ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2018 Математика и механика № 51

УДК 519.2 MSC 90B22, 60G10, 60J10
DOI 10.17223/19988621/51/4

М.А. Рачинская, М.А. Федоткин

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА В СИСТЕМЕ КОНФЛИКТНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТРЕБОВАНИЙ

Исследуется модель системы, осуществляющей управление случайными конфликтными потоками и обслуживание их требований. Предполагается, что среди потоков выделены приоритетный поток и поток с большой интенсивностью. Определяются легко проверяемые необходимые и достаточные условия существования стационарного режима по отдельным потокам.

Ключевые слова: *пороговый приоритет*, *многомерная управляемая цепь Маркова*, *стационарное распределение.*

Постановка задачи

В настоящее время существует множество работ, изучающих системы массового обслуживания с различными входными потоками [1–3]. Многие подобные исследования имеют высокую прикладную ценность, поскольку связаны с реальными биологическими, социальными, логистическими, инженерными и техническими объектами (например, [4–6]). Конечной целью большинства таких исследований является оптимизация работы системы. В связи с этим изучаются различные характеристики и показатели качества ее функционирования [6]. Кроме того, ряд работ посвящен исследованию асимптотического поведения систем и получению предельных теорем [3–5]. Особенностью системы, исследуемой в данной работе, является специфическая модель входного потока, построенная в [7], и сложный алгоритм с обратной связью для управления потоками. При моделировании и изучении подобных сложных неклассических систем прибегают к кибернетическому подходу для выделения ключевых элементов системы. Имея математическую модель, можно получать необходимые и достаточные условия существования в системе стационарного режима, что позволяет сузить область поиска квазиоптимальных значений управляемых параметров [8]. Основной целью данного исследования является получение таких условий для системы массового обслуживания с разнородными входными потоками и адаптивным управляющим алгоритмом.

В работе [7] проведено исследование системы, на вход которой поступают $m \geq 2$ случайных независимых конфликтных потоков заявок (требований). Система при этом выполняет функции управления потоками и обслуживания их требований. При этом предполагалось, что потоки управляются циклическим алгоритмом. Такое управление применяется, как правило, если входные потоки системы можно считать однородными, т. е. предпочтение при обслуживании не должно отдаваться никакому из потоков. В данной работе рассматривается случай неоднородных входных потоков, что необходимо влечет за собой выбор адаптивного алгоритма управления. Неоднородность потоков может проявляться, например, в различной вероятностной структуре потоков, в существенно различной интенсивности заявок при схожей структуре, неодинаковом приоритете потоков и т.д.

В данной работе изучается система управления $m \geq 2$ независимыми конфликтными потоками Π_j, $1 \leq j \leq m$, и обслуживания их неоднородных заявок. Предполагается, что входные потоки формируются в схожих внешних средах и их можно аппроксимировать неординарными пуассоновскими потоками (НПП). Было показано [7], что НПП является адекватной моделью, например, для транспортного потока пачек на магистрали с затрудненным движением. Так, при плохих погодных и дорожных условиях выделяются быстрые и медленные машины. Неоднородность автомобилей приводит к образованию скоплений – транспортных пачек. Аналогично в рассматриваемой задаче полагается, что каждый поток Π_j можно аппроксимировать потоком групп со следующими параметрами: $\lambda_j > 0$ – интенсивность вызывающих моментов (поступления групп требований), p_j, q_j и $s_j = 1 - p_j - q_j$ – вероятности поступления группы из одного, двух или трех требований соответственно. В работе [7] найдены выражения для одномерных распределений НПП указанного типа. Вероятность $\varphi_j(n, t)$ того, что за промежуток времени $[0, t)$ по потоку Π_j (здесь и далее $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, если не указано иное) поступит ровно $n \in X = \{0, 1, \ldots\}$ заявок

$$\varphi_j(n,t) = \mathrm{e}^{-\lambda_j t} \sum_{u=0}^{\left[n/2\right]} \sum_{v=0}^{\left[n-2u/3\right]} p_j^{n-2u-3v} q_j^u s_j^v \frac{(\lambda_j t)^{n-u-2v}}{u!v!(n-2u-3v)!},$$

а производящая функция этого распределения для $|z| \leq 1$ имеет вид

$$\Psi_j(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n,t) z^n = \exp\{\lambda_j t(s_j z^3 + q_j z^2 + p_j z - 1)\}.$$

При схожей структуре потоки различаются интенсивностью поступления заявок и их приоритетом. Выделяются малоинтенсивные потоки Π_1, Π_2, …, Π_{m-1} и поток Π_m с большой интенсивностью. При этом поток Π_1 считается приоритетным.

В рассматриваемой системе обслуживание заявок производится без потерь. Поступая в систему и не получая обслуживание в тот же момент, заявки потока Π_j становятся в соответствующую очередь ожидания. Устройство, осуществляющее управление потоками и обслуживание требований, может находиться в одном из состояний множества $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m+1)}\}$. В каждом из состояний вида $\Gamma^{(k)}$, $k \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$, устройство обслуживания находится в течение фиксированного промежутка времени длительностью T_k. При этом состояние вида $\Gamma^{(2j-1)}$, где $j \in \{1, 2, \ldots, m - 1\}$, выделено для осуществления обслуживания с интенсивностью $\mu_j > 0$ соответствующего потока Π_j. Поскольку входные потоки конфликтные, то никакие два потока не могут находиться на обслуживании одновременно, и интервалы обслуживания различных потоков должны быть разнесены во времени некоторым интервалом переналадки обслуживающего устройства (ОУ). В связи с этим, состояния вида $\Gamma^{(2j)}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m - 1\}$, выделяются для безопасного дообслуживания потока Π_j. Для обслуживания потока Π_m выделены состояния $\Gamma^{(2m-1)}$ и $\Gamma^{(2m)}$. Интенсивность обслуживания в каждом из этих состояниях равна μ_m. Предполагается, что $T_{2m} < T_{2m-1}$. В состоянии $\Gamma^{(2m+1)}$ происходит переналадка после завершения обслуживания потока Π_m. Заметим, что все величины $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, а также величина $l'_m = [\mu_m T_{2m}]$ характеризуют пропускную способность ОУ в соответствующем состоянии. В системе реализована экстремальная стратегия обслуживания [8]. Такая стратегия предполагает, что в состоянии обслуживания определенного потока из очереди ожидания выбирается как можно большее число ожидающих заявок, но не превышающее соответствующей пропускной способности. По завершении промежутка пребывания ОУ в некотором состоянии происходит переключение состояния или принимается решение о продлении текущего состояния. Алгоритм смены состояний ОУ будет указан позднее.

Обозначим через τ_i, $i = 0, 1, \ldots$, моменты принятия решения о смене или продлении состояния ОУ. Такие моменты будут случайными, поскольку можно задать начальное распределение состояния ОУ и, кроме того, длительности T_1, T_2, $\ldots$, T_{2m+1}, вообще говоря, различны. Временная ось делится такими моментами на промежутки вида $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$. Введем следующие случайные величины и элементы, характеризующие систему на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$: $\Gamma_i \in \Gamma$ – состояние ОУ; $\eta_{j,i} \in X$ – количество требований, поступивших в систему по потоку Π_j; $\xi_{j,i}$ – максимальное количество требований потока Π_j, которое может быть обслужено; $\xi'_{j,i}$ – количество требований потока Π_j, которое было реально обслужено. Здесь $\xi_{j,i} \in \{0, l_j\}$ и $\xi'_{j,i} \in Y_j = \{0, 1, \ldots, l_j\}$ для любых $j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ и $\xi_{m,i} \in \{0, l'_m, l_m\}$, $\xi'_{m,i} \in Y_m = \{0, 1, \ldots, l_m\}$. Кроме того, пусть величина $\kappa_{j,i} \in X$ подсчитывает случайное количество требований потока Π_j, находящихся в очереди ожидания начала обслуживания в момент τ_i. Необходимо также ввести для любого потока Π_j величину $\xi'_{j,-1} \in \{0, 1, \ldots\}$ – количество требований потока Π_j, которое было реально обслужено в промежутке $[0, \tau_0)$. Теперь представим алгоритм смены состояний ОУ. Решение о последующем состоянии принимается согласно функционально заданному правилу

$$\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \eta_{1,i}),$$

где управляющая функция $u(\Gamma^{(k)}, x_1, n)$ для $\Gamma^{(k)} \in \Gamma$, $x_1 \in X$, $n \in X$ задана поточечно:

$$u(\Gamma^{(k)}, x_1, n) = \Gamma^{(k+1)} \text{ при } \Gamma^{(k)} \in \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m-3)}, \Gamma^{(2m-1)}\},$$

$$u(\Gamma^{(2m-2)}, x_1, n) = \Gamma^{(2m-1)} \text{ при } x_1 + n < H_1,$$

$$u(\Gamma^{(2m-2)}, x_1, n) = \Gamma^{(2m)} \text{ при } x_1 + n \geq H_1,$$

$$u(\Gamma^{(2m)}, x_1, n) = \Gamma^{(2m)} \text{ при } x_1 + n < H_1,$$

$$u(\Gamma^{(2m)}, x_1, n) = \Gamma^{(2m+1)} \text{ при } x_1 + n \geq H_1,$$

$$u(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, n) = \Gamma^{(1)}.$$

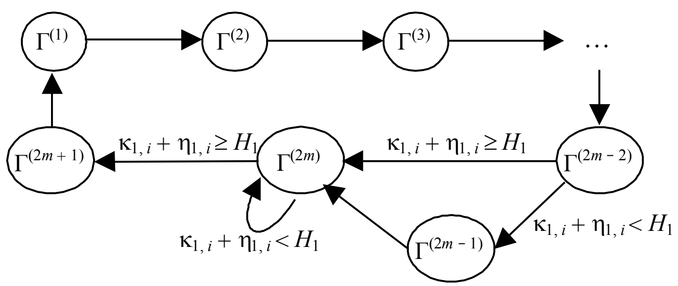

Рис. 1. Граф алгоритма переключения состояний устройства обслуживания
Fig. 1. Graph of the algorithm of switching the state of the service device

Особенности указанного алгоритма состоят в следующем. Во-первых, данный алгоритм реализует обратную связь по количеству заявок в очереди по приоритетному потоку. Во-вторых, устройство может продлевать обслуживание потока с большой интенсивностью. В-третьих, представленный алгоритм является алгоритмом с упреждением, так как в момент принятия решения о смене или продлении текущего состояния используется информация о будущем поступлении заявок в количестве $\eta_{1,\,i}$. Заметим также, что конфликт интересов между необходимостью выделять время, с одной стороны, для обслуживания потока с большой интенсивностью, а с другой – для приоритетного потока, устраняется с помощью введения пороговой величины $H_1 \in \{1, 2, \ldots\}$. Так, переключение с обслуживания потока Π_m на обслуживание приоритетного потока Π_1 происходит только при достижении количеством заявок в очереди по потоку Π_1 заданной величины порога H_1. Указанный алгоритм можно представить в виде графа, изображенного на рис. 1. Величины $\eta_{j,\,i}$ и $\xi_{j,\,i}$ заданы своими условными распределениями вероятностей вида $\mathrm{P}(\eta_{j,\,i} = n \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k)}) = \varphi_j(n, T_k)$ и $\mathrm{P}(\xi_{j,\,i} = b \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k)}) = \beta_j(b, \Gamma^{(k)})$, где функция $\beta_j(b, \Gamma^{(k)})$ задается поточечно (см. [9]). Более того, указанные величины будут условно независимы.

Модель функционирования системы

В работе [9] было предложено выбрать в качестве состояния системы в момент τ_i, $i = 0, 1, \ldots$, случайный вектор $\chi_i = (\Gamma_i, \kappa_{1,\,i}, \kappa_{m,\,i}, \xi'_{1,\,i-1}, \xi'_{m,\,i-1}) \in \Gamma \times X \times X \times Y_1 \times Y_m$. При таком подходе изучается динамика функционирования системы только по выделенным потокам Π_1 и Π_m. Аналогично можно исследовать работу системы по любому потоку Π_j, $j \in \{2, 3, \ldots, m\}$, рассматривая в качестве состояния вектор $(\Gamma_i, \kappa_{1,\,i}, \kappa_{j,\,i}, \xi'_{1,\,i-1}, \xi'_{j,\,i-1})$. Для состояния системы χ_i в [9] обоснованы рекуррентные соотношения

$$\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i, \kappa_{1,\,i}, \eta_{1,\,i}),$$

$$\kappa_{1,\,i+1} = \max\{0, \kappa_{1,\,i} + \eta_{1,\,i} - \xi_{1,\,i}\},\ \ \kappa_{m,\,i+1} = \max\{0, \kappa_{m,\,i} + \eta_{m,\,i} - \xi_{m,\,i}\},$$

$$\xi'_{1,\,i} = \min\{\kappa_{1,\,i} + \eta_{1,\,i}, \xi_{1,\,i}\},\ \ \xi'_{m,\,i} = \min\{\kappa_{m,\,i} + \eta_{m,\,i}, \xi_{m,\,i}\}$$

и установлена следующая теорема:

Теорема 1. Векторная последовательность

$$\{(\Gamma_i, \kappa_{1,\,i}, \kappa_{m,\,i}, \xi'_{1,\,i-1}, \xi'_{m,\,i-1});\ i = 0, 1, \ldots\} \tag{2}$$

с заданным начальным распределением вектора $(\Gamma_0, \kappa_{1,\,0}, \kappa_{m,\,0}, \xi'_{1,\,-1}, \xi'_{m,\,-1})$ является многомерной управляемой однородной цепью Маркова.

Отметим здесь следующие результаты:

1. Произведена классификация состояний цепи Маркова (2) (см. [9]): 1) выделено незамкнутое множество D несущественных и минимальное замкнутое множество E сообщающихся существенных апериодических состояний; 2) показано, что любое состояние пространства $\Gamma \times X \times X \times Y_1 \times Y_m$ принадлежит множеству $D \cup E$.

2. Получены рекуррентные по i, $i \in \{0, 1, \ldots\}$, соотношения для одномерных распределений

$$Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = \mathrm{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k)}, \kappa_{1,\,i} = x_1, \kappa_{m,\,i} = x_m, \xi'_{1,\,i-1} = y_1, \xi'_{m,\,i-1} = y_m)$$

(здесь и далее $\Gamma^{(k)} \in \Gamma$, $x_1, x_m \in X$, $y_1 \in Y_1$, $y_m \in Y_m$, если не указано иное) цепи Маркова (2) (см. [4]).

3. Получены рекуррентные по i, $i \in \{0, 1, \ldots\}$, соотношения для производящих функций одномерных распределений вида

$$\Phi_i(\Gamma^{(k)}, z_1, z_m) = \sum_{y_1 \in Y_1} \sum_{y_m \in Y_m} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m}$$

за один шаг. На основании этих соотношений можно получить рекуррентные соотношения за любое количество шагов цепи (2). В частности, учитывая алгоритм (1) смены состояний ОУ, можно вернуться в любое из состояний множества $\Gamma \setminus \{\Gamma^{(2m-1)}\}$ минимум за $2m$ шагов, а в состояние $\Gamma^{(2m-1)}$ – за $2m + 1$ шаг. В связи с этим введем следующие обозначения для длительностей возможных циклов: $T = \sum_{k=1}^{2m+1} T_k - T_{2m-1}$ и $T^* = \sum_{k=1}^{2m+1} T_k$. В силу громоздкости полученные рекуррентные соотношения здесь приводить не будем.

В некоторых случаях при дальнейших исследованиях полезно будет рассматривать динамику функционирования системы, концентрируясь только на информации о приоритетном потоке Π_1.

Лемма 1. Последовательность

$$\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \xi'_{1,i-1});\ i = 0, 1, \ldots\} \qquad (3)$$

трехмерных случайных векторов с заданным начальным распределением вектора $(\Gamma_0, \kappa_{1,0}, \xi'_{1,-1})$ является многомерной управляемой однородной цепью Маркова.

Условия существования стационарного распределения цепи Маркова

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 2. При любом начальном распределении цепи (2) либо для каждого $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D \cup E$ выполняется предельное равенство $\lim_{i\to\infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 0$ и стационарного распределения не существует, либо существуют пределы $\lim_{i\to\infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = Q(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$ такие, что

$$Q(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) > 0 \text{ для } (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E,$$

$$Q(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 0 \text{ для } (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D,$$

$$\sum_{(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D \cup E} Q(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 1,$$

и стационарное распределение существует и единственно.

Доказательство. Согласно рекуррентным соотношениям из теоремы 3 в работе [9] вероятность

$$P_0^1(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = \mathrm{P}(\chi_1 \in E \mid \chi_0 = (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m))$$

того, что цепь Маркова, отправляясь из произвольного несущественного состояния $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$, перейдет за один шаг в какое-либо состояние множества E, положительна. Более того, для каждого несущественного состояния $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$ можно показать справедливость оценки снизу

$$P_0^1(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) > \min\{\varphi_1(H_1, T_1)\, \varphi_m(0, T_1), \varphi_1(H_1, T_{2m+1})\, \varphi_m(0, T_{2m+1})\} > 0. \qquad (4)$$

Для любого несущественного состояния $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$ обозначим через $P_0^*(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$ вероятность того, что цепь Маркова, отправляясь из него, когда-либо попадет в множество E:

$$P_0^*(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(\chi_n \in E, \chi_i \in D, i = 0, 1, \ldots, n-1 \mid \chi_0 = (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)).$$

Тогда, согласно [10, с. 392, (8.6)], введенные вероятности удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} P_0^*(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \mathrm{P}_0^1(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) + \\ &+ \sum_{(\Gamma^{(k')}, x_1', x_m', y_1', y_m')\in D} \mathrm{P}_0^*(\Gamma^{(k')}, x_1', x_m', y_1', y_m') \times \\ &\times \mathrm{P}(\chi_1 = (\Gamma^{(k')}, x_1', x_m', y_1', y_m') \mid \chi_0 = (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)). \end{aligned} \qquad (5)$$

Отсюда, согласно оценке (4), для любого $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{(\Gamma^{(k')}, x_1', x_m', y_1', y_m')\in D} &\mathrm{P}(\chi_1 = (\Gamma^{(k')}, x_1', x_m', y_1', y_m') \mid \chi_0 = (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)) = \\ &= 1 - \mathrm{P}_0^1(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) < \\ &< 1 - \min\{\varphi_1(H_1, T_1)\ \varphi_m(H_1, T_1), \varphi_1(H_1, T_{2m+1})\ \varphi_m(H_1, T_{2m+1})\} < 1. \end{aligned}$$

В таком случае система (5) будет являться вполне регулярной по определению и согласно замечанию 1 к теореме IIа [11, с. 39] система будет иметь единственное ограниченное решение. Можно легко проверить, что таким решением является $P_0^*(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 1$ для любого $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$. Таким образом, цепь с вероятностью единица покинет множество D несущественных состояний. Выбирая теперь начальное распределение лишь на замкнутом множестве E существенных состояний, получим неприводимую непериодическую цепь Маркова. Отсюда, используя эргодическую теорему [10, с. 384], получаем справедливость утверждения леммы.

Можно также показать, что если цепь (2) находилась в начальный момент в одном из состояний множества D, то самое большее за 3 шага она покинет это множество и больше в него не вернется. Таким образом, далее целесообразно выбирать начальное распределение цепи только на множестве E.

Теорема 1. Если параметры системы удовлетворяют неравенству $\lambda_1 T(3s_1 + 2p_1 + p_1) - l_1 \geq 0$, то стационарного распределения цепи (2) не существует.

Доказательство. Рассмотрим в точке $z_m = 1$ одно из полученных рекуррентных соотношений для производящих функций за цикл длительностью T из $2m$ шагов:

$$\begin{aligned} \Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) &= z_1^{-l_1}\Psi_1(T, z_1)\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) - \\ -\Psi_1(T_{2m+1}, z_1) &\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{\infty}\sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\ -\Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, z_1) &\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m-2}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\ +\Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, z_1) &\sum_{v_1=0}^{\infty}\Psi_1(T_{2m-1}, z_1)\sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\ +\Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, z_1) &\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{\infty}\sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\ +\Psi_1(T - T_1, z_1) &\sum_{x_1=0}^{l_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1 - v_1, T_1)\sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0)(1 - z_1^{x_1 - l_1}). \end{aligned} \qquad (6)$$

Введем обозначение $g_1(z) = z^{-l_1}\Psi_1(T,z) = z^{-l_1}\exp\{\lambda_1 T(s_1 z^3 + q_1 z^2 + p_1 z - 1)\}$ и перейдем к пределу при $i \to \infty$ в соотношении (6), а также в рекуррентном соотношении для вероятности $Q_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0)$ из [9]:

$$\Phi(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)(1 - g_1(z_1)) = \Psi_1(T_{2m+1}, z_1)(\Psi_1(T_{2m}, z_1) - 1)\times$$
$$\times\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) z_1^{x_1}\sum_{v_m=0}^{\infty}\sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) +$$
$$+\Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}, z_1)\sum_{x_1=0}^{H_1-1}(\Psi_1(T_{2m-1}, z_1) - 1)\sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) z_1^{x_1} + \qquad (7)$$
$$+\Psi_1(T - T_1, z_1)\sum_{x_1=0}^{l_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1 - v_1, T_1)\sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0)(1 - z_1^{x_1 - l_1}).$$

Здесь также был использован тот факт, что состояния вида $(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0)$ при $v_1 \in \{H_1, H_1+1, \ldots\}$, $v_m \in X$ принадлежат множеству D. Следовательно, соответствующие предельные вероятности $Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0)$ согласно лемме 2 будут равны нулю.

Рассмотрим сначала случай $\lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) > l_1$. Заметим, что в точке $z_1 = 1$ верно $g_1(1) = 1$ и $g_1'(z_1)\big|_{z_1=1} = -l_1 + \lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) > 0$, т. е. найдется точка $z^* \in (0, 1)$ такая, что для любых $z^* \le |z_1| < 1$ выполняется неравенство $0 < g_1(z_1) < 1$. Тогда левая часть соотношения (7) положительна в области $z^* \le |z_1| < 1$. В свою очередь, в указанной области для действительных z_1 и любых $t \ge 0$ будет справедливо $\Psi_1(t, z_1) = \sum_{x=0}^{\infty}\varphi_1(t, x) z_1^x \le \sum_{x=0}^{\infty}\varphi_1(t, x) = 1$, поэтому $\Psi_1(T_{2m}, z_1) - 1 < 0$ и $\Psi_1(T_{2m-1}, z_1) - 1 < 0$. Кроме того, в области $z^* \le |z_1| < 1$ для $x_1 < l_1$ выполняется неравенство $1 - z_1^{x_1 - l_1} < 0$. Таким образом, правая часть соотношения (7) становится отрицательной, в то время как левая его часть положительна. Противоречие разрешается, только если все стационарные вероятности в правой части равенства (7) равны нулю. Тогда, согласно лемме 2 стационарного распределения цепи Маркова при $\lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) > l_1$ не существует.

Теперь обратимся к случаю $\lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) = l_1$. Разложим функции $g_1(z_1)$, $z_1^{x_1}$, $z_1^{x_1 - l_1}$ и $\Psi_1(t, z_1)$ при различных значениях t в ряд Тейлора в левой окрестности точки $z_1 = 1$. Результат разложения подставим в соотношение (7), сгруппируем слагаемые и получим

$$\Phi(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)(l_1 - \lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1))(z_1 - 1) =$$
$$= \lambda_1 T_{2m}(3s_1 + 2q_1 + p_1)(z_1 - 1)\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m})\sum_{v_m=0}^{\infty}\sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) +$$
$$+\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\lambda_1 T_{2m-1}(3s_1 + 2q_1 + p_1)(z_1 - 1)\sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) +$$
$$+\sum_{x_1=0}^{l_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1 - v_1, T_1)\sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0)(l_1 - x_1)(z_1 - 1) + o(z_1 - 1).$$

Разделив теперь обе части полученного соотношения на $(z_1 - 1)$ и перейдя к пределу $z_1 \to 1$, получим при $\lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) = l_1$ равенство

$$0=\lambda_1 T_{2m}(3s_1+2q_1+p_1)\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1-v_1,T_{2m})\sum_{v_m=0}^{\infty}\sum_{w_m=0}^{l_m}Q(\Gamma^{(2m)},v_1,v_m,0,w_m)+$$
$$+\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\lambda_1 T_{2m-1}(3s_1+2q_1+p_1)\sum_{x_m=0}^{\infty}Q(\Gamma^{(2m-1)},x_1,x_m,0,0)+$$
$$+\sum_{x_1=0}^{l_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1-v_1,T_1)\sum_{v_m=0}^{\infty}Q(\Gamma^{(1)},v_1,v_m,0,0)(l_1-x_1).$$

Отсюда вновь заключаем, что стационарные вероятности в правой части равны нулю и, согласно лемме 2, стационарного распределения цепи Маркова при $\lambda_1 T(3s_1+2q_1+p_1)=l_1$ не существует. Теорема доказана.

Итак, необходимое условие существования стационарного режима имеет вид $\lambda_1 T(3s_1+2p_1+p_1)-l_1<0$.

Теорема 2. Если параметры системы удовлетворяют неравенствам $\lambda_m T_{2m}(3s_m+$ $+2q_m+p_m)-l'_m>0$ и $\lambda_m T_{2m-1}(3s_m+2q_m+p_m)-l_m>0$, то стационарного распределения цепи (2) не существует.

Доказательство. Рассмотрим в точке $z_1=1$ одно из полученных рекуррентных соотношений для производящих функций за цикл длительностью T. После перехода к пределу при $i\to\infty$ получим соотношение вида

$$\Phi(\Gamma^{(2)},1,z_m)(1-g_m(z_m))=F_1^1(z_m)+F_2^1(z_m)+F_3^1(z_m)+F_4^1(z_m)+F_5^1(z_m), \tag{8}$$

где $g_m(z)=z^{-l'_m}\Psi_m(T,z)=z^{-l'_m}\exp\{\lambda_m T(s_m z^3+q_m z^2+p_m z-1)\}$ и введены следующие функции:

$$F_1^1(z_m)=-\Psi_m(T_1+T_{2m+1},z_m)\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1-v_1,T_{2m})\times$$
$$\times\sum_{v_m=0}^{\infty}\Psi_m(T_{2m},z_m)z_m^{v_m-l'_m}\sum_{w_m=0}^{l_m}Q(\Gamma^{(2m)},v_1,v_m,0,w_m),$$

$$F_2^1(z_m)=\Psi_m(T_1+T_{2m+1},z_m)\sum_{x_1=H_1}^{\infty}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1-v_1,T_{2m})\sum_{y_m=0}^{l'_m-1}\sum_{v_m=0}^{y_m}\varphi_m(y_m-v_m,T_{2m})\times$$
$$\times(1-z_m^{y_m-l'_m})\sum_{w_m=0}^{l_m}Q(\Gamma^{(2m)},v_1,v_m,0,w_m),$$

$$F_3^1(z_m)=-z_m^{-l'_m}\Psi_m(T_1+T_{2m}+T_{2m+1},z_m)\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1-v_1,T_{2m-2})\times$$
$$\times\sum_{v_m=0}^{\infty}\Psi_m(T_{2m-2},z_m)Q(\Gamma^{(2m-2)},v_1,v_m,0,0_m)z_m^{v_m},$$

$$F_4^1(z_m)=z_m^{-l'_m}\Psi_m(T_1+T_{2m}+T_{2m+1},z_m)\times$$
$$\times\sum_{v_1=0}^{\infty}\sum_{y_m=0}^{l_m-1}\sum_{v_m=0}^{y_m}\varphi_m(y_m-v_m,T_{2m-1})Q(\Gamma^{(2m-1)},v_1,v_m,0,0_m)+$$
$$+z_m^{-l'_m}\Psi_m(T_1+T_{2m}+T_{2m+1},z_m)z_m^{-l_m}\times$$
$$\times\sum_{v_1=0}^{\infty}\sum_{x_m=l_m}^{\infty}\sum_{v_m=0}^{x_m}\varphi_m(x_m-v_m,T_{2m-1})Q(\Gamma^{(2m-1)},v_1,v_m,0,0_m)z_m^{x_m},$$

$$F_5^1(z_m) = z_m^{-l'_m}\Psi_m(T_1+T_{2m}+T_{2m+1}, z_m)\times$$
$$\times\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1-v_1,T_{2m})\sum_{y_m=0}^{l'_m-1}\sum_{v_m=0}^{y_m}\varphi_m(y_m-v_m,T_{2m})\times$$
$$\times\sum_{w_m=0}^{l_m}Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m)+z_m^{-l'_m}\Psi_m(T_1+T_{2m}+T_{2m+1}, z_m)\times$$
$$\times\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1-v_1,T_{2m})\sum_{x_m=l'_m}^{\infty}\sum_{v_m=0}^{x_m}\varphi_m(x_m-v_m,T_{2m})z_m^{x_m-l'_m}\times$$
$$\times\sum_{w_m=0}^{l_m}Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).$$

Заметим, что $g_m(1) = 1$ и $g_m'(z_m)\big|_{z_m=1} > -l'_m+\lambda_m T_{2m}(3s_m+2q_m+p_m)>0$. Тогда существует точка $z_m^* \in (0, 1)$, такая, что $0 < g_m(z_m) < 1$ для любых $z_m \in [z_m^*, 1)$ и левая часть равенства (8) положительна в области $[z_m^*, 1)$. Очевидно также, что в этой области $F_2^1(z_m)<0$ и справедлива оценка

$$F_4^1(z_m) < z_m^{-l'_m}\Psi_m(T_1+T_{2m}+T_{2m+1}, z_m)\times$$
$$\times\sum_{v_1=0}^{\infty}\sum_{y_m=0}^{l_m-1}\sum_{v_m=0}^{y_m}\varphi_m(y_m-v_m,T_{2m-1})Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0_m)z_m^{y_m-l_m}+$$
$$+z_m^{-l'_m}\Psi_m(T_1+T_{2m}+T_{2m+1}, z_m)\times$$
$$\times\sum_{v_1=0}^{\infty}\sum_{x_m=l_m}^{\infty}\sum_{v_m=0}^{x_m}\varphi_m(x_m-v_m,T_{2m-1})Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0_m)z_m^{x_m-l_m}=$$
$$=z_m^{-l'_m}\Psi_m(T_1+T_{2m}+T_{2m+1}, z_m)\times$$
$$\times\sum_{v_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_m=0}^{\infty}\Psi_m(T_{2m-1}, z_m)Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0_m)z_m^{v_m-l_m}.$$

Здесь последнее равенство возможно в силу несущественности состояний вида $(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0)$ при любых $v_1 \in \{H_1, H_1+1, \ldots\}$ и $v_m \in X$. Теперь вновь применим полученное из [9] предельное соотношение для вероятностей вида $Q_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0)$ при $x_1 \in \{0, 1, \ldots, H_1-1\}$ и $x_m \in X$ и получим

$$F_3^1(z_m) = -z_m^{-l'_m}\Psi_m(T_1+T_{2m}+T_{2m+1}, z_m)\times$$
$$\times\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{x_m=0}^{\infty}Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0_m)z_m^{x_m},$$

следовательно, верно неравенство

$$F_3^1(z_m)+F_4^1(z_m) < -z_m^{-l'_m}\Psi_m(T_1+T_{2m}+T_{2m+1}, z_m)\times$$
$$\times(z_m^{-l_m}\Psi_m(T_{2m-1}, z_m)-1)\sum_{v_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_m=0}^{\infty}Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0_m)z_m^{v_m}.$$

Теперь заметим, что в точке $z_m = 1$ имеют место равенство

$$\left(z_m^{-l_m}\Psi_m(T_{2m-1}, z_m)\right)\Big|_{z_m=1}=1$$

и оценка

$$d\big/dz\,(z_m{}^{-l_m}\Psi_m(T_{2m-1},z_m))\big|_{z_m=1}=-l_m+\lambda_m T_{2m-1}(3s_m+2q_m+p_m)>0,$$

поэтому найдется область $[z_m{}^{**}, 1) \subseteq [z_m{}^{*}, 1)$, такая, что в любой точке $z \in [z_m{}^{**}, 1)$ выполняется $z_m{}^{-l_m}\Psi_m(T_{2m-1},z_m)<1$ и, следовательно, $F_3^1(z_m)+F_4^1(z_m)<0$.

Аналогичным образом в области $[z_m{}^{**}, 1)$ получим оценку

$$F_5^1(z_m)<z_m{}^{-l'_m}\Psi_m(T_1+T_{2m}+T_{2m+1},z_m)\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1-v_1,T_{2m})\times$$
$$\times\sum_{v_m=0}^{\infty}\Psi_m(T_{2m},z_m)z_m{}^{v_m-l'_m}\sum_{w_m=0}^{l_m}Q(\Gamma^{(2m)},v_1,v_m,0,w_m).$$

Отсюда следует неравенство

$$F_1^1(z_m)+F_5^1(z_m)<z_m{}^{-l'_m}\Psi_m(T_1+T_{2m}+T_{2m+1},z_m)\times$$
$$\times(z_m{}^{-l'_m}\Psi_m(T_{2m},z_m)-1)\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1-v_1,T_{2m})\times$$
$$\times\sum_{v_m=0}^{\infty}\Psi_m(T_{2m},z_m)z_m{}^{v_m-l'_m}\sum_{w_m=0}^{l_m}Q(\Gamma^{(2m)},v_1,v_m,0,w_m),$$

и, подобно сделанным ранее заключениям относительно суммы функций $F_3^1(z_m)+F_4^1(z_m)$, найдется область $[z_m{}^{***}, 1) \subseteq [z_m{}^{**}, 1)$, такая, что в любой точке из этой области выполняется $z_m{}^{-l'_m}\Psi_m(T_{2m},z_m)<1$, т. е. $F_1^1(z_m)+F_5^1(z_m)<0$. Таким образом, существует область $[z_m{}^{***}, 1)$, в которой одновременно левая часть соотношения (8) положительна, а правая – отрицательна. Отсюда заключаем, что при выполнении условий теоремы стационарного распределения цепи Маркова не существует.

Работая с соотношениями для производящих функций за цикл длительностью T^* аналогично двум доказанным выше теоремам можно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. Если параметры системы удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_m(T^*-T_{2m})(3s_m+2q_m+p_m)-l_m<0,$$
$$\lambda_m T^*(3s_m+2q_m+p_m)-l_m-l'_m>0,$$

то стационарного распределения цепи (2) не существует.

Также установлено достаточное условие существования стационарного режима по потоку Π_1:

Теорема 4. Для существования стационарного распределения цепи Маркова (3) достаточно выполнения условия $\lambda_1 T(3s_1+2p_1+p_1)-l_1<0$.

Доказательство. Воспользуемся соотношением (6) для получения оценки

$$|\Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)},z_1,1)|\le|g_1(z_1)|\times|\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)},z_1,1)|+F_1^2(z_1)+F_2^2(z_1), \quad (9)$$

где

$$F_1^2(z_1)=\Psi_1(T_{2m+1},z_1)\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1-v_1,T_{2m})z_1{}^{x_1}\times$$
$$\times\sum_{v_m=0}^{\infty}\sum_{w_m=0}^{l_m}Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)},v_1,v_m,0,w_m)+$$
$$+\Psi_1(T_{2m}+T_{2m+1},z_1)\sum_{x_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1-v_1,T_{2m-2})z_1{}^{x_1}\times$$

$$\times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) +$$

$$+\Psi_1(T_{2m}+T_{2m+1}, z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \Psi_1(T_{2m-1}, z_1) \times$$

$$\times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) {z_1}^{v_1} +$$

$$+\Psi_1(T_{2m}+T_{2m+1}, z_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1-v_1, T_{2m}) {z_1}^{x_1} \times$$

$$\times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m),$$

$$F_2^2(z_1) = \Psi_1(T-T_1, z_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1-v_1, T_1) \times$$

$$\times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) |1-{z_1}^{x_1-l_1}|.$$

Заметим, что $g_1(1) = 1$ и при выполнении условий теоремы

$$g_1'(z_1)\big|_{z_1=1} = -l_1 + \lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) < 0 .$$

Следовательно, существует точка $\hat{z}_1 > 1$, такая, что для любых $z_1 \in (1, \hat{z}_1]$ выполняется $0 < g_1(z_1) < 1$.

Учитывая возрастание функции $\Psi_1(t, z_1)$ при фиксированном t в области $z_1 \in (1, \hat{z}_1]$ и несущественность состояний вида $(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0)$ при $v_1 \in \{H_1, H_1+1, \ldots\}$, $v_m \in X$, получим, что в указанной области справедливы следующие преобразования:

$$F_1^2(z_1) \le {\hat{z}_1}^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m+1}, \hat{z}_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1-v_1, T_{2m}) \times$$

$$\times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) +$$

$$+{\hat{z}_1}^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m}+T_{2m+1}, \hat{z}_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1-v_1, T_{2m-2}) \times$$

$$\times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) +$$

$$+{\hat{z}_1}^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m-1}+T_{2m}+T_{2m+1}, \hat{z}_1) \times$$

$$\times \sum_{v_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) +$$

$$+{\hat{z}_1}^{H_1-1} \Psi_1(T_{2m}+T_{2m+1}, \hat{z}_1) \sum_{x_1=0}^{H_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1-v_1, T_{2m}) \times$$

$$\times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \le$$

$$\le \hat{z}_1^{\,H_1-1}\Psi_1(T_{2m+1},\hat{z}_1)\sum_{v_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_m=0}^{\infty}\sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)},\, v_1,\, v_m,\, 0,\, w_m)+$$

$$+\hat{z}_1^{\,H_1-1}\Psi_1(T_{2m}+T_{2m+1},\hat{z}_1)\sum_{v_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)},\, v_1,\, v_m,\, 0,\, 0)+$$

$$+\hat{z}_1^{\,H_1-1}\Psi_1(T_{2m-1}+T_{2m}+T_{2m+1},\hat{z}_1)\times$$

$$\times\sum_{v_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)},\, v_1,\, v_m,\, 0,\, 0)+$$

$$+\hat{z}_1^{\,H_1-1}\Psi_1(T_{2m}+T_{2m+1},\hat{z}_1)\sum_{v_1=0}^{H_1-1}\sum_{v_m=0}^{\infty}\sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)},\, v_1,\, v_m,\, 0,\, w_m)=$$

$$=\hat{z}_1^{\,H_1-1}\Psi_1(T_{2m+1},\hat{z}_1)\mathrm{P}(\Gamma_{2m(i+1)-2}=\Gamma^{(2m)},\, \kappa_{1,2m(i+1)-2}<H_1,\, \xi'_{1,2m(i+1)-2}=0)+$$

$$+\hat{z}_1^{\,H_1-1}\Psi_1(T_{2m}+T_{2m+1},\hat{z}_1)\times$$

$$\times\mathrm{P}(\Gamma_{2m(i+1)-3}=\Gamma^{(2m-2)},\, \kappa_{1,2m(i+1)-3}<H_1,\, \xi'_{1,2m(i+1)-3}=0,\, \xi'_{m,2m(i+1)-3}=0)+$$

$$+\hat{z}_1^{\,H_1-1}\Psi_1(T_{2m}+T_{2m+1}+T_{2m-1},\hat{z}_1)\times$$

$$\times\mathrm{P}(\Gamma_{2m(i+1)-3}=\Gamma^{(2m-1)},\, \kappa_{1,2m(i+1)-3}<H_1,\, \xi'_{1,2m(i+1)-3}=0,\, \xi'_{m,2m(i+1)-3}=0)+$$

$$+\hat{z}_1^{\,H_1-1}\Psi_1(T_{2m}+T_{2m+1},\hat{z}_1)\times$$

$$\times\mathrm{P}(\Gamma_{2m(i+1)-3}=\Gamma^{(2m)},\, \kappa_{1,2m(i+1)-3}<H_1,\, \xi'_{1,2m(i+1)-3}=0)\le$$

$$\le\hat{z}_1^{\,H_1-1}\Psi_1(T_{2m+1},\hat{z}_1)\times\left[1+\Psi_1(T_{2m},\hat{z}_1)(2+\Psi_1(T_{2m-1},\hat{z}_1))\right]=C_1.$$

Кроме того, при $z_1\in(1,\hat{z}_1]$ справедлива также оценка

$$F_2^2(z_1)\le\Psi_1(T-T_1,\hat{z}_1)\sum_{x_1=0}^{l_1-1}\sum_{v_1=0}^{x_1}\varphi_1(x_1-v_1,T_1)\sum_{v_m=0}^{\infty}Q_{2mi}(\Gamma^{(1)},\, v_1,\, v_m,\, 0,\, 0)<$$

$$<\Psi_1(T-T_1,\hat{z}_1)\sum_{v_1=0}^{l_1-1}\sum_{v_m=0}^{\infty}Q_{2mi}(\Gamma^{(1)},\, v_1,\, v_m,\, 0,\, 0)=$$

$$=\Psi_1(T-T_1,\hat{z}_1)\times\mathrm{P}(\Gamma_{2mi}=\Gamma^{(1)},\, \kappa_{1,2mi}<l_1,\, \xi'_{1,2mi}=0,\, \xi'_{m,2mi}=0)\le$$

$$\le\Psi_1(T-T_1,\hat{z}_1)=C_2.$$

Таким образом, из неравенства (9) получаем соотношение

$$|\Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)},z_1,1)|\le|g_1(z_1)|\times|\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)},\, z_1,1)|+C_1+C_2.$$

Рассмотрим теперь сжимающее отображение вида

$$|\tilde{\Phi}_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)},z_1,1)|=|g_1(z_1)|\times|\tilde{\Phi}_{2mi}(\Gamma^{(1)},z_1,1)|+C_1+C_2 \tag{10}$$

и положим $\tilde{\Phi}_0(\Gamma^{(1)},z_1,1)=\Phi_0(\Gamma^{(1)},z_1,1)<+\infty$, при этом оценки $\Phi_0(\Gamma^{(1)},z_1,1)<+\infty$ можно достичь за счет выбора подходящего начального распределения цепи Маркова (2). Тогда итеративная процедура (10) сходится в области $z_1\in(1,\hat{z}_1]$, поскольку $|g_1(z_1)|<1$, и, следовательно, функции $\tilde{\Phi}_{2mi}(\Gamma^{(1)},z_1,1)$ ограничены сверху некоторой константой. В свою очередь, функции $\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)},z_1,1)$ также будут ограничены, поскольку последовательность $\{\tilde{\Phi}_{2mi}(\Gamma^{(1)},z_1,1);\, i\ =\ 0,\ 1,\ ...\}$ мажорирует последовательность $\{\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1);\ i = 0, 1, ...\}$. Функции $\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)$ являются аналитическими в области $z_1 \in (1, \hat{z}_1]$, значит, имеют ограниченные производные, т. е. $\frac{d}{d z_1}\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) \le L_1$. Аналогичными рассуждениями получим оценку вида $\frac{d}{d z_1}\Phi_{2mi}(\Gamma^{(k)}, z_1, 1) \le L_k$ при любых $k \in \{2, 3, \dots, 2m+1\}$. Отсюда следует, что справедлива оценка для среднего количества заявок потока Π_1, ожидающих начала обслуживания:

$$\mathrm{M}\,\kappa_{1,2mi} = \sum_{k=1}^{2m+1} \frac{d}{d z_1}\Phi_{2mi}(\Gamma^{(k)}, z_1, 1)\Bigg|_{z_1=1} \le \sum_{k=1}^{2m+1} L_k.$$

Предположим теперь, что при выполнении неравенства $\lambda_1 T\,(3s_1 + 2p_1 + p_1) - l_1 < 0$ стационарного распределения цепи Маркова (3) не существует. В этом случае для цепи Маркова (3) можно установить справедливость утверждения, аналогичного сформулированному в лемме 2. Тогда $\lim_{i\to\infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) = 0$ при любых $\Gamma^{(k)} \in \Gamma$, $x_1 \in X$, $y_1 \in Y_1$ и справедливы преобразования

$$\mathrm{M}\,\kappa_{1,2mi} = \sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=1}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) =$$

$$= \sum_{x_1=0}^{\tilde{X}-1} x_1 \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=1}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) + \sum_{x_1=\tilde{X}}^{\infty} x_1 \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=1}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) \ge$$

$$\ge \tilde{X} \sum_{x_1=\tilde{X}}^{\infty} \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=1}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) =$$

$$= \tilde{X}\Big(1 - \sum_{x_1=0}^{\tilde{X}-1} \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=1}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1)\Big).$$

Поскольку $\lim_{i\to\infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) = 0$, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и любого сколь угодно большого натурального $\tilde{X}$ найдется такой индекс $I(\varepsilon, \tilde{X})$, что для любого $i > I(\varepsilon, \tilde{X})$ будет выполняться $\mathrm{M}\,\kappa_{1,2mi} \ge \tilde{X}(1-\varepsilon)$. Итак, при отсутствии стационарного распределения получаем противоречие: с одной стороны, средняя величина очереди $\mathrm{M}\,\kappa_{1,2mi}$ ограничена сверху, а с другой стороны, она неограничена. Следовательно, предположение об отсутствии стационарного распределения цепи (3) неверно и выполнения условия $\lambda_1 T(3s_1 + 2p_1 + p_1) - l_1 < 0$ достаточно для существования стационарного режима в системе по потоку Π_1.

Заключение

Рассмотрена неклассическая система массового обслуживания с разнородными по интенсивности и приоритету конфликтными неординарными входными потоками. Управление потоками происходит адаптивным алгоритмом управления с обратной связью, переналадками, упреждением и возможностью продления обслуживания. Построена математическая модель системы в виде многомерной управляемой цепи Маркова. Получен критерий существования стационарного режима в системе по высокоприоритетному потоку с низкой интенсивностью, а также необходимые условия существования стационарного режима в системе в целом. Дальнейшие исследования связаны, во-первых, с получением дополнительных условий существования стационарного режима, а во-вторых, с построением и исследованием имитационной модели системы и дальнейшим поиском квазиоптимального управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lucantoni D.* Further transient analysis of the BMAP/G/1 Queue // Communications in Statistics. Stochastic Models. 1998. V. 14. No. 1–2. P. 461–478. DOI: 10.1080/15326349808807482.
2. *Леонтьев Н.Д.*, *Ушаков В.Г.* Анализ систем обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа // Информатика и ее применения. 2014. Т. 8. № 3. С. 39–44. DOI: 10.14357/19922264140305.
3. *Ushakov A.V.*, *Ushakov V.G.* Limiting expectation time distribution for a critical load in a system with relative priority // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2013. V. 37. No. 1. P. 42–48. DOI: 10.3103/S0278641912040073.
4. *Afanasyeva L.*, *Bashtova E.*, *Bulinskaya E.* Limit theorems for semi-Markov queues and their applications // Communications in Statistics – Simulation and Computation. 2012. V. 41. No. 6. P. 688–709. DOI: 10.1080/03610918.2012.625255.
5. *Afanasyeva L.*, *Bulinskaya E.* Asymptotic analysis of traffic lights performance under heavy traffic assumption // Methodology and Computing in Applied Probability. 2013. V. 15. No. 4. P. 935–950. DOI: 10.1007/s11009-012-9291-x.
6. *Rykov V.*, *Efrosinin D.* On optimal control of systems on their life time // Recent Advances in System Reliability. Springer Series in Reliability Engineering. 2012. V. 51. P. 307–319. DOI: 10.1007/978-1-4471-2207-4_22.
7. *Fedotkin M.*, *Rachinskaya M.* Parameters Estimator of the Probabilistic Model of Moving Batches Traffic Flow // Distributed Computer and Communication Networks. Ser. Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 279. P. 154–168. DOI: 10.1007/978-3-319-05209-0.
8. *Федоткин М.А.*, *Рачинская М.А.* Имитационная модель циклического управления конфликтными неординарными пуассоновскими потоками // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. 2016. № 47. С. 43–51.
9. *Федоткин М.А.*, *Рачинская М.А.* Модель функционирования системы управления и обслуживания потоков разной интенсивности и приоритетности // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. 2016. № 48. С. 62–69.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. I. М.: Мир, 1967.
11. *Канторович Л.В.*, *Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Статья поступила 07.02.2017 г.

Rachinskaya M.A., Fedotkin M.A. (2018) INVESTIGATION OF THE STATIONARY MODE EXISTENCE IN A SYSTEM OF CONFLICT SERVICE OF NON-HOMOGENEOUS DEMANDS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp. 33–47

DOI 10.17223/19988621/51/4

This paper studies a nonclassical system which controls several independent conflicting flows and provides service for requests of these flows. It is supposed that there is one high-priority input flow and one high-intensity flow. The input flows can be approximated with a nonordinary Poisson flow. The system includes a service device that provides for each flow a service period and a readjusting period for safe switching between conflicting flows. It is also possible to prolong service for the high-intensity flow until a number of waiting requests in a high-priority flow queue reaches a certain threshold.

The most meaningful characteristics of the system are stated. A mathematical probabilistic model for the system is constructed in the form of a multidimensional homogeneous controllable Markovian chain. The paper determines necessary conditions for the existence of a stationary mode in the system. A sufficient condition for existence of a stationary mode for the high-priority flow is proved as well. All the found conditions can be easily checked in real systems since they deal only with system parameters such as intensities of the input flows, intensities of service, and time periods of the service device states.

Keywords: priority with threshold, multidimensional controllable Markovian chain, stationary distribution.

AMS Mathematical Subject Classification: 90B22, 60G10, 60J10

RACHINSKAYA Maria Anatolyevna (Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation)
E-mail: rachinskaya.maria@gmail.com

FEDOTKIN Michael Andreevich (Doctor of Physics and Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation)
E-mail: fma5@rambler.ru

REFERENCES

1. Lucantoni D.(1998) Further transient analysis of the BMAP/G/1 Queue. *Communications in Statistics. Stochastic Models*. 14(1–2). pp. 461–478. DOI: 10.1080/15326349808807482.
2. Leontyev N.D., Ushakov V.G. (2014) Analiz sistem obsluzhivaniya s vkhodyashchim potokom avtoregressionnogo tipa [Analysis of a queueing system with autoregressive arrivals]. *Informatics and Applications*. 8(3). pp. 39–44. DOI: 10.14357/19922264140305.
3. Ushakov A.V., Ushakov V.G. (2013) Limiting expectation time distribution for a critical load in a system with relative priority. *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*. 37(1). pp. 42–48. DOI: 10.3103/S0278641912040073.
4. Afanasyeva L., Bashtova E., Bulinskaya E. (2012) Limit Theorems for Semi-Markov Queues and Their Applications. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*. 41(6). pp. 688–709. DOI: 10.1080/03610918.2012.625255.
5. Afanasyeva L., Bulinskaya E. (2013) Asymptotic Analysis of Traffic Lights Performance Under Heavy Traffic Assumption. *Methodology and Computing in Applied Probability*. 15(4). pp. 935–950. DOI: 10.1007/s11009-012-9291-x.
6. Rykov V., Efrosinin D. (2012) On Optimal Control of Systems on Their Life Time. *Recent Advances in System Reliability. Springer Series in Reliability Engineering*. 51. pp. 307–319. DOI: 10.1007/978-1-4471-2207-4_22.
7. Fedotkin M., Rachinskaya M. (2014) Parameters Estimator of the Probabilistic Model of Moving Batches Traffic Flow. *Distributed Computer and Communication Networks. Ser. Communications in Computer and Information Science*. 279. pp. 154–168. DOI: 10.1007/978-3-319-05209-0.
8. Fedotkin M.A., Rachinskaya M.A. (2016) Imitatsionnaya model' tsiklicheskogo upravleniya konfliktnymi neordinarnymi puassonovskimi potokami [Simulation model of cyclic control for conflicting non-ordinary Poisson flows]. *Bulletin of the Volga State Academy of Water Transport*. 47. pp. 43–51.
9. Fedotkin M.A., Rachinskaya M.A. Model' funktsionirovaniya sistemy upravleniya i obsluzhivaniya potokov raznoy intensivnosti i prioritetnosti [The functioning model of a control and service system for flows with different intensity and priority]. *Bulletin of the Volga State Academy of Water Transport*. 2016. 48. pp. 62–69.
10. Feller W. (1966) *An introduction to probability theory and its applications*. V. I. New York: John Wiley & Sons, Inc.
11. Kantorovich L.V., Krylov V.I. (1958) *Approximate methods of higher analysis*. New York: Interscience.