ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2018 Математика и механика № 51

УДК 511.17 MSC 11Y35, 05A15
DOI 10.17223/19988621/51/3

В.М. Зюзьков

ВОКРУГ ТЕОРЕМЫ ЭЙЛЕРА О СУММАХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Работа относится к экспериментальной математике. Рассматриваются две задачи, которые решал Эйлер. В одной задаче подсчитывается число разбиений для натуральных чисел, решение другой задачи дает рекуррентную закономерность, связывающую суммы делителей натуральных чисел. Эйлер не имел определения формального степенного ряда и производящей функции, но тем не менее, используя индуктивные рассуждения, получил результаты, которые впоследствии были строго доказаны другими математиками. Показывается, как можно решить эти задачи с помощью аппарата производящих функций и вычислений в системе Mathematica. Во время решения этих задач Эйлер рассматривал две бесконечные последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$: 1, –1, –1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, … и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$: 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, … . Автор получил новые результаты: «замкнутую форму» для этих последовательностей и производящую функцию для последовательности $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Ключевые слова: *экспериментальная математика, теорема Эйлера о разбиениях, гипотеза Эйлера о суммах делителей, производящие функции, система Mathematica.*

В настоящее время развивается экспериментальная математика: открытие новых математических закономерностей путем компьютерной обработки большого числа примеров. Такой подход не столь убедителен, как короткое доказательство, но может быть убедительнее длинного сложного доказательства и в некоторых случаях вполне приемлем. В прошлом данную концепцию отстаивали и Дьёрдь Пойа [1, 2], и Лакатос [3], убежденные сторонники эвристических методов и квазиэмпирической природы математики.

Экспериментальной математики посвящены книги [4, 5]. Методы экспериментальной математики в естественно-научных дисциплинах, в первую очередь в физике, применяются и обосновываются в книге «Новый вид науки» Стивена Вольфрама [6].

Компьютеры иногда позволяют получить неформальные аргументы в пользу того или иного предположения, а иногда, наоборот, опровергнуть казавшиеся правдоподобными гипотезы. Компьютерные вычисления также поставляют первичную информацию, позволяющую обнаруживать новые свойства изучаемых объектов и выдвинуть новые гипотезы.

Mathematica – одна из популярных систем компьютерной алгебры; используемый язык программирования носит название Wolfram [7, 8]. Применение Mathematica позволяет эффективно вычислять математические объекты, что проливает свет на используемые математические понятия. Причем использование Mathematica не требует глубоких знаний программирования.

Теория формальных рядов в полной общности описана в [9, с. 64–81]. Частный случай – множество формальных степенных рядов. *Формальным степенным ря-*

дом (от одной переменной) называется формальное выражение вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

где коэффициенты a_k принадлежат числовому кольцу или полю R.

Переменная x является формальной, и нас не интересует сходимость такого ряда. Вполне возможно, что, только подставив $x = 0$, в результате получим некоторое число.

Множество формальных степенных рядов, определяемое числовым кольцом или полем R, будем обозначать как

$$R[[x]] = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \mid a_k \in R\}.$$

Формальные степенные ряды являются обобщением многочленов от одной переменной, и поэтому в степенном ряду может быть и конечное число членов, т.е. только конечное число коэффициентов $a_k \neq 0$. И так же как и для многочленов, можно ввести на множестве $R[[x]]$ алгебраическую структуру коммутативного кольца с единицей.

Определим операции сложения и умножения формальных степенных рядов посредством равенств

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k,$$

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \text{ где } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} x^i.$$

Таким образом, чтобы найти коэффициент c_n при x^n в произведении двух рядов, нам не надо рассматривать эти ряды полностью, достаточно взять первые $n + 1$ членов в каждом из них.

Во множестве $R[[x]]$ роль нуля выполняет ряд, все коэффициенты которого равны нулю, а роль единицы – ряд, в котором первый коэффициент равен 1, а остальные равны 0. Известно, что множество $R[[x]]$ с операциями сложения и умножения и элементами 0 и 1 является коммутативным кольцом, в котором элемент

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$.

Например, формальные степенные ряды $1 - x - x^2$ и $\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$ являются взаимно обратными (F_k – k-е число Фибоначчи; $F_0 = F_1 = 1$, а для $k > 1$ имеем $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$).

Действительно, имеем

$$(1 - x - x^2)\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = (1 - x - x^2)(F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \dots) =$$
$$= F_0 + (F_1 - F_0)x + (F_2 - F_1 + F_0)x^2 + \dots.$$

В силу начальных условий и рекуррентного соотношения для чисел Фибоначчи полученный ряд равен 1. В книге [10, с. 353–417] описана теория производящих функций и множество примеров применения. По-видимому, все, что алгоритмизуемо в теории производящих функций, в частности разнообразные приемы преобразований производящих функций из указанной книги, реализовано в языке Wolfram.

Определение производящей функции. Пусть a_0, a_1, a_2, … – произвольная бесконечная последовательность чисел (они могут быть натуральными, целыми, рациональными, вещественными или комплексными). *Производящей функцией* для этой последовательности будем называть формальный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Производящая функция определяется и для конечной последовательности a_0, a_1, a_2, …, a_n. В этом случае в формальном степенном ряду все коэффициенты, начиная с a_{n+1}, полагают равным нулю.

Ранее мы получили равенство

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k.$$

Каков его смысл? Например, бессмысленно подставлять в него $x = 1$. Дело в том, что выражения

$$\frac{1}{1-x-x^2} \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$$

равны как элементы кольца формальных степенных рядов. И в соответствии с предыдущим определением производящая функция последовательности чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … представляется как в виде формального степенного ряда, так и в виде функции $1/(1-x-x^2)$. Про последнее выражение говорят, что оно является производящей функцией, записанной в «замкнутой форме» (содержит только элементарные функции и не содержит бесконечные суммы).

Теория производящих функций дает аппарат для создания производящих функций в замкнутой форме для различных последовательностей. И возможно, поэтому производящие функции находят разнообразные применения, в первую очередь в комбинаторике и теории чисел.

Ранее было дано определение последовательности Фибоначчи, и для этой последовательности была найдена производящая функция. Но числа последовательности Фибоначчи в языке Wolfram нумеруются другим образом (здесь и далее символ “⇒” предшествует вычисляемому выражению, а на следующей строке показано полученное значение):

```
⇒ Fibonacci[Range[0, 10]]
{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55}
```

В соответствии с этим определением требуется заново найти производящую функцию в замкнутой форме для последовательности Фибоначчи. Воспользуемся полученным ранее равенством:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = 1x^0 + 1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \dots.$$

Умножая обе части на x, получаем

$$\frac{x}{1-x-x^2} = 0x^0 + 1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots.$$

Таким образом, последовательность {Fibonacci[n] | n = 0, 1, 2, …} имеет производящую функцию $x/(1 - x - x^2)$.

В языке Wolfram имеется возможность для последовательности (в общем случае бесконечной) получить производящую функцию в замкнутом виде. Основная функция для этой цели GeneratingFunction[*expr*, *n*, *x*], где выражение *expr* представляет *n*-й член последовательности. Найдем производящую функцию для последовательности Фибоначчи:

⇒ GeneratingFunction[Fibonacci[*n*], *n*, *x*]

$$-\frac{x}{-1+x+x^2}$$

Функция Series[f,{x, x_0, n}] языка Wolfram создает конечный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!},$$

где $f^{(k)}(x_0)$ – значение k-й производной функции f в точке x_0. Когда f является производящей функцией последовательности, то Series обычно вызывается в виде Series[f ,{x, 0, n}]. Например, для производящей функции последовательности Фибоначчи получаем

$$\Rightarrow \text{Series}\left[-\frac{x}{-1+x+x^2},\{x,0,10\}\right]$$

$x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 + 34x^9 + 55x^{10} + \text{O}[x]^{11}$

Функция SeriesCoefficient[*series*, *n*] извлекает коэффициент при степени *n* из степенного ряда, созданного функцией Series:

$$\Rightarrow f10 = \text{Series}\left[-\frac{x}{-1+x+x^2},\{x,0,10\}\right];$$

⇒ SeriesCoefficient[*f*10, 10]

55

Список всех коэффициентов из нужного диапазона можно получить следующим образом:

⇒ SeriesCoefficient[*f*10, #]& /@ Range[0, 10]

{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55}

2. Разбиения

Разбиением натурального числа *n* называется всякая невозрастающая последовательность натуральных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$, для которых

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = n\,.$$

Пусть p_n обозначает число разбиений для неотрицательного целого числа n (условимся считать, что $p_0 = 1$), тогда последовательность $p_0, p_1, p_2, \ldots$ начинается с чисел 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, … .

Достаточно просто найти производящую функцию для последовательности p_n [11, с. 88].

Теорема 1 (Эйлер). Производящая функция для числа разбиения числа n имеет вид

$$P(x) = 1 \Big/ \prod\nolimits_{n=0}^{\infty} \left(1 - x^{n+1}\right).$$

В языке *Wolfram* имеется функция PartitionsP для вычисления значений последовательности p_n:

⇒ PartitionsP/@Range[0,10]

{1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42}

Mathematica знает, чему равна производящая функция для последовательности p_n , и выдает ее в «замкнутом» виде:

⇒ GeneratingFunction[PartitionsP[n], n, x]

$$\frac{1}{\text{QPochhammer}[x, x]}$$

Функция QPochhammer[a, q] дает значение «q-символа Похгаммера» $(a;q)_\infty$, который определяется как

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - aq^k\right).$$

Этот символ был введен вскоре после обычных гипергеометрических функций; q-функции долгое время изучались как теоретические обобщения гипергеометрических и других функций. Язык Wolfram впервые дает возможность полностью вычислить числовые q-функции и также совершить символьные преобразования с ними, что позволяет использовать q-функции в замкнутом виде для сумм, произведений, решений рекуррентных уравнений и т. д. [12].

Можно получить q-символ Похгаммера при упрощении формального произведения

$$\Rightarrow \text{Simplify}\left[\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - x^{n+1}\right)\right]$$

QPochhammer[x, x]

Можно явно получить конечный степенной ряд, коэффициенты которого являются начальными элементами последовательности $p_0, p_1, p_2, \ldots$:

$$\Rightarrow \text{Series}\left[\frac{1}{\text{QPochhammer}[x, x]}, \{x, 0, 9\}\right]$$

$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + \text{O}[x]^{10}$

3. Последовательность с производящей функцией QPochhammer[x, x]

Изучим сейчас последовательность a_0, a_1, a_2, …, для которой производящей функцией является QPochhammer[x, x]. Посмотрим на первые члены этой последовательности:

⇒ SeriesCoefficient[QPochhammer[x, x], {x, 0, #}]& /@ Range[0, 51]

{1, –1, –1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, –1, 0, 0, –1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, –1, 0, 0, 0, 0, –1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}

Впервые эту последовательность получил Эйлер [10, с. 117, 118], который вручную находил коэффициенты формального степенного ряда, получаемого в результате бесконечного произведения

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\,(1-x^4)(1-x^5)\,\ldots.$$

Сейчас это можно сделать быстрее:

$$\Rightarrow \text{Series}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right),\{x,0,51\}\right]$$

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+\text{O}[x]^{52}$$

Рассмотрение последнего ряда привело Эйлера к гипотезе, которая сейчас известна как

Теорема 2 (пентагональная теорема Эйлера).

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\,(x^{m(3m-1)/2}+x^{m(3m+1)/2}).$$

Доказательство смотрите, например, в [13, с. 26; 11, с. 91, 92].

Найдем формулу для последовательности a_0, a_1, a_2, …в замкнутом виде. Если $n = m(3m+1)/2$, то выразим m через n:

$$m=\frac{1}{6}\left(-1-\sqrt{1+24n}\right) \text{ и } m=\frac{1}{6}\left(-1+\sqrt{1+24n}\right).$$

Таким образом, если $1+24n$ – точный квадрат, то $a_n = \pm 1$, иначе $a_n = 0$. Отсюда получаем (при $m=\sqrt{1+24n}$) равенство

$$a_n=\begin{cases}(-1)^{(-m-1)/6}, & \text{если } m \text{ – целое и } (-m-1)\operatorname{mod}6=0;\\(-1)^{(-m-1)/6}, & \text{если } m \text{ – целое и } (m-1)\operatorname{mod}6=0;\\0, & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

Определим функцию произвольного натурального m:

$$\alpha(m)=\begin{cases}(-1)^{(m+1)/6}, & \text{если } m \operatorname{mod}6=5;\\(-1)^{(m-1)/6}, & \textit{если } m \operatorname{mod}6=1;\\0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Если $m=\sqrt{1+24n}$ – целое число, то $a_n=\alpha(m)$.

Так как элементы последовательности a_0, a_1, a_2, … являются только ±1 или 0, то естественно предположить, что они суть значения некоторого символа Якоби для m. Для нечетных m в качестве простейших кандидатов можно взять $\left(\frac{m}{3}\right)$ или $\left(\frac{3}{m}\right)$. Проверка показывает, что $\left(\frac{m}{3}\right)\neq\alpha(m)$ в общем случае даже для нечетного m. Но следующая проверка подтверждает предположение $\left(\frac{3}{m}\right)=\alpha(m)$ для первой тысячи нечетных натуральных чисел:

```
⇒ AllTrue[(JacobiSymbol[3, #] ==
            Piecewise[{{(–1)^((# + 1)/6), Mod[#, 6] == 5},
                       {(–1)^((# – 1)/6), Mod[#, 6] == 1}}, 0])& /@
                       Select[Range[1000], OddQ],
            #&]
True
```

Лемма. Для нечетных натуральных m выполнено равенство $\alpha(m) = \left(\frac{3}{m}\right)$.

Доказательство. Если m не кратно 3, то по квадратичному закону взаимности и по критерию Эйлера квадратичного вычета по простому модулю имеем

$$\left(\frac{3}{m}\right) = \left(\frac{m}{3}\right)(-1)^{\frac{(3-1)(m-1)}{4}} = \left(\frac{m}{3}\right)(-1)^{(m-1)/2} \equiv m^{(3-1)/2}(-1)^{(m-1)/2} \equiv m(-1)^{(m-1)/2} \pmod 3.$$

Далее разберем два случая для m.

1. $m = 6k + 5$ (k – целое). В этом случае $(m - 1)/2 = 3k + 2$ и поэтому

$$\left(\frac{3}{m}\right) \equiv (6k+5)(-1)^{3k+2} \equiv (-1)^{3k+3} \pmod 3.$$

Величина $(-1)^{3k+3}$ для четного k равна -1, а для нечетного k получаем 1. Теперь найдем значения $\alpha(6k + 5)$ для четного и нечетного k по отдельности. Если $k = 2t$ (t – целое), то имеем $\alpha(6(2t) + 5) = (-1)^{(12t+5+1)/6} = -1$. Если $k = 2t + 1$, то $\alpha(6(2t + 1) + {}$ $+5) = (-1)^{(12t+11+1)/6} = 1$. Независимо от четности k имеем $\left(\frac{3}{6k+5}\right) = \alpha(6k+5)$.

2. $m = 6k + 1$ (k – целое). В этом случае $(m - 1)/2 = 3k$ и поэтому

$$\left(\frac{3}{m}\right) \equiv (6k+1)(-1)^{3k} \equiv (-1)^{3k} \pmod 3.$$

Величина $(-1)^{3k}$ для четного k равна 1, а для нечетного k получаем -1. Теперь найдем значения $\alpha(6k + 1)$ для четного и нечетного k по отдельности. Если $k = 2t$ (t – целое), то имеем $\alpha(6(2t) + 1) = (-1)^{(12t)/6} = 1$. Если $k = 2t + 1$, то $\alpha(6(2t + 1)+1) =$ $= (-1)^{(12t+7-1)/6} = -1$. Независимо от четности k имеем $\left(\frac{3}{6k+1}\right) = \alpha(6k+1)$.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда m кратно 3. Но в этом случае $\left(\frac{3}{m}\right) = 0 = \alpha(m)$ по определению. ■

Теорема 3 (формула для последовательности a_0, a_1, a_2, …в замкнутом виде). Для целого $n > 0$ положим $m = \sqrt{1+24n}$. Тогда элементы последовательности a_0, a_1, a_2, … можно вычислить по правилу

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{12}{m}\right), \text{ если } m \text{ - целое число;} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \qquad (1)$$

Доказательство. Из леммы следует, что если m – нечетное целое число, то $a_n = \left(\frac{3}{m}\right)$.

Желательно было бы иметь такое x, чтобы $a_n = \left(\frac{x}{m}\right)$ для всех натуральных m. Для этого достаточно взять $x = 12$, тогда

$$\left(\frac{12}{m}\right) = \left(\frac{2}{m}\right)^2 \left(\frac{3}{m}\right)$$

и (1) справедливо, так как для нечетных m символ Якоби $\left(\frac{2}{m}\right) = \pm 1$, а для четных m выполнено $\left(\frac{2}{m}\right) = 0$. ■

4. Последовательность 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, …

Эйлер также рассматривал последовательность $\{b_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$:

$$1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, \ldots, \qquad (2)$$

состоящую из положительных показателей степеней ненулевых членов ряда

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + \ldots .$$

Эта последовательность с добавленным числом 0 в качестве первого члена называется последовательностью *обобщенных пятиугольных чисел*.

Эйлер экспериментально обнаружил закономерность в построении последовательности (2). Далее цитируем Эйлера по книге [1, с. 114, 115].

«Закон чисел 1, 2, 5, 7, 12, 15, …<…> станет ясен, если мы возьмем их разности:

Числа: 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100, …

Разности: ***1***, 3, ***2***, 5, ***3***, 7, ***4***, 9, ***5***, 11, ***6***, 13, ***7***, 15, ***8***, …

В самом деле, мы имеем здесь поочередно все целые числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, … и нечетные числа и поэтому мы можем продолжать последовательность этих чисел сколь угодно далеко».

Слова Эйлера подсказывают, что члены последовательности (2) удовлетворяют следующему правилу:

$$b_n = \begin{cases} 1, \text{если } n = 0; \\ b_{n-1} + n + 1, \text{если } n \text{ четно;} \\ b_{n-1} + (n+1)/2, \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases} \tag{3}$$

На языке Wolfram рекурсивная программа с запоминанием уже вычисленных промежуточных значений выглядит следующим образом

$\Rightarrow b[0] = 1;$

$\Rightarrow b[n\_?\mathrm{EvenQ}] := b[n] = b[n-1] + n + 1$

$\Rightarrow b[n\_?\mathrm{OddQ}] := b[n] = b[n-1] + (n+1)/2$

Проверим

$\Rightarrow b$ /@ Range[0, 15]

{1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100}

Найдем производящую функцию для последовательности b_n. Простое применение функции GeneratingFunction к $b[n]$ в системе Mathematica выдает результат невычисленным. Поэтому будем применять способ решения рекуррентных соотношений в четыре шага, изложенный в [10, с. 364–376].

Шаг 1 требует записать рекуррентное соотношение (3) в виде «одного уравнения» для последовательности b_n, т.е. нужна формула, не содержащая конструкций с перечислением случаев. Искомое уравнение имеет вид

$$b_n = b_{n-1}\,[n > 0] + (n+1)/2\ [n \text{ нечетно}] + (n+1)[n > 0 \text{ и } n \text{ четно}] + [n = 0]. \tag{4}$$

Запись с квадратными скобками широко используется в [7] в соответствии с правилом:

Если S – некоторое утверждение, которое может быть истинно или ложно, квадратно-скобочное обозначение $[S]$ означает 1, если S истинно, и 0 в противном случае.

Поэтому в правой части (4) присутствует только 1, когда $n = 0$, а при $n > 0$ справа всегда присутствует b_{n-1} и еще одно слагаемое $(n+1)/2$ или $(n+1)$ в зависимости от четности числа n.

На шаге 2 умножаем обе части уравнения на x^n и просуммируем по всем n. В левой части получается сумма $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, которая равна производящей функции $B(x)$, а правую часть следует преобразовать с тем, чтобы она превратилась в какое-то другое выражение, включающее $B(x)$.

Слагаемое b_{n-1} $[n > 0]$ преобразуется в $\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} = xB(x) = xB$, слагаемое $[n = 0]$ становится 1. Слагаемое $(n + 1)/2$ $[n$ нечетно] преобразуется в $\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)/2)x^n$ $[n$ нечетно]. Из ряда $\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)/2)x^n$ получаем с помощью Mathematica производящую функцию $C1$ в замкнутой форме:

$\Rightarrow C1$ = GeneratingFunction[$(n + 1)/2, n, x$]

$$\frac{1}{2(-1+x)^2}$$

Но в ряде $\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)/2)x^n$ должны присутствовать члены только с нечетными n. Есть общий метод извлечение членов с нечетными номерами $\{0, g_1, 0, g_3, 0, g_5, 0, \ldots\}$ из любой последовательности $g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots$. Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_{2n+1}x^{2n+1} = \frac{G(x)-G(-x)}{2},$$

где $G(x)$ – производящая функция последовательности $g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots$. В соответствии с этим преобразуем второе слагаемое в (4):

$\Rightarrow$ Simplify[$(C1 - (C1$ /. $x \to -x)) / 2$]

$$\frac{x}{(-1+x^2)^2}$$

Третье слагаемое в (4) $(n + 1)[n > 0$ и n четно] преобразуем сначала в выражение

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \ [n \text{ четно}].$$

Из ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ получаем с помощью Mathematica производящую функцию $C2$ в замкнутой форме:

$\Rightarrow C2$ = GeneratingFunction[$n + 1, n, x$]

$$\frac{1}{(-1+x)^2}$$

Также имеется общий метод извлечение членов с четными номерами $\{g_0, 0, g_2, 0, g_4, 0, \ldots\}$ из любой последовательности $g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots$. Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_{2n}x^{2n} = \frac{G(x)+G(-x)}{2}.$$

При извлечении из ряда членов с четными n, заметим, что поскольку член $1\times x^0$ не нужен, то нужно отнять 1:

$\Rightarrow$ Simplify[$(C2 + (C2$/. $x \to -x))/2] - 1$

$$-1+\frac{1+x^2}{(-1+x^2)^2}$$

Проверим, что действительно сейчас получили члены с ненулевыми четными степенями x:

$\Rightarrow$ Series[%, {x, 0, 10}]

$3x^2 + 5x^4 + 7x^6 + 9x^8 + 11x^{10} + O[x]^{11}$

Последнее слагаемое $[n = 0]$ в (4) дает просто 1. Суммируя все полученные выражения в правой части (4), получаем уравнение для производящей функции B:

$$B = xB + \frac{x}{\left(-1+x^2\right)^2} + \frac{1+x^2}{\left(-1+x^2\right)^2}.$$

Шаг 3. Решая уравнение, получаем для производящей функции $B(x)$ выражение в замкнутом виде.

Таким образом, выражение

$$B(x) = \frac{-1-x-x^2}{(-1+x)^3(1+x)^2}$$

является производящей функцией в замкнутом виде для последовательности Эйлера

1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100, … .

На последнем, четвертом шаге, имея производящую функцию, в языке *Wolfram* легко получить выражение b_n в замкнутом виде:

$$\Rightarrow \text{SeriesCoefficient}\left[-\frac{1+x+x^2}{(-1+x)^3(1+x)^2}, \{x, 0, n\}\right]$$

$$\begin{cases} \frac{1}{16}(13+3(-1)^n + 2(9+(-1)^n)n + 6n^2) & n \geq 0 \\ 0 & \mathit{True} \end{cases}$$

Определим b_n в замкнутом виде

$$\Rightarrow b[n\_] := \frac{1}{16}\left(13 + 3(-1)^n + 2\left(9 + (-1)^n\right)n + 6n^2\right) \tag{5}$$

Вычислим 20 первых членов последовательности

$\Rightarrow b$ /@ Range[0, 19]

{1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100, 117, 126, 145, 155}

5. Гипотеза Эйлера о законе чисел, относящемся к суммам их делителей

Эйлер путем индуктивных рассуждений обнаружил удивительную рекуррентную закономерность, связывающую суммы делителей натуральных чисел. Начальное представление об этой связи дает следующая формула ($\sigma(n)$ обозначает сумму положительных делителей натурального числа n):

$$\begin{aligned} \sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - \\ - \sigma(n-22) - \sigma(n-26) + \sigma(n-35) + \sigma(n-40) - \sigma(n-51) - \sigma(n-57) + \\ + \sigma(n-70) + \sigma(n-77) - \sigma(n-92) - \sigma(n-100) + \ldots . \end{aligned} \tag{6}$$

Как точно выглядит это выражение и как Эйлер пришел к своей догадке, все это хорошо изложено в [1, с. 111–127]. Там же имеется и библиографическая ссылка на оригинал. Важно следующее: в этом выражении встречаются последовательности (1) и (2). Члены последовательности (2) вычитаются из n в аргументах функции σ. Коэффициенты, стоящие перед σ в правой части выражения (6), совпадают с ненулевыми членами последовательности (1), умноженными на –1.

Получим гипотезу Эйлера, используя систему Mathematica. Возьмем конечный ряд из 51 члена формального степенного ряда для последовательности (1). Производящая функция для последовательности (1) есть QPochhammer[x, x].

$\Rightarrow t1 = \text{Series[QPochhammer[x, x], \{x, 0, 50\}]}$
$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \mathrm{O}[x]^{51}$

Продифференцируем этот ряд по x и результат умножим на $-x$:

$\Rightarrow t2 = -x\ \mathrm{D}[\mathrm{Series}[\mathrm{QPochhammer}[x, x], \{x, 0, 50\}], x]$
$x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + 35x^{35} + 40x^{40} + \mathrm{O}[x]^{51}$

Как видим, коэффициенты ряда $t2$ отличаются от соответствующих коэффициентов ряда $t1$ для члена x^n множителем $-n$. Это сохраняется и для расмотренных больших n. Определим новую последовательность $c_n = -\,na_n$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Теперь найдем частное двух рядов $t3 = t2/t1$, заметим, что мы учитываем в примере только степени, не превосходящие 50:

$\Rightarrow t3 = t2/t1$
$x + 3x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 6x^5 + 12x^6 + 8x^7 + 15x^8 + 13x^9 + 18x^{10} + 12x^{11} + 28x^{12} +$
$+ 14x^{13} + 24x^{14} + 24x^{15} + 31x^{16} + 18x^{17} + 39x^{18} + 20x^{19} + 42x^{20} + 32x^{21} + 36x^{22} +$
$+ 24x^{23} + 60x^{24} + 31x^{25} + 42x^{26} + 40x^{27} + 56x^{28} + 30x^{29} + 72x^{30} + 32x^{31} + 63x^{32} +$
$+ 48x^{33} + 54x^{34} + 48x^{35} + 91x^{36} + 38x^{37} + 60x^{38} + 56x^{39} + 90x^{40} + 42x^{41} + 96x^{42} +$
$+ 44x^{43} + 84x^{44} + 78x^{45} + 72x^{46} + 48x^{47} + \ + 124x^{48} + 57x^{49} + 93x^{50} + \mathrm{O}[x]^{51}$

Создадим список коэффициентов ряда:

$\Rightarrow$ *list* = SeriesCoefficient[*t*3, #]& /@ Range[50]

{1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12, 28, 14, 24, 24, 31, 18, 39, 20, 42, 32, 36, 24, 60, 31, 42, 40, 56, 30, 72, 32, 63, 48, 54, 48, 91, 38, 60, 56, 90, 42, 96, 44, 84, 78, 72, 48, 124, 57, 93}

Проверим, что эти числа являются суммами делителей первых 50 натуральных чисел (DivisorSigma[1, x] – встроенная функция в языке Wolfram для вычисления $\sigma(x)$):

$\Rightarrow$ AllTrue[(*list*[[#]] == DivisorSigma[1, #])& /@ Range[50], #&]
True

Дополнительные проверки для конечных рядов $t1$ и $t2$ с большим количеством членов также показали, что $t3 = t2/t1$ есть конечный степенной ряд для соответствующей конечной последовательности $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, $\sigma(3)$, …, $\sigma(m)$. Можно предположить, что частное рядов $t3 = t2/t1$, при расширении $t1$ и $t2$ до бесконечных, является формальным степенным рядом для последовательности $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, $\sigma(3)$, … .

Если это так, то произведение формальных степенных рядов $t3$ и $t1$ дает формальный степенной ряд для последовательности c_0, c_1, c_2, …, которая является *сверткой* [10, с. 225] последовательностей a_0, a_1, a_2, …, и 0, $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, $\sigma(3)$, … . Следовательно, для $n = 1, 2, 3, \ldots$ имеем формулу

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \sigma(n-k).$$

Отсюда получаем гипотезу Эйлера

$$\sigma(n) = na_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sigma(n-k). \qquad (7)$$

В соответствии с теоремой 3 члены последовательности a_n могут быть вычислены на языке *Wolfram* с помощью следующей функции:

$\Rightarrow a[n\_] := \mathrm{With}[\{m = \mathrm{Sqrt}[24n + 1]\}, \mathrm{If}[\mathrm{IntegerQ}[m], \mathrm{JacobiSymbol}[12, m], 0]]$

Напишем программу для вычисления $-\sum_{k=1}^{n-1} a_k \sigma(n-k) + nc_n$ в символьном виде

$$\Rightarrow\ s0[n\_] := -\sum_{k=1}^{n-1} (a[k]\sigma[n-k]) + n\,a[n]$$

Посмотрим, как выглядит правая часть (7) для $n = 100$:

$\Rightarrow s0[100]$

$-100 - \sigma(8) + \sigma(23) + \sigma(30) - \sigma(43) - \sigma(49) + \sigma(60) + \sigma(65) - \sigma(74) - \sigma(78) +$
$+ \sigma(85) + \sigma(88) - \sigma(93) - \sigma(95) + \sigma(98) + \sigma(99)$

Теперь определим функцию для численного вычисления правой части в (7) и проверим выполнения равенства для $n = 100$:

$$\Rightarrow\ s[n\_] := n\,a[n] + \sum_{k=1}^{n-1} a[k]\,\mathrm{DivisorSigma}[1, n-k]$$

$\Rightarrow$ {DivisorSigma[1, 100], s[100]}

{217, 217}

И наконец, проверим выполнения равенства (7) для всех $n \le 10000$:

$\Rightarrow$ AllTrue[(s[#] == DivisorSigma[1, #])& /@ Range[1000], #&]

True

Эйлер не смог доказать найденную им закономерность, она была доказана значительно позже.

6. Рекуррентная формула для числа разбиений

Из теоремы 1 следует, что

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n\right) = 1,$$

где $p(n)$ – количество разбиений числа n; $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ – последовательность (1). Таким образом, произведение формальных степенных рядов дает единичный ряд, следовательно, свертка последовательностей $p(0), p(1), p(2), \ldots$ и $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ дает последовательность 1, 0, 0, 0, … . Поэтому для $n > 0$ получаем

$$\sum_{m=0}^{n} a_m p_{n-m} = 0.$$

Следовательно,

$$p_n = -\sum\nolimits_{m=1}^{n} a_m p_{n-m}. \tag{8}$$

Напишем программу для вычисления правой части (8) в символьном виде:

$$\Rightarrow w0[n\_] := -\left(\sum_{m=1}^{n-1} a[m]\,p[n-m] + a[n]\right)$$

Посмотрим, как выглядит правая часть (8) для $n = 50$ и $n = 51$:

$\Rightarrow w0[50]$
$p[10]+p[15]-p[24]-p[28]+p[35]+p[38]-p[43]-p[48]+p[49]$
$\Rightarrow w0[51]$
$-1+p[11]+p[16]-p[25]-p[29]+p[36]+p[39]-p[44]-p[46]+p[49]+p[50]$

Теперь определим функцию для численного вычисления правой части в (8) и проверим выполнения равенства (8) для $n = 1000$:

$$\Rightarrow w[n\_] := -\left(\sum_{m=1}^{n-1} a[m]\,\text{PartitionsP}[n-m] + a[n]\right)$$

$\Rightarrow$ {PartitionsP[1000], w[1000]}

{24061467864032622473692149727991,
24061467864032622473692149727991}

И наконец, проверим выполнения равенства (8) для всех $n \le 10000$.

$\Rightarrow$ AllTrue[(w[#] == PartitionsP[#])& /@ Range[1000], #&]

True

Формула (8) представляет собой весьма эффективный алгоритм для вычисления $p(n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975. 464 с.
2. *Пойа Д.* Математическое открытие: Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. 3-е изд. М.: КомКнига, 2010. 448 с.
3. *Лакатос И.* Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы. 2-е изд. М.: Изд-во ЛКИ, 2010. 152 с.
4. *Bailey D.* Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century. Wellesley, MA: A.K. Peters, 2003.
5. *Borwein J.*, *Bailey D.*, *Girgensohn R.* Experimentation in Mathematics. Wellesley, MA: A.K. Peters, 2003. 358 p.
6. *Wolfram S.* A New Kind of Science. Champaign, Illinois: Wolfram Media, Inc., 2002. 1197 p. URL: http://www.wolframscience.com/
7. *Wolfram* Mathematica. URL: http://www.wolfram.com/mathematica
8. *Зюзьков В.М.* Начала компьютерной алгебры: учеб. пособие. Томск: Изд. Дом ТГУ, 2015. URL: http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000509029
9. *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М.: Мир, 1965. 300 с.
10. *Грэхем Р.*, *Кнут Д.*, *Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. 2-е изд., испр. М.: Мир; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 703 с.
11. *Ландо С.К.* Лекции о производящих функциях. 3-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2007. 144 с.
12. *Wolfram MathWorld*: http:// mathworld.wolfram.com/q-PochhammerSymbol.html
13. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М.: Наука, 1982. 256 с.

Статья поступила 30.10.2017 г.

Zyuz'kov V.M. (2018) AROUND EULER'S THEOREM ON SUMS OF DIVISORS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp. 19–32

DOI 10.17223/19988621/51/3

This work relates to experimental mathematics. Two problems solved by Euler are considered. In the first task, the number of partitions for natural numbers is counted; the solution of the second task gives the recursion regularity connecting the sums of dividers of natural numbers. Euler had no definition of the formal ascending power series and a generating function;

nevertheless, using the inductive reasonings, he obtained results which were rigorously proved later by other mathematicians. The paper shows how to solve these problems by means of the apparatus of generating functions and calculations in the Mathematica system. Solving of these tasks, Euler considered two infinite sequences, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$: 1, –1, –1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, … and $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$: 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, …. However, the author has obtained new results: a "closed form" for these sequences and a generating function for the sequence $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Keywords: experimental mathematics, Euler's theorem of partitions, Euler's hypothesis of the sums of dividers, generating functions, Mathematica system.

AMS Mathematical Subject Classification: 11Y35, 05A15.

ZYUZ'KOV Valentin Mikhailovich (Senior Researcher, Associate Professor of chair of Computational Mathematics and Computer Modeling, Tomsk State University, Professor of chair of computer systems in control and design of the Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: vmz@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Polya G. (1954) *Mathematics and Plausible Reasoning*. *Vol II.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
2. Polya G. (1965) *Mathematical Discovery. On understanding*, *learning and teaching problem solving. Vol. II.* New York; London: Johm Wiley & Sons. inc.
3. Lakatos I. (1976) *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.
4. Bailey D. (2003) *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century.* Wellesley, MA: A.K. Peters.
5. Borwein J., Bailey D., Girgensohn R. (2003) *Experimentation in Mathematics.* Wellesley, MA: A.K. Peters, 358 p.
6. Wolfram S. (2002) *A New Kind of Science.* Champaign, Illinois: Wolfram Media, Inc., 1197 p. URL: http://www.wolframscience.com/
7. *Wolfram Mathematica*. URL: http://www.wolfram.com/mathematica
8. *Zyuz'kov V. M*. (2015) *Nachala komp'yuternoy algebry* [Foundations of Computer Algebra]. Tomsk: Izdatel'skiy dom TGU. 128 p. URL: http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000509029
9. Bourbaki N. (1981) *Elements of Mathematics*. *Algebra II. Chapters 4–7*. Springer-Verlag.
10. Graham R, Knuth D, Patashnik O. (2006) *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.* Addison-Wesley. 657 p.
11. Lando C.K. (2007) *Lektsii o proizvodyashchikh funktsiyakh* [Lectures on generating functions]. Moscow: MTsNMO.
12. *Wolfram MathWorld.* URL: http:// mathworld.wolfram.com/q-PochhammerSymbol.html
13. Andrews G. (1998) *The Theory of Partitions*. Cambridge University Press.