS as a negative claim of type  $c$  with probability  $p_{0ic}^-$ ,  $\sum_{i=1}^n \sum_{c=1}^r p_{0ic}^- = 1$ , and after a random time destroys one positive claim of type  $c$ . After the end of the service of the positive requests of type  $c$  in the  $i$ -th QS, it is sent to the  $j$ -th QS with probability  $p_{icjs}^+$  again as a positive requests of type  $s$ , and with probability  $p_{icjs}^-$  as a negative request of type  $s$ , and with probability  $p_{ic0} = 1 - \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^r (p_{icjs}^+ + p_{icjs}^-)$  leaves the network,  $i, j = \overline{1, n}, c, s = \overline{1, r}$ .

Each positive claim of type  $c$  in the system has a waiting time limited by an exponentially distributed random variable with a parameter  $\theta_{ic}$ . A negative claim that is in the system remains in the queue a random time that has an exponential distribution with the parameter  $\mu_{ic}^-$ ,  $i = \overline{1, n}, c = \overline{1, r}$ . Positive request of type  $c$ , the waiting time in queue  $i$  has expired, instantly passes into the  $j$ -th of the QS and becomes a positive requests of type  $s$  with a probability  $q_{icjs}^+$  or negative requests of type  $s$  with probability  $q_{icjs}^-$ , but with probability  $q_{ic0} = 1 - \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^r (q_{icjs}^+ + q_{icjs}^-)$  leaves the network  $i, j = \overline{1, n}, c, s = \overline{1, r}$ .

In the first part (Theorem 1) a difference-differential equations system is derived, which is satisfied by the probabilities of the states of such a network. It can be represented in a general form

$$\begin{aligned} \frac{dP(\vec{k}, \vec{l}, t)}{dt} = & -\Lambda(\vec{k})P(\vec{k}, \vec{l}, t) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=1}^r \Phi_{icjs}^{++}(\vec{k})P(\vec{k} + I_{ic} - I_{js}, \vec{l}, t) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=1}^r \Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k})P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} - I_{js}, t) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=1}^r \Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l})P(\vec{k} + I_{ic}, \vec{l} + I_{js}, t), \end{aligned} \quad (1)$$

where  $P(\vec{k}, \vec{l}, t)$  is the probability of the state  $(\vec{k}, \vec{l}, t)$ ,  $\Lambda(\vec{k})$ ,  $\Phi_{icjs}^{++}(\vec{k})$ ,  $\Phi_{icjs}^{++(1)}(\vec{k})$ ,  $\Phi_{icjs}^{-}(\vec{k}, \vec{l})$  are some bounded negative functions. To solve system (1) it is suggested to use an algorithm based on the application of the modified method of successive approximations combined

with the method of series. This allows to find the probabilities of network states for acceptable CPU time. The tendency of successive approximations is proved for a stationary distribution of probabilities and their convergence to a unique solution of the system (1).

#### REFERENCES

1. Gelenbe, E. & Schassberger, R. (1992) Stability of G-networks. *Probability and its Applications in Engineering and the Information Sciences*. 6. pp. 271–276.
2. Fourneau, J.M., Gelenbe, E. & Suros, R. (1996) G-networks with multiple classes of negative and positive customers. *Theoretical Computer Science*. 155. pp. 141–156. DOI: 10.1016/0304-3975(95)00018-6
3. Chao, X. & Pinedo, M. (1993) On generalized networks of queues with positive and negative arrivals. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 7. pp. 301–334. DOI: 10.1017/S0269964800002941
4. Yakubovich, O. & Evkokimovich, V. (2010) Set' massovogo obsluzhivaniya so sluchaynym vremenem prebyvaniya razlichnykh tipov polozhitel'nykh, otritsatel'nykh zayavok i signalov [Queueing network with random staying time of different types of positive, negative customers and signals]. *Problems of Physics, Mathematics and Technics – Problems physics, mathematics and technologies*. 4. pp. 63–67.
5. Matalytski, M. & Naumenko, V. (2017) *Stokhasticheskie seti s nestandartnymi peremeshcheniyami zayavok* [Stochastic network with non-standard move customers]. Grodno: GrSU.
6. Valeev, K. & Zhautykov, O. (1974) *Beskonechnye sistemy differentsial'nykh uravneniy* [Infinite systems of differential equations]. Alma-Ata: Science.
7. Korobeynik, Y.F. (1959) Issledovanie differentsial'nykh uravneniy beskonechnogo poryadka s polinomial'nymi koeffitsientami s pomoshch'yu operatornykh uravneniy integral'nogo tipa [Investigation of differential equations of infinite order with polynomial coefficients by means of operator equations of integral type]. *Matematicheskii sbornik*. 49(2). pp. 191–206.
8. Korobeynik, J. (1970) Differentsial'nye uravneniya beskonechnogo poryadka i beskonechnye sistemy differentsial'nykh uravneniy [Differential equations of infinite order and infinite systems of differential equations]. *Izvestiya AN SSSR. Ser. matematicheskaya*. 34(4). pp. 881–922.

А.А. Назаров, Я.Е. Измайлова

# ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ $M|E2|1$ С ВЫТЕСНЕНИЕМ ЗАЯВОК И СОХРАНЕНИЕМ ФАЗОВОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00292 мол\_а.*

В работе исследована RQ-система с вытеснением заявок, простейшим входящим потоком, гиперэкспоненциальным распределением времени обслуживания и сохранением фазовой реализации обслуживания. Исследование системы проводилось методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите. Показано, что предельная характеристическая функция числа заявок на орбите является асимптотически гауссовской. Найдены параметры этого распределения.

**Ключевые слова:** RQ-система; вытеснение заявок; фазовая реализация; зоны орбиты; большая задержка.

В литературе показано, что адекватными математическими моделями телекоммуникационных сетей связи являются RQ-системы (Retrial queueing system, или системы с повторными вызовами). Исследованием RQ-систем в настоящее время занято большое количество зарубежных и российских ученых. Значительный вклад в развитие теории внесли Г.И. Фалин, J.R. Artalejo [1], А.Н. Дудин [2], Г.П. Башарин, К.Е. Самуйлов. Однако этими учеными были получены аналитические формулы для систем с относительно простой конфигурацией, в то время как реальные системы являются сложными. RQ-системам с приоритетами посвящено немало исследований, к которым можно отнести работы К. Avrachenkov [3, 4], G. Ayyappan, A. Muthu Ganapathi [5], П.П. Бочарова, О.И. Павловой [6], В. Krishna Kumar, A. Vijayakumar, D. Arivudainambi [7], С. Kim [8]. Кроме того, следует отметить работы, касающиеся изучения RQ-систем с дискретным временем. В работе I.M. Atencia [9] рассматривается система с повторными вызовами с дискретным временем, в которой прибывшая заявка, обнаружившая прибор занятым, может решить, начать ли обслуживание или присоединиться к орбите и повторить попытку позже согласно дисциплине FCFS (First Come First Served – первым пришел, первым обслужен). Современная литература по RQ-системам очень обширна и богата, последние обзоры можно найти в работе J.R. Artalejo. Однако в рассмотренных выше моделях приоритетных RQ-систем не учитывается эффект вытеснения требований, что существенно влияет на характеристики исследуемых систем. Данная работа будет посвящена исследованию систем с вытеснением требований.

## 1. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим RQ-систему с вытеснением заявок (рис. 1).

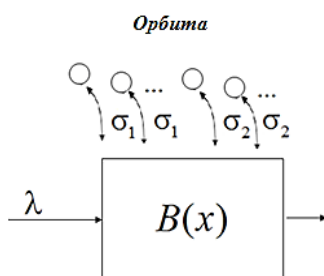


Рис. 1. RQ-система  $M|E2|1$  с вытеснением заявок

На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение времени, подчиняющегося гиперэкспоненциальному распределению  $B(x)$  с параметрами  $q, \mu_1, \mu_2$ . С вероятностью  $q$  заявка обслуживается экспоненциально распределенное время с параметром  $\mu_1$  (1 фаза), с вероятностью  $1 - q$  заявка обслуживается экспоненциально распределенное время с параметром  $\mu_2$  (2 фаза). Если прибор занят, то поступившая заявка вытесняет обслуживаемую и сама занимает прибор для обслуживания, а заявка, которая обслуживалась, переходит на орбиту. Орбита разделяется на две зоны. Если заявка обслуживалась на первой фазе, то уходит в первую зону орбиты, если на второй фазе, то на вторую. В зонах орбиты заявки осуществляют случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\sigma_1$  для первой зоны и  $\sigma_2$  для второй. Из орбиты после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Дисциплина обращений заявок с орбиты принципиально отличается от дисциплины обращения заявок, которые впервые прибыли в систему, так как для первичных заявок номер фазы определяется случайным образом с вероятностью  $q$ , а при повторном обращении номер фазы выбирается однозначно по номеру зоны. Так как орбита разделяется на две зоны, то заявки, находящиеся на орбите в первой зоне, будут осуществлять задержку с экспоненциально распределенным временем с параметром  $\sigma_1 = \gamma_1 \sigma$ , на орбите во второй зоне – с параметром  $\sigma_2 = \gamma_2 \sigma$ .

Обозначим  $i_1(t)$  – число заявок на орбите в первой зоне,  $i_2(t)$  – число заявок на орбите во второй зоне. Пусть  $k(t)$  определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят заявкой, находящейся на первой фазе обслуживания,} \\ 2, & \text{если прибор занят заявкой, находящейся на второй фазе обслуживания.} \end{cases}$$

Ставится задача нахождения совместного трехмерного распределения вероятностей чисел заявок в зонах на орбите и состояний прибора.

## 2. Система уравнений Колмогорова для частичных характеристических функций

Рассмотрим трехмерный процесс  $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$ .

Обозначим  $P\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\} = P_k(i_1, i_2)$ ,  $k = 0, 1, 2$  стационарную вероятность того, что прибор в момент времени  $t$  находится в состоянии  $k$ , на орбите в первой зоне находится  $i_1$  заявок, на орбите во второй зоне находится  $i_2$  заявок.

Введем частичные характеристические функции следующего вида:

$$H_k(u_1, u_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} P_k(i_1, i_2), \quad k = 0, 1, 2,$$

где  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

Запишем систему для частичных характеристических функций:

$$\begin{aligned} -\lambda H_0(u_1, u_2) + j\sigma_1 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} + j\sigma_2 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \mu_1 H_1(u_1, u_2) + \mu_2 H_2(u_1, u_2) &= 0, \\ -\lambda H_1(u_1, u_2) - \mu_1 H_1(u_1, u_2) + \lambda q H_0(u_1, u_2) + \lambda q e^{ju_2} H_2(u_1, u_2) + \lambda q e^{ju_1} H_1(u_1, u_2) + \\ + j\sigma_2 \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} - j\sigma_1 e^{-ju_1} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} - j\sigma_1 e^{ju_2 - ju_1} \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= 0, \\ -\lambda H_2(u_1, u_2) - \mu_2 H_2(u_1, u_2) + \lambda(1 - q) H_0(u_1, u_2) + \lambda(1 - q) e^{ju_1} H_1(u_1, u_2) + \lambda(1 - q) e^{ju_2} H_2(u_1, u_2) + \\ + j\sigma_1 \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} - j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} - j\sigma_2 e^{ju_1 - ju_2} \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} &= 0. \end{aligned}$$

Аналитически данную систему решить затруднительно. Будем решать ее методом асимптотического анализа [10] в условии большой задержки, когда среднее время  $\frac{1}{\sigma} \rightarrow \infty$ , а  $\sigma \rightarrow 0$ , полагая что  $\sigma_1 = \sigma\gamma_1$ ,  $\sigma_2 = \sigma\gamma_2$ .

### 3. Асимптотика первого порядка

Обозначим  $x_n$ ,  $n = 1, 2$ , – асимптотическое среднее значение числа заявок на  $n$ -й зоне орбиты, а  $R_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , – распределение вероятностей состояний прибора. Сформулируем следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $i_1(t)$  – число заявок на орбите в первой зоне,  $i_2(t)$  – число заявок на орбите во второй зоне RQ-системы с вытеснением заявок и сохранением фазовой реализации. Тогда для последовательности характеристических функций выполняется равенство:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \exp \{ ju_1 \sigma \gamma_1 i_1(t) + ju_2 \sigma \gamma_2 i_2(t) \} = \exp \{ ju_1 x_1 + ju_2 x_2 \},$$

где  $x_1, x_2$  являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} -\gamma_1 x_1 R_0 + (\lambda + \gamma_2 x_2) R_1 - \gamma_1 x_1 R_2 &= 0, \\ -\gamma_2 x_2 R_0 - \gamma_2 x_2 R_1 + (\lambda + \gamma_1 x_1) R_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

а вероятности  $R_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , находятся из системы

$$\begin{aligned} -(\lambda + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) R_0 + \mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 &= 0, \\ (\lambda q + \gamma_1 x_1) R_0 - (\lambda(1-q) + \mu_1 + \gamma_2 x_2) R_1 + (\lambda q + \gamma_1 x_1) R_2 &= 0, \\ (\lambda(1-q) + \gamma_2 x_2) R_0 + (\lambda(1-q) + \gamma_2 x_2) R_1 - (\lambda q + \mu_2 + \gamma_1 x_1) R_2 &= 0, \\ R_0 + R_1 + R_2 &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Из систем уравнений (1), (2) находятся средние числа  $x_1, x_2$  заявок в зонах на орбите и распределение вероятностей  $R_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , состояний прибора.

Для более детального исследования рассмотрим асимптотику второго порядка.

### 4. Асимптотика второго порядка

Построим гауссовскую аппроксимацию числа заявок на орбите.

Сформулируем следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $i_1(t)$  – число заявок на орбите в первой зоне,  $i_2(t)$  – число заявок на орбите во второй зоне RQ-системы с вытеснением заявок и сохранением фазовой реализации. Тогда имеет место предельное равенство:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \exp \left\{ ju_1 \frac{\sigma \gamma_1 i_1(t) - x_1}{\sqrt{\sigma}} + ju_2 \frac{\sigma \gamma_2 i_2(t) - x_2}{\sqrt{\sigma}} \right\} = \exp \left\{ \frac{(ju_1)^2}{2} Q_{11} + \frac{(ju_2)^2}{2} Q_{22} + ju_1 ju_2 Q_{12} \right\},$$

где  $x_1, x_2$  являются решением систем уравнений (1), (2), величины  $Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}$  находятся из неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &Q_{11} (\gamma_1 R_0 + \gamma_1 R_2 - \gamma_1 R_0 z_0 + \gamma_1 R_0 z_1 + \gamma_1 R_2 z_1 - \gamma_1 R_2 z_2) + \\ &+ Q_{12} (-\gamma_2 R_1 - \gamma_2 R_0 z_0 + \gamma_2 R_0 z_2 - \gamma_2 R_1 z_1 + \gamma_2 R_1 z_2) = \frac{1}{2} \lambda(1-q) R_1 + \frac{1}{2} \gamma_1 x_1 R_0 + \frac{1}{2} \lambda q R_1 + \\ &+ \frac{1}{2} R_2 \gamma_1 x_1 + \frac{1}{2} R_1 \gamma_2 x_2 + \gamma_1 x_1 R_0 z_1 - \lambda q R_1 z_1 + \gamma_1 x_1 R_2 z_1 - \lambda(1-q) R_1 z_2 - \gamma_2 x_2 R_1 z_2, \\ &Q_{22} (\gamma_2 R_0 + \gamma_2 R_1 - \gamma_2 R_0 y_0 + \gamma_2 R_0 y_2 + \gamma_2 R_1 y_2 - \gamma_2 R_1 y_1) + \\ &+ Q_{12} (-\gamma_1 R_2 - \gamma_1 R_0 y_0 + \gamma_1 R_0 y_1 - \gamma_1 R_2 y_2 + \gamma_1 R_2 y_1) = \frac{1}{2} \lambda q R_2 + \frac{1}{2} \gamma_2 x_2 R_0 + \frac{1}{2} R_2 \gamma_1 x_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \lambda(1-q) R_2 + \frac{1}{2} R_1 \gamma_2 x_2 - \lambda q R_2 y_1 + \gamma_2 x_2 R_0 y_2 - \lambda(1-q) R_2 y_2 + \gamma_2 x_2 R_1 y_2 - \gamma_1 x_1 R_2 y_1, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
& Q_{11}(-\gamma_1 R_2 - \gamma_1 R_0 p_0 + \gamma_1 R_0 p_1 + \gamma_1 R_2 p_1 - \gamma_1 R_{22}) + Q_{12}(\gamma_1 R_0 + \gamma_1 R_2 + \gamma_2 R_0 + \gamma_2 R_1 - \gamma_2 R_0 p_0 + \\
& + \gamma_2 R_0 p_2 - \gamma_2 R_1 p_1 + \gamma_2 R_1 p_2 - \gamma_1 R_0 s_0 + \gamma_1 R_0 s_1 - \gamma_1 R_2 s_2 + \gamma_1 R_2 s_1) + \\
& + Q_{22}(-\gamma_2 R_1 - \gamma_2 R_0 s_0 + \gamma_2 R_0 s_2 + \gamma_2 R_1 s_2 - \gamma_2 R_1 s_1) = -R_2 \gamma_1 x_1 - R_1 \gamma_2 x_2 + \gamma_1 x_1 R_0 p_1 - \lambda q R_1 p_1 + \\
& + \gamma_1 x_1 R_2 p_1 - \lambda(1-q) R_1 p_2 - \gamma_2 x_2 R_1 p_2 - \lambda q R_2 s_1 + \gamma_2 x_2 R_0 s_2 - \lambda(1-q) R_2 s_2 + \gamma_2 x_2 R_1 s_2 - \gamma_1 x_1 R_2 s_1.
\end{aligned}$$

Величины  $z_0, z_1, z_2; y_0, y_1, y_2; p_0, p_1, p_2; s_0, s_1, s_2$  определяются из систем уравнений (4)–(7) соответственно.

Для  $z_0, z_1, z_2$ :

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) z_0 + (\lambda q + \gamma_1 x_1) z_1 + (\lambda(1-q) + \gamma_2 x_2) z_2 = -\gamma_1 x_1, \\
& \mu_1 z_0 - (\lambda(1-q) + \mu_1 + \gamma_2 x_2) z_1 + (\lambda(1-q) + \gamma_2 x_2) z_2 = \lambda + \gamma_2 x_2, \\
& \mu_2 z_0 + (\lambda q + \gamma_1 x_1) z_1 - (\lambda q + \mu_2 + \gamma_1 x_1) z_2 = -\gamma_1 x_1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Для  $y_0, y_1, y_2$ :

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) y_0 + (\lambda q + \gamma_1 x_1) y_1 + (\lambda(1-q) + \gamma_2 x_2) y_2 = -\gamma_2 x_2, \\
& \mu_1 y_0 - (\lambda(1-q) + \mu_1 + \gamma_2 x_2) y_1 + (\lambda(1-q) + \gamma_2 x_2) y_2 = -\gamma_2 x_2, \\
& \mu_2 y_0 + (\lambda q + \gamma_1 x_1) y_1 - (\lambda q + \mu_2 + \gamma_1 x_1) y_2 = \lambda + \gamma_1 x_1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Для  $p_0, p_1, p_2$ :

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) p_0 + (\lambda q + \gamma_1 x_1) p_1 + (\lambda(1-q) + \gamma_2 x_2) p_2 = -\gamma_2 x_2, \\
& \mu_1 p_0 - (\lambda(1-q) + \mu_1 + \gamma_2 x_2) p_1 + (\lambda(1-q) + \gamma_2 x_2) p_2 = -\gamma_2 x_2, \\
& \mu_2 p_0 + (\lambda q + \gamma_1 x_1) p_1 - (\lambda q + \mu_2 + \gamma_1 x_1) p_2 = \lambda + \gamma_1 x_1.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для  $s_0, s_1, s_2$ :

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) s_0 + (\lambda q + \gamma_1 x_1) s_1 + (\lambda(1-q) + \gamma_2 x_2) s_2 = -\gamma_1 x_1, \\
& \mu_1 s_0 - (\lambda(1-q) + \mu_1 + \gamma_2 x_2) s_1 + (\lambda(1-q) + \gamma_2 x_2) s_2 = \lambda + \gamma_2 x_2, \\
& \mu_2 s_0 + (\lambda q + \gamma_1 x_1) s_1 - (\lambda q + \mu_2 + \gamma_1 x_1) s_2 = -\gamma_1 x_1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что доказать асимптотическую гауссовость распределения числа заявок можно, записав характеристическую функцию в виде произведения:

$$H(u_1, u_2) = \exp \left\{ \frac{(ju_1)^2}{2\sigma} Q_{11} + \frac{(ju_2)^2}{2\sigma} Q_{22} + \frac{ju_1 ju_2}{\sigma} Q_{12} \right\} \exp \left\{ j \frac{u_1}{\sigma} x_1 + j \frac{u_2}{\sigma} x_2 \right\}.$$

Откуда, выполнив несложные преобразования, получаем

$$H(u_1, u_2) = \exp \left\{ j \frac{u_1}{\sigma} x_1 + j \frac{u_2}{\sigma} x_2 + \frac{(ju_1)^2}{2\sigma} Q_{11} + \frac{(ju_2)^2}{2\sigma} Q_{22} + \frac{ju_1 ju_2}{\sigma} Q_{12} \right\}.$$

Последнее выражение доказывает, что двумерное распределение вероятностей числа заявок на орбите является асимптотически гауссовским.

## 5. Численная реализация

Были рассмотрены примеры численного решения систем (1)–(7) для различных значений параметров  $\mu_1$  и  $\mu_2$  функции распределения времени обслуживания  $B(x)$  с преобразованием Лапласа–Стилтьеса

$$B^*(x) = q(1 + \frac{x}{\mu_1})^{-1} + (1-q)(1 + \frac{x}{\mu_2})^{-1}$$

и параметров  $\lambda$  и  $\sigma_1, \sigma_2$ .

Рассмотрим пример для случая

$$\lambda = 2, q = 0,6, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = 3.$$

На рис. 2 представлен график плотности  $P(x, y)$

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi Q_{11}Q_{22}\sqrt{1-Q_{12}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-Q_{12}^2)} \left( \frac{(x-x_1)^2}{Q_{11}^2} - 2Q_{12} \frac{(x-x_1)(y-x_2)}{Q_{11}Q_{22}} + \frac{(y-x_2)^2}{Q_{22}^2} \right) \right\}$$

двумерного распределения вероятностей числа заявок на орбите.

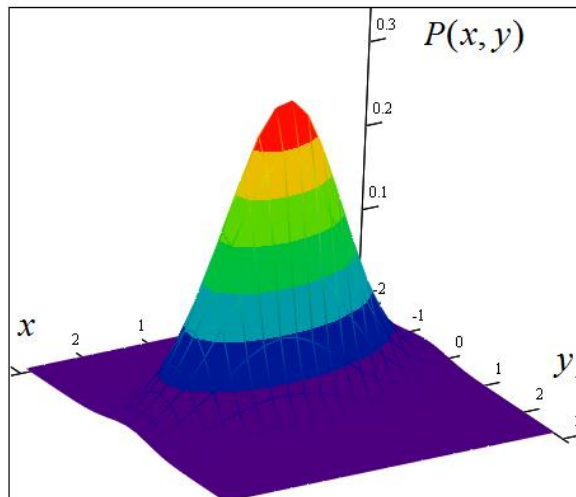


Рис. 2. График плотности  $P(x, y)$  при значениях  $\mu_1 = 4$  и  $\mu_2 = 5$

В работе [11] была рассмотрена RQ-система с вытеснением заявок, в которой обслуживание после прерывания начинается заново. Целесообразно выполнить сравнение значений асимптотических средних между средним  $X$ , полученным с помощью метода, предложенного в [11], и асимптотическим средним  $x = x_1 + x_2$ , полученным с помощью метода асимптотического анализа RQ-системы с вытеснением заявок и сохранением фазовой реализации.

Таблица 1

Значения асимптотических средних числа заявок на орбите для различных RQ-систем при  $\gamma_1 = \gamma_2$

| $\mu_2 \backslash \mu_1$ | 2     |       | 3     |       | 4     |       |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                          | $x$   | $X$   | $x$   | $X$   | $x$   | $X$   |
| 20                       | 0,341 | 0,913 | 0,194 | 0,707 | 0,141 | 0,582 |
| 30                       | 0,314 | 0,794 | 0,177 | 0,612 | 0,126 | 0,500 |
| 40                       | 0,302 | 0,738 | 0,169 | 0,566 | 0,119 | 0,460 |

В табл. 1 приведены значения асимптотических средних для RQ-системы с вытеснением и сохранением фазовой реализации  $x$  и для RQ-системы, в которой после прерывания обслуживания у заявки обслуживание начинается заново,  $X$  при различных значениях параметров времени обслуживания. Как можно видеть из таблицы, среднее значение  $x$  суммарного числа заявок на орбите RQ-системы с вытеснением заявок и сохранением фазовой реализации в 3–4 раза меньше среднего числа заявок  $X$  RQ-системы с вытеснением заявок, в которой обслуживание после прерывания начинается заново.

### Заключение

В данной работе была исследована RQ-система с вытеснением заявок и с сохранением фазовой реализации методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите. Для нее получены уравнения для нахождения среднего числа заявок на орбите  $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ , а также уравнения для нахождения стационарного распределения вероятностей состояний прибора. Модифицирован метод асимптотического анализа для исследования RQ-систем с сохранением фазовой реализации и вытеснением заявок. Было показано, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите является асимптотически гауссовской. Был проведен численный анализ

системы. Для конкретных значений параметров были получены асимптотические средние числа заявок на орбите, а также вторые центральные моменты и коэффициент корреляции между заявками на орбите в первой и второй зонах.

Результаты выполненных исследований могут позволить решить задачи в области проектирования инфокоммуникационных систем, телекоммуникационных систем, управляемых протоколами случайного множественного доступа.

Считаем целесообразным исследовать RQ-систему с дообслуживанием заявок и вытеснением.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Artalejo J.R. Accessible Bibliography on Retrial Queues // Progress in 2000–2009 Mathematical and Computer Modeling. 2010. V. 51. P. 1071–1081.
2. Chakravarthy S.R., Dudin A. Analysis of a retrial queueing model with MAP arrivals and two types of customers. // Mathematical and Computer Modelling. 2003. V. 37, No. 3–4. P. 343–363.
3. Avrachenkov K., Dudin A., Klimenok V. Queueing Model MMAP/M 2/1 with Two Orbits // Lecture Notes in Comput. Sci. Berlin : Springer, 2010. 6235. P. 107–118.
4. Avrachenkov K., Nain Ph., Yechiali U. A retrial system with two input streams and two orbit queues // Queueing Systems. 2014. V. 77, No. 1. P. 1–31.
5. Ayyappan G., Ganapathi M.A., Sekar G. M/M/1 Retrial Queueing System with Loss and Feedback under Pre-Emptive Priority Service // International Journal of Computer Applications. 2010. V. 2, No. 6. P. 27–34.
6. Bocharov P.P., Pavlova O.I., Puzikova D.A. M|G|1 retrial queueing systems with priority of primary customers // Mathematical and computer Modeling. 1999. V. 30, No. 3–4. P. 89–98.
7. Kumar B.K., Vijayakumar A., Arivudainambi D. An M/G/1 Retrial Queueing System with Two-Phase Service and Preemptive Resume // Annals of Operations Research. 2002. V. 113, No. 1–4. P. 61–79.
8. Kim C. Priority tandem queueing system with retrials and reservation of channels as a model of call center // Computers & Industrial Engineering. 2016. V. 96. P. 61–71.
9. Atencia I.M. A Geo/G/1 retrial queueing system with priority services // European Journal of Operational Research. 2017. V. 256, No. 1. P. 178–186.
10. Назаров А.А., Моисеева С.П. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
11. Nazarov A., Chernikova Ya. Gaussian Approximation of Distribution of States of the Retrial Queueing System with r-Persistent Exclusion of Alternative Customers // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications : Proceeding of the 14<sup>th</sup> International Scientific Conference. 2015. V. 564. P. 200–208. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4\_19.

**Назаров Анатолий Андреевич**, д-р техн. наук, профессор. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

**Измайлова Яна Евгеньевна**, канд. физ.-мат. наук. E-mail: evgenevna.92@mail.ru

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 2 декабря 2017 г.

*Nazarov Anatoly A., Izmailova Yana E.* (National Research Tomsk State University, Russian Federation).

**Research of RQ-system M|E2|1 with request displacement and conserving phase realization of servicing.**

**Keywords:** RQ-system; request displacement; phase realization; orbit zones; large delay.

DOI: 10.17223/19988605/42/8

The paper considers an RQ-system which could be used as a mathematical model of a 5G new generation telecommunication network. The input of the system is a simplest request flow with intensity  $\lambda$ .

Request that found server free is then serviced for a duration of time that has hyper exponential distribution with parameters  $q, \mu_1, \mu_2$ . With probability  $q$  request that came from the flow is then serviced for an exponential time with parameter  $\mu_1$  (1<sup>st</sup> phase), and with probability  $1 - q$  the request is serviced for an exponential time with parameter  $\mu_2$  (2<sup>nd</sup> phase).

If the server is busy then the incoming request pushes the previous request out of service and takes its place, while the pushed out request goes to the orbit. Orbit is divided in 2 zones. If a request was being serviced at the 1<sup>st</sup> phase of hyper exponential distribution – it goes to the 1<sup>st</sup> zone of the orbit, and it was being serviced at the 2<sup>nd</sup> phase – it goes to the 2<sup>nd</sup> zone.

At the orbit zones requests are randomly delayed and duration of delay has an exponential distribution with parameter  $\sigma_1$  for the 1<sup>st</sup> zone and  $\sigma_2$  for the 2<sup>nd</sup>. From there, after a random delay, request again returns to the server.

The appeal discipline of requests from the orbit is fundamentally different from the appeal discipline of requests that are new to the system, as for the new requests the phase number is determined randomly by the probability  $q$ , when the returning requests already have a zone number that determines the number of a phase.

The research is conducted using the asymptotic analysis method in the limit condition of a large delay of requests on the orbit, characterized by a condition  $\sigma \rightarrow 0$ , assuming that  $\sigma_1 = \sigma\gamma_1, \sigma_2 = \sigma\gamma_2$ .

In order to use this method we've obtained the Kolmogorov equation system for probability distribution of a 3-dimensional process of number of requests at the zones on an orbit and statuses of the server, we've also made transition from the equation system for probabilities to the Kolmogorov equation system for partial characteristic functions.

The first order asymptote was reviewed. We've obtained equations for finding the distribution of probabilities of statuses of the server  $R_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , and for finding asymptotic mean  $x_n$ ,  $n = 1, 2$ , of number of requests at the zones of the orbit. We've reviewed the second order asymptote. We've obtained equations for finding second asymptotic moments: variance and correlation coefficient between number of requests in the 1<sup>st</sup> and the 2<sup>nd</sup> zones.

We've found limit characteristic function (at  $\sigma \rightarrow 0$ ) of a normalized number of requests at the orbit that has the form

$$H(u_1, u_2) = \exp \left\{ j \frac{u_1}{\sigma} x_1 + j \frac{u_2}{\sigma} x_2 + \frac{(ju_1)^2}{2\sigma} Q_{11} + \frac{(ju_2)^2}{2\sigma} Q_{22} + \frac{ju_1 ju_2}{\sigma} Q_{12} \right\}, \text{ i.e. the form of a characteristic function of the 2-dimensional Gauss distribution.}$$

Numerical experiments were conducted for different parameter values of time of servicing and intensity of incoming flow. The obtained results of asymptotic mean of number of requests at the orbit of an RQ-system with request displacement and conservation of phase realization were compared to the asymptotic mean number of requests at the orbit of an RQ-system with request displacement and servicing returning requests as the new ones.

It is established that by conserving phase realization the mean number of requests at the orbit is 3-4 times smaller than the mean number of requests at the orbit with servicing them as new each time. Obtained results could be useful in designing informational-communicational systems controlled by random multiple access protocols.

We've concluded it to be expedient to research the RQ-system with requests displacement and after service, because such a model would be very important in designing communication networks, since this problem wasn't solved in science literature.

#### REFERENCES

1. Artalejo, J.R. (2010) Accessible Bibliography on Retrial Queues. *Progress in 2000-2009 Mathematical and Computer Modeling* 51. pp. 1071–1081. DOI: 10.1016/j.mcm.2009.12.011
2. Chakravarthy, S.R. & Dudin, A. (2003) Analysis of a retrial queuing model with MAP arrivals and two types of customers. *Mathematical and Computer Modelling*. 37(3–4). pp. 343–363. DOI: 10.1016/S0895-7177(03)00011-6
3. Avrachenkov, K., Dudin, A. & Klimenok, V. (2010) Queueing Model MMAP/M 2/1 with Two Orbits. *Lecture Notes in Comput. Sci.* 6235. pp. 107–118.
4. Avrachenkov, K., Nain, Ph. & Yechiali, U. (2014) A retrial system with two input streams and two orbit queues. *Queueing Systems*. 77(1). pp.1–31. DOI: 10.1007/s11134-013-9372-8
5. Ayyappan, G., Ganapathi, M. & Sekar, G. (2010) M/M/1 Retrial Queuing System with Loss and Feedback under Pre-Emptive Priority Service. *International Journal of Computer Applications*. 2(6). pp.27–34. DOI: 10.5120/672-945
6. Bocharov, P.P., Pavlova, O.I. & Puzikova, D.A. (1999) M|G|1|r retrial queueing systems with priority of primary customers. *Mathematical and computer Modelling*. 30(3–4). pp. 89–98. DOI: 10.1016/S0895-7177(99)00134-X
7. Atencia, I.M. (2017) A Geo/G/1 retrial queueing system with priority services. *European Journal of Operational Research*. 256(1). pp. 178–186. DOI: 10.1016/j.ejor.2016.07.011
8. Kim, C. (2016) Priority tandem queueing system with retrials and reservation of channels as a model of call center. *Computers & Industrial Engineering*. 96. pp. 61–71. DOI: 10.1016/j.cie.2016.03.012
9. Kumar, B.K., Vijayakumar, A. & Arivudainambi, D. (2002) An M/G/1 Retrial Queueing System with Two-Phase Service and Preemptive Resume. *Annals of Operations Research*. 113(1–4). pp. 61–79. DOI: 10.1023/A:1020901710087
10. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metody asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [The Asymptotical Analysis Method in Queueing Theory]. Tomsk: NTL.
11. Nazarov, A. & Chernikova, Ya. (2015) Gaussian Approximation of Distribution of States of the Retrial Queueing System with r-Persistent Exclusion of Alternative Customers. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications: Proceeding of the 14th International Scientific Conference*. 564. pp. 200–208. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4\_19

УДК 004.852

DOI: 10.17223/19988605/42/9

В.Е. Уваров

**РАСПОЗНАВАНИЕ НЕПОЛНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ,  
ОПИСЫВАЕМЫХ СКРЫТЫМИ МАРКОВСКИМИ МОДЕЛЯМИ,  
В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ  
ОТ ЛОГАРИФМА ФУНКЦИИ ПРАВДОПОДОБИЯ**

Предлагается метод распознавания неполных последовательностей, который заключается в классификации последовательностей в пространстве признаков, образованном первыми производными от логарифма функции правдоподобия того, что случайный процесс, описываемый скрытой марковской моделью, сгенерировал распознаваемую неполную последовательность. В качестве классификатора в предлагаемом методе применяется метод опорных векторов.

**Ключевые слова:** скрытые марковские модели; машинное обучение; последовательности; пропущенные наблюдения; неполные данные.

Теория скрытых марковских моделей (СММ) была представлена еще в 1970-х гг. Л. Баумом и его коллегами [1]. Изначально СММ применяли для распознавания речи. В конце 1980-х гг. СММ начали использовать в биоинформатике, например для обработки цепочек ДНК. Тем не менее наибольшую популярность СММ обрели после 1990-х гг., и данная тенденция продолжается и в настоящее время, что можно подтвердить частотой упоминания термина «hidden Markov model» в публикациях [2].

Однако в теории СММ остается малоизученная область, касающаяся вопросов применения СММ для анализа неполных данных. Данные вопросы являются актуальными, поскольку в сложных системах, например при приеме данных с космических и авиационных аппаратов, а также других источников, приходится иметь дело с потоками данных от различных датчиков в сложной помеховой обстановке, когда возможно пропадание информации или ее искажение. В настоящей работе рассматривается такой случай неполных данных, как наличие пропусков в распознаваемых последовательностях. Такие последовательности с пропусками будем называть неполными. В рассматриваемой ситуации пропуски не генерируются самим случайным процессом, описываемым СММ, а возникают в производных местах последовательностей за счет внешних условий.

Данная статья является продолжением исследований по распознаванию последовательностей, описываемых СММ, проводимых на кафедре теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета [3]. Отличие проводимого исследования заключается в том, что распознаваемые последовательности могут содержать пропуски.

## 1. Описание скрытой марковской модели

### 1.1. Структура скрытой марковской модели

Скрытой марковской моделью называют модель, описывающую случайный процесс, находящийся в каждый момент времени  $t \in \{1, \dots, T\}$  в одном из  $N$  скрытых состояний  $s \in \{s_1, \dots, s_N\}$  и в новый момент времени переходящий в другое или в прежнее состояние согласно некоторым вероятностям переходов. Состояния считаются скрытыми, однако они проявляются в тех или иных особенностях наблюдаемых последовательностей. В данной работе рассматриваются СММ с непрерывной плотностью распределения наблюдений, когда в общем случае многомерные наблюдения – это векторы действительных чисел. Значения наблюдаемых величин при условии того, что СММ находится в конкретном скрытом состоянии, подчиняются некоторым вероятностным законам. В случае СММ с непрерывной

плотностью распределения наблюдений эти вероятностные законы описываются функциями условной плотности распределений наблюдений.

Рассмотрим параметры, которыми можно полностью задать конкретную СММ. Обозначим скрытое состояние, в котором находится описываемый СММ процесс в момент  $t$ , символом  $q_t$ , многомерное наблюдение, которое он сгенерировал в момент времени  $t$ , – символом  $\mathbf{o}_t$ , а многомерное наблюдение, не привязанное к конкретному времени, – символом  $\mathbf{o}$ . СММ с непрерывной плотностью распределения характеризуется вектором вероятностного распределения начального скрытого состояния  $\Pi = \{\pi_i = p(q_1 = s_i), i = \overline{1, N}\}$ , матрицей вероятностей переходов из одного скрытого состояния в другое  $A = \{a_{ij} = p(q_{t+1} = s_j | q_t = s_i), i, j = \overline{1, N}\}$ , а также функциями условной плотности распределений многомерных наблюдений  $B = \{b_i(\mathbf{o}) = f(\mathbf{o} | q = s_i), i = \overline{1, N}, \mathbf{o} \in R^Z\}$  [4]. В данной работе в качестве функций условной плотности распределения наблюдений рассматривается смесь многомерных нормальных распределений:  $b_i(\mathbf{o}) = \sum_{m=1}^M \tau_{im} g(\mathbf{o}; \mu_{im}, \Sigma_{im}), i = \overline{1, N}, \mathbf{o} \in R^Z$ , где  $M$  – число компонент в смеси для каждого скрытого состояния,  $\tau_{im} \geq 0$  – вес  $m$ -й компоненты смеси в  $i$ -м скрытом состоянии ( $\sum_{m=1}^M \tau_{im} = 1, i = \overline{1, N}$ ),  $\mu_{im}$  – математическое ожидание нормального распределения, соответствующего  $m$ -й компоненте смеси в  $i$ -м скрытом состоянии,  $\Sigma_{im}$  – ковариационная матрица нормального распределения, соответствующая  $m$ -й компоненте смеси в  $i$ -м скрытом состоянии, а  $g(\mathbf{o}; \mu_{im}, \Sigma_{im}), \mathbf{o} \in R^Z$  – функция плотности многомерного нормального распределения, т.е.  $g(\mathbf{o}; \mu_{im}, \Sigma_{im}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^Z |\Sigma_{im}|}} e^{-0.5(\mathbf{o} - \mu_{im})^T \Sigma_{im}^{-1} (\mathbf{o} - \mu_{im})}, \mathbf{o} \in R^Z$ . Таким образом, некоторую конкретную СММ будем задавать в виде набора определяющих ее параметров  $\lambda = \{\Pi, A, B\}$ .

## 1.2. Распознавание целых последовательностей, описываемых СММ

Пусть определено несколько классов, соответствующих некоторым различным случайным процессам с номерами  $\overline{1, D}$ , которые описываются соответствующими СММ  $\lambda_1, \dots, \lambda_D$ , а также имеется последовательность многомерных наблюдений  $O = \{\mathbf{o}_1, \dots, \mathbf{o}_T\}$ . Для классификации последовательности, т.е. определения того, каким именно процессом, описываемым соответствующей СММ, она была порождена, как правило, применяют критерий максимума функции правдоподобия (МФП). В этом случае последовательность  $O$  относят к тому классу  $r^*$ , для которого значение логарифма функции правдоподобия является максимальным:  $r^* = \arg \max_{r \in \overline{1, D}} (\ln p(O | \lambda_r))$ .

Для расчета логарифма функции правдоподобия того, что последовательность  $O$  была сгенерирована процессом, описываемым СММ  $\lambda$ , т.е.  $p(O | \lambda) = \ln \sum_{q_1, q_2, \dots, q_T} p(\{\mathbf{o}_1, \dots, \mathbf{o}_T\}, \{q_1, q_2, \dots, q_T\} | \lambda)$ , обычно применяют алгоритм forward-backward [5]. Для вычисления самого значения  $\ln p(O | \lambda)$  необходима лишь первая часть forward-backward алгоритма, поэтому приведем только ее.

Во оригинальном алгоритме forward-backward вероятности умножаются друг на друга, т.е. числа меньше единицы, имеющие, как правило, значения, обратные количеству скрытых состояний, умножаются в количестве, пропорциональном длине последовательности. Для длинных последовательностей (длиной более 100) данные произведения достаточно быстро становятся меньше минимальных аппаратно реализуемых чисел современных машин. Для исправления этой проблемы необходимо либо использовать длинную арифметику, что значительно замедлит вычисления, либо масштабировать все

промежуточные произведения, чтобы они не стремились к нулю. Эффективные методы масштабирования, которые практически не замедляют обучения, известны и приведены в [4].

Первая часть forward-backward алгоритма (ее достаточно для вычисления логарифма функции правдоподобия) производит вычисление отмасштабированных прямых вероятностей  $p(\{\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \dots, \mathbf{o}_t\}, q_t = s_i | \lambda)$ ,  $t = \overline{1, T}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , т.е. вероятностей того, что последовательность многомерных наблюдений  $\{\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \dots, \mathbf{o}_t\}$  была порождена процессом, описываемым моделью  $\lambda$ , и что данный процесс находился в скрытом состоянии  $s_i$  в момент времени  $t$ . Алгоритм вычисления отмасштабированных прямых вероятностей и логарифма функции правдоподобия:

1) инициализация:

$$\tilde{\alpha}_1(i) = \pi_i b_i(\mathbf{o}_1), i = \overline{1, N}; \quad (29)$$

2) индукция:

$$\tilde{\alpha}_{t+1}(i) = b_i(\mathbf{o}_{t+1}) \left[ \sum_{j=1}^N \alpha'_t(j) a_{ji} \right], i = \overline{1, N}, t = \overline{1, T-1}, \quad (30)$$

где

$$\alpha'_t(j) = \frac{\tilde{\alpha}_t(j)}{\sum_{n=1}^N \tilde{\alpha}_t(n)}, j = \overline{1, N}, t = \overline{1, T-1}. \quad (31)$$

Определим параметр масштаба:

$$c_t = \left( \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_t(i) \right)^{-1}, t = \overline{1, T}, \quad (32)$$

тогда

$$\begin{aligned} \alpha'_t(i) &= c_t \tilde{\alpha}_t(i), \quad i = \overline{1, N}, t = \overline{1, T-1}, \\ \alpha'_t(i) &= \left( \prod_{\tau=1}^t c_\tau \right) \alpha_t(i), \quad i = \overline{1, N}, t = \overline{1, T-1}. \end{aligned}$$

Логарифм функции правдоподобия для последовательности наблюдений может быть вычислен с помощью параметров масштаба:

$$\ln[p(O|\lambda)] = - \sum_{t=1}^T \ln c_t. \quad (33)$$

## 2. Распознавание неполных последовательностей, описываемых СММ

Прежде чем производить распознавание неполных последовательностей, описываемых СММ, необходимо оценить параметры соответствующих СММ, т.е. обучить их. Вполне вероятно, что в реальной ситуации обучение придется также проводить на неполных последовательностях, соответственно, необходимо иметь алгоритмы обучения СММ по неполным последовательностям. Тем не менее в данной статье будет рассмотрен только вопрос распознавания неполных последовательностей. Вопрос обучения СММ на неполных последовательностях был рассмотрен автором в предыдущих работах [6, 7, 8], где был предложен алгоритм обучения СММ, основанный на маргинализации пропущенных наблюдений.

### 2.1. Распознавание неполных последовательностей с помощью маргинализации пропущенных наблюдений

Как и ранее, будем называть неполной, или «дефектной», последовательностью такую последовательность  $O$ , в которой значение некоторых наблюдений не определено. Обозначим пропуск символом  $\emptyset$ . Тогда  $O = \{\mathbf{o}_t \in R^*, t = \overline{1, T}\}$ ,  $R^* = R^Z \cup \{\emptyset\}$ .

Для получения алгоритма распознавания неполных последовательностей с помощью СММ необходимо прежде всего обратиться к формулам (29)–(33), по которым производится расчет прямых и

обратных вероятностей. Видно, что вычисление значений  $b_i(\mathbf{o}_t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $t = \overline{1, T}$ , в формулах (29)–(33), которые используются как в алгоритме обучения СММ, так и в алгоритме распознавания последовательностей, невозможно, если  $\mathbf{o}_t = \emptyset$ , где символ  $\emptyset$  означает пропущенное наблюдение, так как не определено конкретное наблюдаемое значение, а значит, нельзя рассчитать значение  $b_i(\mathbf{o}_t)$ , которое соответствует данному наблюдению. Чтобы можно было использовать эти формулы в случае неполных последовательностей, нужно каким-то образом доопределить значение сомножителя  $b_i(\emptyset)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , для тех прямых вероятностей, которые рассчитываются по отсутствующим в последовательности наблюдениям.

Предлагаемый в данной работе подход состоит в том, чтобы считать, что на месте пропуска могло стоять любое наблюдение из  $R^Z$  [9]. Руководствуясь этой идеей, представим значение  $b_i(\emptyset)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , как интеграл по всем возможным значениям пропущенного наблюдения:

$$b_i(\emptyset) = \int b_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1, \quad i = \overline{1, N}.$$

Справедливость данного равенства обусловлена тем, что в один момент времени имеется только одно наблюдение  $\mathbf{x}$ , а также тем, что  $b_i(\mathbf{x})$  – условная плотность распределения наблюдения  $\mathbf{x}$  в скрытом состоянии  $s_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Руководствуясь теми же соображениями, определим значение плотности нормального распределения, входящего в смесь, для наблюдения-пропуска [9]:

$$g(\emptyset, \mu_{im}, \Sigma_{im}) = \int g(\mathbf{x}, \mu_{im}, \Sigma_{im}) d\mathbf{x} = 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Теперь выражение  $b_i(\mathbf{o}_t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $t = \overline{1, T}$ , определено для всех  $\mathbf{o}_t \in R^*$ , и формулы (29)–(33) расчета прямых и обратных вероятностей можно расширить на случай неполных последовательностей.

Модифицированный алгоритм вычисления прямых вероятностей (отмасштабированный), используемый при распознавании неполных последовательностей:

1) инициализация:

$$\tilde{\alpha}_1(i) = \begin{cases} \pi_i, & \mathbf{o}_1 = \emptyset, \\ \pi_i b_i(\mathbf{o}_1), & \text{иначе,} \end{cases} \quad i = \overline{1, N};$$

2) индукция:

$$\tilde{\alpha}_{t+1}(i) = \begin{cases} \sum_{j=1}^N \alpha'_t(j) a_{ji}, & \mathbf{o}_{t+1} = \emptyset, \\ b_i(\mathbf{o}_{t+1}) \left[ \sum_{j=1}^N \alpha'_t(j) a_{ji} \right], & \text{иначе,} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, \quad t = \overline{1, T-1},$$

$$\text{где } \alpha'_t(j) = \frac{\tilde{\alpha}_t(j)}{\sum_{n=1}^N \tilde{\alpha}_t(n)}, \quad j = \overline{1, N}, \quad t = \overline{1, T-1}.$$

Параметр масштаба вычисляется по формуле:  $c_t = \left( \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_t(i) \right)^{-1}$ ,  $t = \overline{1, T}$ . Логарифм функции прав-

доподобия вычисляется по формуле  $\ln[p(\mathcal{O}|\lambda)] = -\sum_{t=1}^T \ln c_t$ .

Назовем описанный выше прием доопределения неизвестных величин «маргинализацией пропущенных наблюдений», так как здесь вычисляется маргинальное распределение  $b_i(\emptyset)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , для случайной величины  $\emptyset$ , которая может принимать любое значение из множества  $R^Z$ . Легко видеть, что с помощью процедуры маргинализации можно проводить распознавание неполных последовательностей по критерию МФП, поскольку необходимые формулы для вычисления логарифма функции правдоподобия доопределены на случай пропущенных наблюдений.

## 2.2. Распознавание неполных последовательностей в пространстве первых производных от логарифма функции правдоподобия

Распознавание последовательностей, описываемых СММ, можно проводить не только с помощью критерия максимума функции правдоподобия. Ранее был разработан и успешно применен метод распознавания последовательностей в пространстве первых производных от логарифма функции правдоподобия того, что случайный процесс, описываемый СММ, сгенерировал распознаваемую последовательность, по различным параметрам СММ. Данный метод распознавания показал преимущество над критерием МФП в случаях близости СММ, описывающих классы, по параметрам, а также в условиях, когда СММ обучались на последовательностях, подверженных разного рода помехам [3]. Тем не менее случая полностью пропущенных наблюдений в последовательностях в данном исследовании не рассматривалось. Поскольку пропуски в наблюдениях также можно интерпретировать как своего рода помехи, то целесообразно исследовать применимость данного метода к анализу неполных последовательностей, описываемых моделями, обученными на неполных последовательностях.

Далее приведено описание упомянутого выше метода. Для наглядности рассмотрим случай двухклассовой классификации. Для каждой последовательности наблюдений  $O$  принадлежность к одной из двух моделей будем определять с помощью значений производных по различным параметрам модели.

Пусть имеются обучающая выборка  $\{O^1, O^2, \dots, O^K\}$  и две СММ  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Для каждой обучающей по-

следовательности  $O$  из  $\{O^1, O^2, \dots, O^K\}$  будет построен вектор вида  $\begin{pmatrix} \frac{\partial \ln p(O|\lambda_1)}{\partial \eta} |_{\lambda_1} \\ \frac{\partial \ln p(O|\lambda_2)}{\partial \eta} |_{\lambda_2} \end{pmatrix}$ . Транспониро-

ванные версии этих векторов объединяются вместе в обучающую матрицу  $X$ , в которой столбцы соответствуют признакам (производным по параметрам моделей), а строки – последовательностям наблюдений. Также составляется вектор правильных ответов  $Y = \{y_1, \dots, y_K\}$ , где  $y_K \in \{1, 2\}$  – это номер

СММ, которая соответствует случайному процессу, породившему  $O^k$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Затем производится обучение классификатора по методу опорных векторов с помощью обучающей матрицы  $X$  и вектора правильных ответов  $Y$ . Для распознавания строится аналогичный вектор для рассматриваемой последовательности  $O$  и определяется, к какой группе этот вектор ближе по методу опорных векторов [10]. Описанный двухклассовый случай легко обобщить на многоклассовый случай, используя стратегии «каждый против каждого» или «один против всех», часто применяемые для бинарных классификаторов.

Далее приводится способ вычисления производных от логарифма функции правдоподобия по параметрам СММ [3].

Исходя из формулы (33),

$$\frac{\partial \ln p(O|\lambda)}{\partial \eta} = - \sum_{k=1}^K \left( \sum_{t=1}^T \frac{1}{c_t^k} \frac{\partial c_t^k}{\partial \eta} \right). \quad (34)$$

Вычисление производной от параметра масштаба по некоторому параметру модели  $\eta$  производится следующим образом:

$$\frac{\partial c_t}{\partial \eta} = -c_t^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial \tilde{\alpha}_t(i)}{\partial \eta}, \quad t = \overline{1, T}. \quad (35)$$

Для вычисления  $\frac{\partial \tilde{\alpha}_t(i)}{\partial \eta}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , продифференцируем по шагам алгоритм вычисления прямых

переменных с масштабом:

Шаг 1:

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}_1(i)}{\partial \eta} = \frac{\partial \alpha_1(i)}{\partial \eta}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (36)$$

Шаг 2:

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}_t(i)}{\partial \eta} = \left[ \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \alpha'_{t-1}(j)}{\partial \eta} a_{ji} + \alpha'_{t-1}(j) \frac{\partial a_{ji}}{\partial \eta} \right) \right] b_i(t) + \sum_{j=1}^N \left( \alpha'_{t-1}(j) a_{ji} \right) \frac{\partial b_i(t)}{\partial \eta}, \quad (37)$$

где  $\frac{\partial \alpha'_{t-1}(j)}{\partial \eta} = \frac{\partial c_{t-1}}{\partial \eta} \tilde{\alpha}_{t-1}(j) + \frac{\partial \tilde{\alpha}_{t-1}(j)}{\partial \eta} c_{t-1}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $t = \overline{2, T}$ .

Таким образом, для вычисления значений  $\frac{\partial \tilde{\alpha}_t(i)}{\partial \eta}$ ,  $i = \overline{1, N}$ , нам потребуется вычислить производные  $\frac{\partial \tilde{\alpha}_1(i)}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial b_i(t)}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial a_{ij}}{\partial \eta}$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ ,  $t = \overline{1, T}$ .

В случае недиагональной матрицы при вычислении производной по элементу ковариационной матрицы придется дифференцировать элементы обратной матрицы, поэтому будем рассматривать случай, когда матрицы  $\Sigma_{im}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $m = \overline{1, M}$  являются диагональными.

Далее приведен способ вычисления производных  $\frac{\partial \tilde{\alpha}_1(i)}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial b_i(t)}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial a_{ij}}{\partial \eta}$  для указанных значений параметра  $\eta$  (параметр  $\eta$  может принимать значения  $\pi_i, a_{ij}, \tau_{im}, \mu_{im}^z, \Sigma_{im}^{zz}$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,  $z = \overline{1, Z}$ ):

$$\frac{\partial \alpha_1(i)}{\partial \pi_j} = \begin{cases} b_i(1), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial b_i(t)}{\partial \pi_j} = 0, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad t = \overline{1, T}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial \alpha_1(i)}{\partial a_{i_1 j_1}} = 0, \quad i, i_1, j_1 = \overline{1, N}, \quad (40)$$

$$\frac{\partial b_i(t)}{\partial a_{i_1 j_1}} = 0, \quad i, i_1, j_1 = \overline{1, N}, \quad t = \overline{1, T}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x} = \begin{cases} 1, & x = a_{ij}, \\ 0, & x \neq a_{ij}, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial b_i(t)}{\partial \tau_{i_1 m}} = \begin{cases} g(o_t; \mu_{im}, \Sigma_{im}), & i = i_1, \\ 0, & i \neq i_1, \end{cases} \quad i, i_1 = \overline{1, N}, \quad t = \overline{1, T}, \quad m = \overline{1, M}, \quad (43)$$

$$\frac{\partial \alpha_1(i)}{\partial \tau_{i_1 m}} = \begin{cases} \pi_i \frac{\partial b_i(1)}{\partial \tau_{i_1 m}}, & i = i_1, \\ 0, & i \neq i_1, \end{cases} \quad i, i_1 = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad (44)$$

$$\frac{\partial b_i(t)}{\partial \mu_{i_1 m}^z} = \begin{cases} 0, 5\tau_{im} g(o_t; \mu_{im}, \Sigma_{im}) \frac{o_t^z - \mu_{im}^z}{\Sigma_{im}^{zz}}, & i = i_1, \\ 0, & i \neq i_1, \end{cases} \quad i, i_1 = \overline{1, N}, \quad t = \overline{1, T}, \quad m = \overline{1, M}, \quad z = \overline{1, Z}, \quad (45)$$

$$\frac{\partial \alpha_1(i)}{\partial \mu_{i_1 m}^z} = \begin{cases} \pi_i \frac{\partial b_i(1)}{\partial \mu_{i_1 m}^z}, & i = i_1, \\ 0, & i \neq i_1, \end{cases} \quad i, i_1 = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad z = \overline{1, Z}, \quad (46)$$

$$\frac{\partial b_i(t)}{\partial \Sigma_{i_1 m}^{zz}} = \begin{cases} 0, 5\tau_{im} g(o_t; \mu_{im}, \Sigma_{im}) \left( \left( \frac{o_t^z - \mu_{im}^z}{\Sigma_{im}^{zz}} \right)^2 - \frac{1}{|\Sigma_{im}|} \right), & i = i_1, \\ 0, & i \neq i_1, \end{cases} \quad i, i_1 = \overline{1, N}, \quad t = \overline{1, T}, \quad m = \overline{1, M}, \quad z = \overline{1, Z}, \quad (47)$$

$$\frac{\partial \alpha_1(i)}{\partial \Sigma_{im}^{zz}} = \begin{cases} \pi_i \frac{\partial b_i(1)}{\partial \Sigma_{im}^{zz}}, & i = i_1, \\ 0, & i \neq i_1, \end{cases} \quad i, i_1 = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}, z = \overline{1, Z}. \quad (48)$$

Формулы (34)–(48) можно доопределить на случай неполных последовательностей, воспользовавшись приемом маргинализации пропущенных наблюдений, описанным в предыдущем подразделе. Таким образом, в формулах (34)–(48) будем считать  $b_i(\emptyset) = 1$ ,  $i = \overline{1, N}$ , а  $g(\emptyset, \mu_{im}, \Sigma_{im}) = 1$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $m = \overline{1, M}$ , где символ  $\emptyset$  означает пропущенное наблюдение. К тому же будут внесены дополнительные изменения в формулу (45):

$$\frac{\partial b_i(t)}{\partial \mu_{im}^z} = \begin{cases} 0,5\tau_{im}g(o_t; \mu_{im}, \Sigma_{im}) \frac{o_t^z - \mu_{im}^z}{\Sigma_{im}^{zz}}, & i = i_1 \text{ и } o_t \neq \emptyset, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$i, i_1 = \overline{1, N}, t = \overline{1, T}, m = \overline{1, M}, z = \overline{1, Z},$$

и формулу (47):

$$\frac{\partial b_i(t)}{\partial \Sigma_{im}^{zz}} = \begin{cases} 0,5\tau_{im}g(o_t; \mu_{im}, \Sigma_{im}) \left( \left( \frac{o_t^z - \mu_{im}^z}{\Sigma_{im}^{zz}} \right)^2 - \frac{1}{|\Sigma_{im}|} \right), & i = i_1 \text{ и } o_t \neq \emptyset, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$i, i_1 = \overline{1, N}, t = \overline{1, T}, m = \overline{1, M}, z = \overline{1, Z}.$$

### 3. Результаты вычислительного эксперимента

В данном разделе разработанный метод распознавания неполных последовательностей в пространстве первых производных от логарифма функции правдоподобия сравнивается с методом распознавания неполных последовательностей с помощью маргинализации пропущенных наблюдений.

В качестве истинных СММ были взяты модели  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  со следующими характеристиками. Число скрытых состояний  $N = 3$ , количество компонент в смесях  $M = 3$ . Размерность векторов наблюдений  $Z = 2$ . Вектор распределения начального состояния:  $\Pi = [1, 0, 0]$ , матрица вероятностей переходов:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 + \Delta A & 0,7 - \Delta A & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 + \Delta A & 0,6 - \Delta A \\ 0,8 - \Delta A & 0,1 & 0,1 + \Delta A \end{bmatrix},$$

веса компонент смесей:

$$\{\tau_{im}, i = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}\} = \begin{bmatrix} 0,3 + \Delta \tau & 0,4 - \Delta \tau & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 + \Delta \tau & 0,3 - \Delta \tau \\ 0,3 - \Delta \tau & 0,4 & 0,3 + \Delta \tau \end{bmatrix}$$

(номеру строки соответствует номер скрытого состояния, а номеру столбца – номер компоненты смеси), векторы математических ожиданий компонент смесей:

$$\{\mu_{im}, i = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}\} = \begin{bmatrix} (0 - \Delta \mu & 0 + \Delta \mu)^T & (1 - \Delta \mu & 1 + \Delta \mu)^T & (2 - \Delta \mu & 2 + \Delta \mu)^T \\ (3 - \Delta \mu & 3 + \Delta \mu)^T & (4 - \Delta \mu & 4 + \Delta \mu)^T & (5 - \Delta \mu & 5 + \Delta \mu)^T \\ (6 - \Delta \mu & 6 + \Delta \mu)^T & (7 - \Delta \mu & 7 + \Delta \mu)^T & (8 - \Delta \mu & 8 + \Delta \mu)^T \end{bmatrix}$$

(номеру строки соответствует номер скрытого состояния, а номеру столбца – номер компоненты смеси), все ковариационные матрицы компонент смесей  $\{\Sigma_{im}, i = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}\}$  были выбраны диагональными, значения всех элементов на диагонали были равны  $0,1 + \Delta \sigma$ . При этом у первой модели

$\Delta A = 0$ ,  $\Delta \tau = 0$ ,  $\Delta \mu = 0$ ,  $\Delta \sigma = 0$ , а у второй модели  $\Delta A = 0,05$ ,  $\Delta \tau = 0,05$ ,  $\Delta \mu = 0,01$ ,  $\Delta \sigma = 0,01$ . Такой выбор параметров максимально усложняет задачу распознавания, поскольку случайные процессы, описываемые такими моделями, очень близки по свойствам и порождаемые ими последовательности трудно различить. С помощью каждой из моделей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  было сгенерировано  $K = 100$  обучающих и тестовых последовательностей длиной  $T = 100$ , причем каждая из последовательностей содержала  $G$  пропусков (число  $G$  изменялось от 0 до 90 в ходе эксперимента) в случайных местах. С помощью обучающих неполных последовательностей были получены оценки моделей  $\hat{\lambda}_1$  и  $\hat{\lambda}_2$  по алгоритму обучения СММ по неполным обучающим последовательностям, основанному на маргинализации пропущенных наблюдений [6, 7, 8]. Также с помощью производных от обучающих последовательностей и оценок СММ был обучен классификатор метода опорных векторов, гиперпараметры которого подобраны с помощью кросс-валидации по четырем блокам. Затем с помощью  $\hat{\lambda}_1$  и  $\hat{\lambda}_2$  проводилось распознавание неполных тестовых последовательностей с помощью метода маргинализации пропущенных наблюдений по критерию максимума функции правдоподобия (сплошная линия) и с помощью первых производных от логарифма функции правдоподобия, используя метод опорных векторов в качестве классификатора (рис. 1, штриховая линия), причем использовались производные по всем параметрам моделей. Фиксировался процент верно распознанных последовательностей. На рис. 1 приведены усредненные результаты после 50 запусков описанного выше эксперимента с различными начальными значениями генератора случайных чисел.

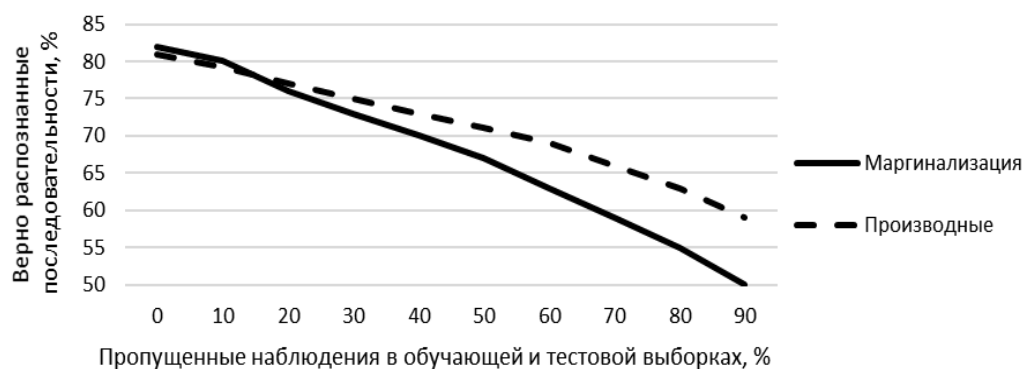


Рис. 1. Зависимость процента верно распознанных тестовых последовательностей от доли пропусков в обучающих и тестовых последовательностях

Как видно, метод распознавания, основанный на производных, начинает превосходить метод, основанный на маргинализации пропущенных наблюдений, начиная примерно с 20% пропусков в обучающих и тестовых последовательностях. При этом преимущество метода на основе производных увеличивается с увеличением процента пропусков, достигая 10% при 90% пропусков в последовательностях.

### Заключение

В данной статье был предложен метод распознавания неполных последовательностей, который заключается в классификации последовательностей в пространстве признаков, образованном первыми производными от логарифма функции правдоподобия того, что случайный процесс, описываемый скрытой марковской моделью, сгенерировал распознаваемую неполную последовательность. Сравнительный анализ предложенного метода и разработанного автором ранее метода распознавания неполных последовательностей, основанного на маргинализации пропущенных наблюдений, показал, что предложенный метод позволяет достичь большего процента верно распознанных последовательностей, чем метод маргинализации, начиная с некоторого (в проведенном эксперименте — более 20%) процента пропусков в обучающих и тестовых последовательностях. Таким образом, предложенный метод может быть рекомендован к применению в условиях сильных помех, когда имеется много пропущенных данных, однако распознавание неполных последовательностей все же необходимо проводить.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Baum L.E., Petrie T. Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1966. V. 37. P. 1554–1563.
2. Упоминания ключевого слова «hidden Markov models» между 1800 и 2008 годами : данные из Google Ngram Viewer. URL: <http://tinyurl.com/gmq5snv>
3. Gulyaeva T.A., Popov A.A., Kokoreva V.V., Uvarov V.E. Classification of observation sequences described by Hidden Markov Models // *Proc. of the Int. Workshop Applied Methods of Statistical Analysis Nonparametric approach AMSA-2015*. Novosibirsk, Belokuriha, 14–19 Sep. 2015. P. 136–143.
4. Rabiner L.R. A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition // *Proc. of the IEEE*. 1989. V. 77. P. 257–285.
5. Baum L.E., Egon J.A. An inequality with applications to statistical estimation for probabilistic functions of a Markov process and to a model for ecology // *Bulletin of the American Meteorological Society*. 1967. V. 73. P. 360–363.
6. Попов А.А., Гульяева Т.А., Уваров В.Е. Исследование подходов к обучению скрытых марковских моделей при наличии пропусков в последовательностях // *Обработка информации и математическое моделирование : материалы Рос. науч.-техн. конф.* Новосибирск, 21–22 апр. 2016. С. 125–139.
7. Popov A., Gulyaeva T., Uvarov V. A comparison of some methods for training hidden Markov models on sequences with missing observations // *Proc. of 11<sup>th</sup> Int. Forum on Strategic Technology IFOST-2016*. 2016. V. 1. P. 431–435.
8. Попов А.А., Гульяева Т.А., Уваров В.Е. Исследование методов обучения скрытых марковских моделей при наличии пропусков в последовательностях // *Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-2016) : труды XIII международной конференции : в 12 т.* Новосибирск, 2016. Т. 8: Моделирование и вычислительная техника. Информационные системы и технологии. С. 149–152.
9. Cooke M., Green P., Josifovski L., Vizingh A. Robust automatic speech recognition with missing and unreliable acoustic data // *Speech Communication*. 2001. V. 34, No. 3. P. 267–285.
10. Boser B.E.; Guyon I.M., Vapnik V.N. A training algorithm for optimal margin classifiers // *Proc. of the fifth annual workshop on Computational learning theory – COLT '92*. 1992. P. 144.

**Уваров Вадим Евгеньевич.** E-mail: [uvarov.vadim42@gmail.com](mailto:uvarov.vadim42@gmail.com)

Новосибирский государственный технический университет

Поступила в редакцию 7 апреля 2017 г.

*Uvarov Vadim E.* (Novosibirsk State Technical University, Russian Federation).

**Recognition of incomplete sequences described by hidden Markov models using first derivatives of likelihood function logarithm.**

**Keywords:** hidden Markov models; machine learning; sequences; missing observations; incomplete data.

DOI: 10.17223/19988605/42/9

Hidden Markov model (HMM) conception was presented yet in 1970-s, however problems which concern using HMMs in case of incomplete data remain poorly investigated. These problems are quite relevant since in complex systems, e.g. when receiving signals from spacecrafts or aircrafts, one has to deal with datastreams of various sources in noisy environments when there is a high possibility of data loss or corruption. In this paper, we deal with the problem of missing observations in sequences. From now on we will refer to such sequences as incomplete. We consider a case when such missing observations are not generated by random process itself but rather occur randomly in sequences because of some external interference.

We propose a method for recognition of incomplete sequences which is based on classification of incomplete sequences using first derivatives of likelihood function logarithm with respect to various HMM parameters. We use a support vector machine classifier for that purpose. The likelihood in that case is the probability of incomplete sequence being generated by a HMM.

The proposed method was compared to a previously developed method for recognition based on marginalization of missing observations. The proposed method proved to be more effective than the other method in situation when the number of missing observations in training and testing sequences is high (more than 20% in our particular experiment). Thus, we propose to prefer the usage of the proposed method in situations when there is big loss of data but the recognition is still had to be done.

## REFERENCES

1. Baum, L.E. & Petrie, T. (1966) Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains. *The Annals of Mathematical Statistics*. 37. pp. 1554–1563. DOI: 10.1214/aoms/1177699147. <https://projecteuclid.org/euclid.aoms/1177699147>
2. Google Ngram Viewer. (n.d.) *Frequencies of “hidden Markov models” keyword in literature published between 1800 and 2008 year provided by Google Ngram Viewer*. [Online] Available from: <http://tinyurl.com/gmq5snv>
3. Gulyaeva, T.A., Popov, A.A., Kokoreva, V.V. & Uvarov, V.E. (2015) Classification of observation sequences described by Hidden Markov Models. *Proc. of the Int. Workshop Applied Methods of Statistical Analysis Nonparametric approach AMSA-2015*. Novosibirsk, Belokuriha. September 14–19, 2015. pp. 136–143.

4. Rabiner, L.R. (1989) A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition. *Proc. of the IEEE*. 77. pp. 257–285. DOI: 10.1109/5.18626
5. Baum, L.E. & Egon, J.A. (1967) An inequality with applications to statistical estimation for probabilistic functions of a Markov process and to a model for ecology. *Bulletin of the American Meteorological Society*. 73. pp. 360-363. DOI: 10.1090/S0002-9904-1967-11751-8
6. Popov, A., Gulyaeva, T. & Uvarov, V. (2016) [Training hidden Markov models on incomplete sequences]. *Obrabotka informatsii i matematicheskoe modelirovanie* [Information processing and mathematical modelling]. Proc. of Russian Conference. Novosibirsk. April 21-22, 2016. pp. 125-139. (In Russian).
7. Popov, A., Gulyaeva, T. & Uvarov, V. (2016) A Comparison of Some Methods for Training Hidden Markov Models on Sequences with Missing Observations. *Proc. of 11th Int. Forum on Strategic Technology IFOST-2016*. 1. pp. 431-435. DOI: 10.1109/IFOST.2016.7884147
8. Popov, A., Gulyaeva, T. & Uvarov, V. (2016) [Training hidden Markov models on sequences with missing observations]. *Proc. of 13th Int. Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE 2016)*. Vol. 1. pp. 317-320.
9. Cooke, M., Green, P., Josifovski, L. & Vizingh, A. (2001) Robust automatic speech recognition with missing and unreliable acoustic data. *Speech Communication*. 34(3). pp. 267-285.
10. Boser, B.E., Guyon, I.M. & Vapnik, V.N. (1992). A training algorithm for optimal margin classifiers. *Proc. of the Fifth Annual Workshop on Computational Learning Theory. COLT '92*. pp. 144. DOI: 10.1145/130385.130401

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 681.5.09

DOI: 10.17223/19988605/42/10

A.Yu. Matrosova, E.V. Mitrofanov, S.A. Ostanin, N.B. Butorina,  
E.G. Pakhomova, S.A. Shulga

### DETECTION AND MASKING OF TROJAN CIRCUITS IN SEQUENTIAL LOGIC

*The reported study was supported by Russian Science Foundation, research project № 14-19-00218.*

Inserting malicious sub-circuits that may destroy a logical circuit or provide leakage of confidential information from a system containing the logical circuit demands detection of such sub-circuits followed their masking if possible. We suggest a method of finding a set of sequential circuit nodes in which Trojan Circuits (TC) may be inserted. After simulating the sequential circuit on the proper input sequences we may find TC if it is present and mask it by the special sub-circuit. The method is based on applying the precise (not heuristic) random estimations of internal nodes controllability and observability calculated with using a structural description of the combinational part of the sequential circuit. These estimations are computed with applying a State Transition Graph (STG) description, if we suppose that TC may be inserted out of the working area (out of the specification) of the sequential circuit. In addition the algorithms of transfer sequence detection for a set of internal states are used. Reduced Ordered Binary Decision Diagrams (ROBDDs) for the combinational part and its fragments are applied for getting both the estimations and transfer sequences by means of operations on ROBDDs. It is known that these operations have a polynomial complexity. Note that if TCs are inserted out of the working area, they cannot be detected both under verification and testing in the working area. Techniques of masking TCs are proposed. The experimental results on ISCAS and MCNC benchmarks show applicability of the approach. Masking sub-circuits overhead is appreciated.

**Keywords:** sequential circuits; controllability and observability of combinational circuit nodes; State Transition Graph (STG); Malicious circuit (Trojan Circuit); Reduced Ordered Binary Decision Diagram (ROBDD); working area.

The enhanced utilization of outsourcing services for a part of VLSIs (Intellectual Property cores, reprogramming components based on FPGA and so on) to cut VLSI cost increases risk of inserting Trojan Circuits (TCs) that may destroy VLSI or provide leakage of confidential information [1–3]. TCs as a rule act in rare operation situations, therefore they are not detectable neither during VLSI verification nor VLSI testing. TC consists of two parts. Trojan trigger is switched on when the certain combination of signals appears on TC inputs. Trojan payload is operation unit that is switched on by trigger sub-circuit. It is necessary to detect such malicious sub-circuits and, if possible, to mask their actions. It is important to be more precise in finding circuit nodes suitable for inserting TC.

In [4] a vulnerability analysis of circuits is performed at the behavioral level. In this paper a similar analysis is done at the gate level. It means that our proposed technique achieves detection rates that are not affected by synthesis and optimizations.

Design-for-Trust (DFTr) techniques are proposed in [5]. Here prevention schemes based on inserting extra circuitry for obscuring the circuit at different levels of design abstraction making the reverse-engineering at the foundry difficult are presented.

One of solutions is Split Manufacturing [6] that means segregation of fabrication steps among different foundries. These techniques can incorporate reconfigurable logic along with standard logic [7].

In [8], authors proposed an automated low-overhead online methodology to aid in the detection of TCs. They focus on the detection of small TC instances (with less than five logic gates) that cause logic malfunction on activation through rare internal logic conditions. These conditions are determined by using heuristic estimations of controllability. The main advantage of the proposed technique is that the impact of the activated

TC need not propagate all the way to the primary output for the checker to detect it. This feature guarantees that a TC instance is detected as soon as it is triggered, independent of whether the logic malfunction caused by the TC actually propagates to the primary output.

In [9] Functional Analysis for Nearly-unused Circuit Identification (FANCI) tool is suggested. It flags suspicious wires in design, which have the potential to be malicious. FANCI uses approximate Boolean functional analysis to detect these wires.

In this paper in contrast with [8, 9] detection of suspicious nodes is based on using precisely calculated random estimations of controllability and observability of a combinational part internal node. The suggested approach guarantees finding all internal states (compactly represented by ROBDD) that may provide triggering the node. The approach is oriented to a threat model when the designer in a design house is untrusted. The estimations calculations like those in [8, 9] are based on using structural description of the combinational part. In this paper representation of the sequential circuit behavior by State Transition Graph (STG) is additionally used. The calculations are executed with operations on Reduced Ordered Binary Decision Diagrams (ROBDDs, further just BDDs). The algorithms of transfer sequence detection for a set of internal states are also based on using BDD operations and directed toward BDD simplification. Techniques of masking TCs are proposed. The experimental results on benchmarks illustrate applicability of the suggested approach and show that overhead for masking TC may be rather small.

In Section II techniques of precise calculation of controllability and observability estimations for combinational part nodes of a sequential circuit are briefly described. In Section III the way of calculation of precise controllability estimations for combinational part nodes out of working area is given. In Section IV possibilities of detecting transfer sequence for a set of internal states both without finding the sequence itself and with finding one sequence are discussed. In Section V the techniques of masking TC are proposed and experimental results are considered.

### 1. Precise calculation of controllability and observability estimations with using structural combinational part description

1(0)-controllability of an internal node is a possibility of delivering 1(0) value to it, observability is a possibility of observation of changing 1(0) value of an internal node on the proper circuit output. Precise calculation of random controllability and observability estimations is based on using of the corresponding BDDs [10] and operations on them. These estimations are derived for pair of nodes connected with the input and the output of a TC, correspondingly.

To calculate precisely 1(0)-controllability estimation for internal node  $v$  [11] of combinational part  $C$  we derive BDD  $R^{cont}(1)$  ( $R^{cont}(0)$ ) using the combinational circuit which output is pole  $v$ , and inputs coincide with circuit  $C$  inputs. ( $R^{cont}(0)$  is obtained from  $R^{cont}(1)$  by permutation of terminal nodes.

To calculate precisely observability estimation for internal node  $v$  [11] of combinational part  $C$  and the proper circuit output we derive first BDD  $R(C_v)$  for sub-circuit  $C_v$ . The sub-circuit corresponds to the proper circuit  $C$  output and is obtained from circuit  $C$  under the condition that internal node  $v$  is an input of sub-circuit  $C_v$  [10]. During construction of BDD  $R(C_v)$  variable  $v$  is chosen as the first variable of the decomposition. It means that BDD  $R(C_v)$  root is marked by variable  $v$ .

Let BDD  $R(C_v)$  implements function  $f$ . We derive from  $R(C_v)$  BDDs  $R(f^{v=0})$ ,  $R(f^{v=1})$  which roots are children nodes of  $R(C_v)$  root. These BDDs implement functions  $f^{v=0}$  and  $f^{v=1}$  accordingly. Multiplications  $R(f^{v=0})\overline{R(f^{v=1})}$ ,  $R(f^{v=1})\overline{R(f^{v=0})}$  are executed and results are merged being represented by BDD  $R^{obs}$ :

$$R^{obs} = R(f^{v=0})\overline{R(f^{v=1})} \vee R(f^{v=1})\overline{R(f^{v=0})}. \quad (1)$$

Getting  $\overline{R(f^{v=0})}$ ,  $\overline{R(f^{v=1})}$  from  $R(f^{v=0})$ ,  $R(f^{v=1})$  is reduced to permutation of terminal nodes of the corresponding BDDs. Note that BDD operations have a polynomial complexity.

Calculating precise controllability and observability estimations we suppose that 1 value probabilities of all input variables are equal to  $\frac{1}{2}$ . Using BDDs  $R^{cont}(1)$  and  $R^{obs}$  we calculate 1 controllability and observability random estimations for node  $v$ .

Probability  $p(\eta)$  of 1 value of Boolean function  $\eta$ , corresponding to a BDD internal node  $\mu$  is calculated with using probabilities  $p(\eta_{\mu}^{x_i=0})$ ,  $p(\eta_{\mu}^{x_i=1})$  of 1 values of functions  $\eta_{\mu}^{x_i=0}$  and  $\eta_{\mu}^{x_i=1}$ , corresponding to children nodes of node  $\mu$  in the following way (node  $\mu$  is marked by variable  $x_i$ ):

$$p(\eta) = p(x_i) p(\eta_{\mu}^{x_i=1}) + p(\bar{x}_i) p(\eta_{\mu}^{x_i=0}).$$

Moving from 1 terminal node of the corresponding BDD with using the above mentioned formula for internal nodes we reach the BDD root. As a result random estimations of 1(0)-controllability or observability are calculated.

Thus random estimations are obtained by using a structural description of a combinational part. But the behavior of this part as a rule is wider than the working area represented by a State Transition Graph (STG). The point is that a TC may be triggered just out of the working area (out of the specification). If we know the STG description (the specification) from which the combinational part of the sequential circuit is obtained, we may calculate precisely random estimations of controllability out of the working area. As for precise random observability estimations they are always calculated by using only structural description of the combinational part.

## 2. Deriving precise controllability estimations out of working area

Let a behavior of a sequential circuit be represented by STG. To derive a sequential circuit we have to encode internal states of STG. As a result we get system of incompletely specified Boolean functions. Changing this system for completely specified Boolean functions system we facilitate possibilities of TCs inserting. The matter is that getting minimized system of completely specified Boolean functions we, as a rule, increase both set-off and set-on area of these functions in comparison with the system of incompletely specified Boolean functions. As a result the full states (depending on input and state variables) that are out of the working area (it is represented by STG) appear. These full states cannot be reachable during sequential circuit verification and testing in the working area. If these full states are used for triggering TC, then we cannot detect TC in above mentioned way. We suggest calculate 1(0)-controllability precise estimations for internal nodes out of the working area.

STG is known to be a description of Finite State Machine behavior in which symbols of input and output alphabets are encoded. Consider an example of STG (Table 1).

Here  $x_1, x_2, x_3$  – input variables of the circuit and  $y_1, y_2, y_3$  – output variables. Columns of the table are derived into 4 sections. The first section represents input cubes (ternary vectors). The second section represents internal states. The third section represents next internal states. The forth section represents output vectors. After encoding internal states by 1-hot code (in our example), we derive system  $F$  of incompletely specified Boolean functions (Table 2). The table is also divided into 4 sections. The second and the third sections represent encoded internal states.

Table 1

State Transition Graph

| $x_1 x_2 x_3$ | $q$ | $q'$ | $y_1 y_2 y_3$ |
|---------------|-----|------|---------------|
| 0 – –         | 1   | 1    | 0 0 1         |
| – 0 –         | 1   | 1    | 0 0 1         |
| 1 1 –         | 1   | 2    | 1 0 1         |
| – – 0         | 2   | 2    | 0 1 1         |
| – – 1         | 2   | 3    | 1 1 1         |
| 1 0 –         | 3   | 3    | 0 1 0         |
| 0 – –         | 3   | 4    | 1 1 0         |
| – 1 –         | 3   | 4    | 0 1 1         |
| – – 0         | 4   | 4    | 0 1 1         |
| – – 1         | 4   | 1    | 1 1 1         |

Table 2

System of incompletely specified Boolean functions

| $x_1 x_2 x_3$ | $z_1 z_2 z_3 z_4$ | $z_1' z_2' z_3' z_4'$ | $y_1 y_2 y_3$ |
|---------------|-------------------|-----------------------|---------------|
| 0 – –         | 1 0 0 0           | 1 0 0 0               | 0 0 1         |
| – 0 –         | 1 0 0 0           | 1 0 0 0               | 0 0 1         |
| 1 1 –         | 1 0 0 0           | 0 1 0 0               | 1 0 1         |
| – – 0         | 0 1 0 0           | 0 1 0 0               | 0 1 1         |
| – – 1         | 0 1 0 0           | 0 0 1 0               | 1 1 1         |
| 1 0 –         | 0 0 1 0           | 0 0 1 0               | 0 1 0         |
| 0 – –         | 0 0 1 0           | 0 0 0 1               | 1 1 0         |
| – 1 –         | 0 0 1 0           | 0 0 0 1               | 0 1 1         |
| – – 0         | 0 0 0 1           | 0 0 0 1               | 0 1 1         |
| – – 1         | 0 0 0 1           | 1 0 0 0               | 1 1 1         |

Change symbol «0» in code words of internal states for symbol «–» (don't care). As a result we obtain system  $F^*$  of completely specified Boolean functions (Table 3). This minimization is possible because we use the unordered code (1-hot) for encoding of internal states [12–13].

Table 3

System of completely specified Boolean functions

| $x_1 x_2 x_3$ | $z_1 z_2 z_3 z_4$ | $z_1' z_2' z_3' z_4'$ | $y_1 y_2 y_3$ |
|---------------|-------------------|-----------------------|---------------|
| 0 – –         | 1 – – –           | 1 0 0 0               | 0 0 1         |
| – 0 –         | 1 – – –           | 1 0 0 0               | 0 0 1         |
| 1 1 –         | 1 – – –           | 0 1 0 0               | 1 0 1         |
| – – 0         | – 1 – –           | 0 1 0 0               | 0 1 1         |
| – – 1         | – 1 – –           | 0 0 1 0               | 1 1 1         |
| 1 0 –         | – – 1 –           | 0 0 1 0               | 0 1 0         |
| 0 – –         | – – 1 –           | 0 0 0 1               | 1 1 0         |
| – 1 –         | – – 1 –           | 0 0 0 1               | 0 1 1         |
| – – 0         | – – – 1           | 0 0 0 1               | 0 1 1         |
| – – 1         | – – – 1           | 1 0 0 0               | 1 1 1         |

The system products represented by cubes of the first and the second sections depend on input and state variables. Columns of the third and the forth sections correspond to functions representing next states and outputs of the sequential circuit. Each function  $f^*$  of system  $F^*$  is presented by Sum of Products (SoP) originated by cubes of Table 3 marked with 1 values in the column corresponding to the function  $f^*$  of this table. Table III is used to derive the sequential circuit comprising from gates. Let  $C$  be the combinational part of the sequential circuit obtained and  $v$  – internal pole (Fig. 1).

Note that cubes corresponding to the first and the second columns of Table II represent the working area of the sequential circuit. Form the SoP from these cubes. Derive BDD  $R^w$  from the SoP. Let  $R^{nw}$  be an inversion of  $R^w$ . Then 1(0)-controllability for node  $v$  within working area may be calculated using BDDs:

$$R^{cont w}(1) = R^{cont}(1)R^w, \quad (2)$$

$$R^{cont w}(0) = R^{cont}(0)R^w, \quad (3)$$

and 1(0)-controllability out of working area may be calculated using BDDs:

$$R^{cont nw}(1) = R^{cont}(1)R^{nw}, \quad (4)$$

$$R^{cont nw}(0) = R^{cont}(0)R^{nw}. \quad (5)$$

If among internal nodes there exist ones for which 1(0)-controllability estimations seemed less than the threshold given, then these nodes are included into set  $V$  of suspicious nodes. If we consider that Trojan Circuits are inserted in working area, we derive random controllability estimations applying BDDs  $R^{cont w}(1)$  ( $R^{cont w}(0)$ ). If we suppose that Trojan Circuits are inserted out of working area, we derive estimations applying  $R^{cont nw}(1)$  ( $R^{cont nw}(0)$ ). If we have only structural description of sequential circuit and know nothing about circuit working area, we derive estimations applying  $R^{cont}(1)$  ( $R^{cont}(0)$ ).

If among internal nodes there exist ones for which the chosen 1(0)-controllability estimations seem less than the threshold given, then these nodes are included into set  $V$  of suspicious nodes. But if the chosen controllability for node  $v$  is equal to 0, then node  $v$  is excluded from further consideration.

We may cut set  $V$  using precise estimation of node  $v^*$  observability: node  $v^*$  is connected with TC output. If the precise estimation of node  $v^*$  observability is more than the proper threshold, we exclude corresponding node  $v$  from further consideration. We use the observability estimation if we know possible type of TC.

Instead of full observability estimation described above we suggest using partial estimation applying ROBDDs derived by the following multiplications:  $R(f^{v=1})R(f^{v=0})$ ,  $R(f^{v=0})R(f^{v=1})$ . The proposed partial estimations of observability for node  $v^*$  correspond 0, 1 values of the proper combinational part output.

Note that inserting TC changes values both on pole  $v^*$  and the proper output. If partial observability estimation for  $v^*$  is equal to 0, we exclude pole  $v$  from consideration. Otherwise BDDs used for calculating random estimations for poles  $v$ ,  $v^*$  may be applied for evidence of existence of an activating sequence providing malicious TC action and finding the sequence itself if it is necessary.

Node  $v$  may be also excluded from consideration if there is no rather short transfer sequence triggering TC with input  $v$  and output  $v^*$ .

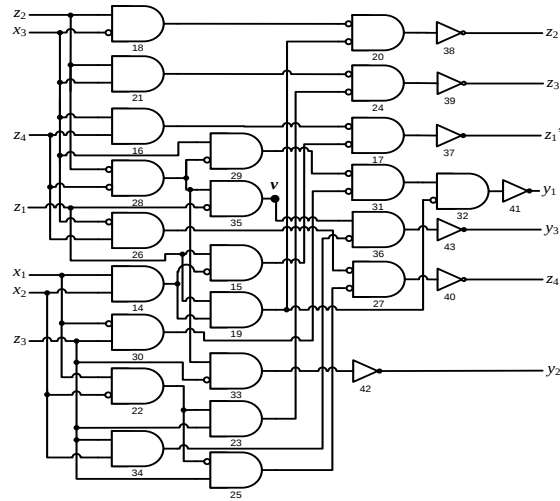


Fig. 1. Combinational circuit  $C$  and pole  $v$

Illustrate getting the estimations of controllability and observability for node  $v$  and output  $y_3$  of circuit  $C$  (Fig. 1) obtained from Table 3. Construct corresponding BDDs. Let  $R_v^{cont}(1)$  be  $R^{cont}(1)$  for node  $v$  (Fig. 2a),  $R^w$  be BDD representing working area described by Table 2 (Fig. 2b), and BDD  $R_{y_3}(C_v)$  be  $R(C_v)$  for output  $y_3$  (Fig. 2c). BDDs  $R(f^{v=0})$ ,  $R(f^{v=1})$  are represented by Fig. 3a, 3b. BDD  $R_{v,y_3}^{obs}$  is obtained by formula (1) (Fig. 3c).

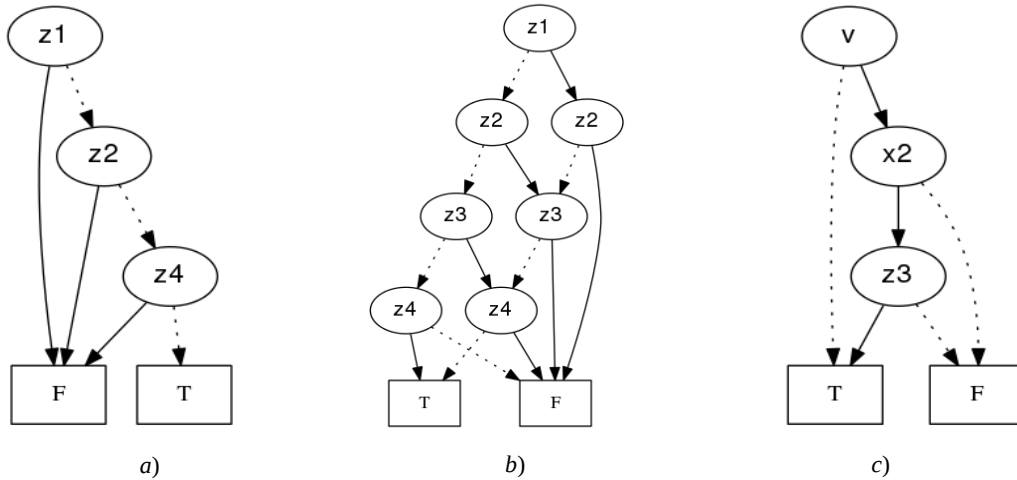


Fig. 2. a) BDD  $R_v^{cont}(1)$ ; b) BDD  $R^w$ ; c) BDD  $R_{y_3}(C_v)$

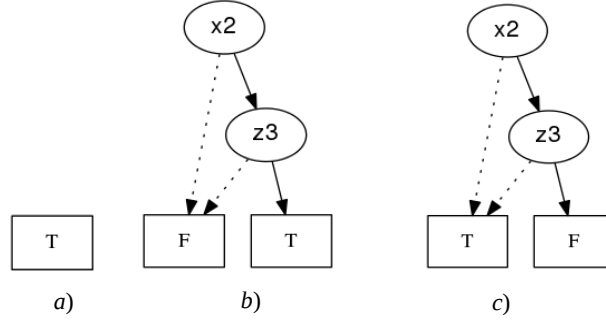


Fig. 3. a) BDD  $R(f^{v=0})$ ; b) BDD  $R(f^{v=1})$ ; c) BDD  $R_{v,y_3}^{obs}$

BDDs for calculating 1(0)-controllability for node  $v$  within working area by formulae (2) and (3) are represented on Fig. 4a, 4b. Similarly BDDs for calculating 1(0)-controllability for node  $v$  out of working area by formulae (4) and (5) are constructed (Fig. 4c, 4d).

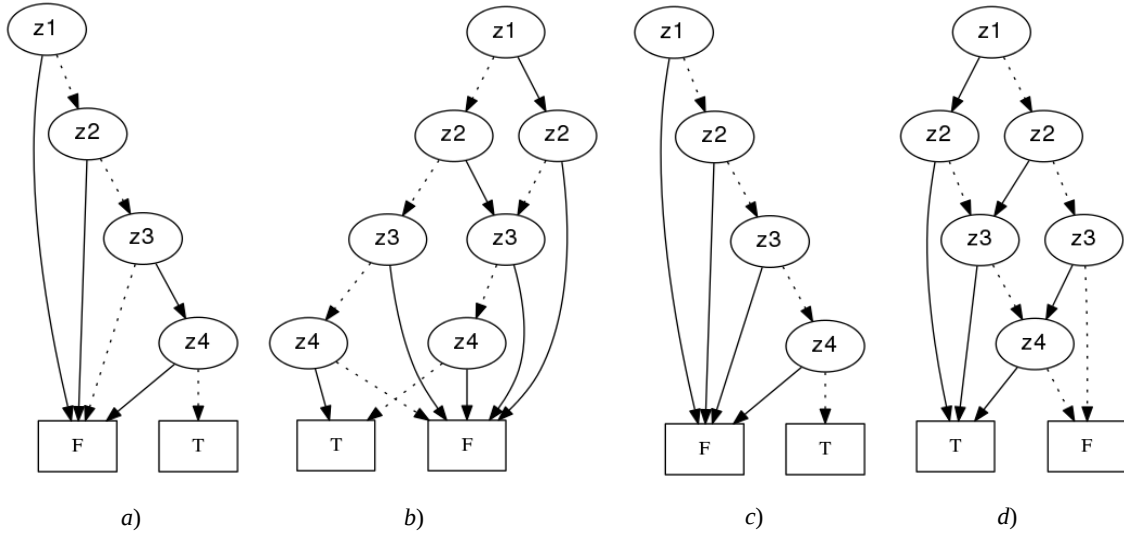


Fig. 4. a) BDD  $R_v^{cont w}(1)$ ; b) BDD  $R_v^{cont w}(0)$ ; c) BDD  $R_v^{cont nw}(1)$ ; d) BDD  $R_v^{cont nw}(0)$

Using these BDDs we calculate 1(0)-controllability and observability random estimations for node  $v$  and output  $y_3$ :

$$p(R_{v,y_3}^{obs}) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0) = 0.75,$$

$$p(R_v^{cont w}(1)) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0)) + \frac{1}{2} \cdot 0) + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.0625,$$

$$p(R_v^{cont w}(0)) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1) + \frac{1}{2} \cdot 0) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0) + \frac{1}{2} \cdot 0)) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0) + \frac{1}{2} \cdot 0) + \frac{1}{2} \cdot 0) = 0.1875,$$

$$p(R_v^{cont nw}(1)) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0) + \frac{1}{2} \cdot 0) + \frac{1}{2} \cdot 0) + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.0625,$$

$$p(R_v^{cont nw}(0)) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1)) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1) + \frac{1}{2} \cdot 1)) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1) + \frac{1}{2} \cdot 1) = 0.6875.$$

### 3. Finding transfer sequences for a set of internal states

Execute multiplication BDD  $R^{cont nw}(1)$  or  $R^{cont nw}(0)$  for node  $v$  and BDD  $R^{obs}$  for node  $v^*$ . The multiplication result is represented by BDD  $R^f$ . Here we consider that a TC is inserted out of working area (out of specification).

Products originated by paths from  $R^f$  root till 1 terminal pole represent sets of full states of sequential circuit. Reaching any state from these sets provides malicious action of TC. Select from  $R^f$  a set of internal states and form from them the proper SoP depending on state variables. Derive BDD  $R^{s_0}$  from the SoP. The BDD represents a set of internal states so that reaching any state from the set and applying the corresponding input Boolean vector (this vector always exists) provide malicious action TC. The procedure of finding existence evidence of a transfer sequence (the length is not more preset value  $l$ ) for some state from a set presented by BDD  $R^{s_0}$  is described in detail in [11]. In this algorithm we did not derive the sequence itself but only set up its existence.

Calculations of controllability and observability estimations for internal nodes of structural combinational part of sequential benchmark circuits (ISCAS'89) are executed. The Table 4 contains the initial information about benchmark circuits: name of benchmark (Circuit), number of inputs (N\_Is), number of outputs (N\_Os), number of flip-flops (N\_FF) and number of gates (N\_Gs).

Table 4

**Benchmark circuits**

| Circuit | N_Is | N_Os | N_FF | N_Gs |
|---------|------|------|------|------|
| s298    | 3    | 6    | 14   | 119  |
| s1196   | 14   | 14   | 18   | 529  |
| s400    | 3    | 6    | 21   | 162  |
| s641    | 35   | 24   | 19   | 380  |
| s1488   | 8    | 19   | 6    | 653  |

Results of calculations of length of the transfer sequences are shown in Table 5. The nodes with the smallest value of controllability (VC) are chosen among all internal nodes. Minimal observability (VO) for output nodes of the corresponding gates that have the smallest value of controllability on input node is calculated.

Here we consider inserting TC when input of the gate is  $v$  and output of the gate is  $v^*$ .

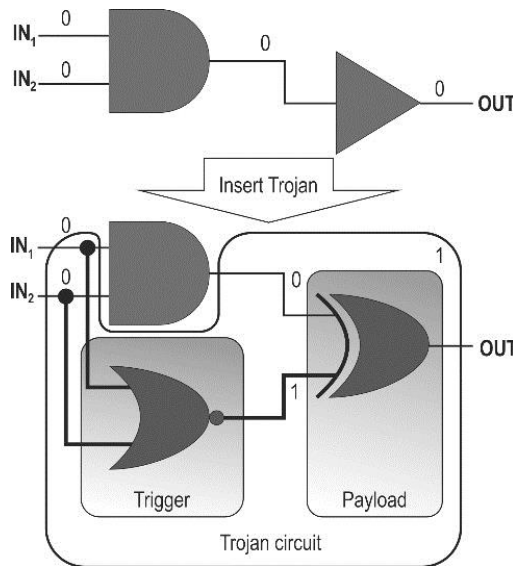


Fig. 5. Inserting malicious sub-circuit

The corresponding gates are candidate places where TCs may be inserted (Fig. 5). For such a gate the set of internal states which can be reached and used for TC activation is constructed and represented by the ROBDD. After that we built transfer sequence with length  $l$  ( $l \leq 1000$ ) for one of the internal states from the proper set. Lengths of transfer sequences are presented in the fifth column (L\_S) in Table V. If for nodes  $v$ ,  $v^*$  transfer sequences has  $l > 1000$  or has no transfer sequences at all, the node  $v$  has to be removed from suspicious nodes. In Table V we have three such nodes.

Table 5

Experimental results

| Circuit | Gate | VC          | VO        | L_S                  |
|---------|------|-------------|-----------|----------------------|
| s298    | n95  | 0.03125     | 0.0664062 | No transfer sequence |
|         | n40  | 0.03125     | 0.5       | 7                    |
|         | n139 | 0.125       | 0.138749  | 9                    |
|         | n25  | 0.125       | 0.5       | 7                    |
| s1196   | n439 | 0.000030516 | 0.249458  | 1                    |
|         | n438 | 0.000070569 | 0.497288  | No transfer sequence |
|         | n335 | 0.000137322 | 0.49707   | 1                    |
|         | n35  | 0.015625    | 0.5       | 38                   |
| s400    | n146 | 0.0156564   | 0.0593154 | 37                   |
|         | n147 | 0.0309255   | 0.0402537 | 33                   |
|         | n65  | 0.5044682   | 0.5       | 9                    |
|         | n491 | 0.000012144 | 0.25      | No transfer sequence |
| s641    | n486 | 0.00245458  | 0.5       | 4                    |
|         | n489 | 0.00310373  | 0.09375   | 4                    |
|         | n589 | 0.00390625  | 0.0494067 | 15                   |
|         | n98  | 0.00582886  | 0.5       | 4                    |
| s1488   | n636 | 0.00775146  | 0.5       | 3                    |
|         | n619 | 0.0078125   | 0.0340039 | 5                    |

Then we may find the transfer sequence itself for each node of the obtained set  $V$  using algorithm [14]. This algorithm like algorithm in [11] is oriented to cutting calculations but it is more complicate in comparison with algorithm represented in [11]. Applying the derived transfer sequences for set  $V$  we may detect node  $v$  in which TC is inserted. Based on the result we may mask TC attack.

#### 4. Trojan Circuit masking

If we suppose that Trojan Circuit is inserted not out of working area, we may mask it in the following way (Fig. 6).

Here masking sub-circuit together with MUX and XOR are out of sequential circuit area. The sub-circuit implements the same function that the sub-circuit of the combinational part with output  $v^*$ . When Trojan Circuit is triggered the proper output keeps the correct value.

In the case of injecting Trojan circuit into out of working area we suggest the more simple way of masking (Fig. 7). The masking sub-circuit implements the function represented by BDD  $R^f$ . Connecting the proper output with MUX we keep the correct behavior of a sequential circuit.

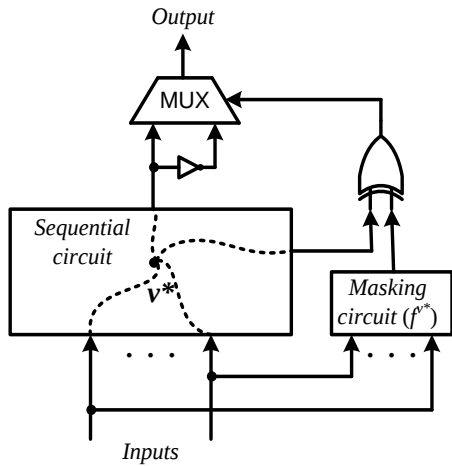


Fig. 6. Masking TC scheme

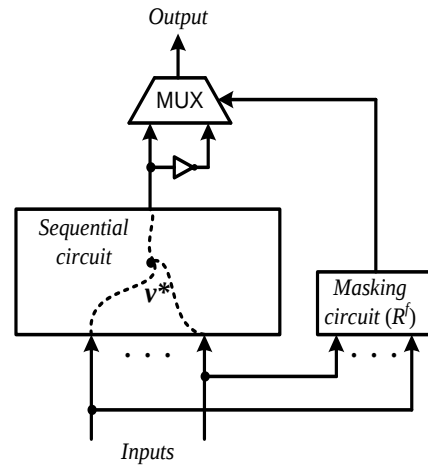


Fig. 7. Masking TC scheme inserted into out of working area

In this case we need STG description of the sequential circuit behavior and so we use MCNC [15] sequential benchmark circuits in KISS2 format for experiments.

The set of circuits has been made from KISS2 format (from STG description) by 1-hot encoding of states and using a logic synthesis and optimization in ABC system [16].

For experiments we have limited to TCs which can be inserted into internal nodes with low controllability estimations without taking into consideration observability estimations. This approach is suited for any type of TC. When we know the type, we may use more simple BDDs  $R^f$  and consequently to cut overhead.

Experiments show that for each internal node with low controllability there exists rather short transfer sequence [11] triggering TC. For the benchmark circuits considered the transfer sequence lengths are not more than 8 (in average 1.1).

Calculations of controllability estimations for internal nodes of combinational part of sequential circuits and the estimations out of working area are represented in Tables 6, 7. In these tables overhead estimations of masking sub-circuits corresponding to 10 nodes with lesser controllability estimations for each circuit are also presented. There are the names of benchmarks (Circuits), numbers of gates (N\_Gs), minimum nonzero values of controllability estimations (Min\_VC), parts of gates (their output nodes) with values of controllability less or equal to 0.05 (%\_Gs<sup>1</sup>), 0.005 (%\_Gs<sup>2</sup>) and 0.0005 (%\_Gs<sup>3</sup>) in percentage, sizes of minimum masking sub-circuits as a percentage from initial circuit (%\_Min) and sizes of maximum masking sub-circuits as a percentage from initial circuit (%\_Max) for 10 internal nodes with lesser controllability estimations.

Benchmark circuits and masking sub-circuits are received in ABC and they consist of 2-input logic-gates.

Table 6

Experimental results for TC in working area

| Circuit | N_Gs | Min_VC            | %_Gs <sup>1</sup> | %_Gs <sup>2</sup> | %_Gs <sup>3</sup> | %_Min | %_Max |
|---------|------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------|-------|
| cse     | 145  | 0.0000305176      | 17.2              | 1.4               | 0.7               | 3.4   | 11.0  |
| dk14    | 102  | 0.03125           | 2.9               | 0.0               | 0.0               | 1.0   | 11.8  |
| dk16    | 142  | 0.015625          | 7.0               | 0.0               | 0.0               | 2.1   | 16.2  |
| ex1     | 176  | 0.0000305176      | 14.2              | 4.5               | 2.8               | 0.6   | 10.8  |
| keyb    | 193  | 0.00138255        | 16.1              | 1.6               | 0.0               | 1.0   | 33.2  |
| kirkman | 126  | 0.0000305176      | 10.3              | 1.6               | 0.8               | 0.8   | 30.2  |
| sand    | 388  | 0.000000159256    | 10.1              | 2.8               | 0.8               | 0.3   | 12.9  |
| sse     | 88   | 0.000731945       | 10.2              | 1.1               | 0.0               | 2.3   | 23.9  |
| styr    | 305  | 0.000000953674    | 16.7              | 2.6               | 2.0               | 2.0   | 15.4  |
| tbk     | 669  | 0.000000000232831 | 21.5              | 3.9               | 2.2               | 0.4   | 6.0   |
| train11 | 44   | 0.03125           | 2.3               | 0.0               | 0.0               | 6.8   | 13.6  |

Table 7

Experimental results for TC out of working area

| Circuit | N_Gs | Min_VC             | %_Gs <sup>1</sup> | %_Gs <sup>2</sup> | %_Gs <sup>3</sup> | %_Min | %_Max |
|---------|------|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------|-------|
| cse     | 145  | 0.000000238419     | 54.5              | 54.5              | 54.5              | 0.7   | 26.9  |
| dk14    | 102  | 0.000976562        | 58.8              | 34.3              | 0.0               | 2.0   | 14.7  |
| dk16    | 142  | 0.00000000186265   | 55.6              | 55.6              | 55.6              | 0.7   | 6.3   |
| ex1     | 176  | 0.000000178814     | 76.7              | 38.6              | 19.3              | 0.6   | 5.1   |
| keyb    | 193  | 0.0000000596046    | 58.5              | 58.5              | 58.5              | 0.5   | 9.8   |
| kirkman | 126  | 0.000000476837     | 17.5              | 4.0               | 3.2               | 0.8   | 19.0  |
| sand    | 388  | 0.0000000000909495 | 52.8              | 52.8              | 52.8              | 0.3   | 1.5   |
| sse     | 88   | 0.0000038147       | 51.1              | 51.1              | 51.1              | 1.1   | 8.0   |
| styr    | 305  | 0.000000000218279  | 58.4              | 58.4              | 58.4              | 0.3   | 11.5  |
| tbk     | 669  | 0.0000000000363798 | 60.7              | 60.7              | 60.7              | 0.1   | 23.8  |
| train11 | 44   | 0.000488281        | 59.1              | 15.9              | 2.3               | 4.5   | 13.6  |

Masking TC with using out of working area requires as a rule smaller overhead (in average from 1.1% to 12.8%) in comparison with masking TC with using only structural description of a combinational part (in average from 1.9% to 16.8%).

## Conclusion

Possibilities of triggering TC are examined. The investigation is based on getting precise estimations of internal node controllability and observability by using structural combinational part description. The methods of getting precise estimations may be used for comparison with results of the different heuristic methods. The approach to TCs detection inserted out of working area may be applied when they are not detectable during sequential circuit verification and testing in working area. The experiments on benchmarks show applicability of the suggested approach. The techniques of masking TCs are proposed. Masking circuits overhead for chosen internal nodes of the benchmarks are acceptable.

## REFERENCES

1. Karri, R., Rajendran, J., Rosenfeld, K. & Tehranipoor, M. (2010) Trustworthy Hardware: Identifying and Classifying Hardware Trojans. *Computer*. 43(10). pp. 39–46. DOI: 10.1109/MC.2010.299
2. Salmani, H., Tehranipoor, M. & Plusquellic, J. (2012) A Novel Technique for Improving Hardware Trojan Detection and Reducing Trojan Activation Time. *IEEE Trans. Very Large Scale Integr. VLSI Syst.* 20(1). pp. 112–125. DOI: 10.1109/TVLSI.2010.2093547
3. Dupuis, S., Ba, P.S., Natale, G.D., Flottes, M.L. & Rouzeyre, B. (2014) A novel hardware logic encryption technique for thwarting illegal overproduction and Hardware Trojans. *IEEE 20th International On-Line Testing Symposium (IOLTS)*. pp. 49–54. DOI: 10.1109/IOLTS.2014.6873671
4. Imeson, F., Emtenan, A., Garg, S. & Tripunitara, M.V. (2013) Securing Computer Hardware Using 3D Integrated Circuit (IC) Technology and Split Manufacturing for Obfuscation. *Proc. of the 22Nd USENIX Conference on Security*. Berkeley, CA. pp. 495–510.
5. Liu, B. & Wang, B. (2014) Embedded reconfigurable logic for ASIC design obfuscation against supply chain attacks. *Design, Automation Test in Europe Conference Exhibition (DATE)*. pp. 1–6. DOI: 10.1109/IOLTS.2014.6873671
6. Chakraborty, R.S., Pagliarini, S., Mathew, J., Ranjani, R.S. & Devi, M.N. (2017) A Flexible Online Checking Technique to Enhance Hardware Trojan Horse Detectability by Reliability Analysis. *IEEE Trans. Emerg. Top. Comput.* 5(2). pp. 260–270. DOI: 10.1109/TETC.2017.2654268
7. Waksman, A., Suozzo, M. & Sethumadhavan, S. (2013) FANCI: Identification of Stealthy Malicious Logic Using Boolean Functional Analysis. *Proc. of the 2013 ACM SIGSAC Conference on Computer & Communications Security*. pp. 697–708. DOI: 10.1109/SP.2011.32.
8. Matrosova, A., Ostanin, S. & Kirienko, I. (2014) Generating all test patterns for stuck-at faults at a gate pole and their connection with the incompletely specified Boolean function of the corresponding subcircuit. *14th Biennial Baltic Electronic Conference (BEC)*. pp. 85–88.
9. Matrosova, A.Y., Kirienko, I.E., Tomkov, V.V. & Miryutov, A.A. (2016) Reliability of Physical Systems: Detection of Malicious Subcircuits (Trojan Circuits) in Sequential Circuits. *Russian Physics Journal*. 59(8). pp. 1281–1288. DOI: 10.1007/s11182-016-0903-8
10. Busaba, F.Y. & Lala, P.K. (1994) Self-checking combinational circuit design for single and unidirectional multibit error. *Journal of Electronic Testing*. 5(1). pp. 19–28. DOI: 10.1007/BF00971960
11. Matrosova, A. & Ostanin, S. (2000) Self-checking FSM design with observing only FSM outputs. *International Journal of VLSI Design*. pp. 153–154. DOI: 10.1109/OLT.2000.856629
12. Matrosova, A., Andreeva, V. & Melnikov, A. (2016) ROBDDs application for finding the shortest transfer sequence of sequential circuit or only revealing existence of this sequence without deriving the sequence itself. *IEEE East-West Design Test Symposium (EWDTS)*. pp. 1–4.
13. Yang, S. (1991) *Logic Synthesis and Optimization Benchmarks User Guide Version 3.0*.
14. ABC: A System for Sequential Synthesis and Verification. [Online] Available from: <http://www.eecs.berkeley.edu/~alanmi/abc/>.

**Matrjsova Anjela Yurievna**, Dr. Sc., Professor. E-mail: mau11@yandex.ru

**Mitrofanov Evgeny Vladimirovich**. E-mail: gvaz@yandex.ru

**Ostanin Sergey Alexandrovich**, Cand. Sc., Associate Professor. E-mail: sergeiostanin@yandex.ru

**Butorina Nataly Borisovna**. E-mail: nnatta07@mail.ru

**Pahomova Elena Grigorievna**, Cand. Sc., Associate Professor. E-mail: peg@tpu.ru

**Shulga Sergey Anatolievich**. E-mail: shsa@me.com

National Research Tomsk State University

Поступила в редакцию 10 ноября 2017 г.

**Матросова Анжела Ю., Митрофанов Евгений В., Останин Сергей А., Буторина Наталья Б., Пахомова Елена Г., Шулга Сергей А.** (Томский государственный университет, Российская федерация).

**Обнаружение и маскирование вредоносных подсхем в последовательностных схемах.**

**Ключевые слова:** последовательностные схемы; управляемость и наблюдаемость полюсов комбинационной схемы; вредоносные подсхемы; сокращенные упорядоченные двоичные диаграммы решений (ROBDD); рабочая область.

DOI: 10.17223/19988605/42/10

Внедрение вредоносных подсхем (Trojan Circuits), которые могут разрушить логическую схему или обеспечить утечку конфиденциальной информации из системы, содержащей логическую схему, требует обнаружения таких подсхем и, если возможно, их маскирования. Мы предлагаем метод поиска множества полюсов последовательностной схемы, в которые могут быть вставлены вредоносные подсхемы. После моделирования последовательностной схемы на корректных входных последовательностях мы можем обнаружить вредоносную подсхему, если она присутствует, и замаскировать ее специальной подсхемой. Метод основан на применении точных (не эвристических) оценок управляемости и наблюдаемости внутренних полюсов, полученных с использованием структурного описания комбинационной составляющей последовательностной схемы. Эти оценки вычисляются с использованием микропрограммного описания автомата (STG) в предположении, что вредоносная подсхема может быть вставлена вне рабочей области функционирования последовательностной схемы, определенной спецификацией. Также используются алгоритмы поиска установочной последовательности для множества внутренних состояний. Для получения оценок управляемости и наблюдаемости, а также поиска установочной последовательности используются сокращенные упорядоченные двоичные диаграммы решений (ROBDD-графы). Известно, что операции над ROBDD-графами имеют полиномиальную сложность. Следует учесть, что если вредоносные подсхемы вставлены вне рабочей области функционирования, то они не могут быть обнаружены как при верификации, так и при тестировании в рабочей области функционирования. Предложены методы маскирования вредоносных подсхем.

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**БУТОРИНА Наталья Борисовна** – старший преподаватель кафедры программирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: nnatta07@mail.ru

**ГРЕКОВА Татьяна Ивановна** – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ti\_gre@mail.ru

**ГУМЕНЮК Александр Степанович** – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники факультета информационных технологий и компьютерных систем Омского государственного технического университета. E-mail: gumas45@mail.ru

**ДОМБРОВСКИЙ Владимир Валентинович** – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой информационных технологий и бизнес-аналитики Института экономики и менеджмента Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

**ИГНАТЬЕВ Николай Александрович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгоритмов и технологий программирования математического факультета Национального университета Узбекистана (г. Ташкент, Узбекистан). E-mail: ignatev@rambler.ru

**ИЗМАЙЛОВА Яна Евгеньевна** – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: evgenevna.92@mail.ru.

**КОПАТЬ Дмитрий Ярославович** – магистрант факультета математики и информатики Гродненского государственного университета им. Я. Купалы (Республика Беларусь). E-mail: dk80395@mail.ru

**МАМЕДОВА Туркан Фарман кызы** – аспирант лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку). E-mail: kmansimov@mail.ru

**МАНСИМОВ Камил Байрамали оглы** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики Бакинского государственного университета, руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

**МАТАЛЫЦКИЙ Михаил Алексеевич** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры стохастического анализа и эконометрического моделирования Гродненского государственного университета им. Я. Купалы (Республика Беларусь). E-mail: m.matalytski@gmail.com.

**МАТРОСОВА Анжела Юрьевна** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры программирования института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: mau11@yandex.ru

**МЕДВЕДЕВ Геннадий Алексеевич** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета (г. Минск, Беларусь). E-mail: MedvedevGA@bsu.by

**МИТРОФАНОВ Евгений Владимирович** – аспирант кафедры программирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: gvaz@yandex.ru

**НАЗАРОВ Анатолий Андреевич** – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

**ОСТАНИН Сергей Александрович** – доцент, кандидат технических наук, заведующий кафедрой программирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: sergeiostanin@yandex.ru

**ПАРАЕВ Юрий Иванович** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: paraev@mail.ru

**ПАХОМОВА Елена Григорьевна** – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: [peg@tpu.ru](mailto:peg@tpu.ru)

**ПАШИНСКАЯ Татьяна Юрьевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий и бизнес-аналитики Института экономики и менеджмента Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: [tatyana.obedko@mail.ru](mailto:tatyana.obedko@mail.ru)

**ПОЛУЭКТОВА Ксения Олеговна** – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: [poluekt.kseni@mail.ru](mailto:poluekt.kseni@mail.ru)

**УВАРОВ Вадим Евгеньевич** – аспирант кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: [uvarov.vadim42@gmail.com](mailto:uvarov.vadim42@gmail.com)

**ШУЛЬГА Сергей Анатольевич** – старший преподаватель кафедры программирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: [shsa@me.com](mailto:shsa@me.com)

**Научный журнал**

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

**2018. № 42**

Редактор Е.Г. Шумская  
Оригинал-макет Е.Г. Шумской  
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева  
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 14.03.2018 г. Формат 60x84<sup>1/8</sup>.  
Гарнитура Times. Печ. л. 12,8; усл. печ. л. 11,9.  
Тираж 250 экз. Заказ № 3055. Цена свободная.

Дата выхода в свет 30.03.2018 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании  
Издательского Дома Томского государственного университета  
634050, г. Томск, Ленина, 36  
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75  
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)