

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2013

№ 2(22)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Гулько С.П., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Лазарева Е.Г., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь по разделу математики); Александров И.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Биматов В.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бубенчиков А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Васенин И.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Гришин А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Ищенко А.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Крайнов А.Ю., д-р физ.-мат. наук; Крылов П.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Панько С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Пергаменщиков С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Сипачёва О.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Скрипняк В.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Старченко А.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Г.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Щербаков Н.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Хайруллина В.Ю. (отв. секретарь по разделу механики); Cauty R., prof.

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-30658 от 20 декабря 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8621). Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, его подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России».

«Вестник ТГУ. Математика и механика» входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе <http://elibrary.ru>, а также в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Кроме того, все номера журнала присутствуют и обрабатываются на общероссийском математическом портале <http://Math-Net.ru>.

Адрес редакции:

634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бухтяк М.С., Никульчиков А.В. Моделирование деформации сотовой панели	5
Дьяченко Е.Н. Аналитическая верификация моделей седиментации, основанных на методе дискретных элементов	17
Кайгородов Е.В. О двух классах хопфовых абелевых групп	22
Колесников И.А. Отображение на круговой счетноугольник с симметрией переноса	33
Пчелинцев В.А. Об одном функционале на классе пар функций	44
Рацев С.М., Череватенко О.И. О некоторых многообразиях алгебр Лейбница – Пуассона с экстремальными свойствами	57

МЕХАНИКА

Дементьев А.А., Крайнов А.Ю. Исследование влияния относительного движения взвеси инертных частиц на скорость фронта горения газовой смеси	60
Есина З.Н., Мурашкин В.В., Корчуганова М.Р. Прогнозирование температуры вспышки бинарных смесей по данным о коэффициентах активности	67
Колмакова Т.В. Деформационное поведение модельных образцов компактной костной ткани, отличающихся расположением коллагено-минеральных волокон	79
Севастьянов Н.Н. Концепция построения системы ориентации и управления движением спутника связи «Ямал». Штатная схема функционирования	85
Федулов Р.В., Шишкин А.С. Наведение оптической аппаратуры малого космического аппарата дистанционного зондирования	97
Шахтин А.А. Численный метод расчета суперкаверн	105

МЕМОУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

Научно-педагогическая деятельность профессора Л.В. Комаровского в Томском государственном университете	110
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	122

CONTENTS

MATHEMATICS

Bukhtyak M.S., Nikulchikov A.V. Honeycomb panel deformation modeling	5
D'yachenko E. N. Analytical verification of sedimentation models based on the discrete element method.....	17
Kaigorodov E. V. On two classes of hopfian abelian groups.....	22
Kolesnikov I.A. A mapping to a round numerable polygon with the symmetry of transfer	33
Pchelintsev V.A. On a functional on the class of pairs of functions.....	44
Ratseev S.M., Cherevatenko O.I. On some varieties of Leibniz–Poisson algebras with extreme properties	57

MECHANICS

Dementiev A.A., Krainov A.Yu. Studying the influence of relative motion of suspended inert particles on the rate of the gas mixture combustion front	60
Esina Z. N., Murashkin V. V., Korchuganova M. R. Prediction of the flash point of binary intermixtures according to data about activity coefficients.....	67
Kolmakova T. V. Deformation behavior of the model compact bone tissue samples differing in orientation of collagen-mineral fibers.....	79
Sevast'yanov N.N. The concept of building the system of orientation and motion control of the Yamal communication satellite. The nominal operation scheme.....	85
Fedulov R.V., Shishkin A.S. Pointing of optical equipment of small remote sensing spacecraft	97
Shakhtin A.A. Numerical analysis of supercavitation.....	105

MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

Scientific and pedagogical activity of professor L.V. Komarovskii in Tomsk State University	110
---------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.....	122
------------------------------------------	-----

МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3

М.С. Бухтяк, А.В. Никульчиков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ СОТОВОЙ ПАНЕЛИ

Сотовая панель в её первоначальном виде моделируется парой плоских областей, соответствующие точки которых соединены отрезками одинаковой длины, ортогональными обеим плоскостям. Одну из плоских областей совмещаем с некоторой поверхностью, что вызывает локальные искажения длин на полученной граничной поверхности деформированной панели. Соединённость её по нормалям со второй ограничивающей поверхностью вызывает локальные искажения длин и на ней. Мера искажения – отношение соответствующих первых квадратичных форм.

Ключевые слова: *сотовая панель, локальная метрика, первая квадратичная форма, изгибание.*

1. О точечном соответствии двух поверхностей

Практика конструирования содержит различные ситуации, приводящие к целесообразности рассмотрения точечного соответствия двух поверхностей. Например, одна из них – часть плоскости, а вторая – искривленная поверхность, на которую следует изогнуть (как правило, с искажениями локальных длин) первую поверхность. Из механики известны способы оценки деформаций поверхностей – тензоры деформации (например, тензор деформации Коши-Грина в классической сплошной среде). Принцип оценки – в определении положения точек тела после деформации по отношению к положению точек до деформации. Однако такой способ малоприменим, если во время манипуляций с поверхностью изменится ее положение в пространстве. Скажем, плоская выкройка из сетеполотна, сшитая с аналогичными выкройками, будет натянута на каркас параболического рефлектора. Можно заранее указать, какое положение в 3-пространстве займут некоторые точки плоской выкройке. Можно определенно сказать, что точки A и B плоскости, близкие между собой, перейдут в точки-образы A' и B' , тоже между собою близкие. Но нет оснований полагаться на близость, скажем, точек A и A' .

Следует располагать возможностью моделировать точечное соответствие двух поверхностей в том случае, когда указанное соответствие задано, однако любая из этих поверхностей может быть перемещена в пространстве как твердое тело (с сохранением соответствия). Более точно: пусть Σ_1 и Σ_2 – поверхности, f – биективное соответствие этих поверхностей, A – произвольная точка первой поверхности, A' – соответствующая ей точка второй поверхности, g – движение первой поверхности, h – движение второй поверхности. Тогда следующая диаграмма должна быть коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_1 \ni A & \xleftarrow{f} & A' \in \Sigma_2 \\ g \downarrow & \downarrow g & h \downarrow \quad \downarrow h \\ g(\Sigma_1) \ni g(A) & \xleftarrow{f} & h(A') \in h(\Sigma_2) \end{array}$$

Ясно, что строить модель соответствия, удовлетворяющего указанному требованию, можно лишь на основе евклидовых инвариантов поверхностей. Реально же точечное соответствие устанавливается отнесением обеих поверхностей к криволинейным координатам, общим для них. Осуществимость указанного отнесения обоснована в [4]. Именно, рассмотрены гладкие регулярно параметризованные поверхности

$$\Sigma_1 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_1(u, v), \quad \Sigma_2 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_2(\hat{u}, \hat{v})$$

и гладкое отображение

$$\varphi : \hat{u}^i = \varphi(u^1, u^2) \quad (i = 1, 2).$$

Оно называется регулярным, если его якобиева матрица имеет максимальный ранг. Там же доказана следующая

Теорема. Если отображение φ регулярно, то в окрестностях соответствующих точек параметризации поверхностей можно выбрать так, чтобы соответствующие точки имели одинаковые (криволинейные) координаты. Тогда локально отображение запишется в виде $\varphi_U : \hat{u}^i = u^i$.

Здесь φ_U , как обычно, сужение отображения φ на окрестность U .

Таким образом, мы имеем дело с параметризованными поверхностями

$$\Sigma_1 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_1(u, v), \quad \Sigma_2 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_2(u, v). \quad (1)$$

Точки $A = \mathbf{r}_1(u, v)$ и $A' = \mathbf{r}_2(u, v)$ как раз и являются соответствующими.

Некоторые важные инварианты поверхности связаны с кривизной линии. Поскольку кривизна есть величина, обратная радиусу соприкасающейся окружности, то размерность кривизны k линии равна $[k] = \frac{1}{L}$. Такова же и размерность кручения.

Для поверхности

$$\sigma : \mathbf{R} = \mathbf{r}_1(u, v) \in C^2, \quad (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

определяют четыре квадратичных дифференциальных формы [5]. Из них алгебраически независимы лишь две. В качестве базисных форм следует взять первую (метрическую) и вторую (главная часть отклонения точек поверхности, близких к точке $M \in \sigma$ от касательной плоскости, взятой в точке M). Первая квадратичная форма

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2 = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv)^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (2)$$

Данная квадратичная форма индуцирует в касательной плоскости поверхности в точке $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ метрику, обусловленную матрицей Грама базиса $\{\mathbf{r}_u(u_0, v_0), \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\}$, то есть матрицей

$$\Gamma(\mathbf{r}_u(u_0, v_0), \mathbf{r}_v(u_0, v_0)) = \begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^0 & F^0 \\ F^0 & G^0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для прояснения свойств указанной метрики мы задаём такую же метрику, но не в плоскости, погруженной в E_3 , а в плоскости E_2 (на этом пути возникает ещё и удобный способ визуализации). С этой целью в плоскости E_2 задаем помимо стандартного ортонормированного репера $\{O, i, j\}$ еще и аффинный репер $\{O, e_1, e_2\}$, для которого матрица Грама такая же, как в (3). При этом пусть $e_1 \uparrow i$. Тем самым первая координатная ось аффинного репера соответствует касательной к линии $v = v_0$ на поверхности. Полагая

$$e_1 = ai, e_2 = bi + cj$$

и требуя условия

$$\Gamma(e_1, e_2) = \begin{pmatrix} E^0 & F^0 \\ F^0 & G^0 \end{pmatrix},$$

получим соотношения на константы a, b, c в виде

$$a^2 = E^0, \quad ab = F^0, \quad b^2 + c^2 = G^0.$$

Ограничиваясь лишь положительными решениями (для наших целей этого достаточно), имеем, что

$$a = \sqrt{E_0}, \quad b = \frac{F_0}{\sqrt{E_0}}, \quad c = \sqrt{\frac{E_0 G_0 - F_0^2}{E_0}}.$$

Искомый аффинный базис таков:

$$e_1 = \{\sqrt{E_0}, 0\}, \quad e_2 = \left\{ \frac{F_0}{\sqrt{E_0}}, \sqrt{\frac{E_0 G_0 - F_0^2}{E_0}} \right\}. \quad (4)$$

Пусть в плоскости параметров

$$du = \cos t, \quad dv = \sin t.$$

Тогда в плоскости с репером $\{O, e_1, e_2\}$ получим квадрику, пробегаемую концевой точкой радиус-вектора

$$V = e_1 \cos t + e_2 \sin t = xi + yj.$$

Учитывая (4), находим, что

$$x = \sqrt{E^0} \cos t + \frac{F^0 \sin t}{\sqrt{E^0}}, \quad y = \sqrt{\frac{E^0 G^0 - (F^0)^2}{E^0}}.$$

Данная квадрика – эллипс:

$$(E^0 G^0 - (F^0)^2)x^2 - 2xyF^0 \sqrt{E^0 G^0 - (F^0)^2} + ((E^0)^2 + (F^0)^2)y^2 = E^0 (E^0 G^0 - (F^0)^2).$$

Он есть результат деформации единичной окружности в плоскости параметров при «перенесении» её в касательную плоскость поверхности при касательном отображении. Проведя указанные построения для двух поверхностей (1), используя при этом одну и ту же плоскость E_2 , получаем два эллипса, отнесенных к одной и той же точке (u_0, v_0) плоскости параметров, что позволяет судить о локальных искажениях длин в каждом направлении, исходящем из этой точки. Следует иметь в виду, что каждому направлению, проведенному из указанной точки плос-

кости параметров, соответствуют два касательных направления: одно – в точке $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1(u_0, v_0)$ первой поверхности, второе – в точке $\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2(u_0, v_0)$ второй поверхности.

Форма (2) определяет внутреннюю геометрию поверхности (свойства, сохраняющиеся при изометрических отображениях). Заметим, что переменные u, v мы должны считать безразмерными величинами. Тогда

$$[ds^2] = [E] = [F] = [G] = L^2.$$

Для первых квадратичных форм наших поверхностей примем обозначения ds_1^2 и ds_2^2 соответственно. Тогда

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2, \quad ds_2^2 = E_2 du^2 + 2F_2 dudv + G_2 dv^2.$$

Отношение данных квадратичных форм

$$p = \frac{ds_2^2}{ds_1^2}$$

есть величина безразмерная. Величина p есть функция от $du : dv$ (если u и v фиксированы).

Отыскание стационарных значений для p сводится к нахождению собственных чисел пары квадратичных форм [1, с. 85] и приводит к уравнению

$$p^2(E_1 G_1 - F_1^2) + p(2F_1 F_2 - E_1 G_2 - E_2 G_1) + (E_2 G_2 - F_2^2) = 0. \quad (5)$$

Корни p_1, p_2 (безразмерные) данного уравнения суть наибольшее и наименьшее локальное искажение длин в данной точке.

Касательные направления $du : dv$, доставляющие величине p стационарные значения, суть главные направления пары квадратичных форм [1, с. 86]. Там же доказано, что если собственные числа p_1, p_2 различны, то главные направления ортогональны. Уравнение главных направлений имеет вид

$$\begin{vmatrix} E_2 du + F_2 dv & E_1 du + F_1 dv \\ F_2 du + G_2 dv & F_1 du + G_1 dv \end{vmatrix} = 0.$$

Для дальнейших целей важна следующая элементарная задача. С каждой точкой ориентируемой поверхности

$$\sigma : \mathbf{R} = \mathbf{r}(u, v) \in C^2, \quad (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

связан вектор $h\mathbf{n}$, где \mathbf{n} – единичный вектор нормали, $h = const$ и ориентация базиса $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}\}$ неизменна. Требуется вычислить коэффициенты первой квадратичной формы поверхности

$$\sigma_h : \mathbf{R} = \mathbf{r}(u, v) + h\mathbf{n} \in C^2, \quad (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Заметим, что $\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{g}$, где $g = \sqrt{EG - F^2}$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} + h \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{g}$ и соответственно

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{r}_u + h \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]_u g - g_u [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{g^2}, \quad \mathbf{R}_v = \mathbf{r}_v + h \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]_v g - g_v [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{g^2}. \quad (7)$$

Далее используем формулу (2).

2. Моделирование изгиба сотовой панели

Задача о соответствии пары поверхностей тесно связана с моделированием изгиба листа материала, состоящего из двух поверхностей, пространство между которыми заполнено конструкцией ячеистого типа. Впрочем, конфигурация заполнителя может быть различной. Приводим заимствованный в [7] рисунок, отражающий разнообразие конструкций с сотовым заполнителем.

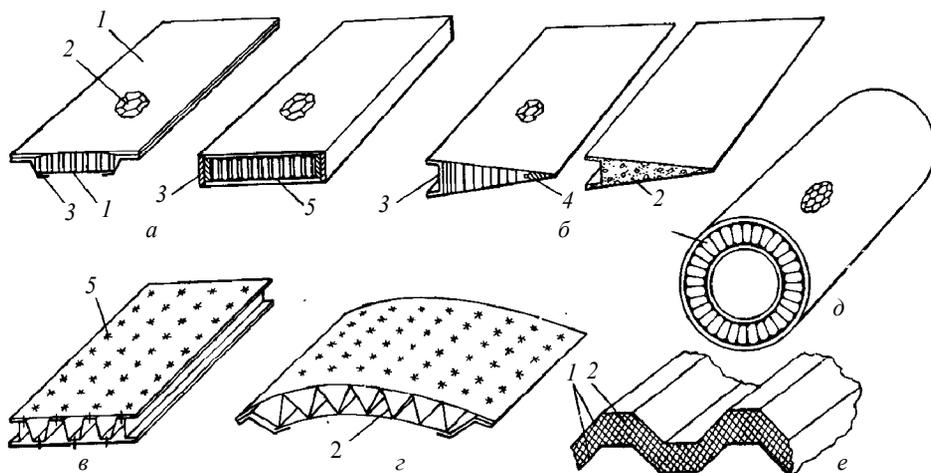


Рис. 1. Конструкции с заполнителем: *a* – плоские панели с сотовым заполнителем, *б* – клиновидные панели с сотовым и сплошным заполнителем, *в* – плоская панель с гофривым заполнителем, *г* – криволинейная панель с гофривым заполнителем, *д* – оболочка с сотовым заполнителем, *е* – ребристая плита. 1 – несущие слои, 2 – заполнитель, 3 – элементы каркаса, 4 – законцовка, 5 – соединение (клей, припой, сварка)

Мы примем модель, согласно которой лист указанного материала представляет собой пару поверхностей, для которых установлено точечное соответствие, при котором точка M_1 поверхности Σ_1 соответствует точке M_2 поверхности Σ_2 таким образом, что отрезок M_1M_2 нормален к обеим поверхностям и имеет постоянную длину, к тому же при совместной деформации обеих поверхностей оба указанных свойства отрезка сохраняются.

Ясно, что наша модель имеет смысл не для любой конструкции, что хорошо видно на вышеприведенном рисунке. Впрочем, аналогичная конструкция использована и в [8]. Авторы прибегают к модели, приведенной ниже:

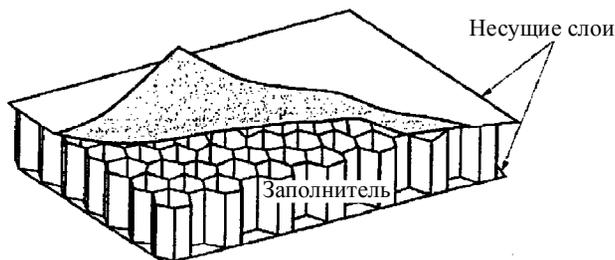


Рис. 2. Принципиальная схема панели с заполнителем (из [8])

Отметим, что полагать в модели точку M_1 совершенно произвольной точкой первой поверхности (и соответственно полагать, что вторая точка M_2 – пробегает всю вторую поверхность) есть слишком сильное требование, к тому же не согласующееся с реальностью, ибо в таком случае вместо слоя, заполненного не сплошь мы получаем просто некоторое тело в пространстве. Такое допущение мы можем принять только для первого, весьма грубого приближения.

Основная задача, которую мы здесь ставим, такова. Плоская панель с заполнением, описываемом нашей моделью, подвергается деформации, цель которой – придать одной из плоскостей («ведущей плоскости») конфигурацию некоторой наперёд заданной поверхности. Требуется определить, сколь велики локальные искажения длин второй ограничивающей плоскости («ведомой плоскости»).

До деформации ведущую плоскость можно снабдить системой декартовых координат таким образом, что точки M_1 окажутся на прямых, параллельных координатным осям, причем расстояния между соседними прямыми одинаковы. Эта конечная координатная сеть после деформации перейдет в сеть линий уже на искривленной поверхности. При этом вид этой новой сети существенно зависит от того, какое именно точечное соответствие φ установлено между плоскостью панели и той поверхностью, с которой должна совместиться ведущая плоскость после деформации. Следовательно, соответствие φ повлияет и на искажения локальных длин на второй («ведомой») плоскости панели.

Отмеченное выше грубое приближение позволяет, однако, применять стандартные методы математического анализа и дифференциальной геометрии. Используем сначала именно такое приближение.

Пример 1. Пусть «ведущая» плоскость задана вектор-функцией $R_1 = [u, v, 0]$, $-2 \leq u \leq 2$, $-2 \leq v \leq 2$. Поверхность, на которую должна деформироваться наша плоскость (вместе с соответствием!) задана также вектор-функцией

$$R_2 = [u, v, a \cdot u + b \cdot v^3 + c \cdot u^3],$$

$$-2 \leq u \leq 2, -2 \leq v \leq 2, a = 0,3, b = 0,03, c = -0,04.$$

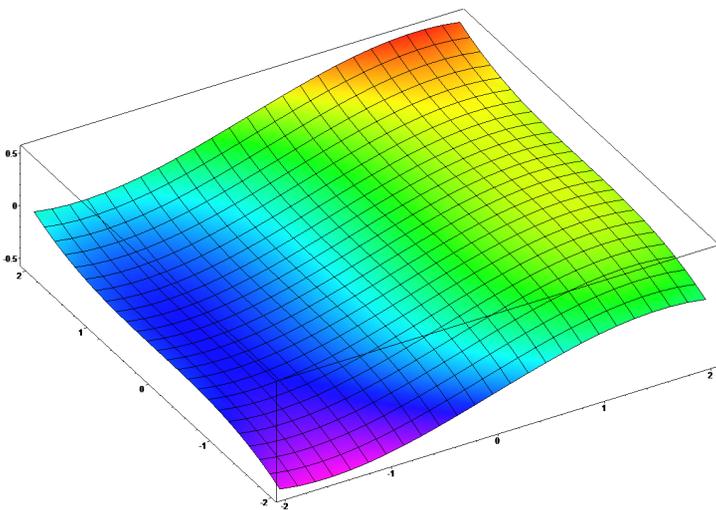


Рис. 3. Поверхность R_2

Корни уравнения (5) для нашего примера:

$$p_1=1, p_2=0,0144 u^4 + 1,09 + 0,0081 v^4 - 0,072 u^2.$$

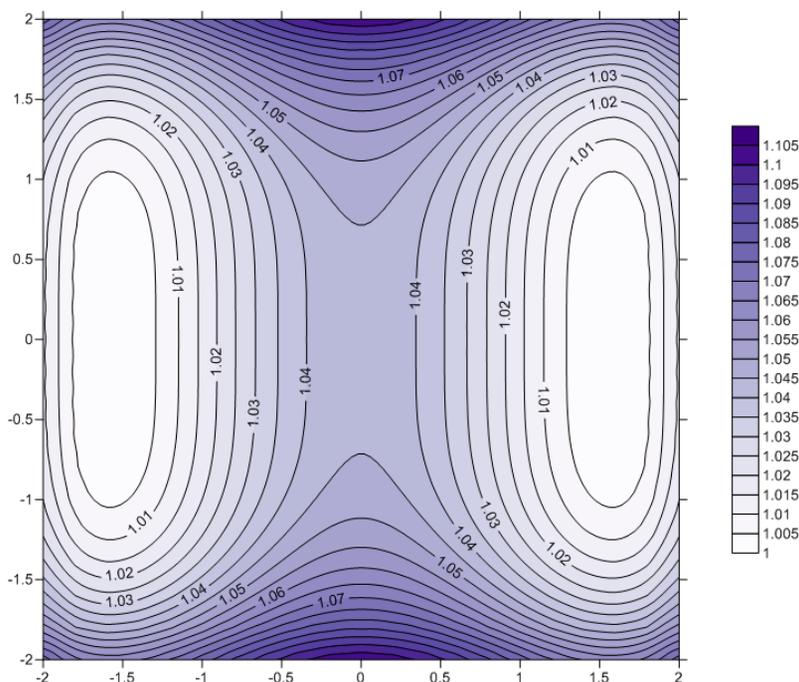


Рис. 4. Наибольшее относительное искажение локальных длин в каждой точке первой плоскости, обусловленное приведением её в положение искривлённой поверхности

Наименьшее искажение локальных длин (второй корень уравнения (5)) в каждой точке равно, как видно, 1 и в визуализации не нуждается.

Пусть, далее, толщина сотовой панели равна h . Тогда для второй – «ведомой» поверхности получаем параметрическое задание (6)

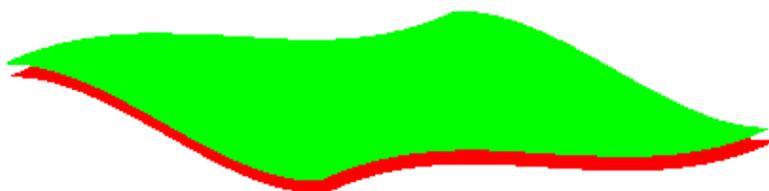


Рис. 5. Ограничивающие поверхности изогнутой сотовой панели.

Формулы (7) позволяют вычислить коэффициенты первой квадратичной формы. Для неизменной «ведущей» плоскости и для второй поверхности проведем ту же процедуру, что и выше. Тогда получаем, аналогично рис. 4, визуализацию уже обоих корней уравнения (5) – оба нетривиальны.

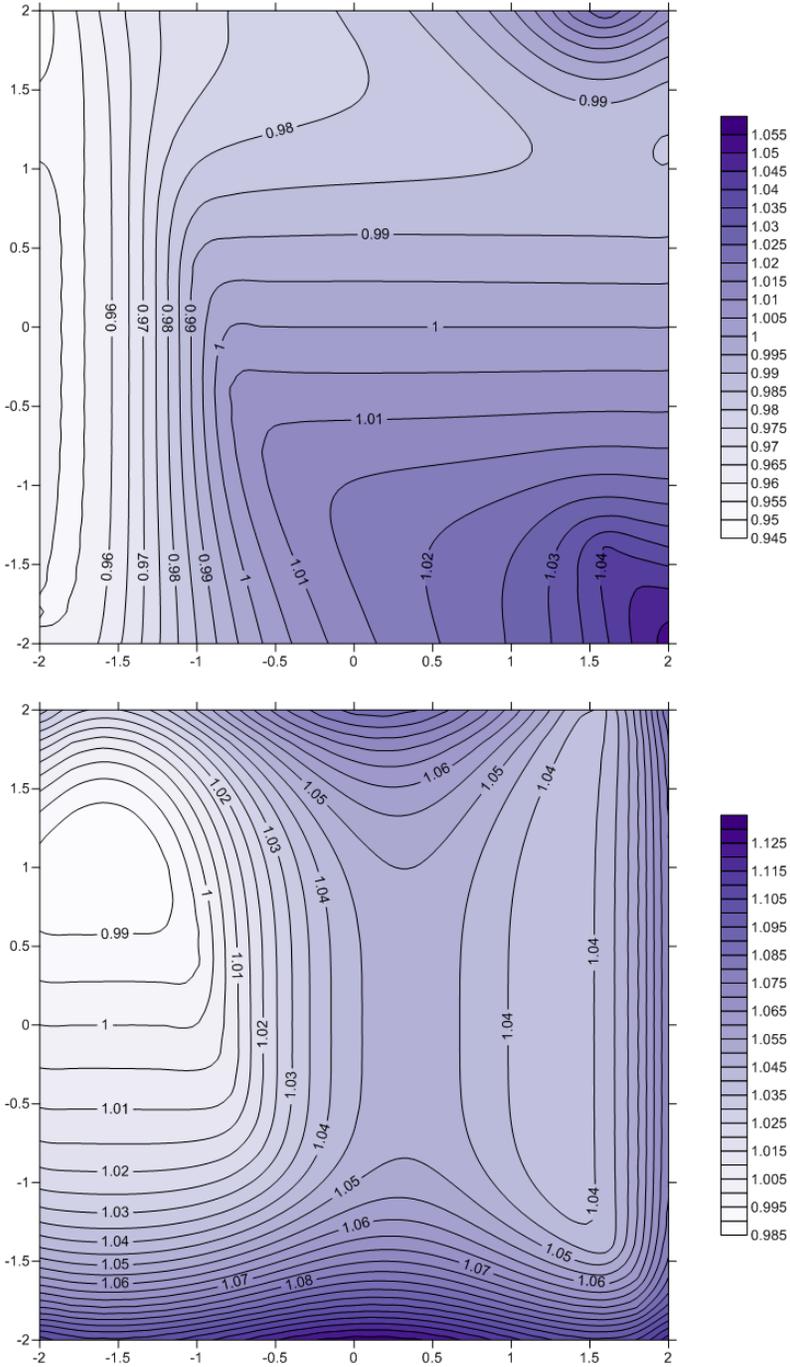


Рис. 6. Экстремальные относительные искажения локальных длин в каждой точке второй плоскости, обусловленные приведением её в положение искривлённой поверхности

Наконец, проведем аналогичную процедуру, взяв в качестве первой поверхности криволинейную поверхность, полученную из первой плоскости, а в качестве второй – поверхность, полученную из второй плоскости.

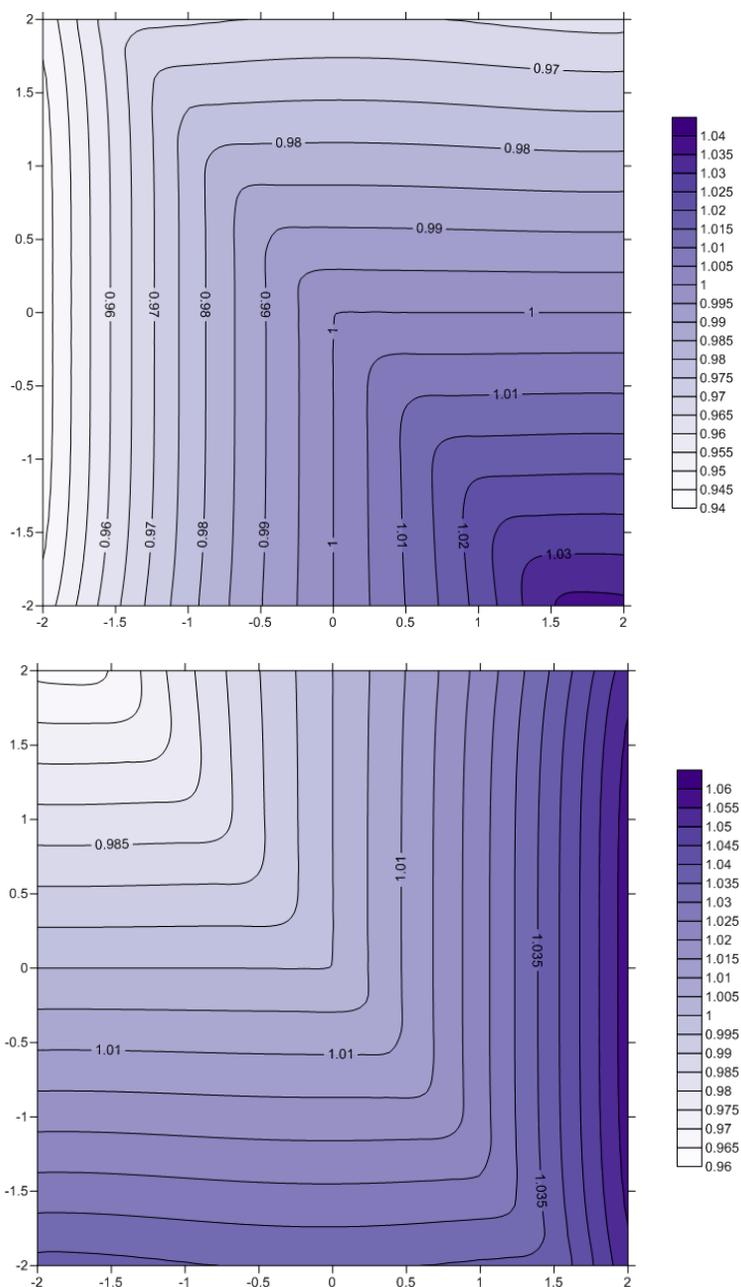


Рис. 7. Экстремальные относительные искажения локальных длин в каждой точке второй поверхности в сравнении с локальными длинами в соответствующих точках первой поверхности

Пример 2. Рассмотрим теперь пару поверхностей – плоскость $[u, v, 0]$ и поверхность $P = [u, v, 0, 3v^2 - 0, 4u^2]$.

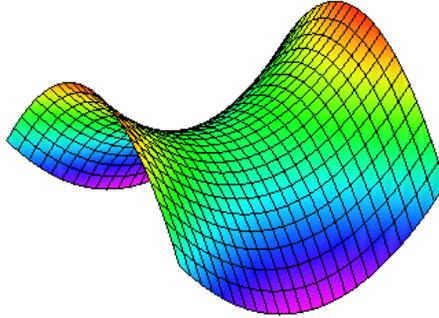


Рис. 8. Поверхность P

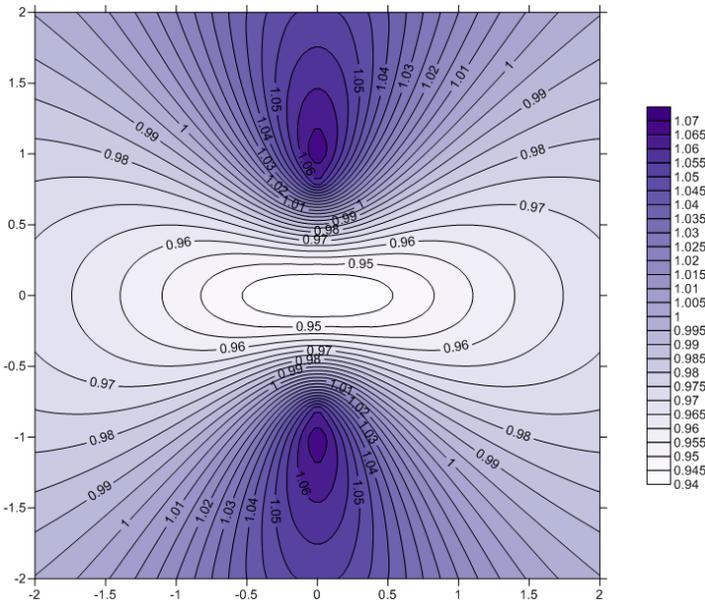


Рис. 9. Значения первого корня уравнения (5)

Заметим, что для практических задач, связанных с деформацией панелей с соевым заполнением, одной визуализации недостаточно. Если важна информация о границе, разделяющей различные области на рис. 9, то следует располагать числовым описанием этой границы. Нами разработана программа, которая формирует массив точек, в которых значение (допустим, первого корня уравнения (5)) равно критическому значению H (как в вышеприведенном примере, это 1) с отклонением (по абсолютной величине) не более указанного нами числа ϵ . Для построения массива прямоугольник $(u_1 \leq u \leq u_2, v_1 \leq v \leq v_2)$ в плоскости параметров разбивается равномерной сеткой, полученной делением каждой из его сторон на n равных частей. Программа сохраняет те узловые точки, в которых значение исследуемой функции находится в пределах $H \pm \epsilon$.

Принимая $H = 1$, $\varepsilon = 0,001$, $n = 100$, получаем массив из 208 точек с их координатами. Не приводя координат точек, ограничимся изображением этого массива на рис. 10.

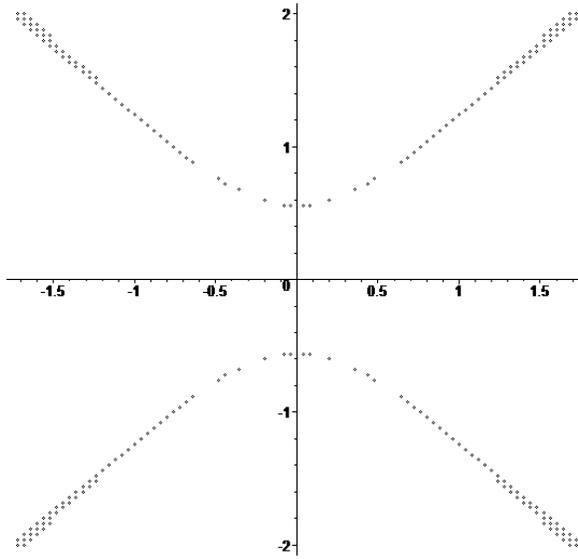


Рис. 10. Граница критической области для первого корня уравнения (5)

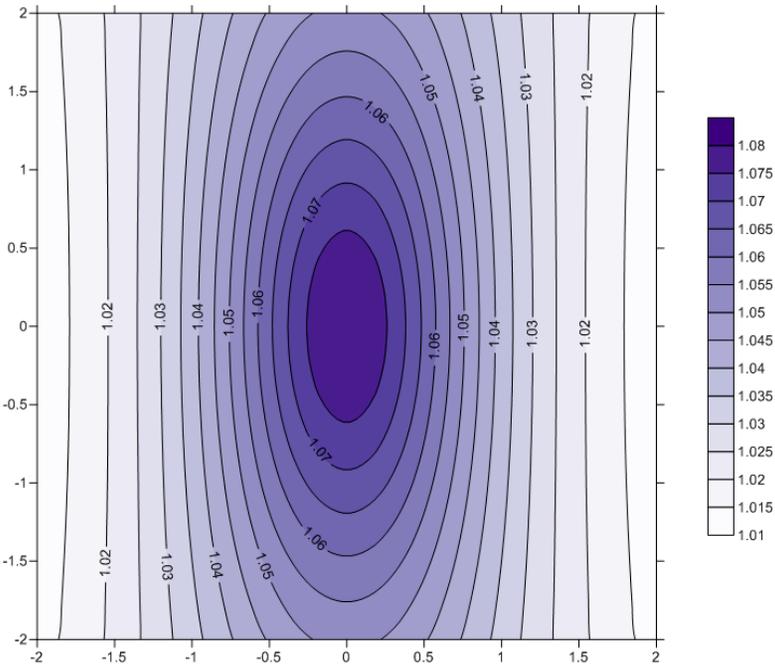
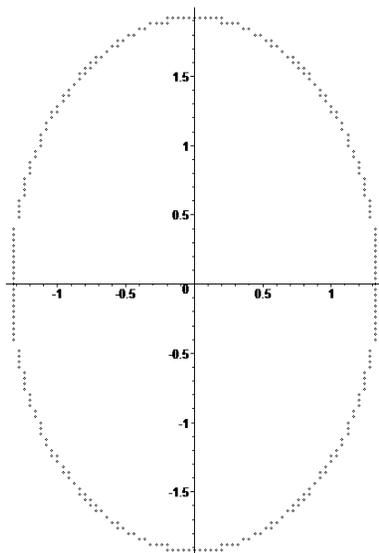


Рис. 11. Значения второго корня уравнения (5)



На рис. 10 утолщение граничной линии указывает на области, где различие между «докритическим» и «сверхкритическим» значением исследуемой функции не столь принципиально, как в области, где граничная линия тонка.

Принимая $H = 1,5$, $\varepsilon = 0,01$, $n = 100$, получаем массив из 260 точек с их координатами. Не приводя координат точек, ограничимся изображением этого массива на следующем рисунке.

Рис. 12. Граница критической области для второго корня уравнения (5)

Авторы выражают признательность профессору В.Г. Бутову за участие в обсуждении вопросов, затронутых в данной статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.
2. Иванов А.О., Тужилин А.А. Лекции по классической дифференциальной геометрии. Новая университетская библиотека, 2009. 233 с.
3. Раиевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.
4. Шапуков Б.Н. Дифференциальная геометрия и основы тензорного анализа. Казань: КГУ. 135 с.
5. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: ГИТТЛ, 1960. 559 с.
6. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. М.-Л.: ОНТИ НКТП, 1935 330 с.
7. Панин В.Ф., Гладков Ю.А. Конструкции с заполнителем: справочник. М.: Машиностроение, 1991. 272 с.
8. Whitead S., McDonald M., and Bartholomeusz R.A. Loading, degradation and repair of F-III bonded honeycomb sandwich panels – preliminary study // Australian Defence Science & Technology Organization (DSTO) Report. – TR-1041.

Статья поступила 12.12.2012 г.

Bukhtyak M.S., Nikulchikov A.V. HONEYCOMB PANEL DEFORMATION MODELING. A honeycomb panel in its initial form is modeled with a pair of plane domains the corresponding points of which are joined by segments with equal lengths orthogonally to both the planes. One of the plane domains is superimposed on a surface, which causes local distortions of lengths on the obtained boundary surface of the deformed panel. Lengths on the second bounding surface are also locally distorted due to joints along normal lines. The ratio of the corresponding first quadratic forms serves as a measure of the distortion.

Keywords: honeycomb panel, local metric, first quadratic form, bending.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Tomsk State University)

E-mail: bukhtyakm@mail.ru

NIKULCHIKOV Andrey Viktorovich (Tomsk State University)

E-mail: tracesofdeath@mail2000.ru

УДК 628.33:531.133

Е.Н. Дьяченко

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ СЕДИМЕНТАЦИИ,
ОСНОВАННЫХ НА МЕТОДЕ ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ¹**

В статье приводится один из способов верификации численных моделей, основанных на методе дискретных элементов, которые часто применяются для моделирования процессов седиментации, фильтрации и уплотнения седиментационных слоев. Предложенный метод заключается в сравнении результатов тестового расчета с точным аналитическим решением.

Ключевые слова: *моделирование, верификация, метод дискретных элементов, седиментация.*

Верификация является одним из необходимых элементов любого моделирования, так как только после проведения верификации моделей исследователь и научное сообщество может доверять результатам моделирования.

Метод дискретных элементов (DEM) изначально был предложен Кандэллом (Cundall) и Стрэком (Strack) для моделирования поведения горных пород [1]. С увеличением вычислительной мощности суперкомпьютеров этот метод развивается и применяется для моделирования широкого спектра задач, в которых имеются системы из большого числа таких частиц, как молекулы, песчинки, зерна и т.д. Для верификации моделей, основанных на методе дискретных элементов, часто проверяется закон сохранения полной энергии системы [2]. Наиболее часто результаты моделирования верифицируются сравнением с экспериментальными результатами, например [3, 4].

В данной статье предлагается метод верификации, который можно применять для DEM-моделей осаждения частиц, фильтрации и медленного уплотнения седиментационных слоев.

1. Основы метода моделирования

Подробное описание метода моделирования приводится в [5]. Здесь показаны лишь основные элементы математической постановки метода моделирования. Полагается, что для каждой из множества сферических частиц решается система уравнений движения центра массы:

$$\begin{cases} \frac{dv_i}{dt} = \frac{F_i}{m_i}, \\ \frac{dx_i}{dt} = v_i, \end{cases} \quad (1)$$

где $m_i = \rho \frac{4}{3} \pi r_i^3$ – масса частицы, t – время, F_i – результирующая сила, дейст-

¹ Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы. Соглашение № 14.В37.21.0872.

вующая на частицу, \mathbf{x}_i – положение центра частицы в пространстве, \mathbf{v}_i – вектор скорости частицы, ρ – плотность материала частиц.

Считается, что частица i в некоторый момент имеет N_i точек соприкосновения с другими частицами и/или с границами расчетной области.

Сила \mathbf{F}_i выражается в виде

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{N_i} [\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, r_i, r_j) + \mathbf{F}_{\text{ad}}(r_i, r_j) + \mathbf{F}_{\text{fr},ij}] + \mathbf{g}m_i + \mathbf{F}_{\text{st},i}, \quad (2)$$

где N_i – количество контактов частицы радиусом r_i с окружающими ее частицами радиусами r_j , \mathbf{g} – ускорение свободного падения, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, r_i, r_j)$ – сила упругого взаимодействия двух частиц i и j , $\mathbf{F}_{\text{ad}}(r_i, r_j)$ – сила адгезии двух частиц, находящихся в контакте, $\mathbf{F}_{\text{fr},ij}$ – обобщенная сила трения скольжения и качения между двумя частицами, $\mathbf{F}_{\text{St},i}$ – сила сопротивления движению, вычисляемая по закону Стокса (Stokes).

Для решения поставленной выше задачи численно интегрируется система уравнений (1) с учетом соотношений (2), начальных и граничных условий [5].

2. Частный случай, имеющий аналитическое решение

Рассмотрим систему из 10 частиц размером $d = 0,1$ мм, плотностью $\rho = 2500$ кг/м³, эффективным модулем Юнга $E = 100$ ГПа, коэффициенты адгезии и трения полагаются равными нулю, $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с. В начальный момент времени частицы имеют координаты

$$\vec{x}_i = (0,5, 0,5, 0,1 + 0,2 \cdot i) \text{ мм},$$

где $i = 0 - 9$. Таким образом, частицы располагаются строго друг над другом на расстоянии 0,1 мм (рис. 1, а) вдоль вертикальной оси Z . Начальные скорости частиц равны нулю. Очевидно, частицы будут падать вниз, образуя вертикальный столб, поскольку отсутствуют силы, которые бы смещали частицы по осям X и Y .

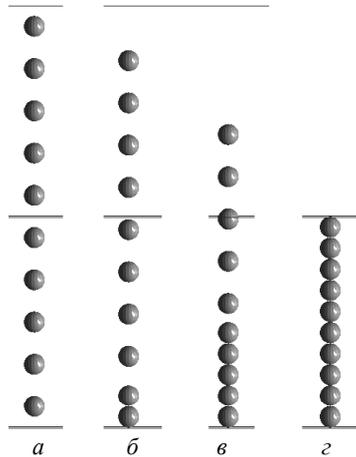


Рис. 1. Положение системы 10 частиц для моментов времени t , с:
а – 0, б – 0,015, в – 0,045, z – 1

На рис. 1, б, в, г представлено положение системы для некоторых моментов времени, полученное с помощью описанной в [5] численной модели.

3. Результаты моделирования частного случая

Зависимость относительной совместной деформации 1-й и 2-й частиц $\left(\frac{h}{d} = \frac{d - |\bar{x}_2 - \bar{x}_1|}{d}\right)$ от времени показано на рис. 2; на рис. 3 приведена более детальная информация для моментов времени 0,0183–0,0186 с, в течение которых происходил контакт между 2-й и 3-й частицей и установление положения 2-й частицы относительно первой.

Из рис. 2 видно, что в момент времени $t \approx 0,012$ с на первую частицу упала вторая частица, и относительная деформация составила $h/d \approx 1 \cdot 10^{-7}$. Каждая последующая частица падала на столб с периодом $T \approx 0,0079$ с. При этом, когда последняя частица соединилась со столбом, относительная деформация составила $h/d \approx 3,7 \cdot 10^{-7}$. В моменты касания новой частицы со столбом в нем возникали колебания, обусловленные переходом кинетической энергии частицы в потенциальную упругую энергию.

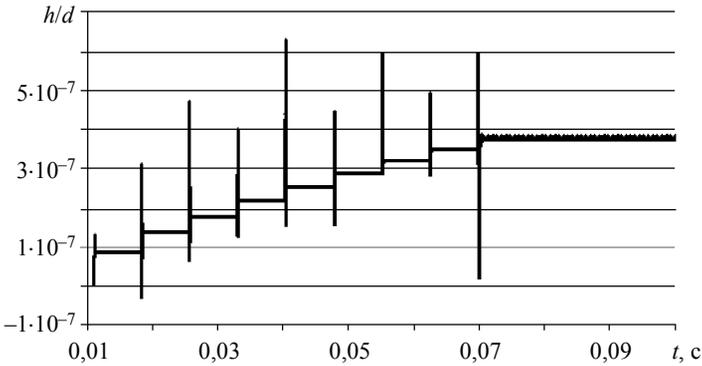


Рис. 2. Зависимость относительной совместной деформации 1-й и 2-й частиц (считая снизу) от времени

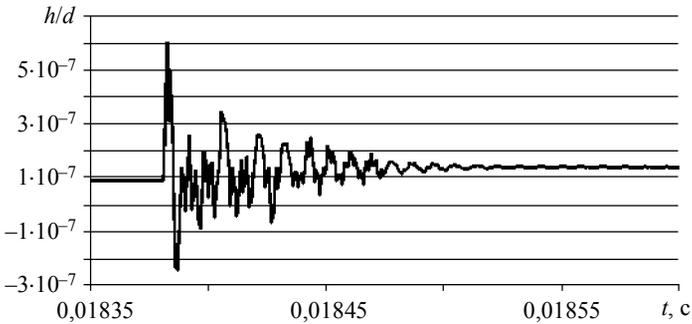


Рис. 3. Зависимость относительной совместной деформации 1-й и 2-й частиц (считая снизу) от моментов времени, в течение которых происходил контакт между 2-й и 3-й частицами и установление положения 2-й частицы относительно первой

Относительное положение двух частиц описывается затухающими колебаниями (рис. 3). Колебания затухают ввиду наличия между частицами вязкости среды (коэффициент вязкости μ взят такой же, как у воды). Стоит отметить, что в случае отсутствия вязкости ($\mu = 0$) частицы отскакивают после падения, и высота, до которой они отскакивают, остается постоянной, т.е. в модели сохраняется полная энергия, а расчетная схема не обладает численной вязкостью. Незначительные колебания системы из 10 частиц сохраняются с момента $t = 0,071$ с и до конца численного расчета (рис. 2). Вероятно, эти колебания обусловлены численными погрешностями, с чем согласны авторы работы [2].

Для построения рис. 2, 3 использовался только каждый десятый шаг по времени из численных расчетов.

4. Аналитическое решение и сравнение

Определим силу, действующую на первую частицу со стороны вышележащих 9 частиц:

$$F = 9mg = 9V\rho g = 9\frac{4}{3}\pi r^3\rho g \approx 1,16 \cdot 10^{-7} \text{ Н}. \quad (4)$$

Тогда, согласно решению задачи Герца [6], имеем углубление частиц:

$$h = \sqrt[3]{\frac{2F^2}{E^2 R}} = \sqrt[3]{\frac{2(1,15 \cdot 10^{-7})^2}{(10^{11})^2 0,05 \cdot 10^{-3}}} \approx 3,76 \cdot 10^{-11} \text{ м}. \quad (5)$$

Относительная совместная деформация 1-й и 2-й частиц

$$\frac{h}{d} \approx \frac{3,76 \cdot 10^{-11}}{1 \cdot 10^{-4}} = 3,76 \cdot 10^{-7}. \quad (6)$$

Это значение хорошо согласуется с полученным из расчетов (рис. 2) значением h/d . Отклонение аналитического значения (6) от расчетного находится в пределах численной погрешности схемы и не более 0,1 %.

Заключение

Представлен способ верификации численной модели осаждения частиц, основанной на методе дискретных элементов. Способ верификации заключается в сравнении результатов тестового расчета с известным аналитическим решением. Применение этого метода верификации на численной модели [5] показало адекватность модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cundall P.A., Strack O.D.L. A discrete numerical model for granular assemblies // *Geotechnique*. 1979. No. 29. P. 47–65.
2. Simo Siiriae, Jouko Yliruusi. Particle packing simulation based on Newtonian mechanics // *Powder Technology*. 2007. No. 174. P. 82–92.
3. Fu G., Dekelbab W. 3-D random packing of polydisperse particles and concrete aggregate grading // *Powder Technology*. Elsevier Science B.V. 2003. No. 133. P. 147–155.
4. Theuerkauf J., Witt P., Schwesig D. Analysis of particle porosity distribution in fixed beds using the discrete element method // *Powder Technology*. 2006. No. 165. P. 92–99.

5. *Dyachenko E., Dueck J.* Modeling of sedimentation and filtration layer formation by discrete element method // Компьютерные исследования и моделирование. 2012. № 1. Т. 4. С. 105–120.
6. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука. 1987. 246 с.

Статья поступила 30.08.2012г.

D'yachenko E. N. ANALYTICAL VERIFICATION OF SEDIMENTATION MODELS BASED ON THE DISCRETE ELEMENT METHOD. A way to verify numerical models based on the discrete element method is presented. This kind of models is often applied for the simulation of sedimentation, filtering, and slow shrinking processes. The proposed method involves a comparison of a test calculation with the exact analytical solution.

Keywords: simulation, verification, discrete element method, sedimentation.

D'YACHENKO Evgenii Nikolaevich (Tomsk State University)
E-mail: Evg.Dya@gmail.com

УДК 512.541

Е.В. Кайгородов**О ДВУХ КЛАССАХ ХОПФОВЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП**

В настоящей работе исследуется хопфовость SP -групп и алгебраически компактных абелевых групп. Хопфовость SP -групп сведена к хопфовости их примарных компонент. Для хопфовых алгебраически компактных абелевых групп получено полное описание; построен пример нехопфовой алгебраически компактной абелевой группы.

Ключевые слова: абелева группа, хопфова группа, смешанная группа, SP -группа, алгебраически компактная группа.

1. Введение

На рубеже XIX и XX столетий алгебра претерпела важное качественное изменение, которое можно охарактеризовать как переход к изучению абстрактных систем объектов. До этого момента основное внимание уделялось в алгебре конкретным системам, таким, как различные числовые системы, системы матриц, перестановок и т. п. Новый этап в развитии алгебры ознаменовался полным отвлечением от природы и способов построения объектов системы, и единственным предметом изучения стали отношения между этими объектами. Алгебра стала иметь дело просто с системами объектов, для которых определены некоторые операции и отношения, удовлетворяющие тем или иным требованиям. Что именно стоит за объектами системы – матрицы, уравнения, числа и т. д. – для алгебры безразлично, важно только, чтобы заданные операции и отношения были определены и заданные требования для этих операций и отношений выполнялись.

Простейшим примером такой системы является группа. И именно в рассматриваемый период изучение групп, без каких-бы то ни было предположений о природе их элементов, оформилось в отдельную область алгебры. Выдающуюся роль в создании школы по теории групп сыграл известный отечественный математик О.Ю. Шмидт. Его фундаментальный труд «Абстрактная теория групп» послужил в дальнейшем отправной точкой работ многих алгебраистов.

Примерно в то же время внутри только что зародившейся теории групп возникает новое направление исследований, предметом которых стали группы, заданные множествами образующих элементов и соответствующих определяющих соотношений. Это направление привело позже к выделению в теории групп вполне самостоятельной обширной области исследований, называемой ныне комбинаторной теорией групп. Истоки комбинаторной теории групп находятся в работах Шварца, Клейна, Фукса, Пуанкаре и Шоттки, в которых группы возникали как дискретные группы геометрических преобразований.

Исключительно значимой вехой в развитии комбинаторной теории групп являются статьи датского математика Якоба Нильсена 1917–1924 гг. Из результатов статьи Нильсена «О вычислениях с некоммутирующими сомножителями и приложениях к теории групп» [1], вышедшей в норвежском математическом журнале в 1921 г., вытекает одно важное для нас следствие. Оно состоит в том, что конечно порожденная свободная группа не может быть изоморфна своей собственной

факторгруппе, т.е. гомоморфное отображение такой группы на себя всегда имеет тривиальное ядро. В настоящее время это свойство групп называется хопфовостью в честь швейцарского математика Хайнца Хопфа. Основание для этого следующее.

В статьях [2] и [3] Хопф исследовал отображения одного двумерного многообразия в другое. Эти отображения индуцируют гомоморфизмы фундаментальной группы первого многообразия на фундаментальную группу его образа. Хопф показал, что эти группы не могут быть изоморфны никакой своей собственной факторгруппе. Простейший случай – это тот, в котором рассматриваемая фундаментальная группа свободна и имеет конечный ранг. Удивительно, что в течение тридцати лет никто не заметил, что Нильсен уже дал чисто алгебраическое доказательство того факта, что свободные группы конечного ранга хопфовы, – за десять лет до того, как Хопф обозначил свою проблему.

Хопфовы группы (в том числе и абелевы) изучались многими алгебраистами (библиографию см. в [4]). Настоящая статья в какой-то степени продолжает [4]. Второй параграф посвящен изучению хопфовых групп в одном интересном классе смешанных абелевых групп, в третьем параграфе дано полное описание хопфовых алгебраически компактных абелевых групп.

Для удобства чтения мы приводим здесь некоторый материал, касающийся обозначений и терминологии.

Определение 1.1. Группа A называется *хопфовой*, если всякий эпиморфизм группы A на себя является автоморфизмом.

Далее в тексте под словом «группа» будет пониматься аддитивно записанная абелева группа. Буква p обозначает простое число. Если A – группа, то $r_p(A)$ – p -ранг группы A , $\bigoplus_{\aleph} A$ – прямая сумма \aleph копий группы A (\aleph – некоторое кардинальное число).

2. Хопфовость SP-групп

В конце прошлого века возросло внимание специалистов к смешанным абелевым группам. Согласно определению смешанной группы, такая группа содержит как ненулевые элементы конечных порядков, так и элементы бесконечного порядка. В ряде статей рассматривались смешанные абелевы группы, лежащие между прямой суммой и прямым произведением своих p -компонент. Зададимся вопросом о хопфовости таких групп. До конца параграфа символ A_p обозначает p -компоненту группы A , т.е. наибольшую подгруппу в A , являющуюся p -группой. Здесь и далее подразумевается, что p пробегает множество всех простых чисел, относящихся к A , т.е. множество всех p , для которых $A_p \neq 0$.

Определение 2.1. *SP-группой* называется редуцированная смешанная группа A с бесконечным числом ненулевых p -компонент, такая, что естественное вложение $\bigoplus_p A_p \rightarrow A$ продолжается до сервантного вложения $A \rightarrow \prod_p A_p$.

Таким образом, для SP-группы A можно считать, что $\bigoplus_p A_p \subset A \subseteq \prod_p A_p$, причем A сервантна в $\prod_p A_p$. SP-группы изучались или появлялись во многих работах, в частности [5–9].

Лемма 2.2 [10]. Следующие свойства редуцированной смешанной группы A эквивалентны:

- 1) для каждого p имеет место прямое разложение $A = A_p \oplus B_p$ для некоторой группы B_p , причем $pB_p = B_p$;
- 2) справедливы сервантные вложения $\bigoplus_p A_p \subset A \subseteq \prod_p A_p$, т.е. A – SP-группа;
- 3) справедливы вложения $\bigoplus_p A_p \subset A \subseteq \prod_p A_p$ и $A/T(A)$ – делимая группа.

Теорема 2.3. SP-группа A хопфова тогда и только тогда, когда каждая ее p -компонента A_p хопфова.

Доказательство. Необходимость. Пусть SP-группа A хопфова. Согласно лемме 2.2, для любого p имеет место прямое разложение: $A = A_p \oplus B_p$, где B_p – дополнительное слагаемое и $pB_p = B_p$. Группа A_p хопфова как прямое слагаемое хопфовой группы [4, теорема 2].

Достаточность. Пусть дана SP-группа A и известно, что все ее p -компоненты A_p хопфовы. Так как подгруппы A_p и B_p вполне инвариантны в группе A , то $\text{Hom}(A_p, B_p) = 0$, $\text{Hom}(B_p, A_p) = 0$ и имеет место изоморфизм колец:

$$E(A) \cong \begin{pmatrix} E(A_p) & 0 \\ 0 & E(B_p) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $E(A) = E(A_p) \oplus E(B_p)$ и любой эндоморфизм $\alpha : A \rightarrow A$ действует покомпонентно.

Пусть φ – эпиморфизм группы A на себя. Обозначим ограничение этого эпиморфизма на p -компоненте A_p через φ_p . Покажем, что все отображения $\varphi_p : A_p \rightarrow A_p$ являются эпиморфизмами. Поскольку φ – эпиморфизм, то для произвольного элемента a' подгруппы A_p найдется такой элемент a группы A , что $\varphi(a) = a'$. Прямое разложение $A = A_p \oplus B_p$ позволяет однозначно представить элемент a в виде $a = a_p + b_p$, где $a_p \in A_p$, $b_p \in B_p$. Применим φ к обеим частям последнего равенства: $\varphi(a) = \varphi(a_p) + \varphi(b_p)$. Учтя вполне инвариантность прямых слагаемых A_p и B_p в группе A , получим $\varphi(b_p) = 0$. Следовательно, $a' = \varphi(a_p)$ или, что то же самое, $a' = \varphi_p(a_p)$. Таким образом, для элемента $a' \in A_p$ мы нашли прообраз $a_p \in A_p$ при отображении φ_p , чем обосновали, что отображение φ_p – эпиморфизм. Из условия теоремы все прямые слагаемые A_p хопфовы, поэтому каждый эпиморфизм φ_p является автоморфизмом.

Осталось убедиться, что эпиморфизм φ является автоморфизмом. Чтобы это установить, достаточно показать, что его ядро тривиально. Пусть a – произвольный элемент из $\text{Ker } \varphi$, тогда $\varphi(a) = 0$. Представляя $a = a_p + b_p$, получим $\varphi(a_p) + \varphi(b_p) = 0$, или $\varphi(a_p) = -\varphi(b_p)$. Левая часть последнего равенства есть

элемент из A_p , а правая – элемент из B_p , откуда $\varphi(a_p) = \varphi(b_p) = 0$. В частности, отсюда следует, что $\varphi_p(a_p) = 0$. Но все φ_p – автоморфизмы, поэтому и $a_p = 0$.

Из справедливости включения $A \subseteq \prod_p A_p$ ясно, что любой элемент группы A можно отождествить с бесконечным вектором (\dots, a_p, \dots) прямого произведения $\prod_p A_p$. Значит, равенства $a_p = 0$ влекут $a = 0$. Получаем окончательно: $\text{Ker } \varphi = 0$ и φ – автоморфизм группы A . Итак, группа A хопфова. Теорема доказана.

3. Хопфовость алгебраически компактных абелевых групп

Алгебраически компактные группы играют очень важную роль в теории абелевых групп. В описании алгебраически компактных групп участвуют целые p -адические числа. Они находят широкое применение и в других ветвях теории абелевых групп. Будем использовать символы \mathbb{Q}_p^* для кольца целых p -адических чисел и J_p – для группы целых p -адических чисел, являющейся аддитивной группой кольца \mathbb{Q}_p^* .

Определение 3.1 [11]. Группа A называется *алгебраически компактной*, если она выделяется прямым слагаемым из всякой группы G , содержащей ее в качестве сервантной подгруппы.

Пусть A – алгебраически компактная группа. Так как любая группа является прямой суммой делимой группы и редуцированной группы [11, теорема 21.3], то можем записать $A = D \oplus R$, где D – делимая часть группы A , а R – ее редуцированная часть.

В [4, следствие 7] установлено, что группа является хопфовой в точности тогда, когда ее редуцированная часть есть хопфова группа, а делимая часть, если она ненулевая, есть конечная прямая сумма копий рациональной группы \mathbb{Q} . Поэтому, не теряя общности, можно ограничиться в наших рассуждениях лишь редуцированными алгебраически компактными группами.

Дальнейшее упрощение становится возможным ввиду следующего результата Капланского [6]. Именно, редуцированная группа A алгебраически компактна тогда и только тогда, когда она имеет вид $A = \prod_p A_p$, где каждая группа A_p полна в своей p -адической топологии.

Группа A_p есть \mathbb{Q}_p^* -модуль, полный в p -адической топологии и называемый p -адической компонентой группы A . Группы A_p однозначно определяются группой A . Редуцированная алгебраически компактная группа A обладает полной и независимой системой инвариантов, состоящей из рангов p -базисных подгрупп A_p .

Выясним, как устроены эндоморфизмы группы A . Для этого запишем

$$A = \prod_p A_p = A_p \oplus \prod_{q \neq p} A_q.$$

Из равенств $\text{Hom}(A_p, \prod_{q \neq p} A_q) = 0$ и $\text{Hom}(\prod_{q \neq p} A_q, A_p) = 0$ вытекает, что подгруппа A_p вполне инвариантна в группе A для любого p . Значит, эндоморфизм φ группы $\prod_p A_p$ индуцирует некоторый эндоморфизм φ_p группы A_p . Иными словами, любой эндоморфизм $\varphi: A \rightarrow A$ действует покоординатно, т. е. $\varphi = (\dots, \varphi_p, \dots)$. Отсюда, в частности, следует, что хопфовость редуцированной алгебраически компактной группы эквивалентна хопфовости каждой p -адической компоненты такой группы. Поэтому далее считаем, что A – p -адическая редуцированная алгебраически компактная группа.

Известно, что копериодическая группа выделяется прямым слагаемым из всякой группы, содержащей ее в качестве подгруппы, факторгруппа по которой не имеет кручения [11, §54]. Отсюда легко вывести, что все алгебраически компактные группы являются копериодическими. Благодаря этому обстоятельству, для произвольной p -адической редуцированной алгебраически компактной группы A существует прямое разложение $A = B \oplus C$, где B – p -адическая редуцированная алгебраически компактная группа без кручения, а C – p -адическая урегулированная алгебраически компактная группа [11, теорема 55.5].

Покажем, что подгруппа C вполне инвариантна в группе A . Для этого используем группу расширений. С различными аспектами теории расширений абелевых групп можно познакомиться по книге [11]. Имеем $C \cong \text{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, T)$, где T – периодическая часть группы A . Обозначим $T^* = \text{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, T)$. Группа T^* называется копериодической оболочкой группы T . Из точности последовательности

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{\alpha} T^* \xrightarrow{\beta} T^*/T \longrightarrow 0$$

по теореме Картана – Эйленберга [11, § 44] вытекает точность индуцированной последовательности

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(T^*/T, G) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}(T^*, G) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}(T, G)$$

для любой группы G . Положим теперь $G = B$. Так как T^*/T – делимая группа без кручения [11, теорема 58.1], то $\text{Hom}(T^*/T, B) = 0$. Далее, $\text{Hom}(T, B) = 0$, поскольку T – периодическая группа, а B – группа без кручения. Следовательно, $\text{Hom}(T^*, B) = 0$ и, очевидно, $\text{Hom}(C, B) = 0$.

В силу [4, теоремы 2 и 5] группа A хопфова тогда и только тогда, когда группы B и C хопфовы. Итак, остается найти критерии хопфовости p -адической редуцированной алгебраически компактной группы без кручения и p -адической урегулированной алгебраически компактной группы. Рассмотрим сначала случай без кручения.

Теорема 3.2. Пусть A – p -адическая редуцированная алгебраически компактная группа без кручения. Тогда группа A хопфова, если и только если ее p -ранг конечен, и, таким образом, A есть прямая сумма конечного числа копий группы J_p .

Доказательство. Необходимость. Пусть группа A хопфова. Предположим противное, т. е. пусть $r_p(A)$ – бесконечное кардинальное число. Для некоторого базисного подмодуля B группы A (рассматриваемой как \mathbb{Q}_p^* -модуль) имеем

$$B = \bigoplus_{r_p(A)} J_p = \left(\bigoplus_{\mathfrak{M}} J_p \right) \oplus \left(\bigoplus_{\mathfrak{N}} J_p \right),$$

где $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = r_p(A)$. Обозначая $\bigoplus_{\mathfrak{M}} J_p = B_1$, $\bigoplus_{\mathfrak{N}} J_p = B_2$, можно далее записать $B = B_1 \oplus B_2$.

Так как A – есть p -адическое пополнение группы B , т. е. $A = \hat{B}$, то $A = \hat{B}_1 \oplus \hat{B}_2$. В силу выбора кардинальных чисел \mathfrak{M} и \mathfrak{N} имеем $B_1 \cong B$, откуда получаем $\hat{B}_1 \cong \hat{B}$ или, что то же самое, $\hat{B}_1 \cong A$. Зафиксируем некоторый изоморфизм $\varphi: \hat{B}_1 \rightarrow A$ и продолжим его до эндоморфизма $\alpha: A \rightarrow A$, считая, что α аннулирует \hat{B}_2 , т. е. $\alpha(\hat{B}_2) = 0$. Очевидно, что α – эпиморфизм, но не автоморфизм, поскольку его ядро совпадает с группой \hat{B}_2 , а она, в свою очередь, не нулевая. Имеем $\text{Ker } \alpha \neq 0$, чего не может быть, потому что группа A по условию хопфова. Противоречие.

Достаточность. Пусть $r_p(A) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\varphi: A \rightarrow A$ – эпиморфизм. Легко показать, что $\text{Ker } \varphi$ – чистая подгруппа в группе A . Кроме этого, группа $\text{Ker } \varphi$ будет замкнутой в p -адической топологии. Для доказательства этого факта нужно установить, что она совпадает со своим замыканием, т. е. что $\overline{\text{Ker } \varphi} = \text{Ker } \varphi$.

Включение $\text{Ker } \varphi \subseteq \overline{\text{Ker } \varphi}$ очевидно. Покажем справедливость обратного включения. Пусть a – произвольный элемент из $\overline{\text{Ker } \varphi}$. Имеем: $a = \lim a_i$, где $a_i \in \text{Ker } \varphi$ для любого i . Так как φ – гомоморфизм, то $\varphi(a) = \varphi(\lim a_i) = \lim \varphi(a_i) = 0$, поэтому $a \in \text{Ker } \varphi$. Итак, $\overline{\text{Ker } \varphi} \subseteq \text{Ker } \varphi$, откуда $\overline{\text{Ker } \varphi} = \text{Ker } \varphi$.

Применяя [13, теорема 11.10], получаем, что подгруппа $\text{Ker } \varphi$ выделяется прямым слагаемым в группе A , т. е. можно записать $A = C \oplus \text{Ker } \varphi$. Но $A \cong A/\text{Ker } \varphi$, поэтому $C \cong A$. Справедливо равенство

$$r_p(A) = r_p(C) + r_p(\text{Ker } \varphi).$$

Отсюда $r_p(\text{Ker } \varphi) = 0$, следовательно, $\text{Ker } \varphi = 0$. Таким образом, φ – автоморфизм группы A . Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда A – произвольная p -адическая урегулированная алгебраически компактная группа. Нам потребуется такой результат.

Теорема 3.3. Пусть A – p -адическая алгебраически компактная группа, B – некоторая ее p -базисная подгруппа. Тогда любой эпиморфизм $\varphi: B \rightarrow B$ единственным образом продолжается до эпиморфизма $\hat{\varphi}: A \rightarrow A$.

Доказательство. Так как A – полная в p -адической топологии группа [11, §40], [14, §2], то любой эндоморфизм φ группы B продолжается, причем единственным образом, до эндоморфизма $\hat{\varphi}$ группы A [11, теорема 34.1]. Убедимся, что отображение $\hat{\varphi}$ сюръективно.

Пусть a – произвольный элемент группы A . Тогда $a = \lim b_i$, $i \geq 1$, где $b_i \in B$. Выберем в подгруппе B элемент c_1 , для которого окажется $b_1 = \varphi(c_1)$. Имеем: $b_2 - b_1 \in pA \cap B$. Но $pA \cap B = pB$, так как подгруппа B является p -сервантной в группе A [11, §34]. Значит, $b_2 - b_1 \in pB$ и найдется такой элемент $x_1 \in B$, что $b_2 - b_1 = px_1$. Далее, пусть y_1 – такой элемент группы B , что $\varphi(y_1) = x_1$. Положим $c_2 = c_1 + py_1$. Очевидно, что $c_2 \in B$ и $c_2 - c_1 \in pB$. Действуя эпиморфизмом φ на элемент c_2 , получим $\varphi(c_2) = \varphi(c_1) + p\varphi(y_1) = b_1 + px_1$, т. е. $\varphi(c_2) = b_2$.

Предположим, что в группе B мы нашли элементы c_1, c_2, \dots, c_n , $n \geq 2$, обладающие двумя свойствами: $\varphi(c_k) = b_k$ и $c_k - c_{k-1} \in p^{k-1}B$, где $1 \leq k \leq n$. Определим элемент $c_{n+1} \in B$ следующим образом. Имеем $b_{n+1} - b_n \in p^n A \cap B$ или, что то же самое, $b_{n+1} - b_n \in p^n B$. Можно записать $b_{n+1} - b_n \in p^n x_n$, где $x_n \in B$. Так как $\varphi: B \rightarrow B$ – эпиморфизм, то для элемента x_n найдется такой $y_n \in B$, что $\varphi(y_n) = x_n$. Индуктивно полагаем $c_{n+1} = c_n + p^n y_n$, получая рекуррентную формулу для вычисления всех членов бесконечной последовательности $\{c_i\}_{i \geq 1}$. Ясно, что $c_{n+1} - c_n \in p^n B$. Применение эпиморфизма φ к обеим частям рекуррентной формулы дает равенство $\varphi(c_{n+1}) = \varphi(c_n) + p^n \varphi(y_n) = b_n + p^n x_n$, или $\varphi(c_{n+1}) = b_{n+1}$.

Заметим, что для элементов построенной выше последовательности сохраняются свойства $\varphi(c_n) = b_n$ и $c_{n+1} - c_n \in p^n B$ при любом натуральном n . Покажем, что эта последовательность является чистой последовательностью Коши (чистые последовательности Коши определены в [13, §3] и [14, §20]). Нужно установить, что для всякого натурального числа n имеет место включение $c_i - c_n \in p^n B$, если $i \geq n$. Представим разность $c_i - c_n$ в следующем виде:

$$c_i - c_n = (c_i - c_{i-1}) + (c_{i-1} - c_{i-2}) + \dots + (c_{n+2} - c_{n+1}) + (c_{n+1} - c_n).$$

Все слагаемые, стоящие в скобках, суть элементы из $p^n B$. В самом деле, выполняются следующие включения: $c_i - c_{i-1} \in p^{i-1} B$, $c_{i-1} - c_{i-2} \in p^{i-2} B$, ..., $c_{n+2} - c_{n+1} \in p^{n+1} B$ и, наконец, $c_{n+1} - c_n \in p^n B$. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ включение $c_i - c_n \in p^n B$, если $i \geq n$, справедливо.

Таким образом, последовательность $\{c_i\}_{i \geq 1}$ является чистой последовательностью Коши, а значит, и последовательностью Коши. В самом деле, из справедливости включений $c_i - c_n \in p^n B$ и $c_j - c_n \in p^n B$ немедленно вытекает справедливость включения $c_i - c_j \in p^n B$ при любом натуральном n для всех $i, j \geq n$.

Пусть c – предел последовательности $\{c_i\}_{i \geq 1}$. Имеем теперь $a = \lim b_i = \lim \varphi(c_i) = \hat{\varphi}(\lim c_i) = \hat{\varphi}(c)$. Итак, для произвольного элемента $a \in A$ нашелся такой элемент $c \in A$, что $a = \hat{\varphi}(c)$. Значит, $\hat{\varphi}$ – эпиморфизм группы A на себя. Теорема доказана.

Следующая теорема дает описание хопфовых урегулируемых p -адических алгебраически компактных групп.

Теорема 3.4. Урегулированная p -адическая алгебраически компактная группа хопфова в точности тогда, когда она конечна.

Доказательство. Необходимость. Пусть A – урегулированная p -адическая алгебраически компактная хопфова группа, B – ее некоторая базисная подгруппа. Если группа A – периодическая, то она ограниченная ([11, следствие 40.3]), и значит, A есть прямая сумма циклических p -групп [11, теорема 17.2]. По теореме 9 статьи [4] такая группа конечна. Рассмотрим случай, когда A – смешанная группа. Предположим противное, т. е. пусть группа A – бесконечна. Ее базисная подгруппа B имеет прямое разложение:

$$B = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \bigoplus_{\mathfrak{M}_k} \mathbb{Z}(p^k),$$

где \mathfrak{M}_k – некоторые кардинальные числа.

В базисной подгруппе B можно выделить прямое слагаемое C , являющееся прямой суммой счетного числа циклических p -групп. Группу C можно представить в виде $C = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus \dots$, где все C_i – циклические p -группы, порядки которых возрастают с возрастанием значений индекса i . Очевидно, что можно построить сюръективный эндоморфизм φ группы C с нетривиальным ядром. Именно, пусть φ переводит C_1 в ноль, а каждую группу C_i на группу C_{i-1} , $i > 1$. Следовательно, C – нехопфова группа. Тогда базисная подгруппа B тоже нехопфова как группа, содержащая нехопфово прямое слагаемое [4, теорема 2]. Применяя теорему 3.3, получаем, что A – нехопфова группа, что противоречит условию теоремы.

Достаточность. Обратное утверждение имеет место, поскольку любая конечная группа хопфова. Теорема доказана.

Полученные выше результаты, безусловно, позволяют утверждать, что существуют многочисленные примеры нехопфовых алгебраически компактных групп. Поэтому естественно попытаться построить хотя бы один такой пример. В наших рассуждениях, главным образом, мы будем исходить из свойств p -адических алгебраически компактных групп как модулей, полных в своей p -адической топологии.

Начнем с двух известных лемм.

Лемма 3.5 [13]. Пусть N – подмодуль модуля M . Тогда N – замкнутый подмодуль в точности тогда, когда M/N не имеет элементов бесконечной высоты.

Лемма 3.6 [13]. Пусть N – такой подмодуль полного модуля M , что M/N не имеет элементов бесконечной высоты. Тогда M/N – полный модуль.

Докажем еще один полезный результат общего характера.

Лемма 3.7. Если B – p -сервантная подгруппа группы A , то $(B + A[p^n]) / A[p^n]$ – p -сервантная подгруппа факторгруппы $A / A[p^n]$.

Доказательство. Пусть произвольный смежный класс $(b + a) + A[p^n]$ ($b \in B$, $a \in A[p^n]$) факторгруппы $(B + A[p^n]) / A[p^n]$ делится на p^k в факторгруппе $A / A[p^n]$. Тогда в группе $A / A[p^n]$ найдется такой смежный класс $x_0 + A[p^n]$ ($x_0 \in A$), что $(b + a) + A[p^n] = p^k(x_0 + A[p^n])$ или, что то же самое, $b + A[p^n] = p^k x_0 + A[p^n]$. Это значит, что $b - p^k x_0 \in A[p^n]$. Можно записать

$b = p^k x_0 + c$, где $c \in A[p^n]$. Умножая левую и правую части последнего равенства на p^n , получаем $p^n b = p^{k+n} x_0$. Получается, что x_0 – решение уравнения $p^{k+n} x = p^n b$ в группе A . Но подгруппа B p -сервантна в группе A , поэтому уравнение $p^{k+n} x = p^n b$ будет иметь решение и в группе B , т. е. верно равенство $p^n b = p^{k+n} y_0$, $y_0 \in B$. Отсюда $p^n (b - p^k y_0) = 0$, следовательно, $b - p^k y_0 \in A[p^n]$. На языке смежных классов

$$b + A[p^n] = p^k y_0 + A[p^n] = p^k (y_0 + A[p^n]),$$

где $y_0 + A[p^n] \in (B + A[p^n]) / A[p^n]$. Итак, смежный класс $(b + a) + A[p^n] \in (B + A[p^n]) / A[p^n]$ делится на p^k в факторгруппе $(B + A[p^n]) / A[p^n]$. Лемма доказана.

Перейдем к построению примера. Пусть A – такая p -адическая алгебраически компактная группа, что группа $B = \mathbb{Z}(p) \oplus \mathbb{Z}(p^2) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(p^n) \oplus \mathbb{Z}(p^{n+1}) \oplus \dots$ служит для нее p -базисной подгруппой. Прежде установим, что подгруппа $A[p^n]$ замкнута в p -адической топологии. Нужно убедиться в том, что $A[p^n] = \overline{A[p^n]}$. Понятно, что $A[p^n] \subseteq \overline{A[p^n]}$. Обратно, пусть a – произвольный элемент из $\overline{A[p^n]}$. Тогда $a = \lim a_i$, где $a_i \in A[p^n]$ для любого i . Получаем $p^n a = p^n \lim a_i = \lim p^n a_i = 0$, следовательно, $a \in A[p^n]$ и $\overline{A[p^n]} \subseteq A[p^n]$. Таким образом, $A[p^n] = \overline{A[p^n]}$, или, иначе, подгруппа $A[p^n]$ замкнута в p -адической топологии. Применяя последовательно леммы 3.5 и 3.6 (каждую абелеву группу можно естественным образом рассматривать как \mathbb{Z} -модуль, поэтому все понятия и факты теории модулей применимы к абелевым группам), выводим, что группа $A / A[p^n]$ полна в своей p -адической топологии, т. е. является p -адической алгебраически компактной группой.

Теперь докажем, что группа $(B + A[p^n]) / A[p^n]$ служит p -базисной подгруппой группы $A / A[p^n]$. Согласно определению p -базисной подгруппы, необходимо проверить выполнение условий:

- а) подгруппа $(B + A[p^n]) / A[p^n]$ является прямой суммой циклических p -групп и бесконечных циклических групп;
 - б) группа $(B + A[p^n]) / A[p^n]$ есть p -сервантная подгруппа группы $A / A[p^n]$;
 - с) факторгруппа $(A / A[p^n]) / ((B + A[p^n]) / A[p^n])$ является p -делимой группой.
- а) Нужный результат, очевидно, будет получен, если мы докажем, что $(B + A[p^n]) / A[p^n] \cong B$. Имеем

$$(B + A[p^n]) / A[p^n] \cong B / (B \cap A[p^n]) = B / B[p^n].$$

Ясно, что

$$B[p^n] = \mathbb{Z}(p)[p^n] \oplus \mathbb{Z}(p^2)[p^n] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(p^n)[p^n] \oplus \mathbb{Z}(p^{n+1})[p^n] \oplus \dots$$

Обозначим образующие элементы циклических p -групп $\mathbb{Z}(p)$, $\mathbb{Z}(p^2)$, $\mathbb{Z}(p^3)$, ... соответственно через b_1 , b_2 , b_3 , Запишем $B = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle b_n \rangle \oplus \langle b_{n+1} \rangle \oplus \dots$. Заметим, что $\mathbb{Z}(p)[p^n] = \mathbb{Z}(p)$, $\mathbb{Z}(p^2)[p^n] = \mathbb{Z}(p^2)$, ..., $\mathbb{Z}(p^n)[p^n] = \mathbb{Z}(p^n)$. Тогда

$$B[p^n] = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle b_n \rangle \oplus \langle pb_{n+1} \rangle \oplus \langle p^2 b_{n+2} \rangle \oplus \dots \oplus \langle p^k b_{n+k} \rangle \oplus \langle p^{k+1} b_{n+k+1} \rangle \oplus \dots$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} B/B[p^n] &\cong (\langle b_{n+1} \rangle / \langle pb_{n+1} \rangle) \oplus (\langle b_{n+2} \rangle / \langle p^2 b_{n+2} \rangle) \oplus \dots \oplus \\ &\oplus (\langle b_{n+k} \rangle / \langle p^k b_{n+k} \rangle) \oplus (\langle b_{n+k+1} \rangle / \langle p^{k+1} b_{n+k+1} \rangle) \oplus \dots = \\ &= \mathbb{Z}(p) \oplus \mathbb{Z}(p^2) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(p^k) \oplus \mathbb{Z}(p^{k+1}) \oplus \dots \cong B. \end{aligned}$$

Таким образом, группа $(B + A[p^n]) / A[p^n]$ изоморфна группе B , поэтому она представляет собой прямую сумму циклических p -групп.

б) непосредственно вытекает из леммы 3.7.

с) Имеем

$$\begin{aligned} &(A/A[p^n]) / ((B + A[p^n]) / A[p^n]) \cong \\ &\cong A / (B + A[p^n]) \cong (A/B) / ((B + A[p^n]) / B). \end{aligned}$$

Так как B есть p -базисная подгруппа группы A , то факторгруппа A/B p -делима. Известно, что каждый эпиморфный образ p -делимой группы является p -делимой группой [11, §20]. Следовательно, каждая факторгруппа p -делимой группы p -делима. Получается, что группа $(A/B) / ((B + A[p^n]) / B)$, а значит, и группа $(A/A[p^n]) / ((B + A[p^n]) / A[p^n])$ p -делима.

Итак, группа $(B + A[p^n]) / A[p^n]$ может служить p -базисной подгруппой для группы $A/A[p^n]$. Выше, при проверке выполнения требования а), был установлен изоморфизм $(B + A[p^n]) / A[p^n] \cong B$. Так как p -адические алгебраически компактные группы с изоморфными базисными подмодулями изоморфны [11, §40], то $A/A[p^n] \cong A$. Это доказывает, что группа A нехопфова.

Как уже было сказано, можно строить и другие примеры нехопфовых алгебраически компактных групп. Разнообразие таких примеров объясняется, в частности, особенностями строения базисных подгрупп p -адических алгебраически компактных групп (именно, базисная подгруппа p -адической алгебраически компактной группы есть прямая сумма циклических p -адических модулей) и тем, что базисные подгруппы p -адических алгебраически компактных групп могут допускать большое количество различных эпиморфизмов на себя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nielsen J.* Om Regning med ikke kommutative Faktorer og dens Anvendelse i Gruppeteorien // *Mathematisk Tidsskrift B*, 77–94, 1921.
2. *Hopf H.* Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten // *J. Reine und Angew. Math.* 163, 71–88. II.2, 1930.
3. *Hopf H.* Beiträge zur Theorie der Flächenabbildungen // *J. Reine und Angew. Math.* 165, 225–226. II.2, 1931.
4. *Кайгородов Е.В.* Хопфовы абелевы группы // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2012. № 2 (18). С. 5–12.
5. *Fuchs L., Rangaswamy K. V.* On generalized regular rings // *Math. Z.*, 107 (1968). P. 71–81.
6. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: в 2 т. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 417 с.
7. *Glaz S., Wickless W.* Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups // *Commun. Algebra.* 1994. V. 22. No. 4. P. 1161–1176.
8. *Vinsonhaler C., Wickless W. J.* Realizations of finite dimensional algebras over the rationales // *Rocky Mountain J. Math.* 1994. V. 24. No. 4. P. 1553–1565.
9. *Albrecht U. F., Goeters H. P., Wickless W.* The flat dimension of mixed abelian groups as E-modules // *Rocky Mountain J. Math.* 1995. V. 25. No. 2. P. 569–590.
10. *Крылов П. А., Пахомова Е. Г., Подберезина Е. И.* Об одном классе смешанных абелевых групп // *Вестник Томского государственного университета.* 2001. № 269. С. 46–50.
11. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: в 2 т. – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 335 с.
12. *Kaplansky I.* Infinite abelian groups. Univ. of Michigan Press, Ann. Arbor: Michigan, 1954.
13. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Модули над областями дискретного нормирования. М.: Факториал Пресс, 2007. 384 с. (Advanced Studies in Mathematics and Mechanics; Вып. 3).
14. *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006. 512 с.

Статья поступила 05.03.2013 г.

Kaigorodov E. V. ON TWO CLASSES OF HOPFIAN ABELIAN GROUPS. This paper is concerned with hopficity of SP-groups and algebraically compact Abelian groups. Hopficity of SP-groups is reduced to hopficity of their primary components. A full description of Hopfian algebraically compact Abelian groups is presented. An example of a non-Hopfian algebraically compact Abelian group is given.

Keywords: Abelian group, Hopfian group, mixed group, SP-group, algebraically compact group.

KAYGORODOV Evgeniy Vladimirovich (Tomsk State University)

E-mail: gazetaintegral@gmail.com

УДК 517.54

И.А. Колесников

**ОТОБРАЖЕНИЕ НА КРУГОВОЙ СЧЕТНОУГОЛЬНИК
С СИММЕТРИЕЙ ПЕРЕНОСА**

Получено аналитическое представление голоморфного в верхней полуплоскости отображения с симметрией переноса вдоль вещественной оси в виде дифференциального уравнения. Для одного частного случая получено аналитическое представление в интегральном виде.

Ключевые слова: *счетноугольник, симметрия переноса, линейные дифференциальные уравнения класса Фукса, конформные отображения.*

Одним из основных направлений в геометрической теории функций является задача о построении конформного отображения одной односвязной области на другую, возникшая благодаря работе Римана 1851 г. В различных приложениях теории функции комплексного переменного используются, прежде всего, отображения, построенные для конкретных областей, а также количественные оценки и качественные особенности этих отображений. В качестве области определения обычно выбирают каноническую односвязную область или единичный круг, или верхнюю полуплоскость. В данной работе получено уравнение для отображения с симметрией переноса верхней полуплоскости на круговой счетноугольник.

Определение 1. Область Δ назовем областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π , если при линейном преобразовании сдвига вида $L(w)=w+2\pi$ область остается неизменной $L(\Delta)=\Delta$.

Ограничимся рассмотрением областей типа полуплоскости, т. е. таких областей, у которых при указанном преобразовании сдвига среди всех простых концов в бесконечно удаленной точке неподвижным остается только один простой конец.

Определение 2. Круговым счетноугольником с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π будем называть односвязную область типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси с границей, состоящей из счетного числа дуг окружностей.

Будем считать, что часть границы кругового счетноугольника с симметрией переноса от точки ω_0 до точки $\omega_0+2\pi$ состоит из конечного числа дуг окружностей.

Согласно теореме Римана, существует однолистное и конформное отображение верхней полуплоскости на круговой счетноугольник.

Определение 3. Отображением с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π будем называть отображение $f: \Pi^+ \rightarrow \mathcal{C}$, такое, что $f(\Pi^+) = \Delta$, где $\Pi^+ = \{z: \text{Im } z > 0\}$ – верхняя комплексная полуплоскость, Δ – круговой счетноугольник с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π .

Замечание 1. Отображение с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π удовлетворяет условию [1] $f(z+2\pi k)=f(z)+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $z \in \Pi^+$.

Аналитическое продолжение отображения с симметрией переноса

Двигаясь от ω_0 к $\omega_0+2\pi$ по границе области Δ в положительном направлении, будем обозначать последовательно встречающиеся угловые точки границы через $A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0, A_n^0 \neq A_1^0 + 2\pi$, а углы области Δ соответственно $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$. Пробразы вершин A_s^k счетноугольника Δ обозначим $a_s^k, s=1, \dots, n, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Интервал, начинающийся в точке $a_s^k, s=1, 2, \dots, n-1, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и оканчивающийся в a_{s+1}^k обозначим l_s^k . Когда точка z пробегает интервал l_s^k , двигаясь слева направо, точка $\omega=f(z)$ пробегает дугу L_s^k границы области Δ , начинающуюся в точке A_s^k так, что область Δ остается слева. В силу принципа симметрии Римана – Шварца [1] отображение $f(z)$ голоморфно вплоть до интервалов l_s^k и аналитически продолжается через эти интервалы.

Продолжим отображение f из верхней полуплоскости Π^+ через интервал l_s^k в нижнюю полуплоскость $\Pi^- = \{z : \text{Im } z < 0\}$ согласно принципу симметрии. Получим функцию $f^*(z)$, конформно отображающую нижнюю полуплоскость Π^- на круговой счетноугольник Δ^* симметричный области Δ относительно L_s^k .

Это голоморфное отображение можно снова продолжить через любой интервал $l_s^{k'}$ в верхнюю полуплоскость, причем новое аналитическое продолжение $f^{**}(z)$ будет реализовать конформное отображение верхней полуплоскости Π^+ на счетноугольник Δ^{**} симметричный счетноугольнику Δ^* относительно дуги $L_s^{k'}$.

Предположим, что мы выполнили все возможные аналитические продолжения описанного вида. В результате получится бесконечнозначная аналитическая функция, для которой исходная функция $f(z)$ является в верхней полуплоскости одной из однозначных ветвей. Различные значения функции в точке z связаны дробно-линейным преобразованием.

Заметим, что различные ветви f^s, f^t продолженной функции f , заданные на верхней или нижней полуплоскостях, связаны дробно-линейным преобразованием

$$f^s(z) = \frac{af^t(z) + b}{cf^t(z) + d}.$$

Определение 4. Пусть функция $f : \Pi^+ \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в верхней полуплоскости Π^+ и имеет производную, не принимающую значение ноль. Производной Шварца [1, с. 399] функции f в области Π^+ называется функция

$$\{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2.$$

Замечание 2. Производная Шварца $\{f(z), z\}$ инвариантна относительно дробно-линейного преобразования функции f .

В силу замечания 2 видим, что $\{f^s, z\} = \{f^t, z\}$, где f^s и f^t – различные ветви продолженной функции $f(z)$, заданные в верхней или нижней полуплоскости. Таким образом, производная Шварца $\{f(z), z\}$ функции $f(z)$ является однозначной. Заметим, что $f'(z) \neq 0$, поэтому отображение $\{f(z), z\}$ голоморфно во всей плоскости за исключением точек $a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k, k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Особые точки функции $\{f(z), z\}$

Обозначим $\{f(z), z\} = F(z)$. Изучим поведение функции $F(z)$ в ее изолированных особых точках. Предположим сначала, что угол в вершине A_s^k образован дугами окружностей или дугой окружности и прямолинейным отрезком $A_{s-1}^k A_s^k, A_s^k A_{s+1}^k$ и имеет величину $\alpha_s \pi, \alpha_s \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Тогда, при достаточном продолжении сторон такого угла, они пересекутся еще в некоторой точке, обозначим ее A_s^{*k} .

Дробно-линейным отображением $\omega(w) = e^{i\gamma} \frac{w - A_s^k}{w - A_s^{*k}}$ переведем область

$U_\epsilon(A_s^k) \cap \Delta$, где $U_\epsilon(A_s^k)$ – некоторая окрестность точки A_s^k радиуса $\epsilon, \epsilon > 0$, в прямолинейный угол с вершиной в начале координат. Причем параметр γ выберем так, чтобы точки из окрестности $U_\epsilon(A_s^k) \cap \Delta$ переходили в точки

$$0 < \arg \omega < \pi \alpha_s \tag{1}$$

некоторой окрестности нуля.

Последующим преобразованием $\omega_1 = \omega^{\frac{1}{\alpha_s}}$ этот угол переводится на лежащую в верхней полуплоскости ω_1 -плоскости часть окрестности точки ноль. Функция $\omega_1(z) = \omega_1(\omega(f(z)))$ взаимно однозначно и конформно отображает часть верхней полуплоскости z -плоскости на часть верхней полуплоскости ω_1 -плоскости, причем участок вещественной оси в окрестности точки a_s^k переходит в участок вещественной оси в окрестности точки $\omega_1 = 0$. Функция $\omega_1(z)$ согласно принципу симметрии продолжается на полную окрестность точки a_s^k и, являясь голоморфной функцией, представляется рядом

$$\omega_1(z) = \gamma_1^{(s)}(z - a_s^k) + \gamma_2^{(s)}(z - a_s^k)^2 + \dots, \gamma_1^{(s)} \neq 0 \tag{2}$$

с ненулевым радиусом сходимости. В этом ряду отсутствует свободный член, так как $\omega_1(a_s^k) = 0$, однако $\gamma_1^{(s)} = \omega_1'(a_s^k) \neq 0$, так как функция осуществляет конформное отображение. Поскольку при вещественных z вблизи точки $z = a_s^k$ функция $\omega_1(z)$ вещественна, все коэффициенты $\gamma_i^{(s)}$ – вещественны.

Возвращаясь к функции $\omega(z) = (\omega_1(z))^{\alpha_s}$, находим, что в окрестности a_s^k функция $\omega(z)$ представима в виде

$$\omega(z) = (z - a_s^k)^{\alpha_s} [c_0^{(s)} + c_1^{(s)}(z - a_s^k) + \dots].$$

Отсюда можно получить разложение для функции $F(z)$ в окрестности точки a_s^k , если учесть, что в силу замечания 2 $\{f, z\} = \{\omega, z\}$. Тогда получим

$$\{f, z\} = \frac{1 - \alpha_s}{2(z - a_s^k)^2} + \frac{1}{z - a_s^k} (\mu_0^{(s)} + \mu_1^{(s)}(z - a_s^k) + \dots),$$

причем коэффициенты $\mu_i^{(s)}$ также вещественны. Выделим главную часть разложения производной Шварца в ряд Лорана по степеням $z - a_s^k$. Обозначив $\mu_0^{(s)} = M_s$, $\mu_1^{(s)} + \mu_2^{(s)}(z - a_s^k) + \dots = S_s(z)$, имеем

$$F(z) = \frac{1 - \alpha_s}{2(z - a_s^k)^2} + \frac{M_s}{z - a_s^k} + S_s(z), \quad (3)$$

где M_s – вещественный параметр, $S_s(z)$ – голоморфная функция в окрестности точки a_s^k .

Предположим теперь, что угол в вершине A_s^k образован прямолинейными отрезками и имеет величину $\alpha_s\pi$, $\alpha_s \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Тогда стороны угла при их продолжении пересекаются в бесконечно удаленной точке.

В этом случае с помощью линейного преобразования $\omega(w) = e^{i\gamma}(w - A_s^k)$ переведем окрестность $U_\varepsilon(A_s^k) \cap \Delta$ вершины в угловую область (1) и, таким образом, сведем данный случай к предыдущему.

Наконец, рассмотрим случай, когда угол в вершине A_s^k имеет величину $\alpha_s\pi$, где $\alpha_s = 0, 1, 2$, при этом прилегающие стороны могут быть дугами окружностей, дугой окружности и прямолинейным отрезком. Кроме того, если $\alpha_s = 2$, то угол может быть образован двумя прямолинейными отрезками.

В случае если угол имеет величину $\alpha_s = 0, 1, 2$, продолженные стороны такого угла имеют одну общую точку, т. е. они касаются в точке A_s^k .

С помощью дробно-линейной функции $\omega(w) = \frac{a}{w - a_s^k} + b$ переведем вершину A_s^k в бесконечно удаленную точку. При этом стороны, прилегающие к вершине, переходят в параллельные прямолинейные отрезки, пересекающиеся в бесконечно удаленной точке. Область $U_\varepsilon(A_s^k) \cap \Delta$ преобразуется теперь с помощью отображения $\omega(w)$ в прямолинейную полуполосу. Если выбрать a и b так, чтобы одна из сторон перешла в положительную вещественную полуось, а другую – в прямую $\omega = ic$, то функция $\omega_1(\omega)$, определяемая равенством

$$\omega_1^{\alpha_s} + \frac{c}{\pi} \ln \omega_1 = \omega,$$

отображает эту область в верхнюю полуплоскость ω_1 -плоскости в окрестности точки $\omega_1 = 0$. Как и выше, приходим к выводу, что $\omega_1(z) = \omega(f(z))$ голоморфна в окрестности точки a_s^k и разлагается в окрестности этой точки в ряд (2). Записывая с

помощью последнего равенства разложение для производной Шварца $F(z)$ функции $f(z)$, получаем опять формулу (3).

Уравнение для отображения с симметрией переноса

Рассмотрим функцию

$$g(z) = F(z) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^n \left[\frac{1 - \alpha_s^2}{2(z - a_s^k)^2} + \frac{M_s}{z - a_s^k} \right].$$

Здесь $-\infty < \dots < a_s^{-k} < a_{s+1}^{-k} < \dots < a_1^0 < \dots < a_n^0 < \dots < a_s^k < \dots < +\infty$ – прообразы вершин кругового счетноугольника Δ с симметрией переноса, а $\alpha_{1\pi}, \alpha_{2\pi}, \dots, \alpha_{n\pi}$ – углы в этих вершинах, $\alpha_s \in [0, 2]$. С учетом того, что $a_s^k = a_s^{k-1} + 2\pi$, функцию $g(z)$ запишем

$$g(z) = F(z) - \sum_{s=1}^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1 - \alpha_s^2}{2(z - a_s^0 + 2k\pi)^2} + \frac{M_s}{z - a_s^0 + 2k\pi} \right].$$

Перепишем слагаемое $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \alpha_s^2}{2(z - a_s^0 + 2k\pi)^2}$ следующим образом:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \alpha_s^2}{2(z - a_s^0 + 2k\pi)^2} = \frac{1 - \alpha_s^2}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^2 \pi^2 \left(\frac{\alpha_s^0 - z}{2\pi} - k \right)^2}.$$

Обозначим $\frac{a_s^0 - z}{2\pi} = x$ и учтем [2, с. 50], что

$$\operatorname{cosec}^2 \pi x = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{(x - k)^2},$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{1 - \alpha_s^2}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^2 \pi^2 \left(\frac{a_s^0 - z}{2\pi} - k \right)^2} &= \frac{1 - \alpha_s^2}{8\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - k)^2} = \\ &= \frac{1 - \alpha_s^2}{8} \operatorname{cosec}^2 \pi x = \frac{1 - \alpha_s^2}{8} \operatorname{cosec}^2 \frac{z - a_s^0}{2} = \frac{1 - \alpha_s^2}{8 \sin^2 \frac{z - a_s^0}{2}}. \end{aligned}$$

Перепишем слагаемое $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{M_s}{z - a_s^0 + 2k\pi}$ следующим образом:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{M_s}{z - a_s^0 + 2k\pi} = \frac{M_s}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{z - a_s^0}{2\pi} + k}.$$

Введем обозначение $\frac{z - a_s^0}{2\pi} = x$, тогда

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{z - a_s^0}{2\pi} + k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x + k} = \frac{x}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - k^2} + \frac{1}{2x\pi} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(x\pi) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{z - a_s^0}{2}\right).$$

Итак,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \alpha_s^2}{2(z - a_s^0 + 2k\pi)^2} = \frac{1 - \alpha_s^2}{8 \sin^2 \frac{z - a_s^0}{2}} \text{ и } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{M_s}{z - a_s^0 + 2k\pi} = \frac{M_s}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{z - a_s^0}{2}\right).$$

Таким образом, функция $g(z)$ является голоморфной в плоскости \mathbb{C} , следовательно, целой. Функция $f(z)$, однолистно и конформно отображающая верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на круговой счетноугольник Δ с симметрией переноса, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \left[\frac{1 - \alpha_s^2}{4 \sin^2 \frac{z - a_s^0}{2}} + M_s \operatorname{ctg} \frac{z - a_s^0}{2} \right] + g(z) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \frac{1 - \alpha_s^2 + 4M_s \cos \frac{z - a_s^0}{2} \sin \frac{z - a_s^0}{2}}{4 \sin^2 \frac{z - a_s^0}{2}} + g(z) = \frac{1}{8} \sum_{s=1}^n \frac{1 - \alpha_s^2 + 2M_s \sin(z - a_s^0)}{\sin^2 \frac{z - a_s^0}{2}} + g(z). \end{aligned}$$

Получаем:

Теорема 1. Функция $f(z)$, однолистно и конформно отображающая верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на круговой счетноугольник Δ с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π , удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{1}{8} \sum_{s=1}^n \frac{1 - (\alpha_s)^2 + 2M_s \sin(z - a_s^0)}{4 \sin^2 \frac{z - a_s^0}{2}} + g(z), \quad (4)$$

где a_s^0 , $s = 1, 2, \dots, n$, – прообразы вершин A_s^0 счетноугольника, принадлежащие промежутку $[0, 2\pi)$, $\alpha_s \pi$, $\alpha_s \in [0, 2]$, $s = 1, 2, \dots, n$, – углы при вершинах A_s^0 , M_s , $s = 1, 2, \dots, n$, – константы, $g(z)$ – целая функция.

Целая функция $g(z)$ и константы M_s , $s = 1, 2, \dots, n$, подлежат определению из условий конкретной задачи.

Пример. Рассмотрим круговой счетноугольник с симметрией переноса, вершины которого находятся в точках $A^k = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; углы при вершинах равны $\alpha\pi$.

В области определения функции $f(z)$, отображающей на заданный счетноугольник, промежутку $[0, 2\pi)$ принадлежит только один из прообразов вершин – a_0 . В качестве a_0 берем точку ноль.

Запишем уравнение (4) для данного случая:

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{1 - \alpha^2 + 2M \sin z}{8 \sin^2 \frac{z}{2}} + g(z),$$

где M – вычет производной Шварца функции $f(z)$, вычисленный в точке ноль.

Полагаем $g(z)=0$.

Представляя тригонометрические функции через показательные, запишем уравнение

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{(1 - \alpha^2)e^{iz} - iM(e^{iz} - 1)}{2(e^{2iz} - 2e^{iz} + 1)}. \quad (5)$$

Воспользуемся легко проверяемым равенством [3, с. 82]

$$\{f(z), z\} = -2\sqrt{f'(z)} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{\sqrt{f'(z)}} \right).$$

Уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{\sqrt{f'(z)}} \right) + \frac{1 - \alpha^2 + 2M \sin z}{16 \sin^2 \frac{z}{2}} \frac{1}{\sqrt{f'(z)}} = 0.$$

Полагаем $\frac{1}{\sqrt{f'(z)}} = t(z)$, тогда

$$t'' - \frac{(1 - \alpha^2)e^{iz} - iM(e^{iz} - 1)}{4(e^{2iz} - 2e^{iz} + 1)} t = 0. \quad (6)$$

Пусть t_1, t_2 – два линейно независимых решения уравнения (6). Согласно формуле Остроградского – Лиувилля, между t_1 и t_2 имеет место следующее соотношение: $t_1 t_2' - t_2 t_1' = const$. Поэтому, если положить $f = \frac{t_2}{t_1}$, то

$$\{f(z), z\} = -2\sqrt{f'(z)} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{\sqrt{f'(z)}} \right) = -\frac{t_1''}{t_1} = \frac{(1 - \alpha^2)e^{iz} - iM(e^{iz} - 1)}{2(e^{2iz} - 2e^{iz} + 1)}.$$

Следовательно, отношение двух линейно независимых интегралов уравнения (6) есть интеграл уравнения (5).

Выполнив замену $e^{iz}=u$ в уравнении (6), получаем уравнение класса Фукса [4]

$$t'' + \frac{1}{u} t' + \frac{-iMu^2 + (1 - \alpha^2 + iM)}{4u^2(u - 1)^2} t = 0. \quad (7)$$

Видим, что точки $u=0, u=1$ являются для уравнения (7) особыми точками.

Проверим, является ли точка ∞ особой для уравнения (7). Сделав замену $u = \frac{1}{\zeta}$,

имеем

$$t'' + \frac{1}{\zeta} t' + \frac{1}{\zeta} \frac{(1 - \alpha^2)\zeta - iM(1 - \zeta^2)}{4(1 - \zeta^2)} t = 0. \quad (8)$$

Для получившегося уравнения (8) точка $\zeta=0$ – особая точка, следовательно, для уравнения (7) точка $u=\infty$ является особой точкой. Итак, в уравнении (7) три особых точки: $\xi_1=0$, $\xi_2=1$, $\xi_3=\infty$.

Введем обозначения для коэффициентов уравнения (7):

$$p(u) = \frac{1}{u}, \quad q(u) = \frac{-iMu^2 + (1-\alpha^2) + iM}{4u^2(u-1)^2}.$$

Запишем разложение функций $(u-\xi_k)^2 p(u)$, $(u-\xi_k)^2 q(u)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $u=\xi_k$, $k=1,2$. При $k=1$ имеем разложение

$$u^2 p(u) = u,$$

$$u^2 q(u) = \frac{iM}{4} + \left(\frac{1-\alpha^2}{4} + \frac{iM}{2} \right) u + \dots$$

При $k=2$ – разложение

$$(u-1)^2 p(u) = 0(u-1) + (u-1)^2 + \dots,$$

$$(u-1)^2 q(u) = \frac{1-\alpha^2}{4} - \left(\frac{1-\alpha^2}{4} + \frac{iM}{2} \right) (u-1) + \dots$$

Уравнение (7) можно записать с учетом приведенных для $k=1,2$ разложений в виде

$$(u-\xi_k)^2 t'' + [A_k(u-\xi_k) + A'_k(u-\xi_k)^2 + \dots] t' + [B'_k + B''_k(u-\xi_k) + B'''_k(u-\xi_k)^2 + \dots] t = 0. \quad (9)$$

Будем искать решение уравнения в окрестности точки ξ_k , $k=1,2$, как

$$t = (u-\xi_k)^{p^{(k)}} \left(\gamma_1^{(k)} + \gamma_2^{(k)}(u-\xi_k) + \dots \right). \quad (10)$$

Чтобы найти показатель $p^{(k)}$, подставим решение (10) в окрестностях точек $u = \xi_k$, $k = 1, 2$, в уравнение (9) при соответствующих k :

$$(u-\xi_k)^{p^{(k)}} \left[\gamma_1^{(k)} p^{(k)} (p^{(k)} - 1) + \gamma_2^{(k)} (p^{(k)} + 1) p^{(k)} (u-\xi_k) + \dots \right] +$$

$$+ (u-\xi_k)^{p^{(k)}} (A_k - A'_k(u-\xi_k) + \dots) \left[\gamma_1^{(k)} p^{(k)} + \gamma_2^{(k)} (p^{(k)} + 1) (u-\xi_k) + \dots \right] +$$

$$+ (u-\xi_k)^{p^{(k)}} (B'_k + B''_k(u-\xi_k) + B'''_k(u-\xi_k)^2 + \dots) \left[\gamma_1^{(k)} + \gamma_2^{(k)}(u-\xi_k) + \dots \right] = 0.$$

Суммируя коэффициенты при $(u-\xi_k)^{p^{(k)}}$, получаем определяющие уравнения для показателей $p^{(k)}$, $k=1,2$:

$$p^{(k)}(p^{(k)} - 1) + A_k p^{(k)} + B'_k = 0.$$

Откуда, обозначая корни этих уравнений через $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$, получаем

$$p_1^{(1)} = \frac{i}{2} \sqrt{iM}, \quad p_2^{(1)} = -\frac{i}{2} \sqrt{iM},$$

$$p_1^{(2)} = \frac{1+\alpha}{2}, \quad p_2^{(2)} = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Особым точкам уравнения ξ_k соответствуют по два параметра $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$. Найдем параметры, соответствующие точке $\xi_3 = \infty$. Разложим коэффициенты уравне-

ния (8), домноженные на ζ в ряд Тейлора в окрестности точки $\zeta = 0$. Запишем уравнение (8) с учетом этих разложений

$$\zeta t'' + t' + \left(-\frac{iM}{4} + \frac{1-\alpha^2}{4} \zeta + \dots \right) t = 0. \quad (11)$$

Подставим в уравнение (11) разложение для t вида

$$t = \zeta^{p^{(\infty)}} [\gamma_1^{(\infty)} + \gamma_2^{(\infty)} \zeta + \dots].$$

Получим для показателя $p^{(\infty)}$ определяющее уравнение

$$(p^{(\infty)})^2 = \frac{iM}{4}.$$

Откуда, обозначив корни уравнения через $p_1^{(\infty)}$, $p_2^{(\infty)}$, имеем

$$p_1^{(\infty)} = \frac{i}{2} \sqrt{iM}, \quad p_2^{(\infty)} = -\frac{i}{2} \sqrt{iM}.$$

Интегралы уравнения (7) вполне определяются положением особых точек ξ_i и параметрами $p_i^{(k)}$, $i=1,2,3$, $k=1,2$. Запишем интегралы уравнения (7) по схеме Р-функций Римана [4, с. 229]:

$$t = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ \frac{i}{2} \sqrt{iM} & \frac{1+\alpha}{2} & \frac{1}{2} \sqrt{iM} \\ -\frac{i}{2} \sqrt{iM} & \frac{1-\alpha}{2} & -\frac{1}{2} \sqrt{iM} \end{matrix} \right. u \left. \right\}.$$

Сделаем подстановку $\omega = u^{\frac{i}{2} \sqrt{iM}} (u-1)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ t , по свойству Р-функции Римана находим

$$\omega = u^{\frac{i}{2} \sqrt{iM}} (u-1)^{\frac{1+\alpha}{2}} P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (\sqrt{iM} (1+i) + 1 + \alpha) \\ -i \sqrt{iM} & -\alpha & \frac{1}{2} (\sqrt{iM} (-1+i) + 1 + \alpha) \end{matrix} \right. u \left. \right\}.$$

Уравнение при этом примет вид

$$\omega'' + \left(\frac{1+i\sqrt{iM}}{u} + \frac{1+\alpha}{u-1} \right) \omega' + \frac{(1+\alpha)^2 + 2i(1+\alpha)\sqrt{iM} - 2iM}{4u(u-1)} \omega = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{2} (\sqrt{iM} (1+i) + 1 + \alpha) = \delta,$$

$$\frac{1}{2} (\sqrt{iM} (-1+i) + 1 + \alpha) = \beta,$$

$$1 + i\sqrt{iM} = \gamma.$$

Тогда уравнение переписывается

$$u(u-1)\omega'' + (\gamma - (\delta + \beta + 1)u)\omega' - \delta\beta\omega = 0. \quad (12)$$

Это есть известное уравнение Гаусса. Найдем интеграл этого уравнения, голоморфный в окрестности особой точки $\xi_1=0$. Положим

$$\omega = c_0 + c_1u + c_2u^2 + \dots + c_nu^n + \dots \quad (13)$$

Подставляя ряд (13) в уравнение (12) и суммируя коэффициенты при u^n , получим

$$\sum_{s=0}^{\infty} [(n+1)nc_{n+1} - n(n-1)c_n + nc_{n+1}\gamma - (n+1)c_n(\delta + \beta + 1) - \delta\beta c_n]u^n = 0.$$

Откуда следует, что

$$c_{n+1}(n+1)(n+\gamma) = c_n(n^2 + (\delta + \beta)n + \delta\beta) = 0,$$

или

$$c_{n+1} = \frac{(n+\delta)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)}c_n. \quad (14)$$

Рекуррентная формула (14) позволяет по c_0 последовательно найти все коэффициенты. Полагая $c_0=1$, получим

$$c_1 = \frac{\delta\beta}{1 \cdot \gamma}, \quad c_2 = \frac{\delta(\delta+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)}, \dots$$

Подставляя найденные значения в ряд (13), будем иметь интеграл уравнения Гаусса в виде гипергеометрической функции $\omega=Q(\delta, \beta, \gamma, u)$ [5, с. 634], представленной гипергеометрическим рядом, который сходится при $\gamma \notin \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$.

Сделав подстановку $\omega=u^{1-\gamma}\omega_1$ в уравнении (12), получим уравнение, которое можно записать в виде уравнения Гаусса, если положить $\delta-\gamma+1=\delta'$, $\beta-\gamma+1=\beta'$, $2-\gamma=\gamma'$; следовательно, ему удовлетворяет ряд $\omega_1=Q(\delta', \beta', \gamma', u)$. Для уравнения (12) получим второй интеграл $\omega=u^{1-\gamma}Q(\beta-\gamma+1, \delta-\gamma+1, 2-\gamma, u)$, линейно независимый с $Q(\delta, \beta, \gamma, u)$ при $0 < \gamma < 1$ и сходящийся при $\gamma - 2 \notin \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$. Таким образом, для уравнения (12) имеем два линейно независимых интеграла:

$$Q\left(\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha), \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(-1+i)+1+\alpha), 1+i\sqrt{iM}, u\right),$$

$$u^{-i\sqrt{iM}}Q\left(\frac{1}{2}(-\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha), \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1-i)+1+\alpha), 1-i\sqrt{iM}, u\right).$$

Возвращаясь к z , $f(z)$, заключаем, что одним из интегралов уравнения (7) будет функция

$$f(z) = e^{z\sqrt{iM}} \frac{Q\left(\frac{1}{2}(-\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha), \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1-i)+1+\alpha), 1-i\sqrt{iM}, e^{iz}\right)}{Q\left(\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha), \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(-1+i)+1+\alpha), 1+i\sqrt{iM}, e^{iz}\right)}.$$

Выразив гипергеометрические ряды через определенные интегралы [4], получим следующий результат.

Теорема 2. Функция $f(z)$, однолистно и конформно отображающая верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$ на круговой счетноугольник Δ с симметрией

переноса вдоль вещественной оси на 2π , вершины которого находятся в точках $A^k=2k\pi$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$, причем $f(0)=A^0$, имеет вид

$$f(z) = A e^{z\sqrt{iM}} \frac{\int_a^h v^B (1-v)^C (1-e^{iz}v)^D dv}{\int_a^{\bar{b}} v^{\bar{B}} (1-v)^D (1-e^{iz}v)^C dv},$$

где a, b, g, h – зависят от значений параметров M, α . Константы A, B, C, D определяются формулами

$$A = \frac{\Gamma(1-i\sqrt{iM})\Gamma\left(\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(-1+i)+1+\alpha)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)+1-\alpha)\right)}{\Gamma(1+i\sqrt{iM})\Gamma\left(\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1-i)+1+\alpha)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(-\sqrt{iM}(1+i)+1-\alpha)\right)},$$

$$B = \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1-i)-1+\alpha), \quad C = -\frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)+1+\alpha), \quad D = \frac{1}{2}(\sqrt{iM}(1+i)-1-\alpha),$$

M – константа, α , $\alpha \in [0, 2]$ – углы при вершинах A^k , $k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. Томск: ТГУ, 2002.
2. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. 4-е изд., перераб. М.: ГИФМЛ, 1963.
3. Голузин Г.М. Геометрическая теория функции комплексного переменного. 2-е изд. / под ред. В.И. Смирновой. М.: Наука. Физматлит, 1966.
4. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 2-е изд. М.: ГИТТЛ, 1950.
5. Лаврентьев М.А. Теория функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Физматлит, 1973.

Статья поступила 08.01.2013 г.

Kolesnikov I.A. A MAPPING TO A ROUND NUMERABLE POLYGON WITH THE SYMMETRY OF TRANSFER. An analytical representation for a mapping holomorphic in the upper half-plane with symmetry of transfer along the real axis is obtained in the form of a differential equation. One particular case is represented in the integral form.

Keywords: numerable polygon, symmetry of transfer, linear differential equations of the Fuchs class, conformal mappings.

KOLESNIKOV Ivan Aleksandrovich (Tomsk State University)

E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

УДК 517.54

В.А. Пчелинцев

ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ НА КЛАССЕ ПАР ФУНКЦИЙ

В статье методом внутренних вариаций решена задача о множестве Δ значений функционала Φ на классе пар функций однолистных в системе круг – внешность круга. Получена система функционально-дифференциальных уравнений для пар функций $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}'$, которым соответствуют неособые граничные точки Φ_0 множества Δ . Каждое уравнение из системы содержит параметр, являющийся корнем алгебраического уравнения шестой степени.

Ключевые слова: класс \mathfrak{M}' , функционал, множество значений, граничные функции, дифференциальные уравнения.

Большое внимание в геометрической теории однолистных функций уделяется различным экстремальным задачам, в которых речь идёт об экстремумах и множествах значений функционалов, характеризующих свойства конформных отображений. Возникновение данного направления геометрической теории функций комплексной переменной связано с работами П. Кёбе, К. Каратеодори, Л. Бибербаха, К. Лёвнера 10-х, 20-х годов прошлого столетия. В дальнейшем тематика такого рода задач получила развитие в работах как отечественных, так и зарубежных авторов (см., например, [1–3, 5–7, 9]). В настоящей работе ищется множество значений функционала $\Phi = \ln f'(z_1)/F'(\zeta_1)$.

Пусть D и D^* – односвязные области в w -плоскости и такие, что $0 \in D$, а $\infty \in D^*$. Пусть функция f принадлежит классу S , т.е. $f : U \rightarrow D$ – голоморфная однолистная функция, имеющая разложение в ряд

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots,$$

а функция F принадлежит классу Σ , т.е. $F : U^* \rightarrow D^*$ – мероморфная однолистная функция, имеющая разложение в ряд

$$F(\zeta) = \zeta + d_0 + \frac{d_{-1}}{\zeta} + \dots + \frac{d_{-n}}{\zeta^n} + \dots,$$

где $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $U^* = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$. Семейство пар функций $(f(z), F(\zeta))$ такого вида назовём классом \mathfrak{M}' .

Целью данной работы является нахождение множества Δ значений функционала

$$\Phi = \ln \frac{f'(z_1)}{F'(\zeta_1)} = \int_0^{z_1} \frac{f''(z)}{f'(z)} dz - \int_{\zeta_1}^{\infty} \frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} d\zeta \tag{1}$$

при фиксированных $z_1 \in U$ и $\zeta_1 \in U^*$ на классе \mathfrak{M}' (т.е. множество всех тех значений функционала Φ , которые он принимает, когда пара функций $(f(z), F(\zeta))$ пробегает весь класс \mathfrak{M}').

Для решения поставленной задачи применяется вариационный метод Голузина [5].

Пусть $G \subset \overline{C}$ – область и \mathcal{K} – некоторое подмножество множества голоморфных или мероморфных в G функций. Говорят, что в классе \mathcal{K} имеет место вариационная формула

$$g(z, \varepsilon) = g(z) + \varepsilon R(z) + o(z, \varepsilon), \quad (2)$$

если для каждой функции $g(z) \in \mathcal{K}$ и любого достаточно малого ε , $\varepsilon > 0$, функция $g(z, \varepsilon) \in \mathcal{K}$, причём $R(z)$ голоморфная в G функция и $o(z, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри G .

Пусть пара функций $(f(z), F(\zeta))$ принадлежит классу \mathfrak{M}' . Тогда известно [2], [см. также 3, 5, 6, 9], что при ε положительном достаточно малом классу \mathfrak{M}' также принадлежат следующие пары варьированных функций:

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= f(z) + \varepsilon A_0 \frac{f^2(z)}{f(z) - w_0}, \\ F(\zeta, \varepsilon) &= F(\zeta) + \varepsilon A_0 \frac{w_0^* F(\zeta)}{F(\zeta) - w_0^*} + o(\zeta, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3)$$

где w_0 и w_0^* – внешние точки соответственно для областей D и D^* , A_0 – произвольная комплексная постоянная;

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= f(z) + \varepsilon \left[z f'(z) \frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}} + f(z) \right] + o(z, \varepsilon), \\ F(\zeta, \varepsilon) &= F(\zeta) - \varepsilon \left[\zeta F'(\zeta) \frac{1 + e^{i\theta} \zeta}{1 - e^{i\theta} \zeta} + F(\zeta) \right] + o(\zeta, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4)$$

где θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, – произвольная постоянная;

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= f(z) + \varepsilon \left(A_0 \frac{f^2(z)}{f(z) - f(z_0)} - \frac{A_0}{2} \left[z f'(z) \frac{z + z_0}{z - z_0} + f(z) \right] \left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\overline{A_0}}{2} \left[z f'(z) \frac{\overline{z_0} z + 1}{\overline{z_0} z - 1} + f(z) \right] \left[\frac{\overline{f(z_0)}}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 \right) + o(z, \varepsilon), \\ F(\zeta, \varepsilon) &= F(\zeta) + \varepsilon \left(A_0 \frac{F(\zeta_0) F(\zeta)}{F(\zeta) - F(\zeta_0)} + \frac{A_0}{2} \left[\zeta F'(\zeta) \frac{\zeta_0 + \zeta}{\zeta_0 - \zeta} + F(\zeta) \right] \left[\frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0 F'(\zeta_0)} \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\overline{A_0}}{2} \left[\zeta F'(\zeta) \frac{1 + \overline{\zeta_0} \zeta}{1 - \overline{\zeta_0} \zeta} + F(\zeta) \right] \left[\frac{\overline{F(\zeta_0)}}{\zeta_0 F'(\zeta_0)} \right]^2 \right) + o(\zeta, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5)$$

где $z_0 \in U$, $\zeta_0 \in U^*$, A_0 – произвольная комплексная постоянная.

Отметим, что множество Δ значений функционала (1) не зависит от $\arg z_1$ и $\arg \zeta_1$. Для того чтобы это показать, введём функции $f_1(z) = e^{-i\varphi} f(e^{i\varphi} z) \in S$ и $F_1(\zeta) = e^{-i\psi} F(e^{i\psi} \zeta) \in \Sigma$, где $\varphi = \arg z_1$, а $\psi = \arg \zeta_1$. Тогда $f(z) = e^{i\varphi} f_1(e^{-i\varphi} z) \in S$ и $F(\zeta) = e^{i\psi} F_1(e^{-i\psi} \zeta) \in \Sigma$, а

$$\Phi = \ln \frac{f'(z_1)}{F'(\zeta_1)} = \ln \frac{f_1'(e^{-i\varphi} z_1)}{F_1'(e^{-i\psi} \zeta_1)} = \ln \frac{f_1'(|z_1|)}{F_1'(|\zeta_1|)}.$$

Отсюда и следует независимость множества Δ от аргументов точек z_1 и ζ_1 . Поэтому будем считать в дальнейшем $|z_1| = r \in (0, 1)$, $|\zeta_1| = \rho \in (1, +\infty)$.

Поскольку рассматриваемый функционал непрерывен [2], а класс \mathfrak{M}' – компактен в себе и связан [1–3], то множество Δ – замкнуто и связно [1]. Следовательно, чтобы отыскать множество Δ , достаточно найти его границу.

Пусть Γ – граница множества Δ . Точку $\Phi_0 \in \Gamma$ назовём неособой точкой Γ , если существует такая точка $a \notin \Delta$, что для любых $\Phi \in \Delta$ величина $|\Phi - a|$ достигает наименьшего значения в классе \mathfrak{M}' при $\Phi = \Phi_0$ [7]. Множество неособых точек Γ оказывается всюду плотным на Γ [7], следовательно, наша задача сводится к разысканию наименьшего значения выражения

$$|\Phi - a| = \left| \ln \frac{f'(r)}{F'(\rho)} - a \right|$$

в классе \mathfrak{M}' при всевозможных $a \notin \Delta$.

Итак, ищется пара функций $(f(z), F(\zeta))$, доставляющая величине $|\Phi - a|$, $a \notin \Delta$, наименьшее значение в классе \mathfrak{M}' . Такая пара функций называется граничной.

Записывая вариационные формулы для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$ на классе \mathfrak{M}' в виде

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon P(z) + o(z, \varepsilon),$$

$$F(\zeta, \varepsilon) = F(\zeta) + \varepsilon Q(\zeta) + o(\zeta, \varepsilon)$$

при ε положительном и достаточно малом, укажем функциональные производные для выражения $|\Phi - a|$. В силу неравенств

$$|\Phi(f^*, F) - a|^2 \geq |\Phi(f, F) - a|^2,$$

$$|\Phi(f, F^*) - a|^2 \geq |\Phi(f, F) - a|^2,$$

имеем
$$\left| \ln \frac{f'(r)}{F'(\rho)} + \ln \left(1 + \varepsilon \frac{P'(r)}{f'(r)} \right) + o(\varepsilon) - a \right|^2 \geq \left| \ln \frac{f'(r)}{F'(\rho)} - a \right|^2,$$

$$\left| \ln \frac{f'(r)}{F'(\rho)} - (1 - \lambda) \ln \left(1 + \varepsilon \frac{Q'(\rho)}{F'(\rho)} \right) + o(\varepsilon) - a \right|^2 \geq \left| \ln \frac{f'(r)}{F'(\rho)} - a \right|^2.$$

Разложив слагаемые в левых частях последних неравенств по степеням ε , получим необходимые условия для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$:

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha} \frac{P'(r)}{f'(r)} \right] \geq 0 \tag{6}$$

и

$$\operatorname{Re} \left[-e^{-i\alpha} \frac{Q'(\rho)}{F'(\rho)} \right] \geq 0, \tag{7}$$

где $\alpha = \arg(\Phi - a)$, $f^* = f(z, \varepsilon)$, $F^* = F(\zeta, \varepsilon)$.

Лемма 1. Пусть $f(z)$, $F(\zeta)$ – граничные функции функционала (1). Тогда области D и D^* не имеют внешних точек.

Доказательство. Допустим, что w_0 есть внешняя точка для области D . Рассмотрим условие (6), выбрав первую варьируемую функцию из (3) в качестве функции сравнения. Оно примет вид

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha} A_0 \frac{f(r)(f(r) - 2w_0)}{(f(r) - w_0)^2} \right] \geq 0.$$

Так как выражение, стоящее в скобках, не обращается в нуль при данном w_0 , то ввиду произвольности $\arg A_0$, вещественная часть этого выражения может быть сделана отрицательной. Но это противоречит тому условию, что величина $|\Phi - a|$ для функции $f(z)$ принимает наименьшее значение. Следовательно, область D не имеет внешних точек. Подобным образом доказывается, что область D^* не имеет внешних точек. Нужно только рассмотреть неравенство (7) и выбрать вторую варьируемую функцию из (3) в качестве функции сравнения. Лемма доказана. ◀

1. Вывод дифференциальных уравнений для граничных функций

Используя в совокупности условие (6) с первой вариационной формулой из (5), а условие (7) со второй вариационной формулой из (5), получим систему дифференциальных уравнений для граничных функций множества Δ , соответствующих неособым точкам. Уравнения этой системы зависят от параметра $\alpha = \arg(\Phi - a)$.

Теорема 1. Каждая граничная пара функций $(f(z), F(\zeta))$ функционала (1) удовлетворяет в U и U^* системе функционально-дифференциальных уравнений

$$e^{-i\alpha} \frac{f(r)(f(r) - 2f(z)) \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2}{(f(z) - f(r))^2} = \frac{S(z)}{(z-r)^2 \left(z - \frac{1}{r} \right)^2}; \tag{8}$$

$$e^{-i\alpha} \frac{F^2(\zeta)}{(F(\zeta) - F(\rho))^2} \left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)} \right)^2 = \frac{T(\zeta)}{(\zeta - \rho)^2 \left(\zeta - \frac{1}{\rho} \right)^2}, \tag{9}$$

где $S(z) = Az^4 + Bz^3 + (C + \bar{C})z^2 + \bar{B}z + \bar{A}$,

$$A = \frac{1}{2} \left(e^{i\alpha} [\overline{H} + 1] - e^{-i\alpha} [H - 1] \right), \quad B = e^{-i\alpha} \left([H - 1] \frac{1}{r} - 2r \right) + e^{i\alpha} \left([\overline{H} + 1] r + \frac{4}{r} \right),$$

$$C = \frac{e^{-i\alpha}}{2r^2} \left([H + 1] r^4 - [H - 1] + 8r^2 \right), \quad H = H(r) = 1 + \frac{rf''(r)}{f'(r)},$$

$$T(\zeta) = A^* \zeta^4 + B^* \zeta^3 + (C^* + \overline{C^*}) \zeta^2 + \overline{B^*} \zeta + \overline{A^*},$$

$$A^* = \frac{1}{2} \left(e^{-i\alpha} [H^* + 1] - e^{i\alpha} [\overline{H^*} - 1] \right), \quad B^* = e^{i\alpha} [\overline{H^*} - 1] \rho - e^{-i\alpha} [H^* + 1] \frac{1}{\rho},$$

$$C^* = \frac{e^{-i\alpha}}{2\rho^2} \left([H^* + 1] - [H^* - 1] \rho^4 \right), \quad H^* = H^*(\rho) = 1 + \frac{\rho F''(\rho)}{F'(\rho)}.$$

Причём правые части уравнений (8) и (9) на единичной окружности $|z| = |\zeta| = 1$ неотрицательны.

Доказательство. Неравенство (6) в случае выбора первой вариационной формулы из (5) примет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(e^{-i\alpha} A_0 \frac{f(r)(f(r) - 2f(z_0))}{(f(r) - f(z_0))^2} - \frac{e^{-i\alpha} A_0}{2} \left[H \frac{r + z_0}{r - z_0} - \frac{2rz_0}{(r - z_0)^2} + 1 \right] \left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 - \right. \\ \left. - \frac{e^{-i\alpha} \overline{A_0}}{2} \left[H \frac{r \overline{z_0} + 1}{r \overline{z_0} - 1} - \frac{2r \overline{z_0}}{(r \overline{z_0} - 1)^2} + 1 \right] \left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Заменяя последнее слагаемое под знаком вещественной части на его сопряженное значение, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_0 \left(e^{-i\alpha} \frac{f(r)(f(r) - 2f(z_0))}{(f(r) - f(z_0))^2} - \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left[H \frac{r + z_0}{r - z_0} - \frac{2rz_0}{(r - z_0)^2} + 1 \right] \left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 - \right. \\ \left. - \frac{e^{i\alpha}}{2} \left[\overline{H} \frac{r z_0 + 1}{r z_0 - 1} - \frac{2r z_0}{(r z_0 - 1)^2} + 1 \right] \left[\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)} \right]^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности $\arg A_0$, заключаем, что стоящая здесь под знаком вещественной части величина, за выделением множителя A_0 , должна быть равна нулю. Так как в этом соотношении z_0 – любая точка из круга U , то заменив z_0 на z , получаем для граничной функции $f(z)$ дифференциальное уравнение

$$e^{-i\alpha} \frac{f(r)(f(r) - 2f(z))}{(f(z) - f(r))^2} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 = \frac{S(z)}{(z - r)^2 \left(z - \frac{1}{r} \right)^2}.$$

Записав теперь неравенство (6) совместно с первой вариационной формулой из (4), приходим к неравенству

$$\operatorname{Re} \left(e^{-i\alpha} \left[H \frac{r + e^{i\theta}}{r - e^{i\theta}} - \frac{2re^{i\theta}}{(r - e^{i\theta})^2} + 1 \right] \right) \geq 0$$

$$\text{или } e^{-i\alpha} \left[H \frac{r + e^{i\theta}}{r - e^{i\theta}} - \frac{2re^{i\theta}}{(r - e^{i\theta})^2} + 1 \right] + e^{i\alpha} \left[\overline{H} \frac{re^{i\theta} + 1}{re^{i\theta} - 1} - \frac{2re^{i\theta}}{(re^{i\theta} - 1)^2} + 1 \right] \geq 0,$$

из которого следует неотрицательность правой части уравнения (8) на единичной окружности $|z|=1$.

Аналогично получаем дифференциальное уравнение (9), только надо рассмотреть неравенство (7) совместно со вторыми вариационными формулами из (5) и (4). Теорема доказана. ◀

На основании аналитической теории дифференциальных уравнений [4, 8] заключаем, что граничные функции $f(z)$ и $F(\zeta)$ являются голоморфными не только в U и U^* , но и на единичной окружности $|z|=|\zeta|=1$ за исключением конечного числа алгебраических особых точек. Вспомним, что области D и D^* не имеют внешних точек. Следовательно, границы областей D и D^* состоят из конечного числа аналитических дуг.

Введем следующие обозначения:

\mathbf{M}_1 – множество конечных концевых точек $f(\mu)$, $|\mu|=1$, границы области D .

\mathbf{M}_2 – множество конечных концевых точек $F(\eta)$, $|\eta|=1$, границы области D^* .

Предположим, что $f(\mu) \in \mathbf{M}_1$, а $F(\eta) \in \mathbf{M}_2$. Тогда существуют окрестности $K(\mu)$ и $K(\eta)$ соответственно точек μ и η , такие, что на множествах $U \cap K(\mu)$ и $U^* \cap K(\eta)$ граничные функции и их производные могут быть представлены в виде

$$f(z) = f(\mu) + (z - \mu)^2 [a_0(\mu) + a_1(\mu)(z - \mu) + \dots], \quad a_0(\mu) \neq 0,$$

$$f'(z) = (z - \mu) [a'_0(\mu) + a'_1(\mu)(z - \mu) + \dots], \quad a'_0(\mu) \neq 0 \quad (10)$$

и $F(\zeta) = F(\eta) + (\zeta - \eta)^2 [b_0(\eta) + b_1(\eta)(\zeta - \eta) + \dots], \quad b_0(\eta) \neq 0,$

$$F'(\zeta) = (\zeta - \eta) [b'_0(\eta) + b'_1(\eta)(\zeta - \eta) + \dots], \quad b'_0(\eta) \neq 0. \quad (11)$$

Используя разложения (10) и (11), отметим, что если $f(\mu) \in \mathbf{M}_1$, а $F(\eta) \in \mathbf{M}_2$, то левые части уравнений (8) и (9) имеют в точках $z = \mu$ и $\zeta = \eta$ нули не ниже второго порядка. Следовательно, правые части уравнений в этом случае содержат множители $(z - \mu)$ и $(\zeta - \eta)$ по меньшей мере во второй степени, в то время как $S(z)$ и $T(\zeta)$ являются многочленами четвертой степени. Таким образом, граница области D и граница области D^* могут иметь не более двух конечных концевых точек.

Рассмотрим вещественные функции

$$I(\varphi) = \frac{S(e^{i\varphi})}{(e^{i\varphi} - r)^2 \left(e^{i\varphi} - \frac{1}{r} \right)^2}, \quad J(\psi) = \frac{T(e^{i\psi})}{(e^{i\psi} - \rho)^2 \left(e^{i\psi} - \frac{1}{\rho} \right)^2},$$

где $\varphi, \psi, 0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$, – произвольные постоянные. Они неотрицательны по теореме 1 и достигают своих минимумов соответственно, когда $S(e^{i\varphi}) = 0$ и $T(e^{i\psi}) = 0$. Следовательно, их производные обращаются в нули соответственно в

нулях многочленов $S(z)$ и $T(\zeta)$, по модулю равных единице. Таким образом, эти многочлены не могут иметь простых нулей, по модулю равных единице. Но поскольку $S(z)$ и $T(\zeta)$, как было отмечено, обязательно содержат множители соответственно $(z-\mu)^2$ и $(\zeta-\eta)^2$, то они на окружности $|z|=|\zeta|=1$ не могут иметь нулей нечётной кратности. Согласно вышесказанному, уравнения (8) и (9) перепишем как

$$e^{-i\alpha} \frac{f(r)(f(r)-2f(z)) \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2}{(f(z)-f(r))^2} = \frac{(1-\bar{\mu}z)^2 (A\mu^2 z^2 - E\mu z + \bar{A})}{(z-r)^2 \left(z - \frac{1}{r} \right)^2} \quad (12)$$

и

$$e^{-i\alpha} \frac{F^2(\zeta)}{(F(\zeta)-F(\rho))^2} \left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)} \right)^2 = \frac{(\zeta-\eta)^2 (A^* \zeta^2 - E^* \bar{\eta} \zeta + \overline{A^* \eta^2})}{(\zeta-\rho)^2 \left(\zeta - \frac{1}{\rho} \right)^2}, \quad (13)$$

где E, E^* – вещественные числа.

Отметим, что E и E^* должны быть такими, чтобы правые части уравнений (12) и (13) на окружности $|z|=|\zeta|=1$ были неотрицательными.

Устремляя в уравнении (12) z к нулю, а в уравнении (13) ζ к бесконечности, получаем $\bar{A} = A^* = e^{-i\alpha}$.

Таким образом, уравнения примут вид

$$e^{-i\alpha} \frac{f(r)(f(r)-2f(z)) \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2}{(f(z)-f(r))^2} = \frac{(1-\bar{\mu}z)^2 (e^{i\alpha} \mu^2 z^2 - E\mu z + e^{-i\alpha})}{(z-r)^2 \left(z - \frac{1}{r} \right)^2}; \quad (14)$$

$$e^{-i\alpha} \frac{F^2(\zeta)}{(F(\zeta)-F(\rho))^2} \left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)} \right)^2 = \frac{(\zeta-\eta)^2 (e^{-i\alpha} \zeta^2 - E^* \bar{\eta} \zeta + e^{i\alpha} \eta^2)}{(\zeta-\rho)^2 \left(\zeta - \frac{1}{\rho} \right)^2}. \quad (15)$$

Умножая обе части равенства (14) на $(z-r)^2$, а обе части равенства (15) на $(\zeta-\rho)^2$ и устремляя соответственно z к r , а ζ к ρ , в пределах получим

$$Er = \mu e^{i\alpha} + \bar{\mu} e^{-i\alpha} r^2 + \mu e^{i\alpha} \frac{(1-r^2)^2}{(1-\mu r)^2} \quad (16)$$

и

$$E^* \rho = \eta e^{-i\alpha} + \bar{\eta} e^{i\alpha} \rho^2 - \bar{\eta} e^{i\alpha} \frac{(\rho^2-1)^2}{(\rho-\bar{\eta})^2} \quad (17)$$

Учитывая, что $\text{Im}(Er) = 0$ и $\text{Im}(E^* \rho) = 0$, имеем

$$\text{Im} \left(\mu e^{i\alpha} + \mu e^{i\alpha} \frac{1-r^2}{(1-\mu r)^2} \right) = 0 \quad (18)$$

и
$$\operatorname{Im} \left(\frac{e^{-i\alpha}}{\bar{\eta}} - \bar{\eta} e^{i\alpha} \frac{\rho^2 - 1}{(\rho - \bar{\eta})^2} \right) = 0. \quad (19)$$

Из равенств (18) и (19) получаем следующие уравнения шестой степени относительно μ и $\bar{\eta}$.

Уравнение относительно μ :

$$c_1 \mu^6 + c_2 \mu^5 + c_3 \mu^4 + (c_4 - \bar{c}_4) \mu^3 - \bar{c}_3 \mu^2 - \bar{c}_2 \mu - \bar{c}_1 = 0, \quad (20)$$

где

$$c_1 = e^{i\alpha} r^2, \quad c_2 = -2e^{i\alpha} r(1+r^2), \\ c_3 = e^{i\alpha} r^2(4+r^2) + (2-r^2)(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} r^2), \quad c_4 = -4e^{i\alpha} r.$$

Уравнение относительно $\bar{\eta}$:

$$c_1^* \bar{\eta}^{-6} + c_2^* \bar{\eta}^{-5} + c_3^* \bar{\eta}^{-4} + (c_4^* - \bar{c}_4^*) \bar{\eta}^{-3} - \bar{c}_3^* \bar{\eta}^{-2} - \bar{c}_2^* \bar{\eta} - \bar{c}_1^* = 0, \quad (21)$$

где

$$c_1^* = -e^{i\alpha} \rho^2, \quad c_2^* = 2e^{i\alpha} \rho(\rho^2 + 1), \\ c_3^* = (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}(\rho^2 - 1))(\rho^2 - 1) - e^{i\alpha} \rho^2(\rho^2 + 4), \\ c_4^* = 2\rho(\rho^2 - 1)(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}).$$

Подлежат рассмотрению только те корни этих уравнений, по модулю равные единице, которые при подстановке соответственно в формулу (16) и в формулу (17) дают E и E^* такие, что правые части уравнений (12) и (13) на окружности $|z| = |\zeta| = 1$ неотрицательны.

Пусть μ и $\bar{\eta}$ одни из таких корней, соответствующие фиксированному $\alpha \in (0; 2\pi]$. Подставляя μ в формулу (16), найдём E , а $\bar{\eta}$ в формулу (17), найдём E^* . Обозначим через R корень уравнения

$$R + \frac{1}{R} = E,$$

а через T – корень уравнения

$$T + \frac{1}{T} = E^*.$$

Теперь уравнения (12) и (13) можно записать в следующих видах:

$$\frac{f(r)(f(r) - 2f(z)) \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2}{(f(z) - f(r))^2} = \frac{(1 - \bar{\mu}z)^2 (1 - e^{i\alpha} \mu Rz) \left(1 - \frac{e^{i\alpha} \mu}{R} z \right)}{(z-r)^2 \left(z - \frac{1}{r} \right)^2} \quad (22)$$

и
$$\frac{F^2(\zeta)}{(F(\zeta) - F(\rho))^2} \left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)} \right)^2 = \frac{(\zeta - \eta)^2 (\zeta - \bar{\eta} e^{i\alpha} T) \left(\zeta - \frac{\bar{\eta} e^{i\alpha}}{T} \right)}{(\zeta - \rho)^2 \left(\zeta - \frac{1}{\rho} \right)^2}. \quad (23)$$

Умножая обе части равенства (22) на $(z-r)^2$, а обе части равенства (23) на $(\zeta-\rho)^2$ и устремляя соответственно z к r , а ζ к ρ , получим

$$-(1-r^2)^2 = (1-\bar{\mu}r)^2 (1-e^{i\alpha}\mu Rr) \left(1 - \frac{e^{i\alpha}\mu}{R} r\right) \quad (24)$$

и

$$(\rho^2-1)^2 = (\rho-\eta)^2 (\rho-\bar{\eta}e^{i\alpha}T) \left(\rho - \frac{\bar{\eta}e^{i\alpha}}{T}\right). \quad (25)$$

2. Интегрирование уравнений (22) и (23)

Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства (22), имеем

$$\frac{\sqrt{1-2y}}{y(1-y)} dy = \frac{(1-\bar{\mu}z)(1-e^{i\alpha}\mu Rz) \sqrt{\frac{1-\frac{e^{i\alpha}\mu}{R}z}{1-e^{i\alpha}\mu Rz}}}{z(z-r)\left(z-\frac{1}{r}\right)} dz, \quad y = \frac{f(z)}{f(r)}.$$

Под радикалами понимаются ветви главных значений, т.е. ветви, характеризующиеся условием $\sqrt{1}=1$. Сделав в этом уравнении замены переменных по формулам

$$u = u(y) = \sqrt{1-2y}, \quad t = t(z) = \sqrt{\frac{1-\frac{e^{i\alpha}\mu}{R}z}{1-e^{i\alpha}\mu Rz}},$$

получим

$$\frac{4u^2 du}{(u^2-1)(u^2-(1-2))} = \frac{2e^{i\alpha}R\left(e^{i\alpha}\mu^2 R-1\right)\left(1-\frac{1}{R^2}\right)^2}{(1-e^{i\alpha}\mu Rr)\left(1-e^{i\alpha}\mu R\frac{1}{r}\right)} \frac{(t^2-t^2(\mu))t^2 dt}{(t^2-1)\left(t^2-\frac{1}{R^2}\right)(t^2-t^2(r))\left(t^2-t^2\left(\frac{1}{r}\right)\right)}$$

или, что то же самое,

$$\left(\frac{2}{u^2-1} - \frac{2(1-2)}{u^2-(1-2)}\right) du = \left\{ \frac{2}{t^2-1} - \frac{2e^{i\alpha}}{R} \frac{1}{t^2-\frac{1}{R^2}} - \frac{2(1-\bar{\mu}r)\left(1-\frac{e^{i\alpha}\mu}{R}r\right)}{1-r^2} \frac{1}{t^2-t^2(r)} + \right. \\ \left. + 2e^{i\alpha} \frac{(1-\mu r)(1-e^{-i\alpha}\bar{\mu}Rr)}{(1-r^2)R} \frac{1}{t^2-t^2\left(\frac{1}{r}\right)} \right\} dt.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\ln \frac{1 - \sqrt{1-2y}}{1-t(z)} - i \ln \frac{i - \sqrt{1-2y}}{t(r) - t(z)} = -e^{i\alpha} \left(\ln \frac{\frac{1}{R} - t(z)}{\frac{1}{R} + t(z)} + i \ln \frac{t\left(\frac{1}{r}\right) - t(z)}{t\left(\frac{1}{r}\right) + t(z)} \right). \quad (26)$$

Здесь

$$t(r) = -i \frac{(1 - \bar{\mu}r) \left(1 - \frac{e^{i\alpha} \bar{\mu} r}{R}\right)}{1 - r^2}, \quad t\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{i(1 - \mu r)(1 - e^{-i\alpha} \bar{\mu} R r)}{(1 - r^2)}, \quad t\left(\frac{1}{r}\right) \overline{t(r)} = \frac{1}{R}.$$

Коэффициенты $t(r)$ и $t(1/r)$ получаются из равенства (24). Ветви логарифмов выбраны так, что при $z = e^{-i\alpha} \bar{\mu} R \left(y = \frac{1}{2}\right)$ все логарифмы обращаются в нуль.

Уравнение (26) неявно определяет граничную функцию $f(z)$.

Устремляя в (26) z к нулю, в пределе получим

$$\ln \frac{2R}{e^{i\alpha} \bar{\mu} (1 - R^2) f(r)} - i \left(\ln \frac{1-i}{1+i} - \ln \frac{1-t(r)}{1+t(r)} \right) = -e^{i\alpha} \left(\ln \frac{1-R}{1+R} + i \ln \frac{1-R\overline{t(r)}}{1+Rt(r)} \right). \quad (27)$$

Устремляя теперь в (26) z к r , в пределе будем иметь

$$\begin{aligned} \ln \frac{2(1-r^2)^2 R f'(r)}{(1-\bar{\mu}r)^2 e^{i\alpha} \bar{\mu} (1-R^2) f(r)} + i \left(\ln \frac{1-i}{1+i} - \ln \frac{1-t(r)}{1+t(r)} \right) = \\ = -e^{i\alpha} \left(i \ln \frac{1-Rt(r)}{1+Rt(r)} - \ln \frac{1-R|t(r)|^2}{1+R|t(r)|^2} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Вычитая почленно из равенства (28) равенство (27), получим

$$\begin{aligned} \ln f'(r) = 2 \ln \frac{1-\bar{\mu}r}{1-r^2} + 2i \ln \frac{1-t(r)}{1+t(r)} + \\ + e^{i\alpha} \left(\ln \frac{(1-R)(1-R|t(r)|^2)}{(1+R)(1+R|t(r)|^2)} + i \ln \frac{(1-R\overline{t(r)})(1+Rt(r))}{(1+R\overline{t(r)})(1-Rt(r))} \right) - \pi. \end{aligned} \quad (29)$$

Выполним теперь интегрирование в уравнении (23). Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства (23), находим

$$\frac{dv}{v-1} = \frac{(\zeta - \eta)(\zeta - \bar{\eta} e^{i\alpha} T) \sqrt{\frac{\zeta - \bar{\eta} e^{i\alpha}}{T}}}{\zeta(\zeta - \rho) \left(\zeta - \frac{1}{\rho}\right)}, \quad v = \frac{F(\zeta)}{F(\rho)}.$$

Ветвь радикала выбрана так, что при $\zeta \rightarrow \infty$ радикал обращается в единицу. Сле-

лав в правой части этого уравнения замену переменной по формуле

$$\tau = \tau(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta - \bar{\eta}e^{i\alpha}}{\zeta - \bar{\eta}e^{i\alpha}T}},$$

получим

$$\frac{dv}{v-1} = \frac{2e^{i\alpha}T(1-\bar{\eta}^2e^{i\alpha}T)\left(1-\frac{1}{T^2}\right)^2}{(\rho-\bar{\eta}e^{i\alpha}T)\left(\frac{1}{\rho}-\bar{\eta}e^{i\alpha}T\right)} \frac{(\tau^2-\tau^2(\bar{\eta}))\tau^2d\tau}{(\tau^2-1)\left(\tau^2-\frac{1}{T^2}\right)(\tau^2-\tau^2(\rho))\left(\tau^2-\tau^2\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)}.$$

Воспользовавшись теперь методом неопределенных коэффициентов, находим

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v-1} = & \left(\frac{2}{1-\tau^2} - \frac{2e^{i\alpha}}{T} \frac{1}{\frac{1}{T^2}-\tau^2} - \frac{2(\rho-\eta)\left(\rho-\frac{\bar{\eta}e^{i\alpha}}{T}\right)}{\rho^2-1} \frac{1}{\tau^2(\rho)-\tau^2} + \right. \\ & \left. + 2e^{i\alpha} \frac{(\rho-\bar{\eta})(\rho-\eta e^{-i\alpha}T)}{(\rho^2-1)T} \frac{1}{\tau^2\left(\frac{1}{\rho}\right)-\tau^2} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\begin{aligned} \ln(v-1) - \ln \frac{1+\tau(\zeta)}{1-\tau(\zeta)} + \ln \frac{\tau(\rho)+\tau(\zeta)}{\tau(\rho)-\tau(\zeta)} = \\ = -e^{i\alpha} \left(\ln \frac{\frac{1}{T} + \tau(\zeta)}{\frac{1}{T} - \tau(\zeta)} - \ln \frac{\tau\left(\frac{1}{\rho}\right) + \tau(\zeta)}{\tau\left(\frac{1}{\rho}\right) - \tau(\zeta)} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\tau(\rho) = \frac{(\rho-\eta)\left(\rho-\frac{\bar{\eta}e^{i\alpha}}{T}\right)}{\rho^2-1}$, $\tau\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{(\rho-\bar{\eta})(\rho-\eta e^{-i\alpha}T)}{(\rho^2-1)T}$, $\tau\left(\frac{1}{\rho}\right)\overline{\tau(\rho)} = \frac{1}{T}$.

Константы $\tau(\rho)$ и $\tau(1/\rho)$ получаются из уравнения (25). В равенстве (30) ветви логарифмов выбраны так, что при $\zeta = \bar{\eta}e^{i\alpha}/T$ ($v=2$) все логарифмы обращаются в нуль. Уравнение (30) неявно определяет граничную функцию $F(\zeta)$.

Устремляя в этом равенстве ζ к ρ , в пределе получим

$$\begin{aligned} \ln(-1) \frac{4(\rho^2-1)^2 F'(\rho)}{(\rho-\eta)^2 \bar{\eta}e^{i\alpha} \left(\frac{1}{T}-T\right) F(\rho)} - \ln \frac{1+\tau(\rho)}{1-\tau(\rho)} = \\ = -e^{i\alpha} \left(\ln \frac{1+T\tau(\rho)}{1-T\tau(\rho)} - \ln \frac{1+T|\tau(\rho)|^2}{1-T|\tau(\rho)|^2} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Устремляя теперь в уравнении (30) ζ к бесконечности, в пределе будем иметь

$$\ln \frac{\bar{\eta} e^{i\alpha} \left(\frac{1}{T} - T \right) \rho^2}{4F(\rho)} + \ln \frac{\tau(\rho)+1}{\tau(\rho)-1} = -e^{i\alpha} \left(\ln \frac{1+T}{1-T} - \ln \frac{1+T\overline{\tau(\rho)}}{1-T\tau(\rho)} \right). \quad (32)$$

Вычитая почленно из уравнения (31) уравнение (32), получим

$$\begin{aligned} \ln F'(\rho) = & 2 \ln \frac{\bar{\eta} e^{i\alpha} (T^2 - 1)}{4\rho T} + 2 \ln \frac{\rho - \eta}{\rho^2 - 1} + 2 \ln \frac{\tau(\rho)+1}{\tau(\rho)-1} - \\ & - e^{i\alpha} \left(\ln \frac{T-1}{T+1} + \ln \frac{T|\tau(\rho)|^2 - 1}{T|\tau(\rho)|^2 + 1} - \ln \frac{T\tau(\rho)-1}{T\tau(\rho)+1} - \ln \frac{T\overline{\tau(\rho)}-1}{T\overline{\tau(\rho)}+1} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Вычитая почленно (33) из (29), находим

$$\begin{aligned} \ln \frac{f'(r)}{F'(\rho)} = & 2 \ln \frac{1 - \bar{\mu} r}{1 - r^2} \frac{\rho^2 - 1}{\rho - \eta} - 2 \ln \frac{\bar{\eta} e^{i\alpha} (T^2 - 1)}{4\rho T} + 2 \ln \left(\frac{1-t(r)}{1+t(r)} \right)^i \frac{\tau(\rho)-1}{\tau(\rho)+1} + \\ & + e^{i\alpha} \left\{ \ln \frac{(1-R)(1-R|t(r)|^2)(T-1)(T|\tau(\rho)|^2-1)}{(1+R)(1+R|t(r)|^2)(T+1)(T|\tau(\rho)|^2+1)} + \right. \\ & \left. + \ln \left(\frac{(1-R\overline{t(r)})(1+Rt(r))}{(1+R\overline{t(r)})(1-Rt(r))} \right)^i \frac{(T\overline{\tau(\rho)}+1)(T\tau(\rho)+1)}{(T\overline{\tau(\rho)}-1)(T\tau(\rho)-1)} \right\} - \pi. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь параметры μ и η определяются из уравнений (20) и (21) соответственно.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Множество Δ значений функционала (1) на классе \mathfrak{M}' ограничено кривой, заданной уравнением (34).

В заключение выражаю благодарность профессору И.А. Александрову и доценту С.А. Копаневу за внимание к выполненной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. К вопросу о связности множества значений функционала // Вопросы математики. Труды Томск. гос. ун-та. 1961. Т. 155. С. 72–76.
2. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
3. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Том. гос. ун-т, 2001.
4. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1950.
5. Голузин Г.М. Метод вариаций в конформном отображении // Матем. сб. 1946. Т. 19. № 2. С. 203–236.
6. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
7. Лебедев Н.А. Мажорантная область для выражения $I = \ln \left\{ z^\lambda [f'(z)]^{1-\lambda} / [f(z)]^\lambda \right\}$ в классе S // Вестн. Ленингр. ун-та. Матем., физ. и хим. 1955. № 8(3). С. 29–41.

8. Матвеев П.Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. СПб.: Лань, 2008.
9. Пчелинцев В.А. Об одной экстремальной задаче // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 3(19). С. 22–30.

Статья поступила 20.02.2013 г.

Pchelintsev V.A. ON A FUNCTIONAL ON THE CLASS OF PAIRS OF FUNCTIONS. The problem about the range Δ of the functional Φ is solved by the method of internal variations on the class of pairs of functions univalent in the «disk – exterior of the disk» system. We have obtained a system of functional-differential equations for pairs of functions $(f(z), F(\zeta)) \in \mathfrak{M}'$ that are in correspondence with nonsingular boundary points Φ_0 of the set Δ . Each equation from the system contains a parameter which is a root of an algebraic equation of the sixth degree.

Keywords: class \mathfrak{M}' , functional, range, boundary functions, differential equations

PCHELINTSEV Valerij Anatoljevich (Tomsk State University)
E-mail: VPchelintsev@vtomske.ru

УДК 512.572

С.М. Рацеев, О.И. Череватенко

О НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА – ПУАССОНА С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

В работе приводятся некоторые многообразия алгебр Лейбница – Пуассона с экстремальными свойствами. Также приводится наименьшее многообразие алгебр Лейбница – Пуассона, в котором не выполнено ни одно лейбницево стандартное тождество.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, алгебра Лейбница – Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

Определим алгебру Лейбница – Пуассона следующим образом. Алгебру $A = A(+, \cdot, \{\cdot, \cdot\}, K)$ над полем K назовем алгеброй Лейбница – Пуассона, если $A(+, \cdot, K)$ – ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+, \{\cdot, \cdot\}, K)$ – алгебра Лейбница с операцией умножения $\{\cdot, \cdot\}$ и для любых $a, b, c \in A$ выполняются правила:

$$\begin{aligned} \{a \cdot b, c\} &= a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \\ \{c, a \cdot b\} &= a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b. \end{aligned}$$

При этом алгебра Лейбница $A(+, \{\cdot, \cdot\}, K)$ над полем K определяется тождеством $\{\{x, y\}, z\} = \{\{x, z\}, y\} + \{x, \{y, z\}\}$.

Договоримся опускать скобки $\{\cdot, \cdot\}$ при их левонормированной расстановке, т.е. $\{\{x_1, x_2\}, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Пусть $L(X)$ – свободная алгебра Лейбница, где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ – счетное множество свободных образующих. Пусть также $F(X)$ – свободная алгебра Лейбница – Пуассона. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных x_1, \dots, x_n , а через P_n^L пространство полилинейных элементов степени n в свободной алгебре Лейбница $L(X)$.

Обозначим через $L_{\geq 2}(X)$ подалгебру в свободной алгебре Лейбница $L(X)$, каждый элемент которой является линейной комбинацией мономов степени ≥ 2 . Пусть V – некоторое многообразие алгебр Лейбница – Пуассона, $Id(V)$ – идеал тождеств многообразия V . Обозначим

$$P_n(V) = P_n / (P_n \cap Id(V)), \quad c_n(V) = \dim P_n(V).$$

Соответственно, если V_L – некоторое многообразие алгебр Лейбница, то

$$P_n^L(V) = P_n^L / (P_n^L \cap Id(V_L)), \quad c_n^L(V) = \dim P_n^L(V_L).$$

Предложение ([1]). Пусть A_L – некоторая ненулевая алгебра Лейбница с умножением $[\cdot, \cdot]$ над бесконечным полем K . Рассмотрим векторное пространство $A = A_L \oplus K$, в котором определим операции \cdot и $\{\cdot, \cdot\}$ следующим образом:

$$(a + \alpha) \cdot (b + \beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha \beta,$$

$$\{a + \alpha, b + \beta\} = [a, b], \quad a, b \in A_L, \quad \alpha, \beta \in K. \tag{1}$$

Тогда полученная алгебра $A(+, \cdot, \{\cdot, \cdot\}, K)$ будет являться алгеброй Лейбница – Пуассона.

Если многообразие V имеет экспоненциальный рост, то введем в рассмотрение нижнюю и верхнюю экспоненты:

$$\underline{EXP}(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(V)}, \quad \overline{EXP}(V) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

Если имеет место равенство $\underline{EXP}(V) = \overline{EXP}(V)$, то будем обозначать $EXP(V)$.

На сегодняшний день известны всего четыре многообразия алгебр Лейбница почти полиномиального роста. Для однородности записи обозначим их через $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3, \tilde{V}_4$.

Многообразие \tilde{V}_1 определяется тождеством $[x_1, [x_2, x_3], [x_4, x_5]] = 0$ (см. [2]).

Пусть G – бесконечномерная алгебра Грассмана с умножением \wedge над произвольным полем K . На векторном пространстве $\tilde{G} = G \times G$ определим операцию умножения $[\cdot, \cdot]$:

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], x_2 \wedge y_1),$$

где $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \tilde{G}$. Полученная алгебра \tilde{G} является алгеброй Лейбница, которая порождает многообразие \tilde{V}_2 . В работе [3] показано, что многообразие \tilde{V}_2 порождается тождествами

$$[x_1, [x_2, [x_3, x_4]]] = 0, \quad [z, [x, y], [x, y]] = 0$$

и является наименьшим многообразием алгебр Лейбница, в котором не выполняется ни одно лейбницево стандартное тождество, то есть тождества вида

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}] = 0.$$

Многообразия \tilde{V}_3 и \tilde{V}_4 определяются следующим образом [4]. Рассмотрим кольцо многочленов R от переменной t как алгебру Лейбница с нулевым умножением. Алгебру R будем считать правым N_3 -модулем алгебры Гейзенберга N_3 со следующим действием:

$$f(t)a = f'(t), \quad f(t)b = tf(t), \quad f(t)c = f(t).$$

Обозначим через \tilde{N} прямую сумму алгебр N_3 и R . Умножение в \tilde{N} задается так:

$$(x + f(t))(y + g(t)) = xy + f(t)y,$$

где $x, y \in N_3, f(t), g(t) \in R$. Алгебра Лейбница \tilde{N} порождает многообразие \tilde{V}_3 . Задать действие элементов двумерной метабелевой алгебры Ли M_2 на элементы R :

$$f(t)e = tf'(t), \quad f(t)h = tf(t).$$

Пусть \tilde{M} – прямая сумма алгебр N_3 и R с умножением

$$(m_1 + f(t))(m_2 + g(t)) = m_1 m_2 + f(t)m_2,$$

где $m_1, m_2 \in M_2, f(t), g(t) \in R$. Алгебра Лейбница \tilde{M} порождает многообразие \tilde{V}_4 .

Обозначим через $\tilde{G} \oplus K$, $\tilde{N} \oplus K$ и $\tilde{M} \oplus K$ алгебры Лейбница – Пуассона с операциями (1), а через \tilde{V}_2^P , \tilde{V}_3^P и \tilde{V}_4^P – многообразия алгебр Лейбница – Пуассона, порожденные соответственно алгебрами $\tilde{G} \oplus K$, $\tilde{N} \oplus K$ и $\tilde{M} \oplus K$. Также обозначим через \tilde{V}_1^P многообразие алгебр Лейбница – Пуассона, порожденное тождествами

$$\{x_1, \{x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0.$$

Теорема 1. $EXP(\tilde{V}_1^P) = 3$, $EXP(\tilde{V}_2^P) = 3$, $EXP(\tilde{V}_3^P) = 4$, $EXP(\tilde{V}_4^P) = 3$. Пусть V – некоторое собственное подмногообразие одного из многообразий \tilde{V}_i^P $i=1, \dots, 4$. Тогда

рост многообразия V либо ограничен полиномом, либо найдется такое β , что для любого n будет выполнено неравенство

$$2^{n-1} \leq c_n(V) \leq n^\beta 2^n. \quad (2)$$

Доказательство. Для экспонент рассмотренных выше многообразий алгебр Лейбница почти полиномиального роста выполнены следующие равенства: $EXP(\tilde{V}_1)=2$ [2], $EXP(\tilde{V}_2)=2$ [3], $EXP(\tilde{V}_3)=3$ и $EXP(\tilde{V}_4)=2$ [4]. Поэтому значения экспонент многообразий \tilde{V}_i^P , $i = 1, \dots, 4$, следуют из данных равенств и теоремы 2 работы [5].

Пусть V – некоторое собственное подмногообразие одного из многообразий \tilde{V}_i^P , $i=1, \dots, 4$. Тогда идеал тождеств $Id(V) \cap L_{\geq 2}(X)$ определяет некоторое собственное подмногообразие в \tilde{V}_i , которое будет иметь рост не выше полиномиального. Поэтому, с учетом теоремы 2 работы [5] и теоремы 3 работы [1], либо рост многообразия V будет ограничен полиномом, либо для него будет выполнено двойное неравенство (2).

Теорема 2. Многообразии \tilde{V}_2^P порождается тождествами

$$\{x_1, \{x_2, \{x_3, x_4\}\}\} = 0, \quad \{z, \{x, y\}, \{x, y\}\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$$

и является наименьшим многообразием алгебр Лейбница – Пуассона, в котором не выполнено ни одно лейбницево стандартное тождество.

Доказательство следует из работ [1, 3, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рацеев С.М. Коммутативные алгебры Лейбница – Пуассона полиномиального роста // Вестник Самарского государственного университета. Естественнаучная серия. 2012. № 3/1 (94). С. 54–65.
2. Mishchenko S., Valenti A. A Leibniz variety with almost polynomial growth // J. Pure Appl. Algebra. 2005. V. 202. No. 1–3. P. 82–101.
3. Абанина Л.Е., Рацеев С.М. Многообразие алгебр Лейбница, связанное со стандартными тождествами // Вестник Самарского государственного университета. Естественнаучная серия. 2005. № 6. С. 36–50.
4. Абанина Л.Е., Мищенко С.П. Некоторые многообразия алгебр Лейбница // Математические методы и приложения. Труды Десятых математических чтений МГСУ. М: Союз, 2002. С. 95–99.
5. Ratseev S.M. On varieties of Leibniz-Poisson algebras with the identity $\{x, y\} \cdot \{z, t\} = 0$ // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2013. № 1 (6). С. 97–104.

Статья поступила 21.10.2012 г.

Ratseev S.M., Cherevatenko O.I. ON SOME VARIETIES OF LEIBNIZ-POISSON ALGEBRAS WITH EXTREME PROPERTIES. Some varieties of Leibniz – Poisson algebras with extreme properties are presented. We give the least variety of Leibniz – Poisson algebras in which no Leibniz standard identities are valid.

Keywords: Poisson algebra, Leibniz – Poisson algebra, variety of algebras, growth of a variety.

RATSEEV Sergey Mikhailovich (Ulyanovsk State University).

E-mail: RatseevSM@mail.ru

CHEREVATENKO Olga Ivanovna (Ulyanovsk State I.N.Ulyanov Pedagogical University)

E-mail: chai@pisem.net

МЕХАНИКА

УДК 536.46

А.А. Дементьев, А.Ю. Крайнов

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЗВЕСИ ИНЕРТНЫХ ЧАСТИЦ НА СКОРОСТЬ ФРОНТА ГОРЕНИЯ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

Исследуется зависимость скорости горения газовой смеси с инертными частицами от концентрации горючего, взятого в стехиометрическом соотношении с окислителем и в недостатке. Приведено сравнение результатов расчетов, полученных на основе двух математических моделей: с учетом теплового расширения, без его учета. Получены зависимости скорости распространения фронта горения от размера и массовой концентрации инертных частиц при различных начальных концентрациях горючего.

Ключевые слова: *газовзвесь, ламинарное пламя, инертные частицы, скорость горения.*

Газодисперсные системы, к которым относятся различные газовзвеси инертных частиц, а также частиц органических горючих, часто используются в химической, пищевой промышленности, инертные порошки используются для пожаротушения [1–5]. Исследование и моделирование процессов, происходящих при воспламенении и горении газовзвесей, изучение качественных и количественных характеристик – скоростей горения, температур, плотностей и т.д., является необходимым для эффективного развития промышленных технологий.

В данной работе представлены результаты теоретического исследования горения газовой смеси со взвешенными в ней мелкими инертными частицами с учетом теплового расширения газа. Проведено сравнение результатов с результатами вычислений по модели, в которой не учитывается тепловое расширение газовой фазы и движение частиц.

Физико-математическая постановка задачи

Горючая газовая смесь с взвесью инертной пыли занимает область $0 < x < \infty$. Считается, что реакция в газовой фазе проходит по второму порядку. Частицы одного размера, сферической формы, с радиусом r_k , в начальный момент времени распределены равномерно в газовой смеси. В координате $x = 0$ размещена горячая непроницаемая стенка с температурой равной адиабатической температуре сгорания газа в изобарических условиях. Такое граничное условие моделирует зажигание у «закрытого торца» [6]. Горение протекает в ламинарном режиме при постоянном давлении [7–9]. Предполагается, что число Льюиса и коэффициент теплопроводности не зависят от температуры; теплообмен между газовой фазой и частицами описывается законом Ньютона; при движении на частицы со стороны газа

действует сила сопротивления, описываемая законом Стокса, из-за малой объемной концентрации частиц пренебрегаем их обратным влиянием на движение газа.

Система уравнений, описывающая процессы в горячем газе с инертными частицами, в безразмерной форме запишется в виде

$$\frac{\partial \theta_g}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \theta_g}{\partial \xi} = \frac{1}{\bar{\rho}_g} \frac{\partial^2 \theta_g}{\partial \xi^2} - \frac{\bar{\rho}_k}{\bar{\rho}_g} \frac{B}{\chi} (\theta_g - \theta_k) + \bar{\rho}_g C_1 C_2 \exp\left(\frac{\theta_g}{1 + \beta \theta_g}\right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial C_1}{\partial \xi} = \frac{Le}{\bar{\rho}_g} \frac{\partial^2 C_1}{\partial \xi^2} - \gamma \bar{\rho}_g C_1 C_2 \exp\left(\frac{\theta_g}{1 + \beta \theta_g}\right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial C_2}{\partial \xi} = \frac{Le}{\bar{\rho}_g} \frac{\partial^2 C_2}{\partial \xi^2} - \left(\frac{\nu_2 \mu_2}{\nu_1 \mu_1}\right) \left(\frac{Y_{10}}{Y_{20}}\right) \gamma \bar{\rho}_g C_1 C_2 \exp\left(\frac{\theta_g}{1 + \beta \theta_g}\right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_g}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho}_g \bar{u}}{\partial \xi} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho}_k \bar{w}}{\partial \xi} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial \tau} + \bar{w} \frac{\partial \theta_k}{\partial \xi} = \frac{(\theta_g - \theta_k)}{\chi}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_k \bar{w}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho}_k \bar{w}^2}{\partial \xi} = \frac{3}{2} \frac{PrC}{\chi Nu} \bar{\rho}_k (\bar{u} - \bar{w}); \quad (7)$$

$$\bar{\rho}_g = (1 - \beta/\gamma) / (1 + \beta \theta_g). \quad (8)$$

Граничные условия:

$$\theta_g(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial \theta_g(\infty, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \theta_k(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\rho}_k(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial C_1(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial C_2(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial C_1(\infty, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial C_2(\infty, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \bar{u}(0, \tau) = 0, \quad \bar{w}(0, \tau) = 0. \quad (9)$$

Начальные условия:

$$\theta_g(\xi, 0) = -1/\gamma, \quad \theta_k(\xi, 0) = -1/\gamma, \quad C_1(\xi, 0) = C_{10}, \quad C_2(\xi, 0) = 1, \\ \bar{u}(\xi, 0) = 0, \quad \bar{w}(\xi, 0) = 0, \quad \bar{\rho}_k(\xi, 0) = 1. \quad (10)$$

Уравнение (1) описывает перенос тепла в газовой смеси за счет теплопроводности, конвекции, с учетом теплообмена между газовой фазой и частицами, тепловыделения за счет химической реакции; (2) – уравнение концентрации горючего; (3) – уравнение концентрации окислителя; (4), (5) – уравнения сохранения массы газа и частиц; (6) – уравнение энергии частицы, с учетом ее движения и теплообмена с газом; (7) – уравнение движения частиц. (8) – уравнение состояния идеального газа, записанное при постоянном давлении.

При записи системы уравнений выбраны следующие масштабы: времени $t^* = RT_a^2 c_g / (Q E \rho_{g0} Y_{10} Y_{20} k_0 \exp(-E/(RT_a)))$; координаты $x^* = (\lambda t^* / (c_g \rho_{g0}))^{1/2}$; скорости

$V_* = x^*/t^*$; плотности газа ρ_{g0} – начальная плотность газа; приведенной плотности частиц ρ_{k0} – начальная приведенная плотность частиц; температуры $T_* = RT_a^2/E$, где T_a – адиабатическая температура продуктов сгорания газа в изобарических условиях. Безразмерные переменные: $\tau = t/t^*$ – время; $\xi = x/x^*$ – координата; $\theta_{g,k} = (E/RT_a^2)/(T_{g,k} - T_a)$ – температура; $C_1 = Y_1/Y_{10}$, $C_2 = Y_2/Y_{20}$ – относительные концентрации горючего и окислителя в газовой фазе, где $Y_1 = \rho_1/\rho_g$, $Y_2 = \rho_2/\rho_g$, $\bar{\rho}_g = \rho_g/\rho_{g0}$ – плотность газа; $\bar{\rho}_k = \rho_k/\rho_{k0}$ – приведенная плотность частиц; $\bar{u} = u/V_*$ – скорость газа; $\bar{w} = w/V_*$ – скорость частиц. Индексы: g – газ, k – частицы, 0 – начальные условия, 1 – горючее, 2 – окислитель, $*$ – масштаб, черта над обозначением – безразмерная величина.

Безразмерные параметры (критерии): $Pr = \eta_g c_g/\lambda$ – число Прандтля, $Nu = ar_k/\lambda$ – число Нуссельта, $Le = Dc_g\rho_{g0}/\lambda$ – число Льюиса, $C = c_k/c_g$ – отношение теплоемкостей, $B = 4\pi r_k^3 c_k \rho_{k0} n / (3c_g \rho_{g0})$ – начальная массовая концентрация частиц, $\chi = r_k^2 c_k \rho_{k0} / 2Nu\lambda t^*$ – размер частиц, $\gamma = c_g RT_a^2 / (QEY_{10})$, $\beta = RT_a/E$ – параметры, характеризующие тепловой эффект и энергию активации химической реакции.

Обозначения: t – время, x – координата, T – температура, Y – отношение плотности окислителя/горючего к плотности газовой смеси, ρ – плотность, u – скорость газа, w – скорость частиц, c – удельная теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности, D – коэффициент диффузии, η_g – коэффициент вязкости, μ – молекулярная масса, ν – стехиометрический коэффициент, α – коэффициент теплоотдачи, r_k – радиус частиц, n – количество частиц в единице объема, R – универсальная газовая постоянная, Q – тепловой эффект реакции, k_0 – предэкспоненциальный множитель, E – энергия активации химической реакции.

Математическая модель (1) – (10) описывает распространение пламени в газовой смеси с инертными частицами с учетом теплового расширения. При $\bar{u} \equiv 0$, $\bar{w} \equiv 0$, $\bar{\rho}_g \equiv 1$, модель переходит в теплодиффузионную модель горения газодисперсных сред [10–13].

Система уравнений (1) – (10) решалась численно. Уравнения (1) – (3) решались по неявной разностной схеме, конвективное слагаемое аппроксимировалось разностями против потока. Значения температуры газа на новом временном слое использовались для нахождения плотности газа из уравнения (8). Затем из уравнения сохранения массы (4) определяли скорость газа. Уравнения (5) – (7) решались по явной разностной схеме.

Расчеты проводились при значениях параметров: $\gamma = 0,1$, $\beta = 0,07$, $Le = 1$, $Nu = 1$, $\nu_1\mu_1 = 16$, $\nu_2\mu_2 = 64$, $Y_{10} = 0,05$, $Y_{20} = 0,2$, $Pr = 1$, $C = 1$, $B = 0,15$. В расчетах варьировались значения C_1 в интервале от 1 до 0,7, параметр χ в интервале от 2000 до 500000, B в интервале от 0 до 0,25.

В численных экспериментах горение газозвеси инициировали передачей тепла от горячей стенки. В момент времени, когда фронт пламени достигал безразмерной координаты $\xi = 500$, граничное условие $\theta_g(0, \tau) = 0$ заменялось граничным условием $\partial\theta_g(0, \tau)/\partial\xi = 0$. Скорость фронта определялась скоростью перемещения координаты с концентрацией горючего $C_1 = 0,5$.

На рис. 1 представлены распределения параметров среды в последовательные моменты времени с интервалом безразмерного времени $\Delta\tau = 120000$ для модели без учета теплового расширения, на рис. 2 – для модели с учетом расширения при значениях $\chi = 50000$, $C_1 = 0,8$, $B = 0,15$.

Температура частиц во фронте горения ниже, чем у газовой смеси, за фронтом их температуры выравниваются (рис. 1, а, 2, а). Концентрация горючего, взятого в недостатке, за фронтом пламени обращается в ноль. Окислитель, взятый в избытке, расходуется до концентрации $C_2 = 0,2$ (рис. 1, б, 2, б).

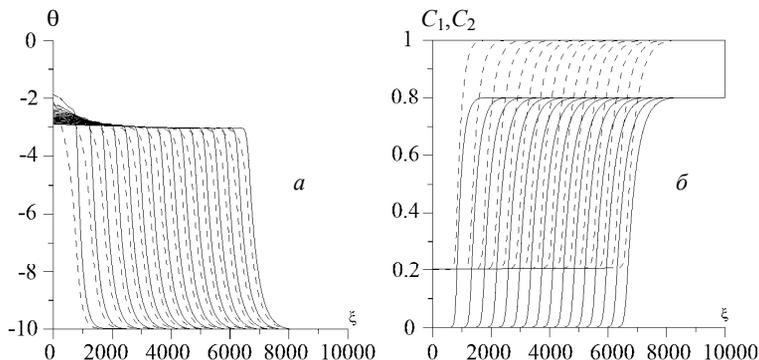


Рис. 1. Распределения температуры (а) (сплошная линия – газ, пунктир – инертные частицы), концентраций (б) (сплошная линия – горючее, пунктир – окислитель). Модель без учета расширения

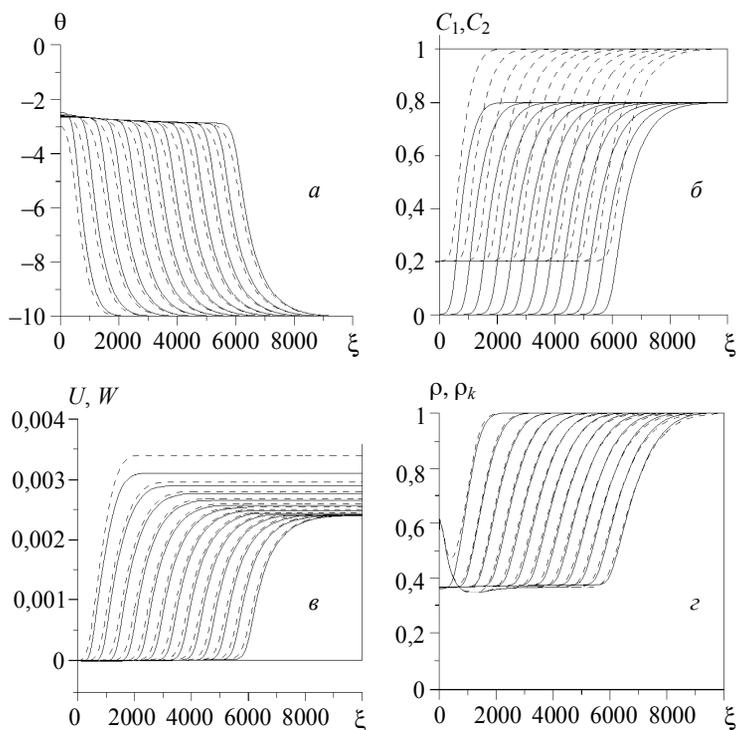


Рис. 2. Распределения температуры (а), концентраций (б), скорости (в), плотности (г); (а, в, г: сплошная линия – газ, пунктир – инертные частицы), (б: сплошная линия – горючее, пунктир – окислитель). Модель с учетом расширения

Перед установившимся фронтом горения скорость газа и частиц имеет одинаковое значение, позади фронта скорость газа и частиц равна нулю, во фронте прогрева газовой фазы частицы имеют скорость выше скорости газовой фазы из-за их механической инерции (рис. 2, в). Частицы в области химических превращений имеют увеличенную приведенную плотность (рис. 2, з). В силу этого эффекта в зоне интенсивных химических реакций локально присутствует большее количество частиц, которые локально понижают температуру в зоне реакции сильнее, чем это получается в расчетах на основе модели без учета расширения газа и относительного движения частиц. Подогретые в зоне химических реакций частицы и имеющие скорость большую, чем газ, переносят тепло в зону прогрева перед фронтом горения. Это способствует растяжению волны горения в газе.

На рис. 3 представлены зависимости скорости горения от начальной концентрации горючего, полученные на основе модели без учета теплового расширения (рис. 3, а) и с его учетом (рис. 3, б) при массовой концентрации частиц $B = 0,15$ и трех значениях параметра χ , характеризующего размер частиц. Видно, что тепловое расширение увеличивает скорость распространения фронта пламени в чистом газе на величину от 20 до 30 % (кривые 1 на рис. 3, а, б). Присутствие крупных инертных частиц в газе не сказывается на скорости распространения пламени в модели без учета теплового расширения газа (кривая 2, рис. 3, б). Расчет на основе модели с учетом теплового расширения показывает, что скорость пламени уменьшается, несмотря на то, что частицы во фронте пламени не успевают нагреться, забрав тепло из зоны химической реакции. Этот эффект обусловлен меньшей температурой газа позади фронта реакции и в связи с этим меньшим объемным расширением газа. С уменьшением размера частицы начинают влиять на скорость химической реакции во фронте горения, уменьшая в нем температуру (кривые 3, 4, рис. 3, а, б). Существует интервал значений χ , при которых частицы слабо влияют на скорость пламени при стехиометрическом и близком к нему соотношении окислителя и горючего и сильно влияют на скорость при значительном отклонении состава газовой смеси от стехиометрической (кривые 3, рис. 3, а, б).

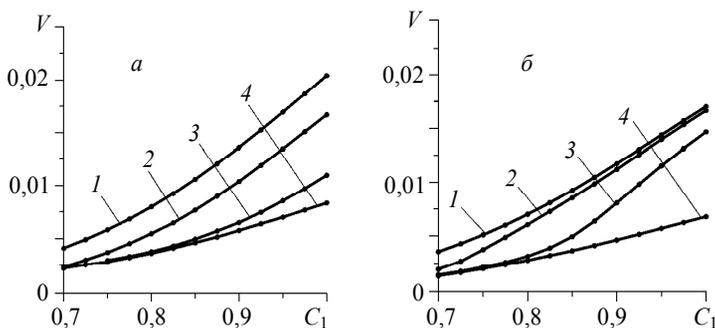


Рис. 3. Зависимости значений скоростей фронта пламени от концентрации горючего: а – модель с учетом расширения (1 – незапыленная газовая смесь, 2 – $\chi = 500000$, 3 – $\chi = 50000$, 4 – $\chi = 2000$); б – модель без учета расширения (1 – незапыленная газовая смесь, 2 – $\chi = 300000$, 3 – $\chi = 50000$, 4 – $\chi = 2000$)

На рис. 4 представлены зависимости относительной безразмерной скорости распространения фронта пламени от параметров дисперсной фазы – B и χ при двух значениях начальной концентрации горючего в газовой смеси ($C_1 = 0,85$ и

$C_1 = 1$), рассчитанные по модели, учитывающей тепловое расширение. V_0 – значение скорости фронта горения для чистой газовой смеси, которое имеет значение при $C_1 = 1 - V_0 = 0,02$, при $C_1 = 0,85 - V_0 = 0,01$. Параметр χ изменялся в следующем интервале: $2000 \leq \chi \leq 500\,000$, параметр B : $0 \leq B \leq 0,25$. Из рис. 4 видно, что при фиксированном χ с увеличением массовой концентрации скорость пламени уменьшается. Чем мельче частицы, тем их влияние на скорость пламени значительнее.

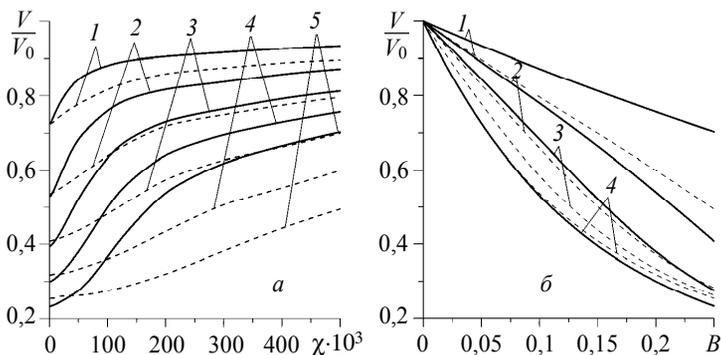


Рис. 4. Зависимости значений относительных скоростей фронта пламени от параметров дисперсной инертной фазы, пунктир – концентрация $C_1 = 0,85$, сплошная линия – $C_1 = 1$: а – зависимость от величины, характеризующей размер частиц χ ($1 - B = 0,05$, $2 - B = 0,1$, $3 - B = 0,15$, $4 - B = 0,2$, $5 - B = 0,25$); б – зависимость от массовой концентрации B ($1 - \chi = 500\,000$, $2 - \chi = 120\,000$, $3 - \chi = 50\,000$, $4 - \chi = 2000$)

Сформулирована математическая модель горения газовой смеси с взвешенными в ней инертными частицами, учитывающая тепловое расширение газа и относительное движение фаз. Получены зависимости скорости распространения пламени от массовой концентрации, размера инертных частиц и концентрации горючего в газовой смеси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесчастнов М.В., Соколов В.М. Предупреждение аварий в химических производствах. М.: Химия, 1979. 392 с.
2. Таубкин С.И., Таубкин И.С. Пожаро- и взрывоопасность пылевидных материалов и технологических процессов их переработки. М.: Химия, 1976. 264 с.
3. Абдурагимов И. М., Говоров В. Ю., Макаров В. Е. Физико-химические основы развития и тушения пожаров – М.: Высшая инженерная пожарно-техническая школа МВД СССР, 1980.
4. Баратов А.Н., Вогман Л.П. Огнетушащие порошковые составы. М.: Стройиздат, 1982.
5. Корольченко А.А. Пожаровзрывоопасность промышленной пыли. М.: Химия, 1986. 216 с.
6. Krainov A.Yu., Dementiev A.A. Effect of inert particles on the rate of flame propagation in igniting it from a «closed end» and an «open end» // Proc. 7th International Seminar on Flame Structure 7ISFS, July 11 – July 19, 2011, Novosibirsk, Russia. P. 43.
7. Мержанов А.Г., Хайкин Б.И., Шкадинский К.Г. Установление стационарного распространения пламени при зажигании газа накаливаемой поверхностью // ПМТФ. 1969. № 5. С. 42–48.

8. Шкадинский К.Г., Барзыкин В.В. Закономерности зажигания газов накаливаемой поверхностью с учетом диффузии и гидродинамики // ФГВ. 1968. Т. 4. № 2. С. 176–181.
9. Дементьев А.А., Крайнов А.Ю. К вопросу о распространении ламинарного пламени в газе с инертной пылью // Физика горения и взрыва. 2011. Т. 47. № 4. С. 70–75.
10. Лисицын В.И., Руманов Э.Н., Хайкин Б.И. О периоде индукции при воспламенении совокупности частиц // Физика горения и взрыва. 1971. Т. 7. № 1. С. 3–9.
11. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
12. Krainov A.Yu. Flame Propagation in the suspension of combustible particles and gases // Archivum Combustionis. 1996. V.16. No. 3–4. P. 189–198.
13. Крайнов А.Ю. Распространение пламени в смеси горючих газов и частиц // ФГВ. 2000. Т. 36. № 2. С. 3–9.

Статья поступила 12.09.2012 г.

Dementiev A.A., Krainov A.Yu. STUDYING THE INFLUENCE OF RELATIVE MOTION OF SUSPENDED INERT PARTICLES ON THE RATE OF THE GAS MIXTURE COMBUSTION FRONT. The dependence of the burning rate of a gas mixture with inert particles on concentration of fuel taken in the stoichiometric ratio with the oxidant and under the lack of fuel is studied. The compared calculation results were obtained based on two mathematical models: with allowance for the thermal expansion and without regard to it. The dependences of the propagation velocity of the combustion front on the size and mass concentration of the inert particles were obtained at different initial concentrations of fuel.

Keywords: gas mixture, laminar flame, inert particles, the burning rate.

DEMENTIEV Aleksandr Aleksandrovich (Tomsk State University)

E-mail: daa024@ftf.tsu.ru

KRAINOV Alexey Yurievitch (Tomsk State University)

E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

УДК 517.958

З.Н. Есина, В.В. Мурашкин, М.Р. Корчуганова**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ВСПЫШКИ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ ПО ДАННЫМ О КОЭФФИЦИЕНТАХ АКТИВНОСТИ**

Обсуждается метод расчета температуры вспышки по результатам моделирования равновесия жидкость – твердое при постоянном давлении с использованием уравнения Гиббса. Используется модель предсказания температуры вспышки смеси на основе модифицированного уравнения Ле-Шателье, уравнения Антуана и модели для оценки коэффициента активности.

Ключевые слова: бинарные смеси, температура вспышки, температура кипения, коэффициенты активности, коэффициент сольватации, коэффициент ассоциации.

Безопасность при производстве и хранении горючих жидкостей является одной из важнейших задач, поскольку часто случаются опасные ситуации, такие, как взрывы на бензоаппаратах, аварии при перевозке горючих веществ и т.д. При оценке пожарной опасности жидкостей с температурой плавления менее 50 °С применяют ряд показателей пожаровзрывоопасности: группа горючести, температура вспышки, температура воспламенения, температура самовоспламенения, нижний и верхний концентрационные пределы распространения пламени, способность взрываться и гореть при взаимодействии с водой, кислородом воздуха и другими веществами и др. Эти параметры связаны между собой. Так, например, температура вспышки линейно связана с температурой кипения: $t_{fp} = a + bt_b$, которая зависит от давления окружающей среды. В связи с этим актуальной является задача оценки влияния давления и температуры на термодинамические характеристики смесей жидкостей. Особенно важно изучить поведение при различных температуре, давлении, концентрации, теплофизических параметрах среды и др. таких горючих жидких смесей, как топливные смеси, тормозные жидкости, антифризы, применяемые для охлаждения двигателей внутреннего сгорания, теплоносители в системах отопления и кондиционирования. Наряду с этим, необходимо решать задачу теплообмена, которая разделяется на внешнюю или внутреннюю в зависимости от характеристики источника тепла и формы аккумулятора тепла. Таким образом, прогнозирование температуры вспышки является только частью проблемы изучения условий пожаровзрывобезопасности.

Опасность воспламенения жидкостей прежде всего характеризуется их точкой вспышки. Точка вспышки определяется как температура, при которой жидкость испаряется и образует горючую смесь с воздухом. Для измерения температуры вспышки применяют приборы закрытого и открытого типов. В приборах закрытого типа изучается состояние равновесия между жидкостью и паром компонентов смеси. В приборах открытого типа учитывается взаимодействие смеси горючих жидкостей с атмосферой. Точка вспышки смеси – критическое свойство, но экспериментальные данные для многих смесей отсутствуют, а получение таких данных дорого и отнимает много времени. Поэтому разработка математических моделей для анализа состояния окружающей среды в условиях увеличения риска

возникновений чрезвычайных ситуаций является важной научной и практической задачей.

В настоящей работе рассматривается возможность прогнозирования температуры вспышки в приборах закрытого типа, т.е. влияние атмосферных условий в этом приближении не учитывается.

Несколько моделей для предсказания точки вспышки для смесей различных типов были предложены ранее [1–11]. Модели, разработанные для идеальных растворов [4–6], непригодны для неидеальных смесей, которые встречаются наиболее часто. Неидеальность растворов обусловлена взаимодействием молекул. Влияние неидеальности жидкой фазы на коэффициенты активности учитывается посредством построения соответствующих термодинамических моделей, которые можно разделить на две категории: модели с использованием экспериментальных данных и так называемые априори прогнозирующие модели. Для моделирования свойств раствора необходимо уметь рассчитывать коэффициенты активности компонентов смеси в жидкой фазе.

Общая модель для предсказания температуры точки вспышки

Часто используются термодинамические модели NRTL, Вильсона и UNIQUAC, но в этих моделях бинарные параметры взаимодействия рассчитываются по экспериментальным данным. Поэтому эти модели не являются прогнозирующими. Модель UNIFAC [12] является прогнозирующей, так как не нуждается в экспериментальных данных для расчета параметров бинарного взаимодействия. Для оценки взаимодействия используются параметры групповых вкладов [10, 13].

Общая модель для предсказания температуры вспышки смеси известна [1] и усовершенствована Лиу и др. [2] на основе модифицированного уравнения Ле-Шателье (1), уравнения Антуана (2) и модели для оценки коэффициентов активности [3]:

$$\sum_i x_i \gamma_i P_i / P_{i,fp}^0 = 1; \quad (1)$$

$$\log P_i = A - B_i / (T + C_i), \quad (2)$$

где x_i – мольная доля i -го компонента в жидкости; γ_i – коэффициент активности компонента; P_i – давление насыщенного пара i -го компонента смеси при заданной температуре; $P_{i,fp}^0$ – давление пара чистого горючего компонента i в его точке вспышки соответственно.

Уравнение Ле-Шателье $L = 1 / \sum_i p_i / L_i$ применяется для определения границы взрыва смеси паров и представляет собой формулу для расчета средней гармонической величины, где L – предел воспламенения смеси; L_i – пределы воспламеняемости отдельных компонентов; p_i – вклад отдельных компонентов в изучаемое свойство жидкой смеси. В частности, уравнение позволяет определить среднее давление P_{fp} , при котором может произойти вспышка, т. е. при $L_i = P_{i,fp}^0$. При условии фазового равновесия жидкости и пара парциальное давление компонента неидеальной жидкости имеет вид $p_i = x_i \gamma_i P_i$. Коэффициент активности вводится как характеристика неидеальности смеси. Если коэффициент активности равен единице, это означает, что взаимодействия между различными или теми же самыми молекулами идентичны и смесь находится в идеальном состоянии; если коэффициент активности отличен от единицы, смесь находится в неидеальном состоянии. В случае идеального раствора, $\gamma_i = 1$, парциальное давление компонента

пропорционально его доле в растворе $p_i = x_i P_i$, что является формулировкой закона Рауля. Уравнение Антуана представляет собой приближенную запись уравнения Клаузиуса – Клапейрона для равновесия жидкой и паровой фаз и дает возможность от давления перейти к температуре, характеризующей точку вспышки, и найти зависимость температуры вспышки от состава. Для расчета температуры вспышки на базе моделей равновесия по заданному составу раствора определяют коэффициенты активности компонентов γ_i , затем по уравнению Антуана находят давление пара компонентов смеси $P_{i,fp}^0$ при температуре вспышки чистых компонентов. Температура вспышки T_{fp} для смеси находится в результате совместного решения уравнения Антуана (2) и уравнения (1). Подстановка давления P_i из уравнения Антуана в уравнение Ле-Шателье позволяет рассчитать температуру вспышки для всего диапазона составов раствора, т.е. зависимость $T(x)$. Основная проблема заключается в определении коэффициентов активности компонентов неидеальной смеси. Эта задача может быть решена, если использовать методы математического моделирования.

Термодинамические модели фазового равновесия растворов

Из моделей коэффициентов активности жидкой фазы можно выделить два вида: 1) модели, применяемые для неполярных систем, например смеси углеводородов, изомеров, и гомологов, которые включают теорию регулярного раствора (RST) и модели Флори – Хаггинса; 2) модели, применяемые для неполярных и полярных систем. Эти модели обычно используются для предсказания коэффициентов активности жидкой фазы и включают уравнение Ван-Лаара, уравнение Вильсона, NRTL, уравнение UNIQUAC, уравнение UNIFAC и др.

Видал и др. [13] объединили прогноз точки вспышки Лиу и др. [2] с моделью UNIFAC, чтобы предсказать минимум для сильно неидеальных растворов. Гмелинг и Расмуссен рассчитывали точку вспышки бинарных систем, применяя для оценки коэффициентов активности модель UNIFAC [10, 14]. В минимуме точки вспышки смеси температура вспышки может понизиться на несколько градусов, увеличивая риск взрыва, что часто сопровождается положительным отклонением равновесия жидкость – пар от закона Рауля [9, 13, 15]. Максимум на кривой поведения точки вспышки связан с отрицательным отклонением от закона Рауля, что приводит к понижению риска взрыва [16].

В оригинале модели UNIFAC [12] логарифм коэффициента активности складывается из комбинаторной и остаточной частей. Чтобы улучшить характеристики оригинальной модели UNIFAC, прогнозирующей равновесие жидкость – пар (VLE), жидкость – жидкость (LLE) и избыточные энтальпии, было предложено несколько версий модели [17–20].

Основным недостатком модели UNIFAC и ее версий является необходимость создания базы данных групповых параметров чистых компонентов и параметров взаимодействия. Групповые вклады этих параметров систематически улучшаются консорциумом UNIFAC [21].

В работе [22] предсказывается точка вспышки смесей (модель прогноза точки вспышки Liaw и Chiu [3]), для расчета поведения коэффициентов активности жидкой фазы используются модели типа UNIFAC, которые не нуждаются в экспериментальных данных, чтобы найти параметры бинарной системы. На рис. 1 представлены экспериментальные данные [22], а также результаты расчета коэффициентов активности и температуры точки вспышки для систем этанол – бутанол-1, этанол – ацетон. Использовались различные версии модели UNIFAC и мо-

дели NRTL для идеальной системы этанол – бутанол-1 (рис. 1, а) и системы этанол – ацетон с положительным отклонением от идеальности (рис. 1, б). Фазовое поведение смесей усложняется, если имеется большая разница в их физических свойствах, типах полярности или критических свойствах. Как можно видеть на рис. 1, имеется значительный разброс в результатах расчетов коэффициентов активности и температуры вспышки по разным моделям.

Одну из форм уравнения, связывающего различные параметры системы с внутренней энергией, можно записать как

$$dU = TdS - PdV + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i, \quad (3)$$

где $U = f(S, V, N_1, N_2, \dots, N_n)$ – внутренняя энергия фазы как функция энтропии, объема и числа молей компонентов, образующих фазу; $\mu_i = (\partial U / \partial N_i)_{S, V, N_{j \neq i}}$ – химический потенциал i -го компонента; $T = (\partial U / \partial S)_{V, N_{j \neq i}}$ – температура; $P = (\partial U / \partial V)_{S, N_{j \neq i}}$ – давление.

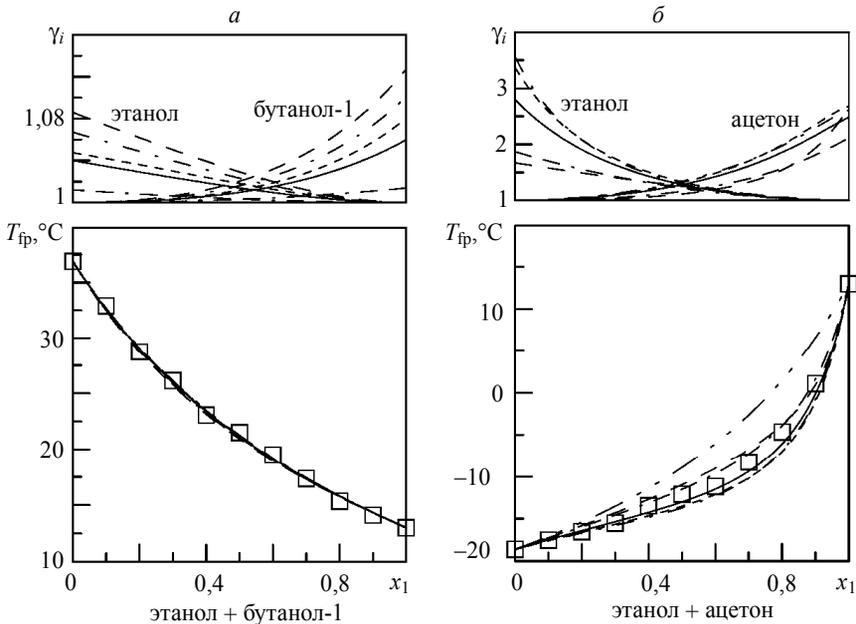


Рис. 1. Сравнение коэффициентов активности и предсказанной точки вспышки с экспериментальными данными [22] для идеального раствора этанол – бутанол-1 (а) и раствора с положительным отклонением от идеальности этанол – ацетон (б): «□» – экспериментальные данные, «-» – оригинал UNIFAC; «----» – UNIFAC DORTMUND; «-·-·-» – UNIFAC Lingham; «- - - -» – версия UNIFAC Bastos и др.; «- - - -» – NRTL; «- - -» – идеальный раствор

В данной работе обсуждается метод расчета температуры вспышки по результатам моделирования равновесия жидкость – твердое при постоянном давлении. Соотношение, связывающее между собой коэффициенты активности γ_i и избыточную свободную энергию Гиббса G^E :

$$RT \sum x_i \ln \gamma_i = G^E.$$

Уравнение (3) можно записать в другой форме, используя в качестве характеристической функции энергию Гиббса $G^E(P, T, x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$dG^E = -SdT + VdP + \sum_{i=1}^n \mu_i dx_i.$$

Уравнение можно записать также как

$$-SdT + VdP - \sum_{i=1}^n x_i d\mu_i = 0,$$

где от числа молей компонентов сделан переход к их молярным долям x_i . Разность уравнений состояния бинарной системы для реальной и идеальной равновесных фаз можно представить в виде [23]

$$-(H^E/RT^2) dT + (V^E/RT) dP = \sum_{i=1}^2 x_i d \ln \gamma_i,$$

где γ_i – коэффициент активности компонента, $i = 1, 2$; H^E – энтальпия смешения; V^E – избыточный объем; P – давление раствора; T – абсолютная температура; R – универсальная газовая постоянная.

Уравнение Гиббса используется для представления фазового равновесия в широком диапазоне температур и давлений, а также для расчета тепловых и объемных свойств.

Таким образом, уравнение (4) позволяет найти коэффициенты активности компонентов, если известна энтальпия смешения и избыточный объем. Если происходит образование ассоциатов молекул чистых компонентов, то эффективная молярная масса компонента в растворе может быть рассчитана по формуле $M' = \lambda_i M_i$, где M_i – молярная масса компонента до смешения, λ_i – поправочные коэффициенты. Среднее соотношение числа молекул в ассоциатах чистых компонентов $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ характеризует устойчивую структуру раствора. Отличие коэффициента λ от единицы свидетельствует о наличии отклонения от идеальности в бинарной системе и необходимости перехода к эффективным молярным долям для получения термодинамически согласованных моделей.

В [24 – 27] рассматривается метод моделирования диаграмм фазового равновесия жидкость – твердое и жидкость – пар в реальных растворах и возможность прогнозирования температуры вспышки бинарной жидкой смеси.

В большинстве реальных растворов происходит взаимодействие компонентов, приводящее к образованию молекулярных соединений типа AB . Коэффициент сольватации $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ показывает отношение числа молекул A к числу молекул B в образующемся молекулярном соединении. Молекулы компонента A и B могут также образовывать кластеры, состоящие из молекул одного вида. Отношение числа молекул компонента A к числу молекул компонента B , объединившихся в ассоциаты, будем характеризовать коэффициентом ассоциации $k = k_1/k_2$. Коэффициент ассоциации k_1 показывает, сколько молекул компонента A в жидкой фазе объединились в кластер типа AA , аналогично, коэффициент ассоциации k_2 показывает, сколько молекул компонента B в жидкой фазе объединились в кластер типа BB .

Минимизация избыточной энергии Гиббса по параметру сольватации λ приводит к уравнению, моделирующему диаграмму фазового равновесия жидкость – твердое при $P = \text{const}$:

$$T(z_1) = [H_1^E z_1 + H_2^E (1 - z_1)] / [(H_1^E/T_1^0) z_1 + (H_2^E/T_2^0) (1 - z_1) - R(z_1 \ln z_1 + (1 - z_1) \ln(1 - z_1))], \quad (5)$$

где T – температура ликвидуса; H_i^E – энтальпия и T_i^0 – температура плавления компонента, образующего однокомпонентную фазу, $i = 1, 2$; $z_1 = x_1/(x_1 + \lambda x_2)$, $z_2 = x_1/(x_1/\lambda + x_2)$ – эффективные молярные доли компонентов бинарной смеси.

Модель PCEAS (Phase Chart Eutectic and Azeotropic Systems), предлагаемая авторами данной работы [28], основана на минимизации избыточной энергии Гиббса по параметру сольватации λ , характеризующему отношение числа молекул A к числу молекул B в молекулярном соединении. Уравнение (5) позволяет найти зависимость температуры смеси от состава при постоянном давлении. Программа PCEAS дает возможность рассчитать равновесие жидкость – твердое, а также равновесие жидкость – пар при постоянном давлении или при постоянной температуре. Входными данными являются температура T_i и энтальпия фазовых переходов H_i^0 чистых компонентов. Программа позволяет определить средние величины коэффициента сольватации λ , а также коэффициента ассоциации k и рассчитать коэффициенты активности.

Фазовые равновесия жидкость – твердое и жидкость – пар в бинарных системах, а также зависимость температуры вспышки от состава раствора рассчитывались при атмосферном давлении.

Результаты расчетов

На рис. 2 представлены результаты расчета температуры точки вспышки с использованием модели PCEAS для идеальной системы этанол – бутанол-1 (рис. 2, а) и системы этанол – ацетон с положительным отклонением от идеальности (рис. 2, б).

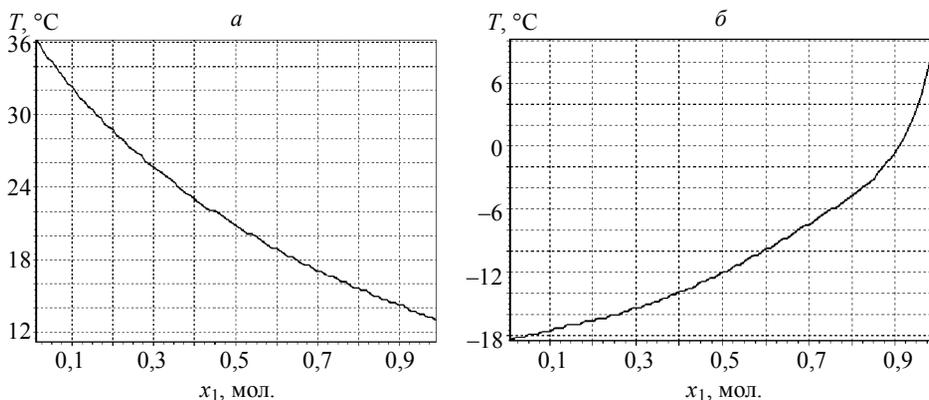


Рис. 2. Зависимость температуры точки вспышки от состава раствора по модели PCEAS: а – для системы этанол – бутанол-1; б – для системы этанол – ацетон

На рис. 3 приведены результаты расчета коэффициентов активности по модели PCEAS для систем этанол – бутанол-1 и этанол – ацетон при нормальном атмосферном давлении.

Для прогнозирования температуры вспышки смесей, близких к идеальным, достаточно использовать коэффициенты активности жидкой фазы, полученные по результатам моделирования равновесия жидкость – твердое.

В работе [22] приведены результаты моделирования и экспериментальные кривые зависимости температуры вспышки от состава для систем с формированием экстремума точки вспышки. Отмечается, что существующие термодинамические модели недостаточно точно описывают такие системы. Причина этого заключается в недостаточном внимании к процессам сольватации и ассоциации в жидкой и паровой фазах, а также согласованности термодинамических данных.

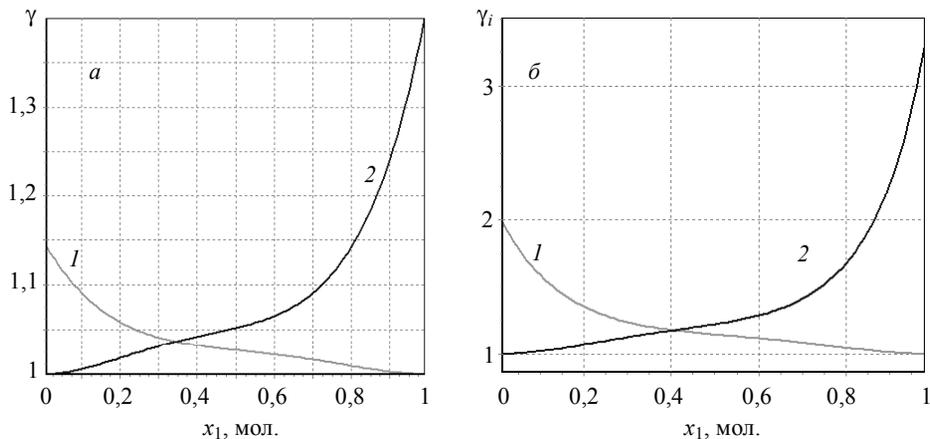


Рис. 3. Расчет коэффициентов активности при $P = 101,4$ кПа по модели PCEAS для растворов: *a* – этанол – бутанол-1: кр. 1 – коэффициент активности (этанол), кр. 2 – коэффициент активности (бутанол-1); *б* – этанол – ацетон с положительным отклонением от идеальности, кр. 1 – коэффициент активности (этанол), кр. 2 – коэффициент активности (ацетон)

На рис. 4, 5 приведены результаты расчета и экспериментальные данные для систем с формированием минимума точки вспышки [22].

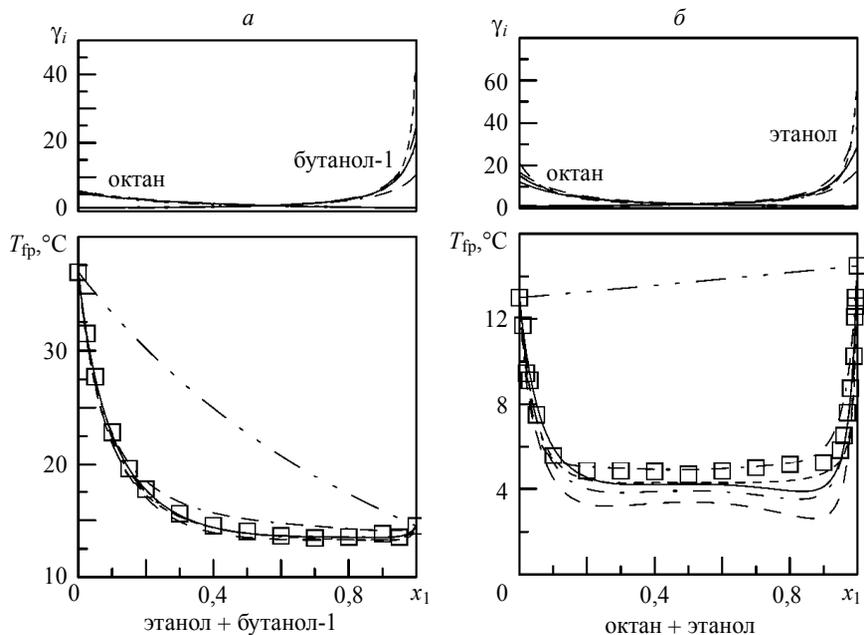


Рис. 4. Сравнение коэффициентов активности и предсказанной точки вспышки с экспериментальными данными [3] для растворов с формированием минимума точки вспышки октан – бутанол-1 (*a*) и октан – этанол (*b*): «□» – экспериментальные данные, «-» – оригинал UNIFAC; «----» – UNIFAC DORTMUND; «- · - ·» – UNIFAC Linghamby; «- - - -» – версия UNIFAC Bastos и др.; «- · - ·» – NRTL; «- - -» – идеальный раствор

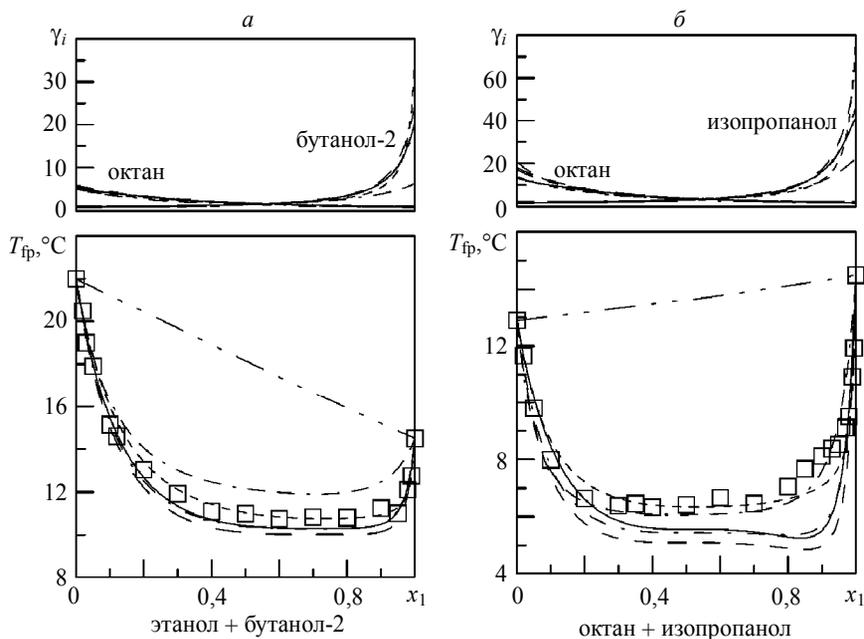


Рис. 5. Сравнение коэффициентов активности и предсказанной точки вспышки с экспериментальными данными [22] для растворов с формированием минимума точки вспышки октан – бутанол-2 (а) и октан – изопропанол (б): «□» – экспериментальные данные, «-» – оригинал UNIFAC; «----» – UNIFAC DORTMUND; «-·-·-» – UNIFAC Lingham; «- - - -» – версия UNIFAC Bastos и др.; «-·-·-» – NRTL; «-·-·-» – идеальный раствор

На рис. 6. приведены результаты расчета температуры кипения и температуры точки вспышки по модели PCEAS для раствора октан – бутанол-1 с формированием экстремумов точки вспышки.

На рис. 7 – результаты расчета температуры кипения и температуры вспышки по модели PCEAS для системы октан – этанол при нормальном атмосферном давлении.

На рис. 8 – результаты расчета температуры кипения и температуры вспышки по модели PCEAS для системы октан – бутанол -2 при нормальном атмосферном давлении.

На рис. 9 – результаты расчета температуры кипения и температуры вспышки по модели PCEAS для системы октан – изопропанол при нормальном атмосферном давлении.

Выводы

Представлен метод прогнозирования зависимости температуры вспышки бинарных горючих жидких смесей от состава раствора. Метод основан на использовании данных о давлении смеси, полученных с применением математического моделирования фазового равновесия при изобарных условиях. Для прогнозирования температуры вспышки бинарной смеси необходимы данные об энтальпии и температуре плавления, энтальпии и температуре кипения, а также температуре вспышки чистых компонентов.

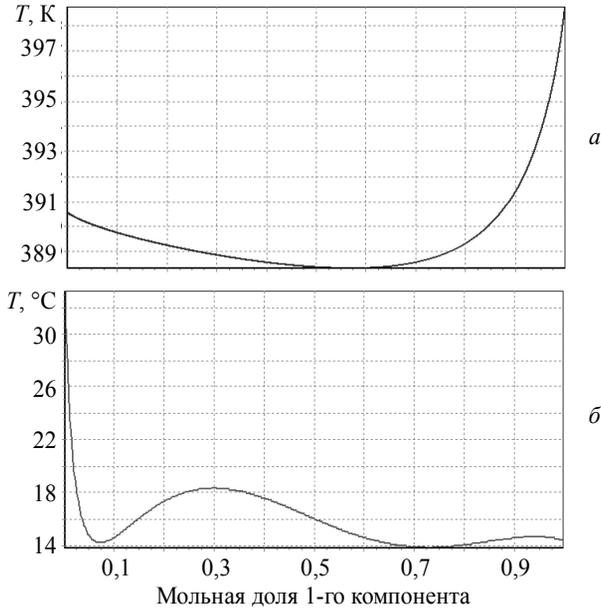


Рис. 6. Расчет температуры кипения и температуры точки вспышки по модели PCEAS для раствора октан –бутанол-1 с формированием экстремумов точки вспышки: *a* – температура кипения – расчет; *б* – температура точки вспышки – расчет

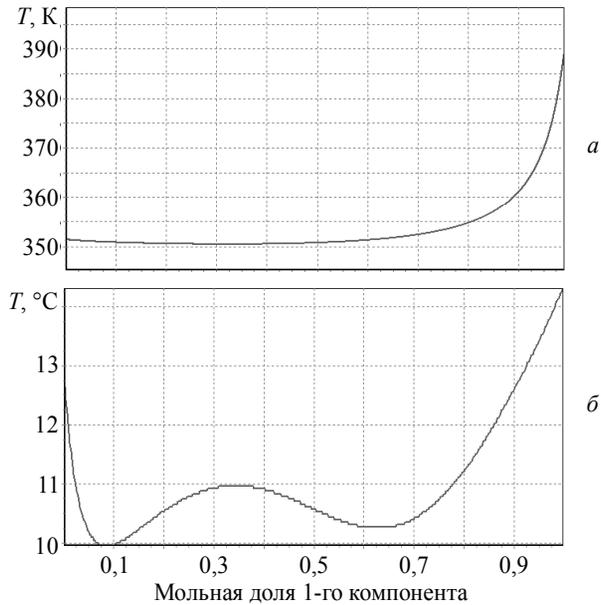


Рис. 7. Расчет температуры кипения и температуры точки вспышки по модели PCEAS для раствора октан – этанол с формированием экстремумов точки вспышки: *a* – температура кипения – расчет; *б* – температура точки вспышки – расчет

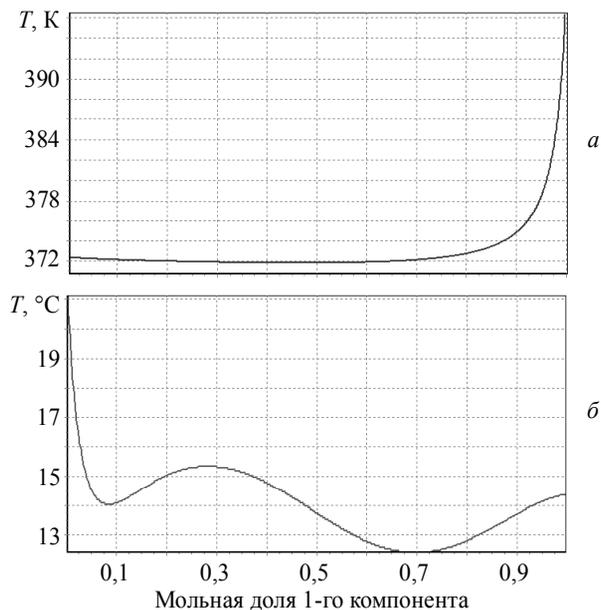


Рис. 8. Расчет температуры кипения и температуры точки вспышки по модели PCEAS для раствора октан – бутанол-2 с формированием экстремумов температуры вспышки: *a* – температура кипения – расчет; *б* – температура точки вспышки – расчет

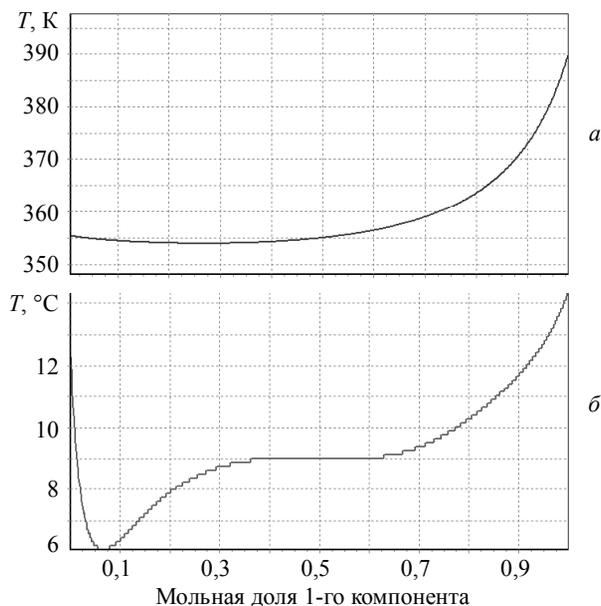


Рис. 9. Расчет температуры кипения и температуры точки вспышки по модели PCEAS для раствора октан – изопропанол с формированием минимума точки вспышки: *a* – температура кипения – расчет; *б* – температура точки вспышки – расчет

ЛИТЕРАТУРА

1. Торсуев Н.С. Границы воспламеняемости смеси паров летучих растворителей // Журнал химической промышленности. 1930. № 22–23. С. 1413–1414.
2. Liaw H.-J., Lee Y.-H., Tang C.-L., et al. A mathematical model for predicting the flash point of binary solutions // J. Loss Prev. Process. 2002. No. 15. P. 429–438.
3. Liaw H.-J. A general model for predicting the flash point of miscible mixture / H.-J. Liaw, Y.-Y. Chiu // J. Hazard Mater. 2006. No. 137. P. 38–46.
4. Affens W.A. Flammability properties of hydrocarbon solutions in air / W.A. Affens, G.W. McLaren // J. Chem Eng. Data. 1972. No. 17. P. 482–488.
5. White D. Flame spread on aviation fuels / D. White, C.L. Beyler, C. Fulper, J. Leonard // Fire Saf. J. 1997. No. 28. P. 1–31.
6. Garland R.W. Evaluating vent manifold inerting requirements: flash point modeling for organic acid-water mixtures / R.W. Garland, M.O. Malcolm // Process Saf. Prog. 2002. No. 21. P. 254–260.
7. Liaw H.-J. A model for predicting the flash point of ternary flammable solutions of liquid / H.-J. Liaw, C.-L. Tang, J.-S. Lai // Combust. Flame. 2004. No. 138. P. 308–319.
8. Liaw H.-J. A non-ideal model for predicting the effect of dissolved salt on the flash point of solvent mixtures / H.-J. Liaw, T.-A. Wang // J. Hazard Mater. 2007. No. 141. P. 193–201.
9. Catoire L. Estimation of closed cup flash points of combustible solvent blends / L. Catoire, S. Paulmier, V. Naudet // J. Phys. Chem. Ref. Data. 2006. No. 35. P. 9–14.
10. Gmehling J. Flash points of flammable liquid mixtures using UNIFAC / J. Gmehling, P. Rasmussen // Ind. Eng. Chem. Fundam. 1982. No. 21. P. 186–188.
11. Lee S.-J. The Lower Flash Points of Binary Systems Containing Non-flammable Component / S.-J. Lee, D.-M. Ha // Korean J. Chem. Eng. 2003. No. 20. P. 799–802.
12. Fredenslund A. Group-Contribution Estimation of Activity Coefficients in Nonideal Liquid Mixtures / A. Fredenslund, R.L. Jones, J. M. Prausnitz // AIChE J. 1975. No. 21. P. 1086–1099.
13. Vidal M. Prediction of minimum flash point behaviour for binary mixtures / M. Vidal, W.J. Rogers, M.S. Mannan // Process Saf. Environ. Prot. 2006. No. 84. P. 1–9.
14. Zabetakis M. G. Flammability Characteristics of Combustible Gases and Vapors // U.S. Dept of the Interior, Bureau of Mines, Washington, 1965.
15. Liaw H.-J. Binary liquid solutions exhibiting minimum flash-point behavior / H.-J. Liaw, T.-P. Lee, J.-S. Tsai, W.-H. Hsiao, M.-H. Chen, T.-T. Hsu // J. Loss Prev. Process. 2003. No. 16. P. 173–186.
16. Liaw H.-J. Binary mixtures exhibiting maximum flash-point behavior / H.-J. Liaw, S.-C. Lin // J. Hazard. Mater. 2007. No. 140. P. 155–164.
17. Weidlich U. A modified UNIFAC model. 1. Prediction of VLE, hE, and gamma Infinite / U. Weidlich, J. Gmehling // Ind. Eng. Chem. Res. 1987. No. 26. P. 1372–1381.
18. Gmehling J. A modified UNIFAC model. 2. Present parameter matrix and for different thermodynamic properties / J. Gmehling, J. Li, M. Schiller // Ind. Eng. Chem. Res. 1993. No. 32. P. 178–193.
19. Larsen B.L. A modified UNIFAC group contribution method for prediction of phase equilibria and heats of mixing / B.L. Larsen, P. Rasmussen, A. Fredenslund // Ind. Eng. Chem. Res. 1987. No. 26. P. 2274–2286.
20. Magnussen T. UNIFAC parameter table for prediction of liquid-liquid equilibria / T. Magnussen, P. Rasmussen, A. Fredenslund // Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev. 1981. No. 20. P. 331–339.
21. The UNIFAC Consortium / <http://unifac.ddbst.de/> (accessed 2010)[электронный ресурс].
22. Liaw H.-J. Prediction of miscible mixtures flash-point from UNIFAC group contribution methods / H.-J. Liaw, V. Gergaud, Y.-H. Li // Fluid Phase Equilibria. 2011. No. 300. P. 70–82.
23. Коган В.Б. Гетерогенные равновесия. Л.: Химия, 1968. 432 с.
24. Есина З.Н. Математическое моделирование фазового перехода жидкость – твердое / З.Н. Есина, М.П. Корчуганова, В.В. Мурашкин // Вестник Томского государственного

- университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 3 (16). С. 13–23.
25. Захаров Ю.Н. Фазовые переходы как причина катастроф на предприятиях переработки угля и нефти / Ю.Н. Захаров, З.Н. Есина, М.Р. Корчуганова // Кузбасс-2: сб. статей. Отдельный выпуск Горного информационно-аналитического бюллетеня (научно-технического журнала) Mining Informational and Analytical Bulletin (Scientific and Technical Journal). 2009. № ОВ17. М.: Издательство «Горная книга». С. 54–58.
 26. Есина З.Н. Прогнозирование температуры вспышки бинарных жидких смесей / З.Н. Есина, М.Р. Корчуганова, В.В. Мурашкин // Проблемы мониторинга окружающей среды: сб. трудов XI Всероссийской конференции с участием иностранных ученых (24–28 октября 2011 г.). Кемерово: КемГУ, 2011. С. 177–182.
 27. Есина З.Н. Математическое моделирование фазовых переходов в реальных растворах: монография. Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2011. 228 с.
 28. Есина З.Н. Phase Chart Eutectic and Azeotropic System (PCEAS): Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012618394 / З.Н. Есина, М.Р. Корчуганова, В.В. Мурашкин (RU) – № 2012616324; заявл. 25.07.2012; Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ, г. Москва, 17 сентября 2012 г.

Статья поступила 27.06.2012 г.

Esina Z.N., Murashkin V.V., Korchuganova M.R. PREDICTION OF THE FLASH POINT OF BINARY INTERMIXTURES ACCORDING TO DATA ABOUT ACTIVITY COEFFICIENTS. A method for calculating the flash point by results of simulation of the liquid–solid body equilibrium at constant pressure using the Gibbs equation is discussed. The applied prediction model for the flash point is based on the modified Le Chatelier equation, Antoine equation, and the model for estimating the activity coefficient.

Keywords: binary intermixtures, flash point, boiling point, activity coefficients, coefficient of solvation, coefficient of association.

ESINA Zoya Nikolaevna (Kemerovo state university)

E-mail: ezn2@rambler.ru

MURASHKIN Vitaly Vasilyevich (Representative office «Weishaupt»)

E-mail: markarina@mail.ru

KORCHUGANOVA Margarita Rashidovna (Kemerovo state university)

E-mail: zitner@mail.ru

УДК 539.3

Т.В. Колмакова

**ДЕФОРМАЦИОННОЕ ПОВЕДЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ОБРАЗЦОВ
КОМПАКТНОЙ КОСТНОЙ ТКАНИ, ОТЛИЧАЮЩИХСЯ
РАСПОЛОЖЕНИЕМ КОЛЛАГЕНО-МИНЕРАЛЬНЫХ ВОЛОКОН**

Представлены результаты расчета напряженно-деформированного состояния модельных образцов компактной костной ткани при осевом сжатии, отличающихся расположением коллагено-минеральных волокон. Результаты показали, что образцы разных типов имеют разную неравномерную деформацию в направлениях, перпендикулярных направлению сжатия, что вызвано соответствующим расположением коллагено-минеральных волокон. Продольный модуль упругости образца с параллельным оси кости направлением коллагено-минеральных волокон в 1,5 раза больше модуля упругости образца с перпендикулярным направлением волокон. Близкие по значениям продольные модули упругости имеют образцы с переменным направлением волокон и с расположением волокон под углами $\pm 45^\circ$.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, компактная костная ткань, остеоны, коллагено-минеральные волокна, напряженно-деформированное состояние.

Необходимость восстановления или замены участка кости в результате удаления доброкачественных или злокачественных новообразований, воспалительных процессов, врожденных аномалий строения требует разработки биомеханически совместимых с костной тканью имплантатов [1–3]. Структура и состав костной ткани, определяющие ее механические свойства, варьируются в зависимости от ее анатомического расположения и отличны для разных индивидуумов. В связи с этим, для разработки и подбора индивидуальных механически совместимых с костной тканью имплантатов актуальным является исследование ее деформационного поведения с учетом индивидуальных особенностей строения.

В работе костная ткань рассматривается как композиционный материал, где в качестве армирующих элементов конструкции выступают остеоны, состоящие из концентрически вложенных друг в друга костных пластинок (ламелл), а в качестве матрицы – оставшиеся после ремоделирования кусочки цилиндрических ламелл [4], между остеонами и матрицей располагается слой материала, называемый цементной линией. Внутри каждого остеона находится Гаверсов канал (рис. 1).

Образец кортикальной кости моделируется согласно методике, представленной в работе [5].

На рис. 1 изображена конечно-элементная модель образца компактной костной ткани.

Материал матрицы и остеонов считается трансверсально изотропным, материал цементной линии – изотропным. Эффективные механические свойства материала остеонов, матрицы, цементной линии рассчитываются с учетом ориентации коллагено-минеральных волокон [6] согласно четырем типам [7]. I тип (поперечные волокна) – коллагено-минеральные волокна в ламеллах остеонов распо-

ложены перпендикулярно Гаверсову каналу (оси кости), волокна также могут располагаться под углом $\pm 45^\circ$ к оси остеона. II тип (переменные волокна) – волокна меняют ориентацию с параллельной на перпендикулярную при переходе от одной ламеллы к другой. III тип (продольные волокна) – волокна расположены параллельно оси кости.

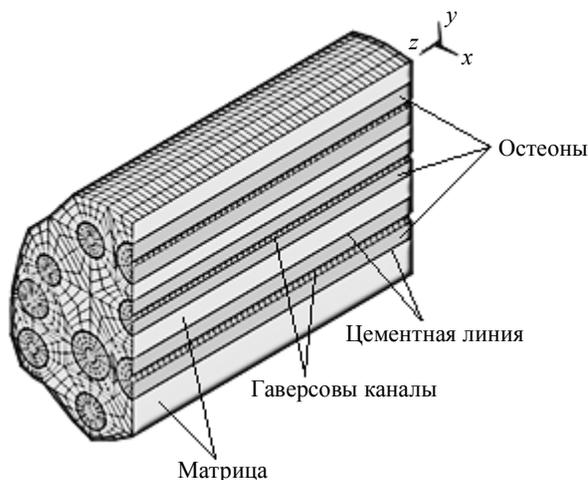


Рис. 1. Конечно-элементная модель компактной костной ткани, отсеченная плоскостью YZ

Считается, что массовая доля содержания минералов в кости, равна 60 %, пористость за счет Гаверсовых каналов равна 3 % (рис. 1), пористость за счет Фолькмановских каналов, располагающихся в кости перпендикулярно Гаверсовым, равна 2 % и учитывается при расчете эффективных механических характеристик структурных составляющих кости. Плотность образца кортикальной кости $\rho_k = 2,07 \text{ г/см}^3$.

Проведен расчет напряженно-деформированного состояния модельных образцов компактной костной ткани при сжатии вдоль оси z . Расчет проводился в программном комплексе ANSYS с использованием метода конечных элементов.

На рис. 1 плоскость нагружения представлена на переднем плане, плоскость закрепления – на заднем.

На рис. 2 представлены распределения напряжений (a) и деформаций (b) при напряжении сжатия 98 МПа на участках модельных образцов различных типов, отсеченных плоскостями YZ .

Как видно из рис. 2 образцы I и $I_{\pm 45^\circ}$ типов имеют подобный характер распределения напряжений и деформаций по образцу, аналогичный вывод можно сделать для образцов II и III типов.

Для образцов костной ткани I и $I_{\pm 45^\circ}$ типов, наблюдается равномерное распределение напряжений в остеонах вдоль образца, по сравнению с образцами двух других типов (рис. 2, a). И наоборот, более равномерное распределение напряжений в матрице реализуется для образцов II и III типов (рис. 2, a). Равномерность распределения деформаций в остеонах и матрице наблюдается для образцов I и $I_{\pm 45^\circ}$ типов в отличие от образцов II и III типов (рис. 2, b).

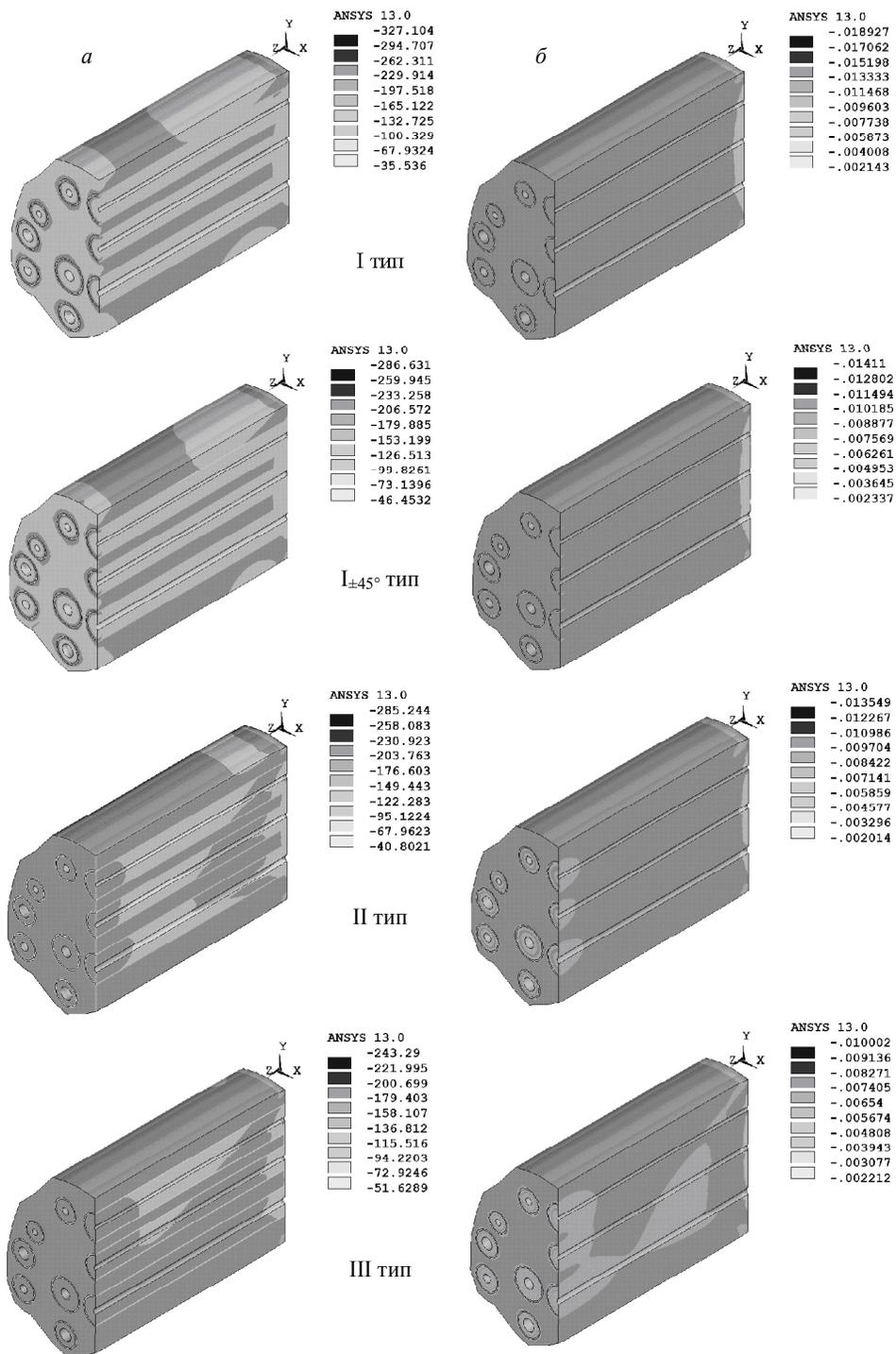


Рис. 2. Распределение напряжений σ_z , МПа (а), деформаций ϵ_z (б) в модельных образцах компактной костной ткани различных типов

На рис. 3 представлены параметры mUi (mUx , mUy , mUz), показывающие степень проявления видов деформации, реализующихся в трех взаимно перпендикулярных направлениях при осевом сжатии образцов различных типов. Параметр mUi равен отношению значения максимального по абсолютной величине перемещения в одном из направлений системы координат к сумме максимальных по абсолютной величине перемещений в трех взаимно перпендикулярных направлениях:

$$mUi = \frac{\max |Ui|}{(\max |Ux| + \max |Uy| + \max |Uz|)}, \quad i = x, y, z.$$

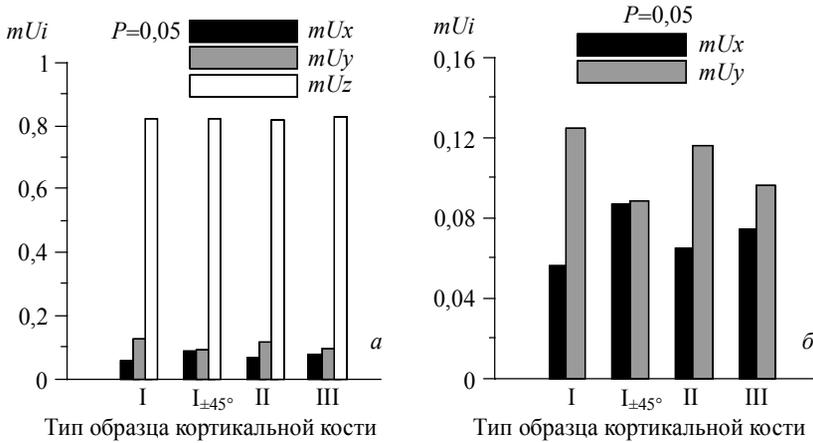


Рис. 3 Параметры степени проявления вида деформации, реализующегося в определенном направлении, для образцов с различным расположением коллагено-минеральных волокон, имеющих пористость $P=0,05$

Из рис. 3 видно, что для всех типов образцов кортикальной (компактной) костной ткани в большей степени по сравнению с деформацией растяжения в других направлениях (рис. 3, а, mUx , mUy) реализуется деформация сжатия в направлении оси Z (рис. 3, а, mUz). Параметр mUz имеет примерно одинаковые значения для образцов разных типов (рис. 3, а), что означает одинаковое проявление деформации сжатия. Значения параметров mUx и mUy , показывающие степень проявления неравномерной деформации растяжения в направлениях x и y , отличаются для разных образцов (рис. 3, б). Из всех образцов в большей степени реализуется неравномерная деформация растяжения в направлении оси y для образца с направлением коллагено-минеральных волокон перпендикулярно оси кости (I тип). И для него же в меньшей степени по сравнению с остальными видами образцов реализуется неравномерная деформация растяжения в направлении оси x (рис. 3, б). Для образца кортикальной кости I \pm 45° типа примерно в равной степени проявляются деформации растяжения в направлениях осей x и y (рис. 3, б).

На рис. 4 представлены расчетные продольные модули упругости при сжатии образцов разных типов. Модуль упругости образца III типа, т.е. образца с расположением коллагено-минеральных волокон параллельно оси кости, в 1,5 раза больше модуля упругости образца I типа с расположением коллагено-минеральных волокон перпендикулярно оси кости. Модули упругости образца с переменными волокнами и образца с расположением коллагено-минеральных волокон под углами $\pm 45^\circ$ имеют близкие значения.

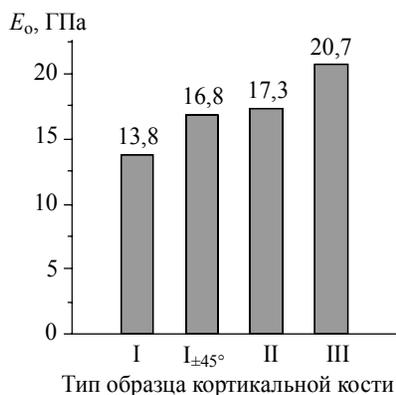


Рис. 4. Расчетные продольные модули упругости образцов компактной костной ткани разных типов при осевом сжатии

образцы II и III типов имеют подобный характер распределения напряжений σ_z и деформаций ε_z при осевом сжатии.

В таблице представлены расчетные продольные модули упругости образцов разных типов в сравнении с экспериментальными результатами, представленными в работах X.N. Dong, X.E. Guo [8] с указанием только пористости исследуемых образцов за счет Фолькмановских и Гаверсовых каналов 0,05, E. Novitskaya, Po-Yu Chen [9] с указанием плотности исследуемого образца кортикальной кости $\rho_k = 2,06 \pm 0,01$ г/см³, P. Zioupos, R.B. Cook [10] для образцов с объемной долей костной ткани $BV/TV=0,95$. Близость расчетных и экспериментальных значений продольного модуля упругости свидетельствует об адекватности полученных результатов.

Таким образом, в результате проведенных исследований можно заключить, что образцы кортикальной костной ткани I и $I_{\pm 45^\circ}$ типов и

Продольный модуль упругости образцов компактной костной ткани

ρ_k , г/см ³	P	$BV/TV=1-P$	Тип	E_0 , ГПа	Ссылки
2,07	0,05	0,95	I	13,8	Расчет
2,07	0,05	0,95	$I_{\pm 45^\circ}$	16,8	Расчет
2,07	0,05	0,95	II	17,3	Расчет
2,07	0,05	0,95	III	20,7	Расчет
	0,05			15,6–20,7	X.N. Dong, X.E. Guo [8]
2,06±0,01				22,6±1,2	Novitskaya, Po-Yu Chen [9]
		0,95		17,1–20,7	P. Zioupos, R. B. Cook [10]

Образцы компактной костной ткани, отличающиеся направлением коллагено-минеральных волокон, имеют разное неравномерное деформационное поведение в направлениях, перпендикулярных направлению нагружения.

Продольный модуль упругости образца III типа в 1,5 раза больше модуля упругости образца I типа. Образцы $I_{\pm 45^\circ}$ и II типов имеют близкие по значениям продольные модули упругости, однако отличаются распределением напряжений и деформаций по образцам в силу разного неравномерного деформационного поведения в направлениях, перпендикулярных направлению приложения нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баринов С.М. Керамические композиционные материалы на основе фосфатов кальция для медицины // Успехи химии. 2010. Т. 79. № 1. С. 15–32.
2. Бужкова С.П., Хлусов И.А., Кульков С.Н. Пористая циркониевая керамика для эндопротезирования костной ткани // Физическая мезомеханика. 2004. № 7. Спец. выпуск. Ч. 2. С. 127–130.
3. Путляев В.И. Современные биокерамические материалы // Соросовский образовательный журнал. 2004. Т. 8. № 1. С. 44–50.
4. Утенькин А.А. Кость – многотажный композит // Химия и жизнь. 1981. № 4. С. 38–40.

5. Колмакова Т.В. Метод моделирования структуры компактной костной ткани // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3. № 4. С. 413–420.
6. Колмакова Т.В. Моделирование структуры и механических свойств компактной костной ткани // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 6. С. 79–85.
7. Фигурска М. Структура компактной костной ткани // Российский журнал биомеханики. 2007. Т. 11. № 3. С. 28–38.
8. X.N. Dong, X.E. Guo Geometric determinants to cement line debonding and osteonal lamellae failure in osteon pushout tests // J. Biomech. Eng. 2004. V. 126. P. 387–390.
9. Novitskaya E., Chen Po-Yu, Lee S., et al. Anisotropy in the compressive mechanical properties of bovine cortical bone and the mineral and protein constituents // Acta Biomaterialia. 2011. No. 7. P. 3170–3177.
10. Zioupos P., Cook R.B., Hutchinson J.R. Some basic relationships between density values in cancellous and cortical bone // J. Biomechanics. 2008. V. 41. P. 1961–1968.

Статья поступила 13.03.2013 г.

Kolmakova T. V. DEFORMATION BEHAVIOR OF THE MODEL COMPACT BONE TISSUE SAMPLES DIFFERING IN ORIENTATION OF COLLAGEN-MINERAL FIBERS. The calculation results for the stress-strain state of model compact bone tissue samples differing in orientation of collagen-mineral fibers are presented for the case of axial compression. The results have shown that samples of different types have different non-uniform deformation in directions perpendicular to the compression direction, which is caused by the corresponding orientation of collagen-mineral fibers. The longitudinal modulus of elasticity of a sample with parallel orientation of collagen-mineral fibers is larger than the module of elasticity of a sample with the perpendicular direction of fibers by a factor of 1,5. The neighboring values of the longitudinal moduli of elasticity are typical for samples with variable direction of fibers and with the location of fibers at angles of $\pm 45^\circ$.

Keywords: Computer simulation, compact bone tissue, osteons, collagen-mineral fibers, stress and strain state

KOLMAKOVA Tatyana Vitalievna (Tomsk State University)
E-mail: kolmakova@ftf.tsu.ru

УДК 629.78.001

Н.Н. Севастьянов**КОНЦЕПЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ
И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ СПУТНИКА СВЯЗИ «ЯМАЛ».
ШТАТНАЯ СХЕМА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ**

Выбрана концепция построения системы ориентации и управления движением спутника «Ямал» на основе новых научно-технических подходов, заключающихся в создании бесплатформенных инерциальных навигационных систем и цифровых управляющих машин. Применение концепции БИНС и бортовой ЦВМ обуславливает создание развитой автономной диагностики работоспособности аппаратуры системы управления и контроля.

Ключевые слова: *системы ориентации, инерциальные навигационные системы, инерционные маховики, кватернионы.*

Технические требования, предъявленные при разработке системы ориентации и управления движением спутника «Ямал», сформированные в 1995 году при начале работ по этому спутнику, соответствовали традиционным характеристикам, принятым для современных спутников связи. Во-первых, точность наведения контурных антенн ретранслятора относительно осей орбитальной системы координат (ОСК) должна быть не хуже 10 угл. мин (углы тангажа и рысканья) и не хуже 30 угл. мин по углу курса. Во-вторых, точность удержания положения космического аппарата (КА) в его точке стояния на геостационарной орбите должна быть не хуже 5–10 угл. мин. При выборе концепции построения системы было принято, что решение второй задачи – точного удержания спутника в точке стояния – рационально осуществить традиционным способом: точные навигационные измерения орбиты спутника обеспечивает Земля, т.е. наземный комплекс управления (НКУ), он же рассчитывает необходимые маневры изменения орбиты спутника для этой цели [1–3]. Бортовой комплекс управления (БКУ) реализует заданные НКУ маневры путем включения реактивных двигателей (РД), изменяющих движение спутника. При этом, традиционно, ввиду малой величины тяги РД, особенно при использовании электрореактивных ионных двигателей, НКУ рассчитывает ускорения от работы РД и формирует установки для маневра в виде времени включения двигателей. Эти данные используются БКУ при автономном управлении при исполнении маневров. Однако при решении первой задачи – ориентации спутника – было решено использовать новые научно-технические подходы к построению системы ориентации и управления движением, уже апробированные и показавшие свою перспективность при создании в РКК «Энергии» транспортных пилотируемых кораблей «Союз-Т/ТМ», грузовых кораблей «Прогресс-М/М1» и станции «Мир» [1].

В основе этих новых подходов лежит концепция построения задач ориентации и управления движением на основе бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) и цифровых управляющих машин. Управление на принципах корректируемой БИНС строится таким образом, что инерциальными средствами моделируется и определяется требуемое положение ориентации или траектория движения КА.

Датчики ориентации или относительного движения используются для корректирования моделируемого средствами БИНС движения. Само же управление строится на основе информации по углам, угловым скоростям, линейным и скоростным координатам, получаемым инерциальными средствами. Это позволяет получить существенно более высокое качество управления, определяемое, в том числе, и высоким качеством инерциальной информации (высоким разрешением, низким уровнем шумов, временных запаздываний и т.п.).

Использование бесплатформенных ИНС для управления в космосе дает ряд дополнительных преимуществ. В первую очередь, это позволяет минимизировать приборный состав и соответственно вес и потребление системы: в ее составе необходимы только инерциальные датчики БИНС (датчики угловой скорости и акселерометры) и датчики первичной информации (ориентации, относительного движения). Инерциальные датчики устанавливаются прямо на корпус изделия (как и в схемах прямого управления), но при этом реализуется полная инерциальная система, эквивалентная по своим функциям сложным и громоздким гироскопическим платформам. Требования к используемым датчикам первичной информации могут быть существенно упрощены за счет появляющихся алгоритмических возможностей системы, можно сократить количество датчиков ориентации, отказаться от свободных гироскопов и т.п. Резервирование аппаратуры БИНС может быть выполнено существенно более экономным образом: от минимальной схемы резервирования (четыре измерительных канала относительно исходных трех) до схемы из шести измерительных каналов, обладающей способностью сохранять работоспособность до трех произвольных отказов.

Применение концепции БИНС и бортовой ЦВМ создают условия для создания развитой автономной диагностики работоспособности аппаратуры системы управления и контроля, выполняемых системой режимов управления, основанного на сравнении модельного и реального движений, что необходимо для повышения надежности работы системы. С точки зрения построения процессов регулирования БИНС позволяет разделить управление на два контура: кинематический – построение требуемых опорных базисов, и динамический, описывающий процесс стабилизации в выбранном опорном базисе.

1. Кинематический контур ориентации

Общая структурная схема кинематического контура системы ориентации спутника связи «Ямал-100» (этот спутник явился базовой платформой для последующих спутников «Ямал-200») показана на рис. 1.

Для пояснения принципов работы этого контура введем следующие системы координат (базисы) и их обозначения [1]:

- геоцентрическую экваториальную инерциальную систему координат I_7 , оси которой распложены следующим образом: i_1 – по линии весеннего равноденствия, i_3 – направлена на северный полюс и i_2 – дополняет систему координат до правой;
- орбитальную систему координат Q , такую, что q_1 – направлена по геоцентрическому радиусу-вектору от центра Земли, q_2 – по направлению орбитального движения, q_3 – нормально к плоскости орбиты;
- направление на Солнце $-s_1$, другие оси могут быть расположены произвольно или доопределены.

Можно считать солнечную систему координат инерциальной, так как вращение оси s_1 в пространстве происходит с угловой скоростью годового движения

Земли, т.е. примерно 1 угл. градус в сутки. Орбитальная система координат вращается с угловой скоростью вращения Земли ω^0 равной $7,292116 \cdot 10^{-5}$ рад/с или 15 (угл. град/ч) = 15 (угл. мин/мин) = 15(угл. с/с).

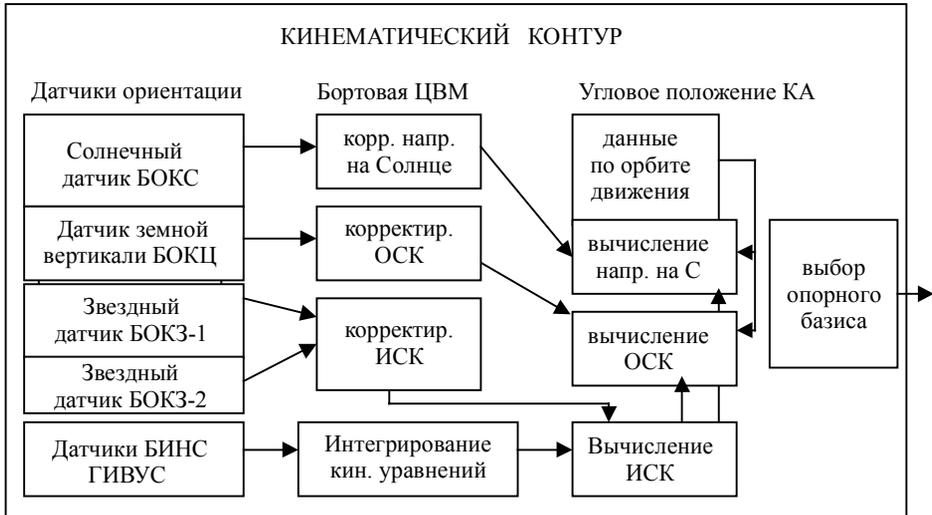


Рис. 1. Кинематический контур построения ориентации КА «Ямал»

Заметим, что все описываемые далее датчики и исполнительные органы системы ориентации были специально заказаны для КА «Ямал», поскольку в то время не было аппаратуры, работающей в открытом космосе и с требуемым высоким ресурсом функционирования.

В качестве инерциальных датчиков угловой скорости НИИ ПМ был заказан прибор ГИВУС (гироскопический измеритель угловой скорости) на основе высокоточного поплавкового гироскопа. Прибор содержал 4 измерительных оси, расположенные по диагоналям куба; диапазон точного измерения угловых скоростей $\pm 0,4$ угл.град/с, уходы не более 10^{-3} угл. град./ч, дискрет измеряемого угла поворота 0,3 угл. сек. Все четыре измерительных оси были сделаны с независимой электроникой так, чтобы при любом отказе обеспечить возможность измерения трех пространственных компонент угловой скорости.

В качестве оптических датчиков ориентации на КА «Ямал» был впервые в отечественной практике применен широкоугольный звездный датчик с использованием ПЗС-матриц для приема оптического изображения звездного неба и его компьютерной обработки (блок определения координат звезд – БОКЗ). БОКЗ позволяет определять ориентацию практически при любом положении КА относительно инерциальной системы координат J_{2000} , в которой задан каталог координат всех звезд. За счет достаточно широкого поля зрения (8 угл. град.) прибор может визировать более 3-х звезд и, тем самым, определять три угловые координаты (правда, с различной точностью, самая большая погрешность получается по оптической оси датчика. Точность измерения датчика по двум осям не хуже 1 угл. мин, по оптической оси – не хуже 3 угл. мин.

Появление такого датчика можно рассматривать как революцию в задачах ориентации космических аппаратов: датчик определяет полную (трехосную) ори-

ентацию, имеет предельно достижимую точность и может работать на любой орбите. Именно это направление получило максимально широкое развитие в современном космическом приборостроении. Современные западные датчики имеют более высокую точность, ресурс работы не менее 15 лет, время обновления информации порядка 0,1 с, что позволяет осуществлять ориентацию КА без использования инерциальных датчиков.

С целью повышения надежности в системе ориентации установлено два датчика БОКЗ, и режим ориентации с использованием одного или двух параллельно работающих датчиков является основным.

Для получения функционального резервирования и обеспечения дежурных режимов ориентации были разработаны ещё два прибора на ПЗС-линейках, работающих в видимой части спектра и компьютерной обработке сигналов: блок определения координат Солнца – БОКС и блок определения координат центра Земли БОКЦ. Прибор БОКС измеряет направление на Солнце в поле зрения $92^\circ \times 48^\circ$ с точностью измерения не хуже 2 угл. мин (две координаты). Прибор БОКЦ имеет точность не хуже 5 угл. мин при поле зрения $2^\circ \times 2^\circ$.

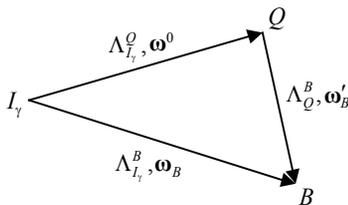


Рис. 2. Системы координат, кватернионы и угловые скорости

Для описания процессов корректирования и построения опорных базисов используем формализм кватернионов и их обозначения [5], соответствующие заданным переходам между основными системами координат, представленных на рис. 2.

Опорных базисов, в которых необходимо ориентировать КА, всего два. Это либо инерциальный, которым, в частности, является направление на Солнце, либо вращающийся – ОСК, в котором осуществляется штатная ориентация КА. Для выполнения ориентации в инерциальной системе координат нужно иметь текущую (непрерывную) информацию о положении базиса B относительно этой инерциальной системы координат; для ориентации в ОСК нужно иметь текущую информацию о положении B относительно Q , т.е. кватернион Λ_Q^B .

Рассмотрим вычислительные процедуры определения текущих кватернионов.

1.1. Приведение к неподвижному базису

В связанном с КА базисе B измеряется угловая скорость его вращения ω_B и путем численного интегрирования кинематических уравнений (задача БИНС)

$$2\dot{\Lambda}_{I^*}^B = \Lambda_{I^*}^B \circ \omega_B, \quad \Lambda_{I^*}^B = \Lambda_{I^*}^B(t) \quad (1)$$

определяется текущий кватернион, задающий положение B относительно некоторого инерциального базиса I^* , совпадающего с B на момент начала интегрирования (при единичных начальных условиях). Положение базиса I^* относительно других инерциальных базисов неизменно (здесь мы пока не учитываем уход БИНС), поэтому задача нахождения текущего кватерниона относительно заданного инерциального базиса, к примеру I_γ , решается разовым вычислением этого постоянного кватерниона взаимного положения:

$$\Lambda_{I_\gamma}^B(t) = \Lambda_{I_\gamma}^{I^*} \circ \Lambda_{I^*}^B(t), \quad \Lambda_{I_\gamma}^{I^*} = \text{const}. \quad (2)$$

Существует два способа определения положения: выставка и корректирование.

Выставка осуществляется как разовая операция при наличии полной информации о положении базисов. Такую информацию дает датчик БОКЗ, рассмотрим более детально этот процесс. БОКЗ определяет кватернион рассогласования собственной измерительной системы координат (базис датчика) относительно инерциальной системы координат J_{2000} , для простоты изложения примем, что базис датчика совпадает с B , т.е. на какой-то момент времени измеряется $\Lambda_{J_{2000}}^B$. Положение базиса I_γ относительно J_{2000} известно, и оно определяется прецессией земной оси вращения [1], т.е. известен кватернион $\Lambda_{J_{2000}}^{I_\gamma}$.

Имеем такое соотношение переходов от базиса к базису [5]

$$\Lambda_{J_{2000}}^B = \Lambda_{J_{2000}}^{I_\gamma} \circ \Lambda_{I_\gamma}^B(t) = \Lambda_{J_{2000}}^{I_\gamma} \circ \Lambda_{I_\gamma}^{I^*} \circ \Lambda_{I^*}^B(t), \quad (3)$$

откуда может быть найден кватернион $\Lambda_{I_\gamma}^{I^*}$ по сути дела по одному измерению БОКЗ. Далее текущий кватернион $\Lambda_{I_\gamma}^B(t)$, необходимый для управления, может быть получен либо с помощью БИНС по соотношениям (2), либо при непрерывных текущих измерениях БОКЗ:

$$\Lambda_{I_\gamma}^B(t) = \tilde{\Lambda}_{J_{2000}}^{I_\gamma} \circ \Lambda_{J_{2000}}^B(t). \quad (4)$$

Если известно положение базиса I_γ т.е. $\Lambda_{I_\gamma}^B(t)$, относительно которого положение Солнца также хорошо известно (обозначим его вектором-отображением S_{I_γ}), то можно вычислительной процедурой определить положение Солнца в связанной системе координат B :

$$S_B = \tilde{\Lambda}_{I_\gamma}^B(t) \circ S_{I_\gamma} \circ \Lambda_{I_\gamma}^B = \Lambda_B^{I_\gamma} \circ S_{I_\gamma} \circ \Lambda_{I_\gamma}^B, \quad (5)$$

по которому можно выполнять приведение заданной оси КА к этому направлению.

Отсюда видно, какими уникальными возможностями обладает звездный датчик.

Рассмотрим далее процесс корректирования. В отличие от процесса выставки, происходящего в виде однократных вычислительных операций, корректирование – это непрерывный процесс приведения (совмещения) базисов, происходящий с некоторой угловой скоростью, формируемой, когда недоступна информация точных измерений.

Пусть методами БИНС формируется в пространстве модельное направление на Солнце s^* и этому вектору сообщается угловая скорость корректирования направления Ω_k и пусть имеется реальное направление s , измеряемое, например, датчиком Солнца. Задача состоит в определении вида векторной функции Ω_k , которая должна обеспечить устойчивый процесс приведения и совмещения модельного направления с истинным. Воспользуемся методом Ляпунова: введем положительно определенную функцию $U = 1 - s \cdot s^*$, которая положительно определена и обращается в нуль при совмещении рассматриваемых направлений. Изменения этих векторов (уравнения движения) будут такими:

$$ds/dt = 0, \quad ds^*/dt = \Omega_k \times s^*.$$

Производная от функции U в силу этих уравнений движения будет иметь вид

$$\frac{dU}{dt} = \mathbf{s} \cdot (\Omega_k \times \mathbf{s}^*) = [\mathbf{s}, \Omega_k, \mathbf{s}^*] \quad (6)$$

– смешанного произведения. Знакопостоянность производной (6) достигается, если векторы $\mathbf{s}, \Omega_k, \mathbf{s}^*$ образуют некопланарную тройку. Очевидно, что угловое рассогласование векторов \mathbf{s}, \mathbf{s}^* может быть определено их векторным произведением $\mathbf{s} \times \mathbf{s}^* = \delta$, и если взять скорость коррекции в виде

$$\Omega_k = -\mathbf{f}(\delta), \text{ такое, что } \mathbf{f}(\delta) \cdot \delta \geq 0, \quad (7)$$

то получим знакопостоянную функцию производной. Таким образом, управление (7) обеспечивает устойчивое приведение моделируемого направления к истинному. Тем самым, ориентацию на Солнце можно выполнить такими способами:

- путем построения базиса I_γ и наведением на расчетное положение Солнца,
- используя датчик БОКС, построить инерциальную модель направления на Солнце,
- выполнить прямое управление по сигналам БОКС.

Можно показать далее, что управление такого же типа выполняет приведение одного корректируемого базиса (с помощью угловой скорости приведения Ω_k) к другому, если вместо δ использовать векторную часть кватерниона рассогласования между приводимым и исходным базисами. Действительно, пусть задан исходный инерциальный базис I и его модель I^* и пусть модель имеет угловую скорость коррекции Ω_k , тогда кватернион поворота от одного базиса к другому $\Lambda_{I^*}^I$ будет изменяться в соответствии с таким кинематическим уравнением:

$$2\dot{\Lambda}_{I^*}^I = \Lambda_{I^*}^I \circ \Omega_k. \quad (8)$$

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$U = 1 - \lambda_0^2 = \lambda \cdot \lambda. \quad (9)$$

Здесь (λ_0, λ) – скалярная и векторная части кватерниона $\Lambda_{I^*}^I$, она везде положительна, кроме точки совпадения базисов. Производная от (9) в силу уравнений (8) будет равна

$$\frac{dU}{dt} = -2\lambda_0 \dot{\lambda}_0 = \lambda_0 (\lambda \cdot \Omega_k),$$

т.е. управление типа (8) или же

$$\Omega_k = -\mathbf{f}(\lambda_0)(\lambda \cdot \mathbf{f}(\lambda)), \quad (10)$$

где

$$\lambda \cdot \mathbf{f}(\lambda) \geq 0, \quad \lambda_0 \mathbf{f}(\lambda_0) \geq 0 \quad (11)$$

– обеспечивает приведение модельного базиса к инерциальному. Вид функций (7) или (11) – достаточно широкий, вплоть до того, что нужно знать в какую сторону нужно организовать движение – и это обеспечивает совмещение базисов.

1.2. Приведение к вращающемуся базису

Таким вращающимся базисом является ОСК и ориентация в этом базисе является основным видом ориентации спутника связи. Расчетное положение ОСК в инерциальном базисе I_γ может быть вычислено по баллистическим данным по

орбите КА. Если задано орбитальное движение КА в виде $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$, то оси ОСК определяются следующим образом:

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{r}/r, \mathbf{q}_3 = (\mathbf{r} \times \mathbf{v})/|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|, \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_1. \quad (12)$$

Задавая тем или иным образом орбиту движения, можно построить вычислительный процесс формирования текущего положения ОСК относительно I_γ , т.е. получить $\Lambda_{I_\gamma}^Q(t)$. Требуемый для ориентации текущий кватернион $\Lambda_Q^B(t)$ получается таким образом (рис. 2):

$$\Lambda_Q^B(t) = \tilde{\Lambda}_{I_\gamma}^Q(t) \circ \Lambda_{I_\gamma}^B(t), \quad (13)$$

где текущий кватернион определяется процедурой (2), описанной выше. Данный алгоритм опирается на выставку БИНС с помощью БОКЗ, положение ОСК вычисляется – этот метод является основным и самым высокоточным.

Резервным режимом построения ОСК является режим с использованием датчика БОКЦ –построителя местной вертикали, с помощью этой информации также можно осуществить ориентацию в ОСК, т.е. построить методами БИНС модель ОСК, приводимую к истинной ОСК за счет корректирования.

Рассмотрим две ОСК: истинную Q и её модель Q^* , движение которых будем описывать кватернионами $\Lambda_{I_\gamma}^Q$ и $\Lambda_{I^*}^{Q^*}$ – заметим, что модель ОСК можно задать только относительно какого-то инерциального (неизвестного) базиса. Кинематические уравнения изменения рассматриваемых кватернионов будут следующими:

$$2\dot{\Lambda}_{I_\gamma}^Q = \Lambda_{I_\gamma}^Q \circ \boldsymbol{\omega}_Q^0 = \boldsymbol{\omega}_{I_\gamma}^0 \circ \Lambda_{I_\gamma}^Q, \quad 2\dot{\Lambda}_{I^*}^{Q^*} = \Lambda_{I^*}^{Q^*} \circ (\boldsymbol{\omega}_{Q^*}^{*0} + \Omega_{kQ^*}) = (\boldsymbol{\omega}_{I^*}^{*0} + \Omega_{kl^*}) \circ \Lambda_{I^*}^{Q^*}, \quad (14)$$

здесь $\boldsymbol{\omega}_Q^0$ в первом уравнении – орбитальная угловая скорость вращения ОСК, происходящего по третьей его оси \mathbf{q}_3 , т.е. $\boldsymbol{\omega}_Q^0 = (0, 0, -\omega^0)$. Второе уравнение, описывающее движение моделирующего ОСК базиса, должно иметь такую же орбитальную скорость $\boldsymbol{\omega}_{Q^*}^{*0} = (0, 0, -\omega^{*0})$, возможно отличающуюся по величине (неточность моделирования), кроме того в уравнении присутствует угловая скорость корректирования модельного базиса в проекциях на оси модельной системы координат, которую необходимо определить. Нам удобно будет для построения процесса корректирования рассматривать относительное движение двух базисов: модельного и истинного. Введем кватернион расстояния между ними (опустим для удобства индексы в этом кватернионе)

$$\Lambda = \Lambda_{I^*}^{Q^*} \circ \tilde{\Lambda}_{I_\gamma}^Q \circ \Lambda_{I_\gamma}^{I^*} \circ \Lambda_{I^*}^{Q^*} = \Lambda_{I_\gamma}^{I^*} \circ \Lambda_{I_\gamma}^{I^*} \circ \Lambda_{I^*}^{Q^*}.$$

Дифференцируя это равенство и подставляя производные от переменных кватернионов согласно равенствам (14), получаем

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ (\boldsymbol{\omega}_{Q^*}^{*0} + \Omega_{kQ^*}) - \boldsymbol{\omega}_Q^0 \circ \Lambda. \quad (15)$$

Из этого уравнения видно, что при отсутствии коррекции относительное движение представляет собой соединение двух плоских вращений (угловые скорости

постоянны по направлениям вращений в инерциальном базисе) с двумя орбитальными скоростями, определяемые начальными условиями. В частном случае совпадения базисов в начальный момент времени и равенстве угловых скоростей орбитального вращения $\Lambda = 1$ является решением этого уравнения.

Датчик БОКЦ определяет направление местной вертикали q_1 в связанных осях КА. При этом связанный базис с установленным в нем датчиком процессом динамической стабилизации совмещается с модельным базисом Q^* . Процесс корректирования должен содержать ряд последовательных этапов, первые из которых – поиск Земли полем зрения БОКЦ, а затем приведение оси q_1^* к q_1 .

Задача поиска может выполняться либо заданием базису Q^* поисковой скорости, либо путем постоянной ориентации на Солнце осью, противоположной оси поля зрения БОКЦ. Во время, близкое к местному полдню, БОКЦ должен «захватить» Землю.

Приведение (совмещение) осей – задача одноосной ориентации – получается при задании скоростей коррекции в виде функций типа (7), (11) от сигналов датчика. При выборе $|\Omega_k| \gg |\omega_{Q^*}^{*0}| + |\omega_Q^0|$ совмещение осей выполняется при любом виде разности орбитальных угловых скоростей соотношения (15):

$$\omega_{Q^*}^{*0} \circ \Lambda - \Lambda \circ \omega_Q^0. \quad (16)$$

Однако наличие переносных угловых скоростей (16) приведет к тому, что процесс корректирования может закончиться только в одном положении, а именно, при совпадении базисов Q^* с Q (или же I^* с I_γ); в этом положении разность (16) исчезает по всем трем компонентам при равенстве $\omega_{Q^*}^{*0} = \omega_Q^0$, при неравенстве остается $\Omega_{k3} = \omega_{Q^*}^{*0} - \omega_Q^0$ и значение модельно угловой скорости вращения базиса $\omega_{Q^*}^{*0}$ может быть сделано равным ω_Q^0 с помощью интегральной оценки сигнала коррекции Ω_{k3} .

Поясним сказанное рассмотрением процесса корректирования (15) при условии совмещения осей q_1^* с q_1 . Очевидно, что компоненты кватерниона рассогласования $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ базисов Q^* и Q будут иметь составляющие (λ_2, λ_3) – малыми.

Положим для упрощения изложения равенство величин $\omega_{Q^*}^{*0} = \omega_Q^0 = \omega^0$ и учтем, что при этом $\omega_{Q^*}^{*0} \circ \Lambda = \Lambda \circ \omega_Q^0$. Распишем далее уравнения корректирования (15) в виде системы скалярных уравнений для компонент кватерниона (имея в виду, что в задаче совмещения осей q_1^* с q_1 скорость коррекции $\Omega_{k1} = 0$ по определению):

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_2\Omega_{2k} - \lambda_3\Omega_{3k} & 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0\Omega_{2k} - \lambda_1\Omega_{3k} + 2\lambda_1\omega^0 \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_2\Omega_{3k} - \lambda_3\Omega_{2k} - 2\lambda_2\omega^0 & 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0\Omega_{3k} + \lambda_1\Omega_{2k} \end{aligned}, \quad (17)$$

и рассмотрим линейную коррекцию в виде функций

$$\Omega_{2k} = -k\lambda_0\lambda_2, \quad \Omega_{3k} = -k\lambda_0\lambda_3. \quad (18)$$

Подставляя (18) в уравнения (17), получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= k\lambda_0(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) & 2\dot{\lambda}_2 &= k\lambda_0(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) - 2\lambda_1\omega^0 \\ 2\dot{\lambda}_1 &= 2\lambda_2\omega^0 & 2\dot{\lambda}_3 &= -k\lambda_0(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) \end{aligned} \quad (19)$$

Из этих уравнений следует, во-первых, что при сильной коррекции приведения оси вертикали, т.е. условия $|\Omega_k| \gg |\omega_{Q^*}^0| + |\omega_Q^0|$, угловые параметры λ_2, λ_3 будут малыми величинами и первые два уравнения для λ_0, λ_1 показывают, что угол поворота по оси q_1 в первом приближении не меняется. Если учитывать первые порядки малых величин в уравнении (19), то имеет смысл перейти к средним оценкам переменных; так, средние значения производных $\dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3$ можно принять равными нулю. Тогда из двух последних уравнений (19) для средних значений малых величин получаем такие соотношения:

$$\lambda_3 = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_0}, \quad \lambda_2 = -\frac{2\omega^0\lambda_1}{k(\lambda_0^2 + \lambda_1^2)} \approx -\frac{2\omega^0}{k}\lambda_1.$$

Второе уравнение (19) при подстановке полученного выражения будет описывать процесс изменения компоненты $\lambda_1(t)$:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{2(\omega^0)^2}{k}\lambda_1, \quad \text{т.е.} \quad \lambda_1(t) = \lambda_1^0 \exp\left(-\frac{2(\omega^0)^2}{k}t\right),$$

т.е. происходит уменьшение угла и совмещение базисов.

Имеет смысл рассмотреть поведение системы (процесс корректирования) в малых отклонениях от положения ориентации:

$$2\dot{\lambda}_1 = 2\omega^0\lambda_2, \quad 2\dot{\lambda}_2 = -k\lambda_2 - 2\omega^0\lambda_1, \quad 2\dot{\lambda}_3 = -k\lambda_3. \quad (20)$$

Можно видеть, что процесс по компоненте λ_3 происходит независимо, а приведение по двум другим координатам связано орбитальным вращением (эффект гирокомпасирования), который можно ускорить введением так называемой перекрестной коррекции, получаемой добавлением в первое уравнение

$$h\lambda_1 \left(\dot{\lambda}_1 = \left(\omega^0 + \frac{h}{2} \right) \lambda_2 \right).$$

Тогда характеристическое уравнение процесса приведения по двум координатам и его корни будут иметь вид

$$p^2 + \frac{k}{2}p + \omega^0 \left(\omega^0 + \frac{h}{2} \right) = 0, \quad p_{1,2} = -\frac{k}{4} \pm \sqrt{\frac{k^2}{16} - \omega^0 \left(\omega^0 + \frac{h}{2} \right)},$$

– т.е. приведение устойчиво, выбором k, h можно получить требуемый вид процесса.

На этом можно завершить рассмотрение кинематического контура ориентации, обеспечивающего построение требуемых режимов несколькими функционально различными способами, что необходимо для выполнения требований обеспечения надежности системы.

2. Динамический контур управления (контур стабилизации)

Динамический контур управления имеет дело с управляющими моментами, воздействующими на КА и вызывающими изменения его угловой скорости вращения. Управляющие моменты создаются либо за счет внешних (реактивных) сил, либо за счет инерционных маховиков [2–4]. Структурная схема динамического контура представлена на рис.3.

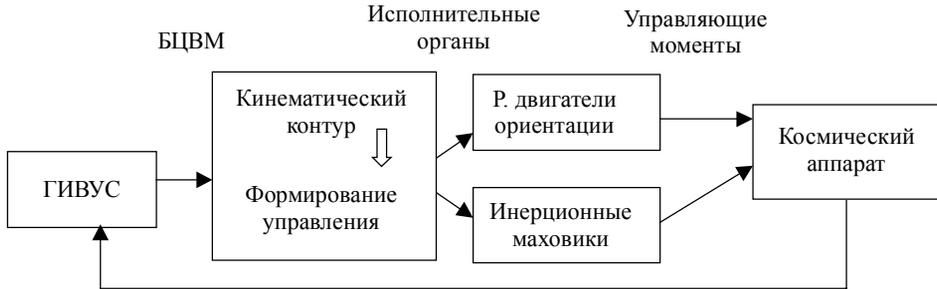


Рис. 3. Структурная схема динамического контура управления

Основными исполнительными органами ориентации были инерционные маховики, разработанные НИИКП (г. Санкт-Петербург). Максимальный кинетический момент одного маховика был 18 н·м·с, максимальный управляющий момент – 0,1 н·м. В системе было установлено 4 маховика (три – по осям КА, четвертый – резервный по биссектрисе).

В качестве микрореактивных двигателей были использованы простейшие 12 газовых РД, работающие на сжатом газе – ксеноне, эти МРД использовались только на начальном этапе – гашения угловых скоростей после отделения от РН и начальной солнечной ориентации. Этот же газ использовался как основное рабочее тело для электрореактивных двигателей коррекции орбиты КА. Все остальные режимы выполнялись исключительно с помощью инерционных маховиков, разгрузка кинетического момента которых выполнялась при осуществлении маневров коррекции орбиты.

Для пояснения основных принципов работы динамического контура рассмотрим основные уравнения вращательного движения КА и формирование устойчивого управления, обеспечивающего процесс стабилизации. Такими уравнениями являются уравнения изменения полного кинетического момента КА в связанной системе координат:

$$G_B = J_{BB}\omega_B + H_B, \quad H_B = \sum_{i=1}^4 I_i \omega_i, \quad (21)$$

где J_{BB}, ω_B – тензор инерции КА и вектор угловой скорости в связанных осях (с учетом маховиков), H_B – кинетический момент инерционных маховиков (I_i, ω_i – моменты инерции и относительные угловые скорости вращения маховиков). Имеем следующие уравнения:

$$\dot{G}_B + \omega_B \times G_B = M_d + M_{p,d}, \quad (22)$$

где $M_d, M_{p,d}$ – внешние возмущающие и управляющие от МРД моменты. Под-

ставляя соотношения (21) в уравнения (22), с учетом постоянства тензора инерции в связанных осях, получим

$$J_{BB}\dot{\boldsymbol{\omega}}_B + \dot{H}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times (J_{BB}\boldsymbol{\omega}_B + H_B) = M_d + M_{p.d.} \quad (23)$$

Величина $\dot{H}_B = -M_{i.m.}$ – также является управляющим моментом, получаемым от ускорения инерционных маховиков. Рассмотрим сначала задачу стабилизации в инерциальной системе координат; введем функцию Ляпунова в виде кинетической энергии вращательного движения:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_B \cdot J_{BB} \cdot \boldsymbol{\omega}_B = \frac{1}{2} (J_1 \omega_{B1}^2 + J_2 \omega_{B2}^2 + J_3 \omega_{B3}^2) \quad (24)$$

Можно видеть, что эта функция везде положительна, кроме состояния абсолютного покоя, где она обращается в нуль. Производная от этой функции с учетом (22) будет равна

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= (J_1 \omega_{B1} \cdot \dot{\omega}_{B1} + J_2 \omega_{B2} \cdot \dot{\omega}_{B2} + J_3 \omega_{B3} \cdot \dot{\omega}_{B3}) = \\ &= (J_{BB} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_B) \cdot \boldsymbol{\omega}_B = (M_{p.d.} + M_{i.m.}) \cdot \boldsymbol{\omega}_B, \end{aligned} \quad (25)$$

здесь мы учитываем только управление, тогда как M_d – остается возмущением, которое оказывается существенно меньше управления [1] и при начальных оценках может не учитываться.

Из вида этой производной следует выбор управления в виде отрицательно определенной функции от угловой скорости и углового рассогласования $N(v_0, v_1, v_2, v_3)$ от выбранной опорной системы координат:

$$\begin{aligned} M_{p.d.} &= F_{p.d.}(\boldsymbol{\omega}_B + \mathbf{f}(v_0 \mathbf{v})), \quad M_{i.m.} = F_{i.m.}(\boldsymbol{\omega}_B + \mathbf{f}(v_0 \mathbf{v})) \\ F_{p.d.}(\boldsymbol{\omega}_B + \mathbf{f}(v_0 \mathbf{v})) \cdot \boldsymbol{\omega}_B &\leq 0, \quad F_{i.m.}(\boldsymbol{\omega}_B + \mathbf{f}(v_0 \mathbf{v})) \cdot \boldsymbol{\omega}_B \leq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

где кинематическая функция может быть взята согласно условиям (10), (11).

Этот результат можно распространить на вращающуюся с постоянной угловой скоростью опорную систему координат, как например ОСК, имеющую угловую скорость вращения $\boldsymbol{\omega}_Q^0 = (0, 0, \omega^0)$. Можно повторить проделанные рассуждения, если вместо абсолютной скорости $\boldsymbol{\omega}_B$ ввести относительную скорость $\boldsymbol{\omega}'_B = \boldsymbol{\omega}_B - \boldsymbol{\omega}_Q^0$, и использовать кватернион рассогласования $N(v_0, v_1, v_2, v_3)$, описывающий переход от опорного базиса к связанной системе координат КА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бранец В.Н., Севастьянов Н.Н., Федулов Р.В. Лекции по теории систем ориентации, управления движением и навигации: учеб. пособие. Томск: ТГУ, 2013. 316 с.
2. Севастьянов Н.Н. Бранец В.Н. Система управления спутника связи «Ямал-100»: доклад на VII Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам, 29–31 мая 2000 г., Санкт-Петербург. С. 7–11.
3. Семенов Ю.П., Севастьянов Н.Н., Бранец В.Н. Российский спутник связи нового поколения «Ямал» // Ракетно-космическая техника: труды РКК «Энергия» имени С.П. Королева (Расчет, проектирование, конструирование и испытания космических систем). Королев, 2002. Серия XII. Вып. 1. С. 5–6.

4. *Севастьянов Н.Н., Бранец В.Н., Орловский И.В. и др.* Бортовой комплекс управления спутника связи «Ямал» // Ракетно-космическая техника: Труды РКК «Энергия» имени С.П. Королева (Расчет, проектирование, конструирование и испытания космических систем). Королев, 2002. Серия XII. Вып. 1. С. 7–15.
5. *Бранец В.Н.* Лекции по теории бесплатформенных инерциальных систем управления: учеб. пособие. М.: МФТИ, 2010. 304 с.

Статья поступила 13.03.2013 г.

Sevast'yanov N.N. THE CONCEPT OF BUILDING THE SYSTEM OF ORIENTATION AND MOTION CONTROL OF THE YAMAL COMMUNICATION SATELLITE. THE NOMINAL OPERATION SCHEME. The concept of building a system of orientation and motion of the Yamal satellite "Yamal" on the basis of new scientific and technical approaches involving the creation of strapdown inertial navigation systems (SINSs) and digital control machines has been selected. Applying the SINS concept and the onboard digital computer cause the creation of the autonomous diagnostics of equipment management and control systems.

Keywords: systems of orientation, inertial navigation systems, inertial flywheels, quaternions

Sevastyanov Nikolay Nikolaevich (Tomsk State University)

E-mail: sevastyanov@gascom.ru

УДК 623.465.32

Р.В. Федулов, А.С. Шишкин**НАВЕДЕНИЕ ОПТИЧЕСКОЙ АППАРАТУРЫ
МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА
ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ**

Представлено решение задачи наведения оптической аппаратуры малого космического аппарата дистанционного зондирования для различных видов съемки. Приведен метод расчета маршрута съемки с учетом несферичности Земли. Предложен алгоритм вычисления кватерниона ориентации и угловой скорости аппарата для режима целевого функционирования с учетом требуемого направления и величины скорости бега изображения.

Ключевые слова: *малый космический аппарат, дистанционное зондирование, маршрут съемки, наведение.*

Рассматривается малый космический аппарат (МКА) дистанционного зондирования с аппаратурой оптико-электронного сканирования, работающей в режиме временной задержки и накопления. Для МКА должен быть предусмотрен ряд режимов ориентации, которые задаются требованиями, диктуемыми аппаратурой дистанционного зондирования. Учет всех требований определяет содержание задачи управления наведением и ориентацией.

Постановка задачи

Задача управления наведением и ориентацией МКА включает в себя несколько подзадач, из которых в данной работе рассматриваются следующие:

1. Выбор удобного способа задания маршрута съемки на поверхности Земли.
2. Расчет программного кватерниона, т.е. кватерниона ориентации МКА относительно орбитальной системы координат (ОСК) в момент съемки.
3. Расчет программной угловой скорости – угловой скорости, с которой МКА должен приводиться в требуемое положение к моменту съемки.

Маршрут съемки

Будем считать, что Земля имеет форму эллипсоида вращения. Рассмотрим плоское сечение Земли по меридиану (рис. 1) и параллели (рис. 2). Декартовы координаты k -го объекта съемки (X_k ; Y_k ; Z_k) выражаются через географическую широту φ_k , долготу λ_k и высоту над уровнем океана h_k по известным формулам [1, 2]:

$$\begin{aligned} X_k &= (N + h_k) \cos\varphi_k \cos\lambda_k; \\ Y_k &= (N + h_k) \cos\varphi_k \sin\lambda_k; \\ Z_k &= (N - \varepsilon^2 N + h_k) \sin\varphi_k; \end{aligned} \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi_k}}, \quad (1)$$

где $a = 6378,137$ км – экваториальный радиус Земли; $b = 6356,751$ км – полярный радиус Земли; $\varepsilon^2 = (a^2 - b^2) / a^2$ – первый эксцентриситет.

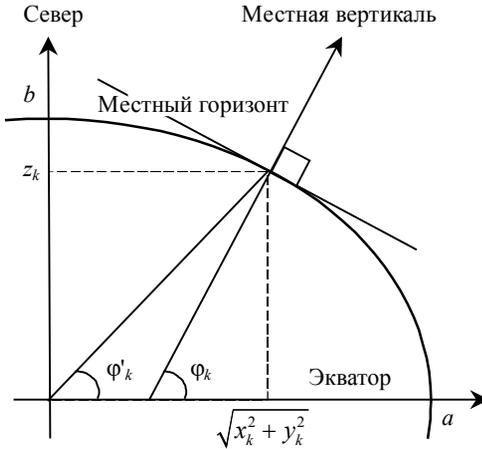


Рис. 1. Сечение по меридиану

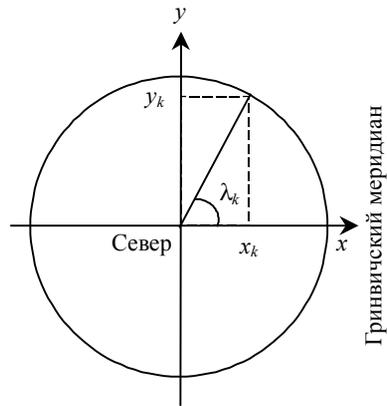


Рис. 2. Сечение по параллели

Для последующих расчетов будем использовать только декартовы координаты цели $(X_k; Y_k; Z_k)$, которые будем записывать в виде одного вектора \vec{R}_k , и декартовы координаты МКА, определяемые по данным систем GPS/ГЛОНАСС или по усредненным кеплеровым элементам (*TLE, Two-Line Element set*).

Очевидно, что площадная и стереоскопическая съемка являются частными случаями маршрутной. Понятия же кадровой съемки вовсе не существует для матрицы, работающей в режиме временной задержки и накопления.

Исходные данные на маршрутную съемку задаются в виде координат узловых точек и векторов, определяющих направление скорости бега изображения. Под бегом изображения понимается специально организуемое угловое движение МКА и аппаратуры съемки, такое, что имеет место движение изображения снимаемой поверхности в фокальной плоскости аппаратуры в строго заданном направлении (по столбцам матрицы) и с заданной скоростью.

Рассмотрим гладкую кривую, проходящую через узловые точки с известными координатами в WGS84 и заданными в этих точках касательными к этой кривой (рис. 3). Наиболее целесообразным представляется задание интерполирующей кривой в виде сплайна третьего порядка с заданными в узловых точках значениями его производной (сплайн Эрмита) [3].

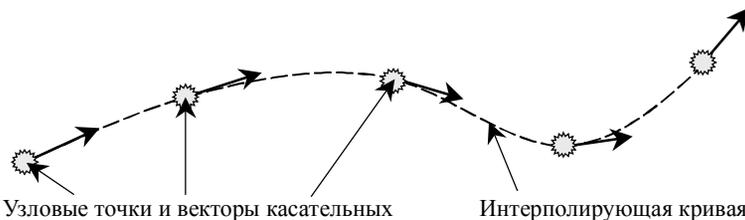


Рис. 3. Сплайн третьего порядка

Для системы точек в пространстве построение интерполирующих сплайнов третьей степени осуществляется следующим образом. Пусть $\{X_k, Y_k, Z_k\}$ – семей-

ство точек, координаты которых в *WGS84* рассчитываются по формулам (1), $\{\dot{X}_k, \dot{Y}_k, \dot{Z}_k\}$ – векторы касательных в заданных точках. Требуется построить гладкую кривую, проходящую через эти точки, касательные в которых совпадают с заданными. Искомые сплайны зададим в виде параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x_k(t) = a_x^k + b_x^k \cdot t + c_x^k \cdot t^2 + d_x^k \cdot t^3; \\ y_k(t) = a_y^k + b_y^k \cdot t + c_y^k \cdot t^2 + d_y^k \cdot t^3; \\ z_k(t) = a_z^k + b_z^k \cdot t + c_z^k \cdot t^2 + d_z^k \cdot t^3. \end{cases} \quad (2)$$

Положим $t_k=0, t_{k+1}=1$ для каждого промежутка $[t_k; t_{k+1}]$. На концах промежутка $[t_k; t_{k+1}]$ должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} x_k(t_k) = X_k; \\ y_k(t_k) = Y_k; \\ z_k(t_k) = Z_k; \\ \dot{x}_k(t_k) = \dot{X}_k; \\ \dot{y}_k(t_k) = \dot{Y}_k; \\ \dot{z}_k(t_k) = \dot{Z}_k; \end{cases} \quad \begin{cases} x_k(t_{k+1}) = X_{k+1}; \\ y_k(t_{k+1}) = Y_{k+1}; \\ z_k(t_{k+1}) = Z_{k+1}; \\ \dot{x}_k(t_{k+1}) = \dot{X}_{k+1}; \\ \dot{y}_k(t_{k+1}) = \dot{Y}_{k+1}; \\ \dot{z}_k(t_{k+1}) = \dot{Z}_{k+1}. \end{cases} \quad (3)$$

Решая полученные системы уравнений, найдём искомые коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_x^k &= X_k; & c_x^k &= 3 \cdot (X_{k+1} - X_k) - 2 \cdot \dot{X}_k - \dot{X}_{k+1}; \\ a_y^k &= Y_k; & c_y^k &= 3 \cdot (Y_{k+1} - Y_k) - 2 \cdot \dot{Y}_k - \dot{Y}_{k+1}; \\ a_z^k &= Z_k; & c_z^k &= 3 \cdot (Z_{k+1} - Z_k) - 2 \cdot \dot{Z}_k - \dot{Z}_{k+1}; \\ b_x^k &= \dot{X}_k; & d_x^k &= \dot{X}_{k+1} + \dot{X}_k + 2 \cdot (X_k - X_{k+1}); \\ b_y^k &= \dot{Y}_k; & d_y^k &= \dot{Y}_{k+1} + \dot{Y}_k + 2 \cdot (Y_k - Y_{k+1}); \\ b_z^k &= \dot{Z}_k; & d_z^k &= \dot{Z}_{k+1} + \dot{Z}_k + 2 \cdot (Z_k - Z_{k+1}). \end{aligned} \quad (4)$$

При построении полученных сплайнов полагаем, что t принимает значения из интервала $[0; 1]$ на каждом промежутке.

Системы координат

Далее будем опускать индекс k , полагая, что все выражения записаны для съемки k -й точки маршрута в k -й момент времени. На рис. 4 схематично изображены используемые системы координат и связывающие их кватернионы.

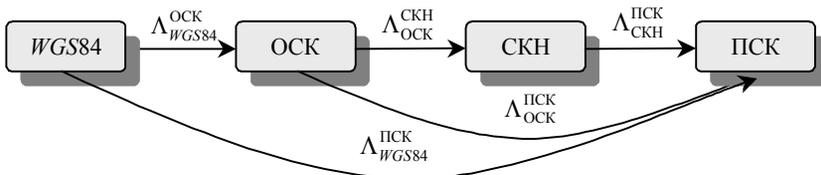


Рис. 4. Используемые системы координат

Здесь ОСК – орбитальная система координат, которая в *WGS84* определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{\text{ОСК}} &= -\frac{\bar{R}_{\text{МКА}}}{|\bar{R}_{\text{МКА}}|}; \\ \bar{z}_{\text{ОСК}} &= -\frac{\bar{R}_{\text{МКА}} \times \bar{V}_{\text{МКА}}}{|\bar{R}_{\text{МКА}} \times \bar{V}_{\text{МКА}}|}; \\ \bar{y}_{\text{ОСК}} &= \bar{z}_{\text{ОСК}} \times \bar{x}_{\text{ОСК}},\end{aligned}\quad (5)$$

где $\bar{R}_{\text{МКА}}$ – радиус-вектор МКА в $WGS84$; $\bar{V}_{\text{МКА}}$ – скорость МКА в $WGS84$.

Кватернион $\Lambda_{WGS84}^{\text{ОСК}}$, определяющий положение ОСК в $WGS84$, можно найти, зная положение осей ОСК в $WGS84$ [4]:

$$\Lambda_{WGS84}^{\text{ОСК}} = \lambda_0 + \bar{\lambda}, \quad (6)$$

$$\text{где } \lambda_0 = \pm \left(1 + \frac{1}{4}\bar{\theta}^2\right)^{-\frac{1}{2}}; \lambda_i = \pm \frac{1}{2}\lambda_0\bar{\theta}_i, \quad \bar{\theta} = 2 \frac{(\bar{y}_{\text{ОСК}} - \bar{y}_{WGS84}) \times (\bar{x}_{\text{ОСК}} - \bar{x}_{WGS84})}{(\bar{y}_{\text{ОСК}}, \bar{x}_{WGS84}) - (\bar{y}_{WGS84}, \bar{x}_{\text{ОСК}})} -$$

вектор конечного поворота.

СКН – система координат наведения, которую удобно ввести как трехмерный правый базис $(\bar{x}_{\text{СКН}}, \bar{y}_{\text{СКН}}, \bar{z}_{\text{СКН}})$, ось $\bar{x}_{\text{СКН}}$ которого получена кратчайшим поворотом оси $\bar{x}_{\text{ОСК}}$ и направлена на k -ю точку маршрута. Оси СКН в ОСК можно получить с помощью известных соотношений [4, 5]:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{\text{СКН}} &= \Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{СКН}} \circ \bar{x}_{\text{ОСК}} \circ \tilde{\Lambda}_{\text{ОСК}}^{\text{СКН}}, \\ \bar{y}_{\text{СКН}} &= \Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{СКН}} \circ \bar{y}_{\text{ОСК}} \circ \tilde{\Lambda}_{\text{ОСК}}^{\text{СКН}}, \\ \bar{z}_{\text{СКН}} &= \Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{СКН}} \circ \bar{z}_{\text{ОСК}} \circ \tilde{\Lambda}_{\text{ОСК}}^{\text{СКН}},\end{aligned}\quad (7)$$

где $\Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{СКН}}$ – кватернион наведения, т.е. поворота продольной оси целевой аппаратуры от направления вдоль оси $\bar{x}_{\text{ОСК}}$ к направлению на k -ю точку маршрута.

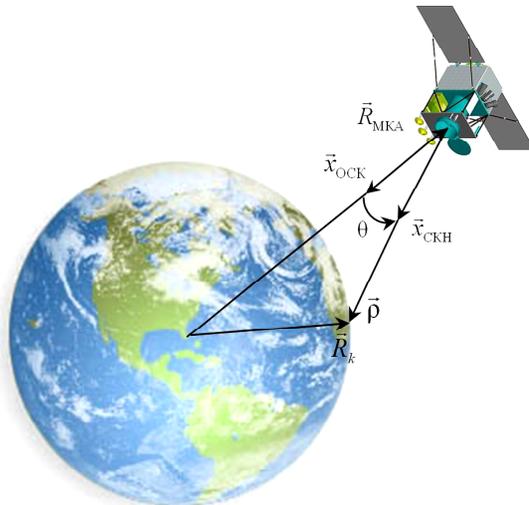


Рис. 5. Наведение на k -ю точку маршрута

Для расположения столбцов матрицы целевой аппаратуры по направлению вектора скорости бега местности $\vec{V}_{\text{БМ}}$ необходим разворот в фокальной плоскости целевой аппаратуры. $\Lambda_{\text{СКН}}^{\text{ПСК}}$ представляет собой кватернион такого разворота, записанный в параметрах Родрига – Гамильтона, и определяет положение осей ПСК в СКН.

ПСК – программная система координат – та система координат, с которой должна совпадать связанная с аппаратом система координат в момент съемки k -й точки маршрута.

Кватернион $\Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}}$ имеет физический смысл кватерниона программной (требуемой) ориентации (ПСК относительно ОСК) в осях ОСК. Кватернион $\Lambda_{\text{WGS84}}^{\text{ПСК}}$ имеет смысл кватерниона программной ориентации (ПСК относительно ОСК) в осях WGS84.

Расчет кватерниона программной ориентации

Кватернион программной ориентации $\Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}}$ будем искать как произведение двух кватернионов в параметрах Родрига – Гамильтона [4, 5]:

$$\Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}} = \Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{СКН}} \circ \Lambda_{\text{СКН}}^{\text{ПСК}}, \quad (8)$$

где $\Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{СКН}}$ и $\Lambda_{\text{СКН}}^{\text{ПСК}}$ – определенные выше кватернионы наведения и разворота.

Кватернион наведения $\Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{СКН}}$ продольной оси целевой аппаратуры на объект съемки запишем в тригонометрическом виде:

$$\Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{СКН}} = \cos \frac{\theta}{2} + \vec{\zeta} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (9)$$

где θ – угол поворота оси целевой аппаратуры МКА от оси $\vec{x}_{\text{ОСК}}$ к направлению на объект съемки; $\vec{\zeta}$ – единичный вектор, задающий ось поворота МКА на угол θ (на рис. 5 направлен на наблюдателя).

Единичный вектор $\vec{\zeta}$ найдется из очевидного из рис. 5 соотношения:

$$\vec{\zeta} = \frac{(-\vec{R}_{\text{МКА}}) \times \vec{\rho}}{|(-\vec{R}_{\text{МКА}}) \times \vec{\rho}|}, \quad (10)$$

где $\vec{\rho} = \vec{R}_k - \vec{R}_{\text{МКА}}$; $\vec{R}_{\text{МКА}}$ – радиус-вектор МКА.

Угол θ найдется из скалярного произведения векторов $\vec{\rho}$ и $-\vec{R}_{\text{МКА}}$ по формуле

$$\theta = \pm \arccos \left[\frac{(\vec{\rho}, -\vec{R}_{\text{МКА}})}{|\vec{\rho}| \cdot |\vec{R}_{\text{МКА}}|} \right]. \quad (11)$$

Соотношения (10) и (11) определяют величины, необходимые для вычисления кватерниона наведения (9).

Кватернион разворота в фокальной плоскости $\Lambda_{\text{СКН}}^{\text{ПСК}}$ будем искать для того момента, когда ось целевой аппаратуры МКА уже направлена на k -ю точку маршрута (рис. 6).

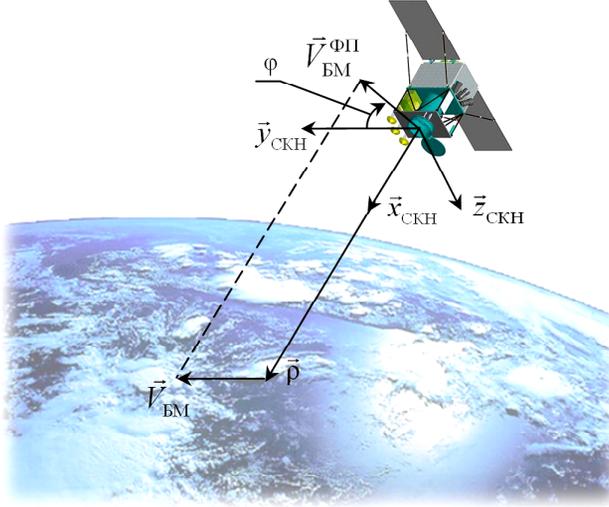


Рис. 6. Разворот в фокальной плоскости

Запишем его в тригонометрическом виде:

$$\Lambda_{\text{СКН}}^{\text{ПСК}} = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{\xi} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (12)$$

где φ – угол поворота МКА в фокальной плоскости (вокруг оси оптической аппаратуры); $\vec{\xi}$ – единичный вектор, перпендикулярный фокальной плоскости, который в системе координат наведения совпадает с осью абсцисс:

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Для определения φ найдем сначала $\vec{V}_{\text{БМ}}^{\text{ФП}}$ – проекцию вектора $\vec{V}_{\text{БМ}}$ на фокальную плоскость. Эта проекция, как видно из рис. 6, в осях системы координат наведения (7) найдется следующим образом:

$$\vec{V}_{\text{БМ}}^{\text{ФП}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{V}_{\text{БМ}}. \quad (14)$$

Угол φ найдется из скалярного произведения векторов $\vec{y}_{\text{СКН}}$ и $\vec{V}_{\text{БМ}}^{\text{ФП}}$:

$$\varphi = \arccos \left[\frac{(\vec{y}_{\text{СКН}}, \vec{V}_{\text{БМ}}^{\text{ФП}})}{|\vec{y}_{\text{СКН}}| \cdot |\vec{V}_{\text{БМ}}^{\text{ФП}}|} \right], \quad (15)$$

где $\vec{y}_{\text{СКН}}$ определяется из второго уравнения системы (7).

Соотношения (13) и (15) определяют величины, необходимые для вычисления кватерниона разворота в фокальной плоскости (12). Как было показано в формуле (8), кватернион программной ориентации $\Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}}$ найдется как произведение кватернионов (9) и (12). Полученный кватернион позволяет вычислить положение

осей ПСК в ОСК [4, 5]:

$$\begin{aligned}\vec{x}_{\text{ПСК}} &= \Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}} \circ \vec{x}_{\text{ОСК}} \circ \tilde{\Lambda}_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}}, \\ \vec{y}_{\text{ПСК}} &= \Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}} \circ \vec{y}_{\text{ОСК}} \circ \tilde{\Lambda}_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}}, \\ \vec{z}_{\text{ПСК}} &= \Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}} \circ \vec{z}_{\text{ОСК}} \circ \tilde{\Lambda}_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}}.\end{aligned}\tag{16}$$

Кроме того, имея программный кватернион в ОСК, можно рассчитать указанный на рис. 4 кватернион программной ориентации в WGS84 [4, 5]:

$$\Lambda_{\text{WGS84}}^{\text{ПСК}} = \Lambda_{\text{WGS84}}^{\text{ОСК}} \circ \Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}}.\tag{17}$$

Расчет угловой скорости программного вращения

Полученный кватернион $\Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}}$ – переменный. Изменение кватерниона определяется кинематическим уравнением [4, 5]:

$$2\dot{\Lambda}_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}} = \Lambda_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}} \circ \vec{\omega}_{\text{пр}},\tag{18}$$

где $\vec{\omega}_{\text{пр}}$ – угловая скорость программного вращения (ПСК относительно ОСК) в осях ПСК.

Отсюда можем выразить программную угловую скорость:

$$\vec{\omega}_{\text{пр}} = 2\tilde{\Lambda}_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}} \circ \dot{\Lambda}_{\text{ОСК}}^{\text{ПСК}}.\tag{19}$$

Другой способ определения программной угловой скорости состоит в учете следующих движений:

- суточное вращение Земли;
- орбитальное движение МКА;
- заданный бег местности.

Поскольку орбитальную скорость мы имеем в связанном с Землей базисе, эта скорость $\vec{V}_{\text{МКА}}^{\text{WGS84}}$ содержит в себе скорость суточного вращения Земли.

Наличие орбитальной скорости МКА в задаче дистанционного зондирования вызывает необходимость компенсировать эту скорость угловым движением МКА со скоростью $\vec{\omega}_{\text{орб}}$:

$$\vec{\omega}_{\text{орб}} = \frac{\vec{V}_{\text{МКА}}^{\text{WGS84}} \times \vec{\rho}}{\vec{\rho}^2}.\tag{20}$$

Заданная скорость бега местности $\vec{V}_{\text{БМ}}$ обуславливает угловое движение МКА со скоростью $\vec{\omega}_{\text{БМ}}$:

$$\vec{\omega}_{\text{БМ}} = \frac{\vec{\rho} \times \vec{V}_{\text{БМ}}}{\vec{\rho}^2} = -\frac{\vec{V}_{\text{БМ}} \times \vec{\rho}}{\vec{\rho}^2}.\tag{21}$$

Программная угловая скорость найдется сложением угловых скоростей (20) и (21) в одной системе координат:

$$\vec{\omega}_{\text{пр}} = \vec{\omega}_{\text{орб}} + \vec{\omega}_{\text{БМ}} = \frac{(\vec{V}_{\text{МКА}}^{\text{WGS84}} - \vec{V}_{\text{БМ}}) \times \vec{\rho}}{\vec{\rho}^2}.\tag{22}$$

Оба способа расчета программной угловой скорости приводят к идентичным результатам. Выбор того или иного способа определяется возможностями бортовой вычислительной машины и требованиями к быстродействию.

Представленные алгоритмы верифицированы контрольными точками с использованием программных пакетов *Satellite Tool Kit* и *MATLAB*. Данный материал позволяет рассчитать кватернион рассогласования и сформировать алгоритм управления угловой стабилизацией МКА при выполнении съемки.

Авторы выражают благодарность д.ф.-м.н., профессору В.Н. Бранцу за помощь при выполнении работы, а также И.А. Грудеву за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бранец В.Н., Севастьянов Н.Н., Федулов Р.В. Лекции по теории систем ориентации, управления движением и навигации: учеб. пособие. Томск: ТГУ, 2013. 316 с.
2. Kelso T.S. Orbital Coordinate systems, Part III // *Satellite Times*, January/February 1996.
3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолли Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 319 с.
4. Бранец В.Н. Лекции по теории бесплатформенных навигационных систем управления. М.: МФТИ, 2009. 302 с.
5. Амелькин Н.И. Кинематика и динамика твердого тела. М: МФТИ, 2000. 64 с.

Статья поступила 12.11.2012 г.

Fedulov R.V., Shishkin A.S. POINTING OF OPTICAL EQUIPMENT OF SMALL REMOTE SENSING SPACECRAFT. We have presented the solution of the problem of optical equipment pointing of small remote sensing spacecraft for various types of photographic surveys. Proposed is the method of the imaging track calculating, considering the non-sphericity of the Earth. Also provided is the algorithm for computing the attitude quaternions and angular velocity of the spacecraft for target operation mode – considering the required direction and factor of image movement.

Keywords: small spacecraft, remote sensing, imaging track, pointing.

FEDULOV Roman Vasil'evich (Gazprom Space Systems JSC)

E-mail: fedulov@gazprom-spacesystems.ru

SHISHKIN Anton Sergeevich (Gazprom Space Systems JSC)

E-mail: shishkin@gazprom-spacesystems.ru

УДК 536.46

А.А. Шахтин

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СУПЕРКАВЕРН

Представлены математическая модель и результаты расчетов задачи о движении кавитатора в жидкости в режиме кавитации. Математическая модель основана на уравнениях Эйлера для идеальной сжимаемой жидкости. Система уравнений решалась численно методом Годунова. Получены распределения давления и плотности, а также формы каверн при различных скоростях обтекания кавитатора.

Ключевые слова: *суперкавитация, гидродинамика.*

Классические методы расчета каверн, применявшиеся для моделирования плоских разрывных течений, предполагали, что граница каверны представляет собой линию тока, ограничивающую мертвую зону покоящейся жидкости. Эта модель не очень соответствует современным физическим представлениям, согласно которым область кавитации заполнена движущейся в ней двухфазной средой, состоящей из жидкости и ее паров. Обычно считается, что она заполнена пузырьками, образующимися при пониженных давлениях за кавитатором. Вместе с тем мгновенные фотографии суперкаверн показывают, что за острой кромкой кавитатора образуется поток капель, устремляющихся внутрь каверны. В реальных ситуациях в каверне, по-видимому, могут находиться как капли, так и пузырьки, которые при схлопывании создают сильный шум и способствуют разрушению обтекаемых поверхностей.

В двухфазных моделях пузырьки возникают вследствие роста зародышей пузырьков в области растягивающих напряжений в жидкости. В существующих моделях рост размеров пузырьков рассчитывается на основе решения Релея – Ламба для радиального расширения пузырей в вязкой жидкости. Основанные на этих уравнениях модели кавитации можно найти в [1].

К сожалению, использование названных моделей ограничивается недостатком знаний о размерах и концентрации зародышей в невозмущенной жидкости, разброс данных по которым составляет несколько порядков. Поэтому модели, учитывающие динамику роста пузырьков, не нашли пока широкого применения в расчетах каверн.

В настоящее время теоретические и экспериментальные исследования суперкаверн интенсивно развиваются в институте гидромеханики НАН Украины. Для расчетов суперкаверн в этом институте применяется принцип независимости расширения сечений каверны Г. В. Лавриновича. В расчетах с использованием этого принципа применяются полуэмпирические соотношения для размеров каверны и эмпирические зависимости для формы ее начального участка. В то же время в названном институте проведены детальные экспериментальные исследования, позволившие получить аппроксимацию формы каверн в широком диапазоне чисел кавитации [2].

В настоящей работе предлагается метод расчета каверн, основанный на модели отрывных течений сжимаемой жидкости. Изложим основные положения данного метода:

1. В методе предполагается, что вне зоны кавитации выполняются уравнения законов сохранения сплошной среды сжимаемой жидкости. Так как при скоростях кавитатора свыше 1000 м/с давление в его лобовой части имеет порядок 1 ГПа, то в качестве замыкающего соотношения используется экспериментальная ударная адиабата.

2. При достижении некоторого растягивающего напряжения (отрицательного давления) в жидкости возникают разрывы и давление в ней становится равным давлению насыщенного пара при заданной температуре. Следовательно, изменением роста пузырьков пренебрегается и считается, что они возникают мгновенно.

3. Считается, что давление равняется давлению насыщенного пара во всей образовавшейся каверне. При этом в уравнениях движения исчезают члены с градиентом давления и двухфазная смесь движется по инерции со скоростями, полученными частицами в момент разрыва жидкости. Разностью скоростей жидкой и паровой фазы пренебрегается. Плотность смеси в каверне рассчитывается из уравнения неразрывности.

4. Когда плотность смеси в ячейке каверны достигает величины, при которой давление, рассчитанное по замыкающему уравнению, превышает величину давления насыщенного пара, давление рассчитывается с использованием замыкающего соотношения. Таким способом моделируется схлопывание пузырьков в каверне. При этом ударные волны, возникающие при схлопывании, не учитываются.

В области сплошной среды решаются уравнения

$$\frac{\partial p r}{\partial t} + \frac{\partial p r u}{\partial x} + \frac{\partial p r v}{\partial r} = 0 ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial p r u}{\partial t} + \frac{\partial r(p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p r u v}{\partial r} = 0 ; \quad (2)$$

$$\frac{\partial p r v}{\partial t} + \frac{\partial p r u v}{\partial x} + \frac{\partial r(p + \rho v^2)}{\partial r} = 0 ; \quad (3)$$

$$p = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^l - 1 \right] + p_n , \quad (4)$$

в которых использованы обозначения: ρ – плотность; u, v – проекции скорости на оси x и r соответственно; p – давление;

Константы ударной адиабаты принимались следующие:

$$B = 5,4 \cdot 10^8 \text{ Па} , \quad \rho_0 = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} , \quad l = 5,5 , \quad p_n = 105 \text{ 000 Па} .$$

В области каверны решаются только уравнения (1) – (3), в которых давление полагается постоянным. Переходы от сплошной среды к двухфазной среде каверны рассчитываются согласно положению 2. При этом давление $p_{кр}$, при котором происходил разрыв жидкости, выбиралось согласно [3] из диапазона [–350 000 Па, –100 000 Па]. Было выяснено, что при таких давлениях результаты расчетов практически не зависят от величины p_k .

Расчеты проводились методом установления с применением разностной схемы С.К. Годунова, модифицированной для решения задач в сжимаемой жидкости с замыкающим уравнением (4). Решение разыскивалось на некотором участке тру-

бы, на оси которой помещался кавитатор. На входе в трубу задавались проекции скоростей u и v , а также плотность жидкости. Давление рассчитывалось с помощью ударной адиабаты. На стенках трубы задавалось условие непротекания. На выходе из трубы применялись «мягкие» граничные условия. В качестве начальных условий задавались величины u , v , p и ρ , согласованные с граничными условиями и уравнением (4).

Рассчитывалось обтекание двух типов кавитаторов. Кавитатор первого типа представлял собой цилиндр с высотой, равной радиусу цилиндра $r_0 = 0,0007$ м. Кавитатор второго типа был взят в форме усеченного конуса высотой 0,055 м и радиусами оснований $r_0 = 0,00075$ м и $R_0 = 0,0026$ м.

На рис. 1 показана форма каверны, возникающей при обтекании кавитатора первого типа со скоростью 40 м/с на глубине 0,5 м. Максимальный радиус каверны, равный 2,4 мм практически совпадает с экспериментальным радиусом равным 2,3 мм. Её длина 20,5 мм также близка к экспериментальному значению 23 мм [2].

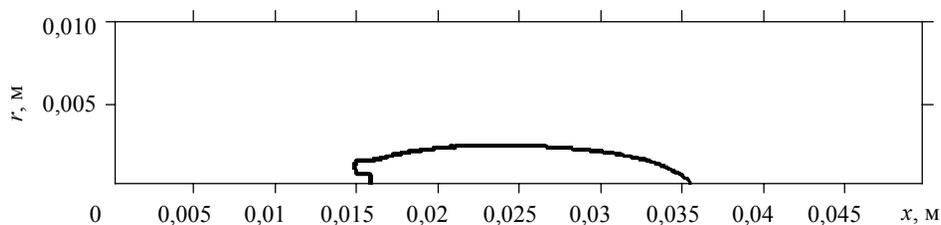


Рис. 1. Форма каверны, возникающей при обтекании кавитатора со скоростью 40 м/с

На рис. 2 показано распределение давления в потоке при обтекании кавитатора, а на рис. 3 – распределение плотности.

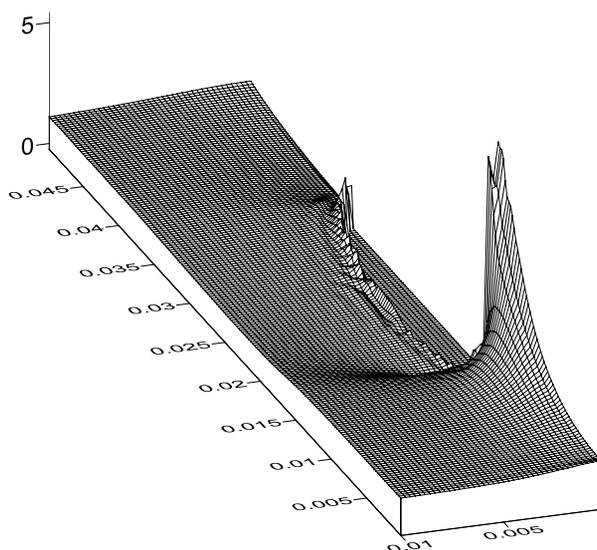


Рис. 2. Распределение давления в потоке при обтекании кавитатора со скоростью 40 м/с

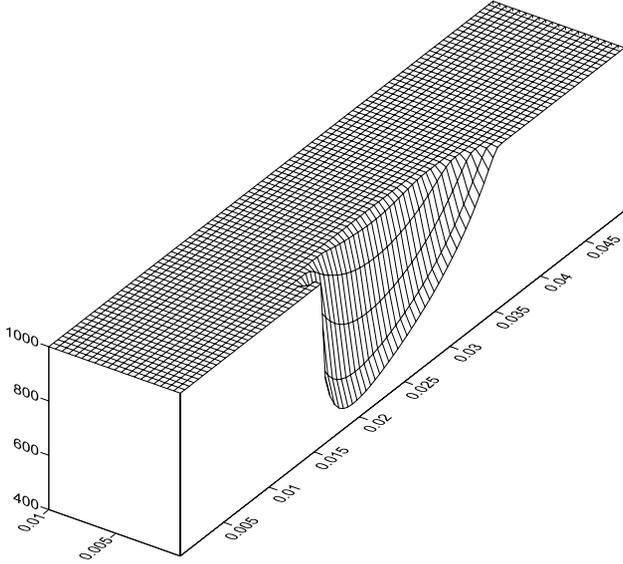


Рис. 3. Распределение плотности в потоке при обтекании кавитатора со скоростью 40 м/с

Длина каверны при больших скоростях растет пропорционально квадрату скорости обтекания, достигая 13 м для кавитатора диаметром 1 мм при скорости 1000 м/с. При расчетах таких каверн с мелким шагом разностной сетки, необходимым для получения хороших результатов, требуется память и быстродействие компьютера, недостижимые на современных ПК. Вместе с тем для расчетов движения тел в режиме суперкавитации необходимо рассчитывать не всю каверну, а только её часть, воздействующую на тело. На рис. 4, 5 и рис. 6 показаны головная часть каверны и распределение плотности, полученные при расчетах обтекания усеченного конуса длиной 55 мм со скоростью 923 м/с.

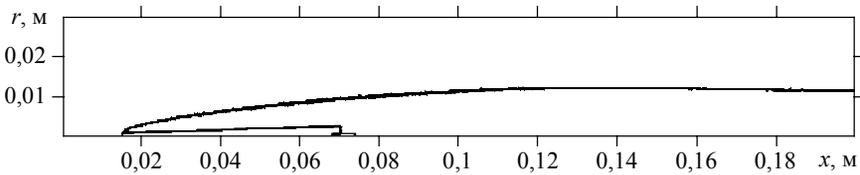


Рис. 4. Головная часть каверны при обтекании усеченного конуса со скоростью 923 м/с

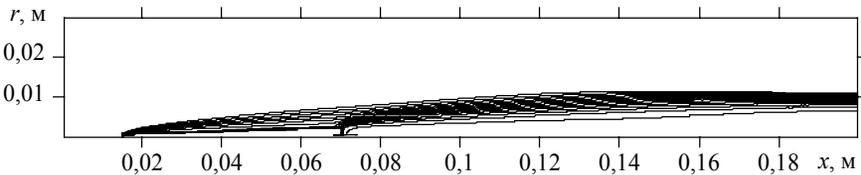


Рис. 5. Распределение плотности в потоке при обтекании усеченного конуса со скоростью 923 м/с

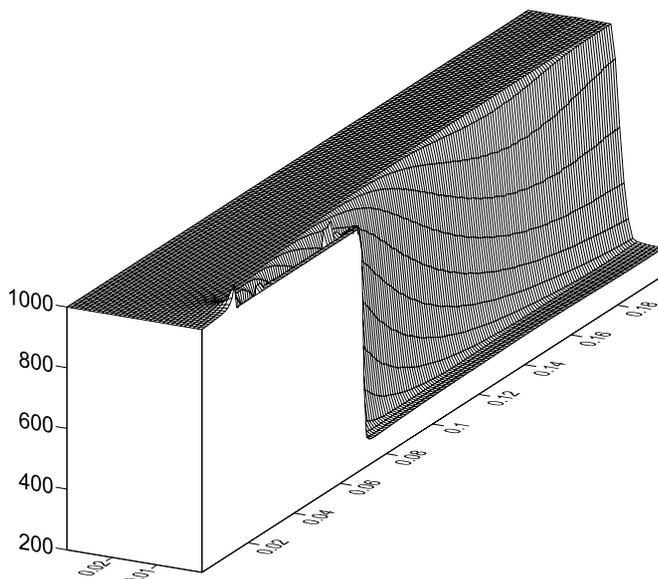


Рис. 6. Распределение плотности в потоке при обтекании усеченного конуса со скоростью 923 м/с

Численные результаты расчета формы с точностью до нескольких процентов совпадают с экспериментальными значениями [2].

Таким образом, разработан численный метод расчета суперкаверн, позволяющий получить результаты, удовлетворительно совпадающие с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кедринский В.К. Динамика зоны кавитации при подводном взрыве вблизи свободной поверхности // ПМТФ. 1975. № 5. С. 224–226.
2. Савченко Ю.Н. Моделирование суперкавитационных процессов // Прикладна гідромеханіка. 2000. № 2(74). С. 75–86.
3. Орленко Л.П. Физика взрыва. Т. 1. М.: ФИЗМАЛИТ, 2002. 832 с.

Статья поступила 13.03.2013 г.

Shakhtin A.A. NUMERICAL ANALYSIS OF SUPERCAVITATION. A mathematical model and calculation results for the problem of the cavitator motion in a liquid in the supercavitation mode are presented. The mathematical model is based on Euler equations for an ideal compressible fluid. The system of equations was solved with Godunov's method. The pressure and density distributions, as well as cavity shapes, have been obtained for different velocities of the flow around the cavitator.

Keywords: supercavitation, hydrodynamics

SHAKHTIN Andrey Anatol'evich (Tomsk State University)
E-mail: shahtin.a.a@gmail.com

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ**НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ
ПРОФЕССОРА Л. В. КОМАРОВСКОГО
В ТОМСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

В 2011 г. (29 октября) НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета понес невосполнимую утрату. На семьдесят первом году жизни скончался доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник института, заслуженный профессор Томского государственного университета, почетный работник высшего профессионального образования России, член – корреспондент Международной академии науки высшей школы, заслуженный деятель науки Российской Федерации Леопольд Викентьевич Комаровский.

Леопольд Викентьевич окончил в 1955 г. механико-математический факультет ТГУ и по распределению был направлен на работу в Томский политехнический институт на кафедру высшей математики. В 1956 г. он поступает в аспирантуру ТГУ (руководитель доц. Е.Д. Томилов). Вся дальнейшая трудовая деятельность Л.В. Комаровского связана с Томским государственным университетом. Сначала, после окончания аспирантуры, он работает на кафедре теоретической механики механико-математического факультета, затем с 1961 г. в спецотделе Сибирского физико-технического института под руководством М.С. Горохова, а с 1968 г. и до конца своих дней – в НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета.

Л.В. Комаровский создал и в течение почти 30 лет возглавлял большой научный коллектив, который проводил исследования по широкому кругу проблем: математическое моделирование и оптимальное проектирование газодинамических установок для высокоскоростного метания тел заданной массы и формы, изучение многофазных течений и реальных эффектов в газах, в материалах поршней и в стенках каналов, разработка численных и аналитических методов решения задач газовой динамики, исследование магнитногазодинамических процессов. Разработанное под его руководством новое направление в теории расчета и баллистического проектирования высокоскоростных газодинамических устройств по глубине проработки не имеет аналогов не только в России, но и за рубежом. Работы, выполненные им и его учениками по учету волновых процессов в пороховой камере, сил сопротивления поршню при его движении по баллистическому стволу и коническому переходнику, а также по учету теплоотдачи и эрозии баллистических стволов в высокоскоростных газодинамических установках, на 10–15 лет превосходили аналогичные работы в США, которые являются общепризнанным мировым лидером по высокоскоростному метанию. Работы по оптимальному баллистическому проектированию газодинамических установок, когда варьировалось до 30 параметров, до сих пор не превзойдены. Свыше 40 методик, при разработке которых Леопольд Викентьевич принимал непосредственное участие, были внедрены в практику расчета и оптимального баллистического проектирования высокоскоростных газодинамических ускорителей в ведущих организациях СССР. Специалисты России знают, что Л.В. Комаровский, его ученики и сотрудники заметно расширили класс точных аналитических решений уравнений газовой динамики, а при их численном решении развивали подходы, связанные как с построением и использованием однородных разностных схем газовой динамики, так и с выделением особенностей течения газа (так еще в 1974 г. в полном объеме был реализован на ЭВМ метод характеристик с автоматическим выбором шага и выделением всех особенностей). Он возглавлял оптимальное проектирование трех новых легкогазовых установок, в том числе самой крупной в СССР легкогазовой баллистической установки МТ18-М, а затем в течение ряда лет руководил математическим обеспечением по запуску и выводу этих установок на эксплуатационные режимы.

Леопольд Викентьевич – автор и соавтор 182 основных научных публикаций, в том числе 4 монографий, которые отмечены премиями ТГУ, и 10 авторских свидетельств на изобретение новых схем высокоскоростного метания. На его работы и публикации его учеников постоянно ссылаются. Ниже приведен **список основных научных трудов Комаровского Леопольда Викентьевича**, который позволяет более детально ознакомиться с его творчеством.

1. Название специальное. М.: Изд. ЦНИИ информации, 1975. 256 с. (соавторы: Барышев М.С., Зинченко Ю.К., Мерзляков В.Д., Косточко Ю.П.).
2. Аналитическое исследование некоторых внутренних задач нестационарной газовой динамики и переноса тепла. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981. 208 с. (соавтор Шабловский О.Н.).
3. Математическое моделирование и оптимальное проектирование баллистических установок. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. 254 с. (соавторы Жаровцев В.В., Погорелов Е.И.).
4. Математические модели течения и теплообмена во внутренних задачах динамики всякого газа. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993. 183 с. (соавторы Бубенчиков А.М., Харламов С.Н.).

5. О пространственных течениях газа с вырожденным годографом // Прикладная математика и механика. Изд. АН СССР. 1960. Т. 24. Вып. 3. 5 с.
6. Об одном точном решении пространственного неустановившегося течения газа типа двойной волны // Прикладная математика и механика. Изд. АН СССР. 1960. Т. 24. Вып. 3. 3 с.
7. О пространственных нестационарных течениях газа с вырожденным годографом // Докл. Сиб. конф. по мат. и мех. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1960. 2 с.
8. О двойных волнах пространственного неустановившегося течения газа // Вопросы математики. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1961. 8 с.
9. Обтекание тупоносых тел сверхзвуковым потоком газа (плоская задача) // Докл. 2-й Сиб. конф. по мат. и мех. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1962. 2 с. (соавтор Кузнецов Б.Г.).
10. Обтекание тупоносых тел сверхзвуковым потоком газа (осесимметричная задача) // Докл. 2-й Сиб. конф. по мат. и мех. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1962. 2 с. (соавтор Кузнецов Б.Г.).
11. Задача Лагранжа с подводом массы, импульса и энергии // Докл. 3-й Сиб. конф. по мат. и мех. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1964. 3 с.
12. Об одном из обобщений задачи Лагранжа // Докл. 3-й Сиб. конф. по мат. и мех. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1964. 2 с.
13. К вопросу о разгоне поршня в трубе // Докл. 3-й Сиб. конф. по мат. и мех. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1964. 1 с. (соавтор Горохов М.С.).
14. Об одной схеме решения задачи в разгоне поршня в трубе // Сб. работ по гидромеханике и теории упругости. Уч. зап. Томск. ун-та. 1967. № 68. 10 с.
15. Об одном примере пространственного неустановившегося вихревого течения газа с постоянной энтропией // Сб. работ по гидромеханике и теории упругости. Уч. зап. Томск. ун-та. 1967. № 68. 5 с.
16. К вопросу о движении поршня в трубе с противодействием // Сб. работ по гидромеханике и теории упругости. Уч. зап. Томск. ун-та. 1967. № 68. 2 с.
17. Задача Лагранжа с дополнительным втоком газа // Сб. работ по гидромеханике и теории упругости. Уч. зап. Томск. ун-та. 1967. № 68. 8 с.
18. Название специальное. М.: Машиностроение, 1967. 4 с. (соавтор Горохов М.С.).
19. Название специальное. М.: Машиностроение, 1967. 4 с. (соавтор Губина С.Л.).
20. О пространственных неадиабатических течениях газа с дифференциальными связями // Аннотация докл. III Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. 1968. 1 с.
21. Аналитические решения задачи о движении поршня в трубе под действием неустановившегося течения газа с вводом энергии // Тр. I Республиканской конф. по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену. Киев: Изд. Киевск. ун-та, 1969. 5 с.
22. Точное аналитическое решение задачи Лагранжа с вводом энергии для трубы переменного сечения // Тр. I Республиканской конф. по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену. Киев: Изд. Киевск. ун-та, 1969. 4 с.
23. О пространственных течениях газа с дополнительными связями и их приложение // Аннотация докл. 2-й Республиканской конф. по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену. Киев, 1969. 2 с.
24. Название специальное. М.: Машиностроение, 1969. 15 с.
25. О некоторых решениях нестационарного течения газа с вводом массы, импульса и энергии // Материалы итоговой науч. конф. по мат. и мех. за 1970 год. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1970. Т. 2. 2 с.

26. Аналитическое решение задачи об ускорении поршня в канале переменного сечения в случае неадиабатического расширения газа // Докл. 4-й казахстанской межвузовской научн. конф. по мат. и мех. Часть II. Механика. Алма-Ата, 1971. 2 с.
27. Решение задачи об ускорении поршня в трубе путем последовательного дискретного ввода энергии // Тр. НИИ ПММ. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1972. Т. I. 8 с. (соавтор Базилевич Т.Л.).
28. О расчете течения газа с вводом энергии по каналу переменного сечения методом распада произвольного разрыва // Тр. НИИ ПММ. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1972. Т. I. 7 с.
29. О неадиабатических течениях газа с дифференциальными связями // Тр. НИИ ПММ. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1972. Т. I. 7 с.
30. Построение аналитических решений задачи Лагранжа для трубы переменного сечения, когда возмущения со дна камеры не догоняют поршень // Тр. НИИ ПММ. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1972. Т. I. 4 с.
31. Об одном классе адиабатических течений газа между двумя поршнями по каналу переменного сечения // Материалы 2-й научн. конф. по мат. и мех. Т. 2. Изд. Томск. ун-та, 1972, 2 с.
32. О связи одного точного решения адиабатического течения с баллистическим решением задачи Лагранжа // Материалы 2-й научн. конф. по мат. и мех. Т. 2. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1972. 2 с.
33. Об ускорении свободного тела газовым потоком при малом зазоре между телом и пусковой трубой // Материалы 2-й научн. конф. по мат. и мех. Т. 2. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1972. 2 с.
34. О некоторых аналитических решениях неустановившегося газа // Докл. 6-го Всесоюзного совещания по аналитическим методам газовой динамики. М.: Изд. ИПМ, 1972. 2 с.
35. Название специальное // Сб. докл. 2-5-й Всесоюзной конф. Т. 2. М.: ЦНИИ НТИ, 1972. 6 с.
36. Название специальное // Сб. докл. 2-5-й Всесоюзной конф. Т. 2. М.: ЦНИИ НТИ, 1972. 5 с. (соавтор Базилевич Т.Л.).
37. Название специальное // Сб. докл. 2-5-й Всесоюзной конф. Т. 2. М.: ЦНИИ НТИ, 1972. 7 с.
38. Название специальное // Сб. докл. 2-5-й Всесоюзной конф. Т. 2. М.: ЦНИИ НТИ, 1972. 4 с. (соавтор Дубровская Л.И.).
39. Авторское свидетельство 77680 (СССР) (соавторы Косточко Ю.П. Барышев М.С.).
40. Авторское свидетельство 79431 (СССР) (соавтор Христенко Ю.Ф.).
41. Об одном точном решении задачи о движении газа в трубе переменного сечения с вводом энергии // Проблемы гидромеханики и теории упругости. Уч. зап. Томск. ун-та. 1973. № 73. 4 с.
42. Об одном точном решении задачи о движении газа в трубе переменного сечения с вводом энергии // Проблемы гидромеханики и теории упругости. Уч. зап. Томск. ун-та. 1973. № 73. 4 с.
43. Аналитическое решение задачи о движении поршня в трубе с противодавлением // Проблемы гидромеханики и теории упругости. Уч. зап. Томск. ун-та. 1973. № 73. 6 с.
44. О движении свободного течения в трубе под действием сжатого газа // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Т. 2. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973, 6 с.

45. К вопросу об ускорении поршня в трубе путем последовательного дискретного ввода энергии // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Т. 2. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. 5 с. (соавтор Базилевич Т.Л.).
46. О численном расчете неадиабатических течений газа по каналу переменного сечения // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Т. 2. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. (соавтор Жаровцев В.В.).
47. Простые волны пространственного нестационарного течения с вводом газа и энергии и их приложение // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Вып. 2. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. 17 с.
48. Точное решение задачи Лагранжа с частным законом ввода энергии // Проблемы гидромеханики и теории упругости. Уч. зап. Томск. ун-та. 1973. № 73. 3 с.
49. Численное решение задачи о движении поршня под действием давления одномерного неустановившегося течения газа с вводом тепла методом распада произвольного разрыва // Проблемы гидромеханики и теории упругости. Уч. зап. Томск. ун-та. 1973. № 73. 9 с. (соавтор Базилевич Т.Л.).
50. О решении предельной задачи Лагранжа // Проблемы гидромеханики и теории упругости. Уч. зап. Томск. ун-та. 1973. № 73. 7 с.
51. О некоторых частных классах аналитических решений задачи Лагранжа для канала переменного сечения с вводом энергии // Проблемы гидромеханики и теории упругости. Уч. зап. Томск. ун-та. 1973. № 73. 5 с.
52. Некоторые аналитические решения об ускорении свободного тела газовым потоком // Материалы 3-й научн. конф. Т. 2. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. 2 с.
53. Название специальное // Сб. работ. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. 6 с. (соавтор Христенко Ю.Ф.).
54. Название специальное // Сб. работ. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. 11 с. (соавтор Жаровцев В.В.).
55. Название специальное // Сб. работ. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. 9 с. (соавторы Базилевич Т.Л., Христенко Г.В.).
56. Об одном виде ускорения поршня в трубе при помощи подвода тепла // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Т. 3. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. 4 с. (соавтор Базилевич Т.Л.).
57. Применение метода выделения особенностей для численного решения задачи о движении поршня с учетом подвода тепла // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Т. 3. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. 11 с. (соавтор Дмитриенко С.Л.).
58. Аналитическое решение обратной задачи об ускорении поршня в канале переменного сечения в случае неадиабатического расширения газа // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Т. 3. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. 6 с.
59. О движении поршня, имеющего сквозное отверстие, в трубе под действием сжатого газа // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Т. 3. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. 6 с. (соавтор Христенко Ю.Ф.).
60. О некоторых задачах пространственного нестационарного обтекания тел в трубе и нестационарном истечении газа. Тр. III Всесоюзной научно-технической конф. по прикладной аэродинамике. Т. I. Киев, 1973 (Регистрационный номер 1795-74 деп. От 01.07.74). 7 с. (соавтор Дубровская Л.И.).
61. Название специальное // Материалы 7-й Всесоюзной конф. Изд. ЦНИИХМ, 1973. 10 с. (соавторы Ильницкий А.В., Косточко Ю.П., Христенко Ю.Ф.).
62. Название специальное // Материалы 7-й Всесоюзной конф. Изд. ЦНИИХМ, 1973. 19 с. (соавтор Дмитриева С.Л.).

63. Название специальное // Материалы 7-й Всесоюзной конф. Изд. ЦНИИХМ, 1973. 13 с. (соавтор Христенко Ю.Ф.).
54. Название специальное // Материалы 7-й Всесоюзной конф. Изд. ЦНИИХМ, 1973. 22 с. (соавторы Жаровцев В.В., Хоменко Ю.П.).
65. Название специальное // Материалы 7-й Всесоюзной конф. Изд. ЦНИИХМ, 1973. 22 с. (соавтор Дубровская Л.И.).
66. Название специальное // Материалы 8-й Всесоюзной конф. Изд. ЦНИИХМ, 1974. 14 с. (соавторы Ильницкий А.В. Христенко Ю.Ф.).
67. Название специальное // Материалы 8-й Всесоюзной конф. Изд. ЦНИИХМ, 1974. 14 с. (соавтор Жаровцев В.В.).
58. Название специальное // Материалы 8-й Всесоюзной конф. Изд. ЦНИИХМ, 1974. 22 с. (соавторы Жаровцев В.В., Погорелов Е.И.).
69. Название специальное // Материалы 8-й Всесоюзной конф. Изд. ЦНИИХМ, 1974. 12 с. (соавтор Дубровская Л.И.).
70. Об одном аналитическом решении задачи о движении свободного тела в трубе под действием расширяющегося газа // Материалы 4-й науч. конф. по мат. и мех. Т. 2. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1974. 2 с.
71. Название специальное // Докл. I научно-технической конф. ИМИ. Изд. ИМИ, 1974. 5 с. (соавтор Христенко Ю.Ф.).
72. Численное решение задачи о движении поршня в трубе с учетом противодействия // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Т. 4. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1974. 7 с. (соавтор Дмитриева С.Л.).
73. Решение некоторых задач с концентрированным вводом энергии и образованием сильных ударных волн // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Т. 4. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1974. 6 с. (соавтор Дубровская Л.И.).
74. Аналитическое решение задачи об ускорении поршня в канале переменного сечения в случае неизэнтропического расширения газа // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Т. 4. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1974. 11 с.
75. Об одном аналитическом решении задачи о метании свободного тела газовым потоком // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Т. 4. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1974. 4 с.
76. Оптимизация задачи Лагранжа с дискретным вводом энергии // Докл. научн. конф. «Вычислительные методы в математической физике, теории управления и оптимизации». Вып. 1. Киев: Изд. Киевск. ун-та, 1974 (соавторы Жаровцев В.В., Погорелов Е.И.).
77. Численное решение задачи о движении поршня, имеющего отверстия, под действием давления неадиабатически расширяющегося газа // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Т. 5. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1974 (соавтор Христенко Ю.Ф.).
78. О решении обратной задачи Лагранжа с учетом теплопроводности рабочего газа // Тр. НИИ прикл. мат. и мех. Т. 5. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1974. 4 с.
79. Осесимметричное обтекание сферы в цилиндрической трубе нестационарным потоком газа // Материалы 5-й научн. конф. по мат. и мех. Т. 2. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1975 (соавтор Дубровская Л.И.).
80. Численное решение задачи о нестационарном осесимметричном движении вязкой жидкости по каналу переменного сечения // Труды 5-го Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Изд. ВЦ СО АН СССР. Ч. 1. 1975. 10 с. (соавтор Хоменко Ю.П.).
81. Метание свободных тел газовым потоком // Численные методы механики сплошной среды. Изд. ВЦ СО АН СССР. 1976. Т. 7. № 6. 13 с.

82. О двумерном нестационарном разлете газа в вакуум из плоского или осесимметричного канала // *Механика жидкости и газа. Изв. АН СССР.* 1976. № 1 (соавтор Дворников В.А.).
83. Название специальное // *ВОТ. М., 1976. Сер. 4. Вып. 38. 7 с.* (соавторы Жаровцев В.В., Хоменко Ю.П.).
84. О движении газа за плоской детонационной волной, идущей по цилиндру ВВ // *Физика горения и взрыва. Изд. СО АН СССР.* 1976. № 6 (соавтор Дворников В.А.).
85. Название специальное. Горький: Изд. ЦНИИБ, 1976. 13 с. (соавторы Жаровцев В.В., Погорелов Е.И.).
86. Название специальное. Горький: Изд. ЦНИИБ, 1976. 19 с. (соавторы Жаровцев В.В. и др.).
87. Название специальное. Горький: Изд. ЦНИИБ, 1976. 14 с. (соавтор Христенко Ю.Ф.).
88. Осесимметричное нестационарное истечение газа из ударной трубы в пространство с препятствиями // *Тр. НИИ ПММ. Т. 7. Томск: Изд-во Том. ун-та,* 1976. 6 с. (соавтор Дубровская Л.И.).
89. О сравнении с экспериментом результатов численного расчета обтекания некоторых тел идеальным газом в каналах // *Тр. НИИ ПММ. Т. 7. Томск: Изд-во Том. ун-та,* 3 с. (соавтор Дубровская Л.И.).
90. Определение оптимальных геометрических характеристик камеры высокого давления в задаче Лагранжа // *Тр. НИИ ПММ. Т. 7. Томск: Изд-во Том. ун-та,* 1976. 8 с. (соавторы Жаровцев В.В., Погорелов Е.И.).
91. Определение оптимальных геометрических характеристик камеры высокого давления в задаче Лагранжа // *Тр. НИИ ПММ. Т. 7. Томск: Изд-во Том. ун-та,* 1976. 8 с. (соавторы Жаровцев В.В., Погорелов Е.И.).
92. Об осесимметричном нестационарном взаимодействии ударной волны с препятствием в цилиндрической трубе // *Изв. вузов. Авиационная техника.* 1977. № 2. 3 с. (соавтор Дубровская Л.И.).
93. Название специальное // *ОТ. М., 1977. № 2. 4 с.* (соавторы Жаровцев В.В., Погорелов Е.И.).
94. Название специальное. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977. 4 с. (соавтор Дмитриева С.Л.).
95. Название специальное. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977. 9 с. (соавтор Жаровцев В.В.).
96. Численное решение задачи об ускорении капсулы газовым потоком // *Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та,* 1977. 5 с. (соавтор Ильницкий А.В.).
97. Аналитические аппроксимации реальных сравнений состояния водорода и гелия в широкой области изменения термодинамических величин // *Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та,* 1977. 12 с. (соавтор Синяев С.В.).
98. Осесимметричное нестационарное обтекание в цилиндрической трубе // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1978. № 4. 6 с. (соавтор Дубровская Л.И.).
99. Название специальное // *ВСМ. Сер. 1. М., 1978. Вып. 8(51). 8 с.* (соавтор Христенко Ю.Ф.).
100. Название специальное // *ОТ. М., 1978. № 3. 4 с.* (соавтор Погорелов Е.И.)
101. Авторское свидетельство 141815 (СССР), (соавтор Ефремов В.В.).
102. Авторское свидетельство 141270 (СССР), (соавтор Нарезнев Л.С.).
103. Название специальное // *ВОТ. Сер. 4. М., 1979. Вып. 54. 6 с.* (соавторы Жаровцев В.В., Погорелов Е.И.).

104. Название специальное // ОТ. М., 1979. № 4. 4 с. (соавторы Бубенчиков А.М. и др.).
105. Об основных закономерностях ускорения свободного тела в баллистической установке // Аннотации докл. Всесоюзной конф. по механике сплошной среды. Ташкент, 1979. 2 с. (соавтор Ильницкий А.В.).
106. Название специальное. Тула, 1979. 7 с. (соавтор Погорелов Е.И.).
107. Название специальное. Тула, 1979. 7 с. (соавтор Христенко Ю.Ф.).
108. О граничных условиях на открытом конце трубы при нестационарном истечении или втоке газа из пространства в трубу // Аэрогазодинамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1979. 6 с. (соавторы Дмитриева С.Л., Дубровская Л.И.).
109. Об одной схеме ускорения тела в пусковой трубе и газодинамическом анализе ее с учетом образования и взаимодействия всех поверхностей разрыва // Аэрогазодинамика быстропотекающих процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1979. 5 с. (соавтор Панков В.Н.).
110. Об оптимальном управлении газа между двумя поршнями в канале переменного сечения // Оптимальное управление в механ. системах. Докл. III Всес. конф. Т. 2. Киев, 1979. 2 с. (соавторы Погорелов Е.И., Погорелова Т.Г.).
111. Авторское свидетельство 156695 (СССР), 1 с. (соавтор Христенко Ю.Ф.).
112. Название специальное // ВОТ. Сер. 4. М., 1980. Вып. 62. 4 с. (соавтор Христенко Ю.Ф.).
113. Название специальное // Материалы Всес. конф. 1980. 2 с. (соавтор Ильницкий А.В.).
114. О взаимодействии двумерного нестационарного течения газа со свободным цилиндрическим телом в канале // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 2. 5 с. (соавторы Дубровская Л.И., Ким А.В.).
115. Название специальное // ОТ. М., 1981. № 12. 5 с. (соавторы Никулин О.А. и др.).
116. Название специальное // ОТ. М., 1981. № 4. 4 с. (соавторы Ильницкий А.В., Косточко Ю.П.).
117. Название специальное. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981. 11 с. (соавтор Жаровцев В.В.).
118. Название специальное. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981. 9 с. (соавтор Жаровцев В.В.).
119. Авторское свидетельство 182603 (СССР), 1 с. (соавтор Погорелов Е.И.).
120. Численное решение задачи о метании свободного тела газовым потоком // Аэродинамика быстропотекающих процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982. 7 с. (соавторы Новгородцев Н.А., Хоменко Ю.П.).
121. О моделировании процессов электрогазодинамического ускорения тела уравнениями газовой динамики с вводом импульса и энергии // Аэродинамика быстропотекающих процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982. 5 с. (соавтор Синяев С.В.).
122. Название специальное // ВСМ. Сер. 3. М., 1982. Вып. 5 (100). 5 с. (соавторы Погорелов Е.И., Погорелова Т.Г.).
123. Название специальное // ВСМ. Сер. 3. М., 1982. Вып. 5 (100). 5 с. (соавторы Никулин О.А., Погорелов Е.И.).
124. Название специальное // ВСМ. Сер. 3. М., 1982. Вып. 5 (100). (Ильницкий А.В., Косточко Ю.П.)
125. Название специальное // ВОТ. Сер. 4. М., 1982. Вып. 76. 3 с. (соавтор Ефремов В.В.).

126. Название специальное // ОТ. № 9. М., 1982. 3 с. (соавторы Бубенчиков А.М., Погорелова Т.Г.).
127. Решение задачи Лагранжа с учетом времени открытия диафрагмы и тепловыделения // Вопросы нестационарной газовой динамики. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983. 5 с. (соавторы Новгородцев Н.А., Хоменко Ю.П.).
128. Название специальное // ОТ. М., 1983. № 2. 4 с. (соавтор Ильницкий А.В.).
129. Название специальное // ОТ. М., 1983. № 5. 4 с. (соавторы Погорелов Е.И. и др.).
130. Название специальное // ВОР. Сер. 4. М., 1983. Вып. 84. 5 с. (соавтор Жаровцев В.В.).
131. Название специальное // ВОР. Сер. 4. М., 1983. Вып. 84. 5 с. (соавторы: Бубенчиков А.М., Мастеренко А.М.).
132. Авторское свидетельство. 192124 (СССР), 1 с. (соавтор Ильницкий А.В.).
133. Авторское свидетельство. 195180 (СССР), 1 с. (соавторы Погорелов Е.И. и др.).
134. Название специальное // Материалы Всес. конф. 1984. 2 с. (соавтор Ильницкий А.В.).
135. Авторское свидетельство. 198043 (СССР), 1 с. (соавтор Ильницкий А.В.).
136. Название специальное // ОТ. М., 1984. № 3. 4 с. (соавтор Жаровцев В.В.).
137. Название специальное // ВОР. Сер. 4. М., 1985. Вып. 2. 5 с. (соавторы Бубенчиков А.И. и др.).
138. Название специальное // Материалы Всес. конф. 1985 (соавторы Бубенчиков А.М., Мастеренко А.М.).
139. Название специальное. М.: Изд. МВТУ, 1986. 2 с. (соавторы Погорелов Е.И., Потемкин С.В.).
140. Название специальное // ОТ. М., 1986. № 2. 4 с. (соавторы Ефремов В.В., Жаровцев В.В.).
141. Название специальное // ОТ. М., 1986. № 9. 4 с. (соавторы Бубенчиков А.М., Мастеренко А.М.).
142. Оптимальное ускорение тела ударными волнами в канале газодинамической метательной системы // IV Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 1986. 2 с. (соавтор Погорелов Е.И.).
143. Название специальное // ОТ. М., 1987. № 4. 5 с. (соавторы (Погорелов Е.И., Синяев С.В.)).
144. Название специальное // ОТ. М., 1987. № 9. 4 с. (соавтор Жаровцев В.В.).
145. Название специальное // ОТ. М., 1987. № 2. 5 с. (соавторы Бубенчиков А.М. и др.).
146. Название специальное. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. 6 с. (соавтор Леонов С.А.).
147. Название специальное. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. 13 с. (соавтор Леонов С.А.).
148. Название специальное // ОТ. М., 1988. № 3. 5 с. (соавторы Погорелов Е.И., Потемкин С.В.).
149. Название специальное // ОТ. М., 1988. № 6. 5 с. (соавторы Погорелов Е.И. и др.).
150. Название специальное // ВОР. Сер. 4. М., 1988. Вып. 122. 6 с. (соавтор Жаровцев В.В.).
151. Точное решение одной задачи о неустановившемся движении вязкоупругой жидкости в плоской полубесконечной области с подвижной границей // Аэ-

- рогазодинамика нестационарных процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988, 5 с. (соавтор Шабловский О.Н.).
152. Название специальное. Пенза, 1989. 2 с. (соавторы Леонов С.А., Шалагина Л.А.).
153. Название специальное // ОТ. М., 1989. № 1. 4 с. (соавторы Бубенчиков А.М., Мастеренко А.М., Синяев С.В.).
154. Название специальное // Проблемы преобразования энергии. М., 1989. Вып. 2 (148). 11 с. (соавторы Васильев И.А., Леонов С.А.).
155. Название специальное // ОТ. М., 1989. № 12. 4 с. (соавторы Леонов С.А., Шалагина Л.А.).
156. Название специальное // ОТ. М., 1991. № 8. 5 с. (соавтор Жаровцев В.В.).
157. Автомодельные процессы тепловой релаксации в нелинейных средах. Газовая динамика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 7 с. (соавторы Шабловский О.Н., Глазунов В.И.).
158. Название специальное // Фундаментальные и поисковые исследования в интересах обороны страны. Вып. 72. Проблемы высокоскоростного метания. Изд. СПП АН СССР, 1991. 8 с. (соавторы Богоряд И.Б. и др.).
159. Название специальное // Фундаментальные и поисковые исследования в интересах обороны страны. Вып. 72. Проблемы высокоскоростного метания. Изд. СПП АН СССР, 1991. С. 67–74. 8 с. (соавторы Бубенчиков А.М. и др.).
160. Нестационарные ударные волны в газе Ван-дер-Ваальса // Аэрогазодинамика нестационарных процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1992. 12 с. (соавторы Шабловский О.Н., Глазунов В.И.).
161. Исследование нелинейных релаксационных тепловых процессов при поверхностном испарении материалов // Аэрогазодинамика нестационарных процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1992. 10 с. (соавтор Шабловский О.Н.).
162. Авторское свидетельство «Устройство для получения газов». 1804902 (СССР). 1992. 4 с. (соавторы Бубенчиков А.М., Гареев И.Ф.).
163. Математическое моделирование и оптимальное проектирование многоступенчатых баллистических установок // Материалы Международ. конф. «Численные методы в гидравлике и гидромеханике». Донецк: Изд. ДонГУ, 1994. 2 с.
164. Внутренняя баллистика установок с неоднородным генератором пороховых газов // Международная конференция по внутрикамерным процессам и горению (ICOS-96), Россия, Санкт-Петербург, 3–7 июня 1996 г. Ч. 2. Ижевск, 1997. 7 с. (соавтор Жаровцев В.В.).
165. Газодинамический расчет двухступенчатой баллистической установки диафрагменного типа // Международная конференция «Всесибирские чтения по математике и механике»: Избранные доклады. Т. 2. Механика. Часть 1. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997. 7 с. (соавторы Белов В.М., Жаровцев В.В.).
166. Легкогазовые баллистические системы для непосредственного вывода в космос капсул с радиоактивными отходами // Доклады Всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики». Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. 2 с. (соавторы Жаровцев В.В., Синяев С.В.).
167. Пути повышения скоростей метания и ресурса легкогазовых установок // Современные проблемы механики. М.: Изд. Моск. ун-та., 1999. 3 с. (соавтор Христенко Ю.Ф.).
168. Расчет параметров газа в узле стыковки трех параллельных каналов различных диаметров // Математическое моделирование процессов в синергетиче-

- ских системах. Улан Удэ – Томск. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. 3 с. (соавторы Белов В.М., Жаровцев В.В.).
169. Математическое моделирование и проектирование ствольных систем с ударным подогревом легкого газа // Доклады научной конференции РАН «Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения. Саров: Изд. Российского Федерального ядерного центра – ВНИИЭФ, 2000. 5 с. (соавтор Жаровцев В.В.).
170. Расчет внутрибаллистических характеристик установок с двумя метаемыми элементами // Доклады 3-й Международной конференции «Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и ствольных системах» (ICOS-99), Россия, Ижевск, 2000. Т. 2. 11 с. (соавтор Жаровцев В.В.).
171. Легкогазовые системы с ударно-волновым подгоном метаемых тел в пусковой трубе // Тезисы докладов 8-го Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. Пермь, 2001. 1 с.
172. Легкогазовые баллистические установки–инструмент для получения космических скоростей в лабораторных условиях // Гидродинамика высоких плотностей энергии. Труды Международного семинара. Изд. Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2004. 12 с. (соавторы Пилюгин Н.Н., Христенко Ю.Ф.).
173. Называние специальное // Боеприпасы. 2004. № 6. 7 с. (соавторы Крайнов А.Ю., Сафронов А.И., Тыщук Г.К.).
174. Внутренняя баллистика ствольных систем с присоединенными камерами подгона // Четвертая Международная школа-семинар «Внутрикамерные процессы, горение и газовая динамика дисперсных систем». Избранные доклады. Санкт-Петербург, 2004. Т. 2. 3 с. (соавтор Сафронов А.И.).
175. Анализ внутренней баллистики ствольных систем с камерами подгона // Четвертая Всероссийская конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики». Томск, 2004. 2 с. (соавтор Сафронов А.И.).
176. Внутренняя баллистика с камерами подгона // Наука производству. 2004. № 8. 3 с. (соавтор Сафронов А.И.).
177. Теоретический анализ внутренней баллистики установки с камерами подгона для высокоскоростного метания тел // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Материалы V Всероссийской конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. 2 с. (соавтор Сафронов А.И.).
178. О подгоне свободного тела ударной волной в легкогазовой баллистической установке // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Материалы VI Всероссийской конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2008. 2 с. (соавтор Клюпа А.В.).
179. Анализ и баллистическое проектирование многоступенчатых систем с использованием присоединенных к метаемому телу камер // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Материалы VI Всероссийской конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2008. 2 с. (соавтор Сафронов А.И.).
180. Анализ и баллистическое проектирование систем с использованием присоединенной к метаемому телу камеры // Современная баллистика и смежные вопросы механики. Материалы Всероссийской научной конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. 2 с. (соавторы Сафронов А.И., Потапенко В.В.).
181. Анализ легкогазовой баллистической системы со свободным метанием тела в пусковой трубе // Современная баллистика и смежные вопросы механики.

Материалы Всероссийской научной конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. 2 с. (соавтор Клюпа А.В.).

182. Анализ и баллистическое проектирование систем с различными видами подгона метаемого тела в стволе // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Материалы VII Всероссийской конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. 2 с. (соавтор Сафронов А.И.).

Много сил и энергии Л.В. Комаровский отдал подготовке научных кадров. Под его научным руководством защищено 22 кандидатские диссертации, восемь его учеников стали докторами наук. Он постоянно принимал участие в работе советов по присуждению ученых степеней докторов и кандидатов наук, в течение почти 25 лет редактировал межвузовские тематические сборники по газовой динамике, регулярно рецензировал диссертации и монографии. Он читал лекции на механико-математическом и физико-техническом факультетах ТГУ, был руководителем курсовых и дипломных работ у многих студентов.

Почти 30 лет Комаровский Л.В. руководил одной из самых больших лабораторий, 20 лет возглавлял самый крупный теоретический отдел института. Его ученики и сотрудники являются профессорами и заведующими кафедрами ММФ и ФТФ, входят в состав дирекции института.

До конца своих дней Леопольд Викентьевич Комаровский возглавлял ведущий научно-педагогический коллектив Томского государственного университета «Механика и физика быстропротекающих процессов».

Заслуги Л.В. Комаровского перед Национальным исследовательским Томским государственным университетом особенно концентрировано проявились в том, что в одном из приоритетных направлений развития ТГУ выполнение раздела «Проектирование перспективных артиллерийских систем» возложено, в основном, на сотрудников института, которые являются его «научными детьми» и «научными внуками».

Коллеги глубоко уважали Леопольда Викентьевича за компетентность, за доброжелательное отношение к людям, за исключительную скромность, за умение создать в коллективе многолетнюю бесконфликтную творческую обстановку, за его оптимизм. Все завидовали его умению поддерживать хорошую физическую форму и вести активный образ жизни.

Перестало биться сердце Комаровского Леопольда Викентьевича, но остались его ученики и последователи. Это будет лучшей памятью о нем.

А.А. Глазунов, В.В. Жаровцев

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БУХТЯК Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии Томского государственного университета. E-mail: bukhtyakm@mail.ru

ДЕМЕНТЬЕВ Александр Александрович – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: daa024@ftf.tsu.ru

ДЬЯЧЕНКО Евгений Николаевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры математической физики Томского государственного университета. E-mail: Evg.Dya@gmail.com

ЕСИНА Зоя Николаевна – к.т.н., доцент кафедры вычислительной математики Кемеровского государственного университета. E-mail: ezn2@ Rambler.ru

КАЙГОРОДОВ Евгений Владимирович – аспирант кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: gazetaintegral@gmail.com

КОЛЕСНИКОВ Иван Александрович – аспирант кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

КОЛМАКОВА Татьяна Витальевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: kolmakova@ftf.tsu.ru

КОРЧУГАНОВА Маргарита Рашидовна – старший преподаватель кафедры вычислительной математики Кемеровского государственного университета. E-mail: markarina@mail.ru

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

МУРАШКИН Виталий Васильевич – руководитель репрезентативного бюро «Weishaupt», соискатель кафедры вычислительной математики Кемеровского государственного университета. E-mail: zitner@mail.ru

НИКУЛЬЧИКОВ Андрей Викторович – аспирант кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: tracesofdeath@mail2000.ru

ПЧЕЛИНЦЕВ Валерий Анатольевич – аспирант кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: VPchelintsev@vtomske.ru

РАЦЕЕВ Сергей Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета. E-mail: RatseevSM@mail.ru

СЕВАСТЬЯНОВ Николай Николаевич – заведующий кафедрой промышленных космических систем физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: sevastyanov@gascom.ru

ФЕДУЛОВ Роман Васильевич – магистр по направлению «прикладные математика и физика», ведущий специалист отдела динамики и систем управления ОАО «Газпром космические системы» (г. Королёв). E-mail: fedulov@gazprom-spacesystems.ru

ЧЕРЕВАТЕНКО Ольга Ивановна – кандидат физико-математических наук, и.о. заведующей кафедрой высшей математики Ульяновского государственного педагогического университета имени И.Н.Ульянова. E-mail: chai@pisem.net

ШАХТИН Андрей Анатольевич – аспирант кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: shahatin.a.a@gmail.com

ШИШКИН Антон Сергеевич – инженер, ведущий специалист отдела динамики и систем управления ОАО «Газпром космические системы» (г. Королёв). E-mail: shishkin@gazprom-spacesystems.ru