ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Математика и механика № 51

УДК 519.81, 519.21 MSC 60H10, 60G44, 60J65
DOI 10.17223/19988621/51/5

А.А. Шишкова

РАСЧЕТ АЗИАТСКИХ ОПЦИОНОВ ДЛЯ МОДЕЛИ БЛЭКА – ШОУЛСА[1]

Рассматривается одна из фундаментальных задач финансовой математики – распределение ресурсов между финансовыми активами с целью обеспечения достаточных выплат. Предлагаются формулы для вычисления стоимости азиатского опциона и построения хеджирующей стратегии при заданных параметрах модели Блэка – Шоулса в непрерывном времени с двумя финансовыми активами.

Ключевые слова: *мартингал*, *стохастический интеграл*, *хеджирующая стратегия*, *азиатский опцион*, *модель Блэка – Шоулса.*

1. Введение

Основным вопросом математической экономики является вопрос потребления и инвестирования. В современной финансовой индустрии такие проблемы представляют наибольший интерес для инвесторов, продающих финансовые активы своим клиентам, которые имеют право на определенную оплату в течение срока инвестиционного контракта и ожидают получить максимальную отдачу в момент его погашения.

Исторически первой работой в теории финансов в направлении условий неопределенности стала диссертация Л. Башелье «Теория спекуляций» [1], которая была опубликована в 1900 году. В диссертации броуновское движение было использовано для расчета цен опционов. Эта работа стала первой публикацией, посвященной использованию математической техники в финансовой науке.

В современной теории и практике опционов знаменательную роль играют работы Ф. Блэка и М. Шоулса «Расчет цены опционов и обязательства корпораций» [2] и Р. Мертона «Теория расчета рациональной цены опциона» [3]. В этих статьях авторы предложили формулы для вычисления стоимости опционов и других производных инструментов, которые оказали огромное влияние на развитие теории и практики финансов. Доказательство формулы Блэка – Шоулса привело к повышенному интересу к производным инструментам и взрывному росту опционной торговли.

Работать в этом направлении продолжили Кокс, Росс и Рубинштейн. В [4] авторы предложили рассмотреть простую модель для ценообразования опционов в дискретном времени. Эта модель в предельном случае содержит полученную ранее модель Блэка – Шоулса, но в отличие от нее получена гораздо более простыми методами. Модель Кокса – Росса – Рубинштейна дает эффективный численный метод оценивания опционов. Подробно обсуждаются опционы на обыкновенные акции в [5].

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 2.3208.2017/4.6.

Со временем передовые вероятностные методы оказали значительное влияние на область финансов. И наоборот, финансовые вопросы стимулировали новые направления исследований в области теории вероятностей. К таким работам можно отнести статью Фоллмера [6], в которой рассмотрены основы теории арбитражного ценообразования с акцентом на неполные рынки и на различные роли, которые играют вероятностная мера «в реальном времени» и ее эквивалентные мартингальные меры. «Мартингальную» теорию расчета справедливой стоимости опционов, хеджирующих стратегий, рациональных моментов исполнения опционов привели в своих работах А.Н. Ширяев и Ю.М. Кабанов [7, 8]. Здесь авторы изложили основные понятия, постановки задач и результаты финансовой математики, которые относятся к расчетам опционов американского и европейского типов, предполагая, что контракты заключаются на дискретном и непрерывном (B,S) – рынках. Во второй работе предполагается, что безрисковый банковский счет эволюционирует по формуле «сложных процентов», а цена рисковой акции управляется геометрическим броуновским движением. Широкое распространение в финансовой математике получила «диффузионная» модель (B,S)-рынка с постоянной волатильностью. Именно с этой моделью связаны известные результаты Блэка – Шоулса, Мертона, Харрисона и Крепса [9], Харрисона и Плиски [10], Каратцаса и Шрива [11]. С.М. Пергаменщиков [12] в своей работе также использовал (B,S)-модель финансового рынка с постоянной волатильностью в задаче ценообразования опционов при наличии транзакционных издержек. Было установлено, что предельное распределение терминального значения портфеля для стратегии Леланда является смешанным гауссовским распределением.

Позже Пергаменщиков и Берджан [13] исследовали задачу оптимального инвестирования и потребления для финансового рынка Блэка – Шоулса со стохастической волатильностью. Используя представление Фейнмана – Каца, авторы доказывают единственность и гладкость решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана, которое представляет собой нелинейное уравнение в частных производных второго порядка. Кроме того, показано, что оптимальная скорость сходимости итерационных числовых схем как для функции стоимости, так и для оптимального портфеля является супергеометрической, то есть более быстрой, чем любая геометрическая.

На основании вышесказанного стоит отметить, что задача ценообразования опционов и построения хеджирующих стратегий является хорошо изученной для опционов американского и европейского стилей. К сожалению, эта техника не развита для так называемых «экзотических» опционов, в том числе для опционов азиатского типа. В данной работе рассматривается задача построения хеджирующей стратегии для азиатского опциона. При решении этой задачи исследован метод построения представления квадратично интегрируемых мартингалов по винеровским процессам и найдены квадратические представления для мартингалов, порожденных функциями от интегралов по геометрическим броуновским движениям (п. 3). Основным результатом работы являются полученные в п. 3 формулы для вычисления стоимости опциона и хеджирующей стратегии. В п. 4 найдена плотность экспоненциальной случайной величины с использованием специального процесса – броуновского моста. Доказано, что полученная плотность является непрерывно дифференцируемой по первой переменной функцией. В п. 6 приведены результаты численного моделирования Монте-Карло для конкретной финансовой модели.

2. Постановка задачи

При построении математических моделей динамики финансовых показателей оказываются полезными различные классы случайных процессов с дискретным и непрерывным временем. При описании случайных процессов, как правило, отправляются от их разложения Дуба или Дуба – Мейера на предсказуемую и мартингальную составляющие [14]. Это объясняет, почему теория мартингалов является естественным и полезным математическим аппаратом в финансовой математике и инженерии.

Пусть $\left(\Omega, \mathsf{F}, \left(\mathsf{F}_t^W\right)_{0\le t\le T}, P\right)$ – стохастический базис с естественной фильтрацией $\mathsf{F}_t^W = \sigma\{\mathrm{W}_s, \mathrm{s} \le \mathrm{t}\}$, порожденной винеровским процессом.

Предположим, что на финансовом рынке динамика цен безрискового актива $B = (B_t)_{0\le t\le T}$ и рискового актива $S = (S_t)_{0\le t\le T}$ задается (B,S)-моделью Блэка – Шоулса вида

$$\begin{cases} B_t = 1, \\ dS_t = \sigma S_t dW_t, \quad S_0 > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma > 0$ – волатильность. Определим азиатский опцион купли, который предъявляется к исполнению в заранее определенный момент времени T и задается платежной функцией

$$f_T = \left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K\right)_+, \tag{2}$$

где $(\mathrm{x})_+ = \max(\mathrm{x}; 0)$ и $K > 0$ – фиксированная постоянная (цена страйк).

Напомним некоторые определения, которые понадобятся для решения задачи хеджирования.

Определение 1. *Портфелем (стратегией) назовем согласованный с фильтрацией случайный процесс* $\Pi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^2$, $\Pi = (\Pi_t)_{0\le t\le T} = (\beta_t, \gamma_t)_{0\le t\le T}$, где β_t – *количество безрисковых активов и* γ_t *– количество рисковых.*

Стоимость этого портфеля в момент времени t определяется следующим образом:

$$X_t^{\Pi} = \beta_t B_t + \gamma_t S_t.$$

Определение 2. *Говорят, что для данного* $x > 0$ *и* f_T *– платежной функции, самофинансируемая стратегия называется* (x, f_t)*- хеджем, если*

$$\forall \omega \in \Omega, \ X_0^{\Pi} = x, \ X_T^{\Pi} \ge f_T \quad \text{п.н.}$$

Определение 3. *Величина* $C_0 = \inf\{x > 0\colon \Pi(x, f_T) \ne \varnothing\}$ *называется инвестиционной(справедливой) стоимостью опциона, гарантирующей в момент* T *получение капитала, не меньшего* f_T.

3. Построение хеджирующей стратегии и вычисление стоимости азиатского опциона

Для того чтобы построить хеджирующую стратегию в случае модели (1) для опциона с платежной функцией (2) применим теорему 3 (см. п. 7) к мартингалу

$$M_t = \mathbf{E}(\mathrm{f}_T \mid \mathcal{F}_t^W). \tag{3}$$

Требуется найти согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t^W)_{0\le t\le T}$ квадратично интегрируемый процесс $(\alpha_t)_{0\le t\le T}$, такой, что для всех $t\in[0,T]$

$$M_t = M_0 + \int_0^t \alpha_s dW_s.$$

Заметим, что в этом случае $M_0 = \mathbf{E}f_T$ определяет стоимость опциона. Тогда стратегия $\Pi = (\beta_t, \gamma_t)_{0\le t\le T}$ будет строиться по следующим формулам:

$$\beta_t = \mathbf{E}f_T + \int_0^t \alpha_s dW_s - \gamma_t S_t, \quad \gamma_t = \alpha_t / \sigma S_t. \tag{4}$$

где
$$\alpha_t = \frac{d}{dt}\langle M, W\rangle_t.$$

В нашем случае

$$M_t = \mathbf{E}(\mathrm{f}_T \mid \mathcal{F}_t^W) = \mathbf{E}\left(\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_v dv - K\right)_+ \mid \mathcal{F}_t^W\right), \tag{5}$$

Используя формулу Ито [14] для рискового актива $(S_t)_{0\le t\le T}$ в модели (1) имеем для всех $v\in[0,T]$

$$S_v = S_0 \exp\{\sigma \mathrm{W}_v - \sigma^2 \mathrm{v}/2\}.$$

При $v \ge t$ имеем, что $S_v = S_t \exp\{\sigma(\mathrm{W}_v - \mathrm{W}_t) - \sigma^2(\mathrm{v}-\mathrm{t})/2\}$. Это значит, что мы можем представить интеграл в (5) как

$$\frac{1}{T}\int_0^T S_v dv = \frac{\xi_t + S_t\eta_t}{T},$$

где
$$\xi_t = \int_0^t S_v dv, \quad \eta_t = \int_t^T \exp\{\sigma(\mathrm{W}_v - \mathrm{W}_t) - \sigma^2(\mathrm{v}-\mathrm{t})/2\}\mathrm{dv}.$$

Заметим, что ξ_t измерима относительно $\mathcal{F}_t^W$, а η_t не зависит от $\mathcal{F}_t^W$. Следовательно,

$$M_t = G(\mathrm{t}, \xi_t, \mathrm{S}_t), \tag{6}$$

где
$$G(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathbf{E}\left(\frac{x + y\eta_t}{T} - K\right)_+.$$

Теорема 1. *Функция $G(t,x,y)$ имеет непрерывные производные*

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,x,y), \ \frac{\partial}{\partial x}G(t,x,y), \ \frac{\partial}{\partial y}G(t,x,y), \ \frac{\partial^2}{\partial y^2}G(t,x,y).$$

Теорема доказана в п. 5.

Поскольку для любого $t>0$ процесс $(W_{t+v}-W_t)_{v\geq 0}$ является винеровским, то распределение случайной величины η_t совпадает с распределением случайной величины

$$\eta_v^* = \int_0^v \exp\left\{\sigma W_u - \sigma^2 \mathrm{u}/2\right\} du, \tag{7}$$

где $v = T - t$. Поэтому

$$G(t,x,y) = E\left(\frac{x + y\eta_v^*}{T} - K\right)_+. \tag{8}$$

Принимая во внимание теорему 1 и применяя формулу Ито к функции (8), получаем для $M_t = G(t,\xi_t,S_t)$

$$M_t = M_0 + \int_0^t \left(G_t^{'}(v,\xi_v,S_v) + G_x^{'}(v,\xi_v,S_v) S_v + \frac{\sigma^2 S_v^2}{2} G_{yy}^{''}(v,\xi_v,S_v) \right) dv + \sigma M_t^*, \tag{9}$$

где $M_t^* = \int_0^t G_y^{'}(v,\xi_v,S_v) S_v dW_v$ и $G_t^{'} = \partial G / \partial t$ и другие частные производные аналогично.

Квадратическую характеристику можно вычислить по следующей формуле:

$$\langle M,W \rangle_t = \sigma \mathrm{P} - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\left(\left(M_{t_j}^* - M_{t_{j-1}}^* \right) \left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}} \right) \middle| \mathrm{F}_{t_{j-1}} \right) =$$

$$= \sigma \left\langle M^*, W \right\rangle_t = \sigma \int_0^t G_y^{'}(v,\xi_v,S_v) S_v dv.$$

Отсюда находим формулу для вычисления коэффициентов мартингального представления (см. п.7, форм. (31)):

$$\alpha_t = \sigma G_y^{'}(t,\xi_t,S_t) S_t. \tag{10}$$

Далее, используя (10) в (4), получаем хеджирующую стратегию

$$(\Pi_\mathrm{t})_{0\leq t\leq T} = (\beta_t,\gamma_t)_{0\leq t\leq T}.$$

4. Вероятностные свойства случайной величины η_v^*

Для изучения функции (8) нам потребуется исследовать распределение случайной величины (7). Для этого введем сначала броуновский мост.

Определение 4. *Выходящий из нуля и приходящий в* a *броуновский мост* $\left(B_t^a\right)_{0\leq t\leq T}$ *– это гауссовский процесс, такой, что*

$$B_t^a = W_t - \frac{t}{T} W_T + \frac{t}{T} a,$$

где $a \in \mathbb{R}$ *произвольная константа.*

С помощью этого процесса вычисляют условные распределения при фиксированном конечном значении винеровского процесса, т.е. для любой функции $L : C[0,T] \to \mathbb{R}$ и для любого борелевского множества Γ

$$\mathrm{P}\left(L\left((W_t)_{0\leq t\leq T}\right) \in \Gamma \mid \mathrm{W}_t = a \right) = \mathrm{P}\left(L\left(B_t^a\right)_{0\leq t\leq T} \in \Gamma \right).$$

Предложение 1. *Для любого* $0 \le t < T$ *случайная величина* η_v^* *имеет плотность.*

Доказательство. Пусть Q – некоторая ограниченная функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. В нашем случае

$$\mathbf{E}Q\left(\eta_v^*\right) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Q(\eta_v^*) \mid W_T)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}(Q(\eta_v^*) \mid W_T = a)\varphi(a)da = \mathbf{E}\int_{\mathbb{R}} (Q(F(t,a))\varphi(a)da,$$

где $$F(t,a) = \int_0^v \exp\left\{\sigma \tilde{B}_u + \sigma_1 u a\right\} du, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{T}, \quad \tilde{B}_u = W_u - \frac{u}{T}W_T - \frac{\sigma^2 u}{2} .$$

Далее сделаем замену переменной $z = F(t,a)$, т.е. введем функцию $a = a\left(t,z\right)$ как

$$z = F(t, a(t,z)) . \tag{11}$$

Отсюда получаем, что

$$a_z'(t,z) = \frac{1}{K(t,a(t,z))} ,$$

где $$K(t,a) = F_a'(t,a) = \sigma_1 \int_0^v u \exp\left\{\sigma \tilde{B}_u + \sigma_1 u a\right\} du. \tag{12}$$

Тогда $$\mathbf{E}Q(\eta_v^*) = \int_0^\infty Q(z)q(t,z)dz,$$

где $$q(t,z) = \mathbf{E}\frac{\varphi(a)}{K(t,a)}, \qquad \varphi(\cdot) \sim N(0,T) .$$

Таким образом, плотность для случайной величины η_v^* имеет вид

$$q(t,z) = \mathbf{E}L(t,a(t,z)) , \quad L(t,a) = \frac{\varphi(a)}{K(t,a)} . \tag{13}$$

Предложение 1 доказано.

Плотность $q(t,z)$ обладает следующим свойством.

Предложение 2. *Пусть* $q\left(t,z\right)$ *– плотность случайной величины*

$$\eta_v^* = \int_0^v \exp\left\{\sigma W_u - \sigma^2 u / 2\right\} du ,$$

определенная в (12) .Тогда для любых $z > 0$ и $0 \le t \le T_1 < T$ существует непрерывная производная $\partial q / \partial t$, *такая, что для* $0 \le z \le 2\left(\max\left(1,T\right)\right)^2 :=z_0$

$$\sup_{0 \le t \le T_1} \left| \frac{\partial}{\partial t} q(t,z) \right| \le c_1 , \tag{14}$$

где c_1 и ε положительные константы, а для $z > z_0$

$$\sup_{0 \le t \le T_1} \left| \frac{\partial}{\partial t} q(t,z) \right| \le c_1 \exp\left\{ -\varepsilon\left(\ln z\right)^2 \right\} . \tag{15}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{\partial L(t,a)}{\partial t} = L_a'(t,a)a_t' + L_t'(t,a),$$

где $a = a(t,z)$. Принимая во внимание (11), получаем выражения

$$L_a'(t,a) = \frac{\varphi'(a)}{K(t,a)} - \frac{\varphi(a)K_a'(t,a)}{K^2(t,a)}, \qquad L_t'(t,a) = -\frac{\varphi(a)}{K^2(t,a)}K_t'(t,a),$$

и
$$a_t'(t,z) = -\frac{F_t'(t,a)}{K(t,a)}, \quad K_a'(t,a) = \sigma_1^2 \int_0^v u^2 \exp\left\{\sigma\tilde{B}_u + \sigma_1 ua\right\} du, \tag{16}$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial L(t,a)}{\partial t} = \frac{F_t'(t,a)}{K^2(t,a)}\left(\frac{\varphi(a)K_a'(t,a)}{K(t,a)} - \varphi'(a)\right) - \frac{\varphi(a)K_t'(t,a)}{K^2(t,a)}. \tag{17}$$

Проводя необходимые вычисления, получим следующую оценку:

$$\left|\frac{\partial L(t,a)}{\partial t}\right| \le \frac{\varphi(a)\exp\left\{\sigma\tilde{B}_{T-t} + \sigma_1 a(T-t)\right\}}{\left(\int_0^v u\exp\left\{\sigma\tilde{B}_u + \sigma_1 ua\right\}du\right)^2}\left(\frac{2(T-t)}{\sigma_1\sqrt{2\pi T}} + \frac{|a|}{\sigma_1^2\sqrt{2\pi T^3}}\right).$$

Заметим, что для $0 \le u \le T$

$$-2W_T^* - \frac{\sigma^2}{2}T \le \tilde{B}_u \le 2W_T^*,$$

где $W_T^* = \sup\limits_{0\le t\le T}|W_t|$. Следовательно, для некоторых констант справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial L(t,a)}{\partial t}\right| \le c_1 \exp\left\{cW_T^*\right\}\exp\left\{b|a| - a^2/T\right\}(d + g|a|), \tag{18}$$

где $$c_1 = \frac{4\exp\left\{-T\,\sigma^3/2\right\}}{(T-T_1)^4}, \; c = \sigma(5+T), \; b = (T-2)\sigma_1, \; d = \frac{2T}{\sigma_1}, \; g = \frac{1}{\sigma_1^2 T}.$$

Поэтому для некоторых $c^* > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$

$$\left|\frac{\partial L(t,a)}{\partial t}\right| \le c^* \exp\left\{cW_T^*\right\}e^{-\varepsilon_1 a^2}. \tag{19}$$

Положим $\tilde{L}(t,z) = L(t, a(t,z))$. Следовательно, в силу леммы 1

$$\mathbf{E}\sup_{z\in\mathbb{R}_+}\sup_{0\le t\le T_1}\left|\frac{\partial\tilde{L}(t,z)}{\partial t}\right| \le c_3^*. \tag{20}$$

Покажем теперь, что

$$q_t(t,z) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\left(\tilde{L}(t,z)\right) = \mathbf{E}\frac{\partial\tilde{L}(t,z)}{\partial t}. \tag{21}$$

Пусть
$$\xi_\Delta(z) = \frac{\tilde{L}(t+\Delta, z) - \tilde{L}(t,z)}{\Delta}.$$

Тогда
$$\frac{q(t+\Delta,z) - q(t,z)}{\Delta} = \mathbf{E}\xi_\Delta(z).$$

По определению производной получаем
$$\xi_\Delta(z) \underset{\Delta\to 0}{\to} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{L}(t,z) \quad \text{п.н.}$$

Кроме того, для любого $\Delta > 0$
$$|\xi_\Delta(z)| = \left|\frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta} \frac{\partial}{\partial v}\tilde{L}(v,z)dv\right| \le \sup_{z\in\mathbb{R}_+} \sup_{0\le t\le T_1} \left|\frac{\partial}{\partial t}\tilde{L}(t,z)\right| := \xi^*(z).$$

Из (20) получаем, что
$$\mathbf{E}\xi^*(z) < \infty.$$

Следовательно, по теореме Лебега о предельном переходе
$$\lim_{\Delta\to 0} \mathrm{E}\xi_\Delta = \mathrm{E}\lim_{\Delta\to 0}\xi_\Delta = \mathrm{E}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{L}(t,z),$$

т.е. получаем (21). Далее из (19) находим, что
$$\left|q_t'(t,z)\right| \le \mathbf{E}\left|\frac{\partial}{\partial t}\tilde{L}(t,z)\right| \le c^*\mathbf{E}e^{cW_T^* - \varepsilon_1 a^2}. \tag{22}$$

Если $0 \le z \le z_0$, то в силу леммы 1 имеем
$$\left|q_t'(t,z)\right| \le c^*\mathbf{E}e^{cW_T^*} < \infty$$

и получаем (14).

Пусть теперь $z > z_0$. Тогда из (11) вытекает, что
$$e^{\ln z} = \int_0^v \exp\left\{\sigma\tilde{B}_u + \sigma_1 ua\right\}du \le T\exp\left\{2\sigma W_T^* + \sigma_1 T\,|\,a\,|\right\} =$$
$$= \exp\left\{2\sigma W_T^* + \sigma_1 T\,|\,a\,| + \ln\max(1,T)\right\}. \tag{23}$$

Следовательно,
$$\ln z \le 2\sigma W_T^* + \sigma_1 T\,|\,a(t,z)\,| + \ln\max(1,\mathrm{T}).$$

Определим множество
$$\Gamma = \left\{W_T^* \le \frac{\ln z}{4\sigma}\right\}.$$

Из (23) вытекает, что на этом множестве
$$|a(t,z)| \ge l(z),$$

где
$$l(z) = \left(\frac{\ln z}{2} - \ln\max(1,T)\right)\frac{1}{\sigma_1 T} = \frac{1}{2\sigma}\ln\frac{z}{(\max(1,T))^2} > 0.$$

Поэтому, в силу леммы 1

$$\mathbf{E}\exp\left\{cW_T^* - \varepsilon_1 a^2\right\} = \mathbf{E}\exp\left\{cW_T^* - \varepsilon_1 a^2\right\}\chi_\Gamma + \mathbf{E}\exp\left\{cW_T^* - \varepsilon_1 a^2\right\}\chi_{\Gamma^c} \le c_1 + J,$$

где $J = \mathbf{E}e^{cW_T^*}\chi_{\Gamma^c}$. По неравенству Коши – Буняковского, а затем по лемме 1 оценим

$$\mathbf{E}e^{cW_T^*}\chi_{\Gamma^c} \le \left(\mathbf{E}e^{cW_T^*}\right)^{1/2}\left(\mathbf{E}\chi_{\Gamma^c}\right)^{1/2} \le c\left[\mathbf{P}\left(W_T^* > \frac{\ln z}{4\sigma}\right)\right]^{1/2}.$$

Вероятность оценим по неравенству Чебышева, т.е. для $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2T}$

$$\mathbf{P}\left(W_T^* > \frac{\ln z}{4\sigma}\right) = \mathbf{P}\left(e^{\varepsilon\left(W_T^*\right)^2} > e^{\varepsilon\frac{(\ln z)^2}{16\sigma^2}}\right) \le e^{-\varepsilon\frac{(\ln z)^2}{16\sigma^2}}\mathbf{E}e^{\varepsilon\left(W_T^*\right)^2} \le ce^{-\varepsilon\frac{(\ln z)^2}{16\sigma^2}}.$$

Последнее неравенство справедливо в силу леммы 2. Таким образом, имеем

$$J \le c_2\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{32\sigma^2}(\ln z)^2\right\} = c_2\exp\left\{-\varepsilon_2(\ln z)^2\right\}.$$

Заметим, что $\exists\varepsilon_2 > 0$ такое, что

$$l(z) \ge \varepsilon_2(\ln z).$$

Следовательно

$$\mathbf{E}\exp\left\{cW_T^* - \varepsilon_1 a^2\right\} \le c_1 e^{-\varepsilon_1 c_2^2(\ln z)^2} + c_2 e^{-\varepsilon_2(\ln z)^2} \le c\exp\left\{-\varepsilon(\ln z)^2\right\}.$$

Отметим, что функция $L_t'(t,a)$ непрерывна, поскольку является суперпозицией непрерывных функций. Очевидно, что $F_t'(t,a)$, $K_t'(t,a)$, $\varphi_a'(a)$ и $\varphi(a)$ непрерывны в силу их определения. Из (12) и (16) непосредственно следует их непрерывность. Следовательно, функция $q_t'(t,z)$ является непрерывной по t и по z. Аналогично устанавливается непрерывность $q(t,z)$ по z.

Предложение 2 доказано.

5. Доказательство теоремы 1

Запишем функцию $G(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y})$ в следующем виде:

$$G(t,x,y) = \frac{1}{T}\int_0^\infty (x + yz - K_1)_+ \, q(t,z)\,dz, \quad K_1 = KT. \tag{24}$$

Если $0 \le x \le K_1$, то

$$G(t,x,y) = \frac{1}{T}\int_{b(x,y)}^\infty (x + yz - K_1)\,q(t,z)\,dz, \quad b(x,y) = \frac{K_1 - x}{y}.$$

Тогда

$$G_x'(t,x,y) = -\frac{1}{T}(x + yb(x,y) - K_1)\,q(t,b(x,y))\,b_x'(x,y) + \frac{1}{T}\int_{b(x,y)}^\infty q(t,z)\,dz.$$

Первое слагаемое обращается в ноль после подстановки $b(x,y)=\dfrac{K_1-x}{y}$, поэтому имеем

$$G_x'(t,x,y)=\frac{1}{T}\int_{b(x,y)}^{\infty} q(t,z)\,dz\ ,\quad G_y'(t,x,y)=\frac{1}{T}\int_{b(x,y)}^{\infty} zq(t,z)\,dz\ ,$$

$$G_{yy}''(t,x,y)=\frac{1}{T}b(x,y)q(t,b(x,y))\frac{(K_1-x)}{y^2}\ .$$

Если $x\ge K_1$, то

$$G_x'(t,x,y)=\frac{1}{T}\ ,\quad G_y'(t,x,y)=\frac{1}{T}\int_0^{\infty} zq(t,z)\,dz\ ,\quad G_{yy}''(t,x,y)=0\ .$$

Очевидно, что функции $G_x'(t,x,y), G_y'(t,x,y), G_{yy}''(t,x,y)$ являются непрерывными.

Рассмотрим производную $G_t'(t,x,y)$.

$$\frac{G(t+\Delta,x,y)-G(t,x,y)}{\Delta}=\frac{1}{T}\int_0^{\infty}(x+yz-K_1)_+\,\eta_\Delta(z)\,dz\ ,$$

где
$$\eta_\Delta(z)=\frac{q(t+\Delta,z)-q(t,z)}{\Delta}\to\frac{\partial}{\partial t}q(t,z)\ .$$

Заметим, что с учетом предложения 2

$$|\eta_\Delta(z)|=\frac{1}{\Delta}\left|\int_t^{t+\Delta}\frac{\partial q(u,z)}{\partial t}du\right|\le\frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta}\left|\frac{\partial q(u,z)}{\partial t}\right|du\le b(z),$$

где
$$b(z)=c_1\chi_{\{z\le z_0\}}+c_1\exp\left\{-\varepsilon(\ln z)^2\right\}\chi_{\{z>z_0\}}\ .$$

Тогда

$$\int_0^{\infty}(x+yz-K_1)_+\,b(z)\,dz\le\int_0^{\infty}(|x|+|y||z|+|K_1|)b(z)\,dz<\infty\ .$$

Следовательно, по теореме Лебега

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,x,y)=\frac{1}{T}\int_0^{\infty}(x+yz-K_1)_+\lim_{\Delta\to 0}\eta_\Delta(z)\,dz=\frac{1}{T}\int_0^{\infty}(x+yz-K_1)_+\frac{\partial}{\partial t}q(t,z)\,dz\ .$$

Из предложения 2 следует непрерывность производной $\dfrac{\partial}{\partial t}G(t,x,y)$. Теорема доказана.

6. Численное моделирование полученных результатов

Начнем с вычисления стоимости опциона, которая, как было показано ранее, равна

$$C_0 = \mathrm{E}f_T = \mathrm{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K\right)_+ = \mathrm{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_0 \exp\left\{\sigma W_t - t\sigma^2/2\right\} dt - K\right)_+ .$$

Математическое ожидание будем вычислять по методу Монте-Карло, тогда получим выражение

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_0 \exp\left\{\sigma W_t - t\sigma^2/2\right\} dt - K\right)_+ = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_0 \exp\left\{\sigma W_t - t\sigma^2/2\right\} dt - K\right)_+$$

Таким образом, чтобы вычислить это математическое ожидание, моделируем L раз случайную функцию $\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_0 \exp\left\{\sigma W_t - t\sigma^2/2\right\} dt - K\right)_+$.

Остановимся подробнее на вычислении интеграла

$$\frac{1}{T}\int_0^T S_0 \exp\left\{\sigma W_t - t\sigma^2/2\right\} dt. \tag{25}$$

Для этого воспользуемся квадратурной формулой прямоугольников. Чтобы применить эту формулу, сначала указываем число разбиений N и шаг по времени $h = \frac{T}{N}$, то есть дискретизируем время. Затем моделируем винеровский процесс следующим образом. Моделируем N независимых гауссовских случайных величин $(\theta_k)_{1\le k\le N}$ с параметрами $(0,1)$. Так как приращения винеровского процесса также распределены нормально с нулевым средним и дисперсией, равной длине приращения, то в рассматриваемом случае – это шаг h. Значит, на каждом шаге винеровский процесс определяется выражением вида

$$W_k(t) = W_{k-1}(t) + \frac{t}{N}\cdot\theta_k,\ 1\le k\le N . \tag{26}$$

Тогда интеграл (25) будет равен

$$\frac{S_0}{T}\int_0^T \exp\left\{\sigma W_t - t\sigma^2/2\right\} dt = \frac{S_0}{T}\sum_{k=1}^{N} h\exp\left\{\sigma W_k(T) - t_k\sigma^2/2\right\},\ 1\le k\le N. \tag{27}$$

Следовательно, стоимость опциона вычисляется по формуле

$$C_0 = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\left(\frac{S_0}{T}\sum_{k=1}^{N} h\exp\left\{\sigma W_k(T) - t_k\sigma^2/2\right\}\right)_+ .$$

Для построения хеджирующей стратегии (формирования портфеля) необходимо вычислить коэффициенты $(\alpha_t)_{0\le t\le T}$ по формуле (10). Сначала вычислим функцию $G(t,x,y)$, для этого моделируем L случайных величин $\widetilde{\eta_t^j}$, которые определяются формулой (7). Получаем вычислительную формулу

$$\widetilde{\eta_t} = \frac{T-t}{N}\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{\sigma W_k(T-t) - \sigma^2\frac{(T-t)k}{2N}\right\}. \tag{28}$$

Тогда для функции $G(t,x,y)$ получаем выражение

$$G(t,x,y)=\frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\left(x+y\widetilde{\eta_t^j}-K\right)_+. \qquad (29)$$

Для вычисления частной производной $G_y^{'}(t,x,y)$ воспользуемся следующей формулой:

$$\frac{\partial}{\partial y}G(t,x,y)=\frac{G(t,x,y+\delta)-G(t,x,y)}{\delta}, \qquad \delta=0,001. \qquad (30)$$

Прежде чем приступить к вычислению коэффициентов $(\alpha_t)_{0\le t\le T}$, запишем расчетные формулы для $(\xi_t)_{0\le t\le T}$ и $(S_t)_{0\le t\le T}$

$$\xi_t=\frac{S_0 t}{TN}\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{\sigma W_k(t)-\sigma^2\frac{tk}{2N}\right\} \text{ и } S_t=S_0\exp\left\{\sigma W_t-\sigma^2\frac{t}{2}\right\}.$$

Далее применяя формулы (29) и (30) уже к функции $G(t,\xi_t,S_t)$, находим коэффициенты $(\alpha_t)_{0\le t\le T}$ и строим стратегию $\Pi=(\beta_t,\gamma_t)_{0\le t\le T}$ по формулам (4).

Численное моделирование проводится в среде SciLab. По полученным результатам построен график.

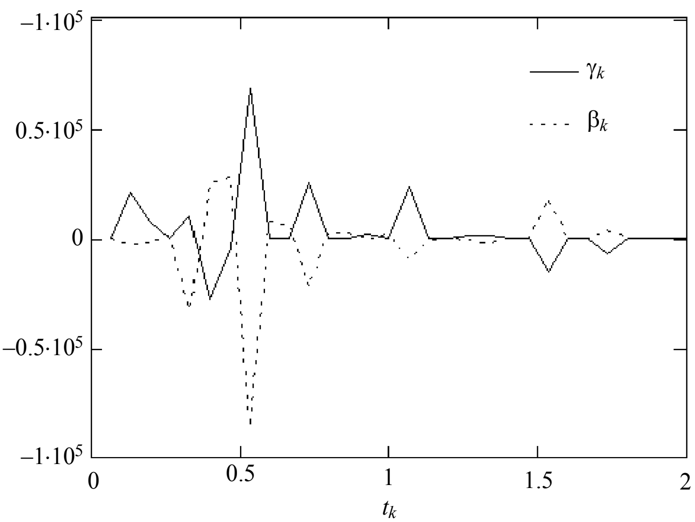

Рис. 1. График хеджирующей стратегии $\Pi_t=(\beta_t,\gamma_t)_{0\le t\le 2}$

Fig. 1. Graph of the hedging strategy $\Pi_t=(\beta_t,\gamma_t)_{0\le t\le 2}$

7. Приложение

7.1. Мартингальное представление

Введем в рассмотрение $\mathbf{M}_t$ – класс квадратично интегрируемых мартингалов. Справедлива следующая теорема [14].

Теорема 3 (О представлении квадратично интегрируемых мартингалов). *Пусть* $X=(x_t,F_t^W)_{0\le t\le T}\in \mathrm{M}_t$ *и* $W=(\mathrm{W}_t,F_t^W)_{0\le t\le T}$ *– винеровский процесс относительно естественной фильтрации. Предположим, что семейство σ-алгебр* $(F_t^W)_{0\le t\le T}$ *непрерывно справа. Тогда найдется случайный процесс* $(\alpha(\mathrm{t},\omega),F_t^W)_{0\le t\le T}$ *с* $\mathrm{E}\int_0^T\alpha^2(\mathrm{t},\omega)dt<\infty$, *такой, что для всех* $0\le t\le T$

$$x_t=x_0+\int_0^t\alpha(\mathrm{s},\omega)dW_s$$

и

$$\langle x,W\rangle_t=\int_0^t\alpha(\mathrm{s},\omega)ds. \tag{31}$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_t$ – взаимная квадратическая характеристика процессов.

7.2. Экспоненциальные моменты винеровского процесса

Лемма 1. Для любого $N>0$

$$\mathbf{E}\left(\exp\left\{NW_T^*\right\}\right)<\infty. \tag{32}$$

Доказательство. Представим экспоненту в виде ряда Тейлора и получим следующее выражение:

$$\mathbf{E}\exp\left\{NW_T^*\right\}=1+\sum_{m=1}^{\infty}N^m\frac{\mathbf{E}\left(W_T^*\right)^m}{m!}. \tag{33}$$

Очевидно, что $\mathbf{E}\left(W_T^*\right)^m\le\left(\mathbf{E}\left(W_T^*\right)^{2m}\right)^{\frac{1}{2}},\forall m\ge 1$. Далее воспользуемся следующим неравенством (см. [14]):

$$\mathbf{E}(\sup X_t)^p\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbf{E}(X_t)^p,$$

где X_t – неотрицательный субмартингал, $1<p<\infty$.

Тогда, учитывая, что $W_T\sim N(0,T)$

$$\mathbf{E}\left(W_T^*\right)^{2m}\le\left(\frac{2m}{2m-1}\right)^{2m}\mathbf{E}\left(W_T^*\right)^{2m}\le c_2^*(2m-1)!!T^m\le c_2^*2^m m!T^m, \tag{34}$$

где

$$c_2^*=\sup_{m\ge 1}\left(\frac{2m}{2m-1}\right)^{2m}.$$

Тогда выражение (33) можно оценить следующим образом:

$$1+\sum_{m=1}^{\infty} N^m \frac{\mathbf{E}\left(W_T^*\right)^m}{m!} \le 1+\sum_{m=1}^{\infty} N^m \frac{\left(\mathbf{E}\left(W_T^*\right)^{2m}\right)^{\frac{1}{2}}}{m!} \le 1+\sum_{m=1}^{\infty} N^m \frac{\left(e(2T)^m\, m!\right)^{\frac{1}{2}}}{m!} =$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m!}} e^{\frac{1}{2}} (2T)^{\frac{m}{2}} N^m < \infty.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любого $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2T}$

$$\mathbf{E}\left(\exp\left\{\varepsilon\left(W_T^*\right)^2\right\}\right)<\infty.$$

Доказательство. Принимая во внимание (34), имеем

$$\mathbf{E}\exp\left\{\varepsilon\left(W_T^*\right)^2\right\}1+\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \frac{\mathbf{E}\left(W_T^*\right)^{2m}}{m!} \le 1+c_2^*\sum_{m=1}^{\infty}(2\varepsilon T)^m < \infty .$$

Лемма 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bachelier L.* Théorie de la speculation // Ann. École Norm. Sup. 1900. V. 17. P. 21–86 (Reprinted in Coothner, ed., 1967. The Random Character of Stock Market Prices. MIT Press, Cambridge, Mass., p. 17–78).
2. *Black F.* The pricing of options and corporate liabilities // J. Political Economy. 1973. No. 81(3).
3. *Merton R.* Theory of rational option pricing // Bell J. Economics and Management Science. 1973. No. 4(1).
4. *Cox J.C.*, *Ross R.A.*, *Rubinstein M.* Option pricing: a simplified approach // J. Financial Economics. 1979. V.7 (Sept). P. 229–263.
5. *Cox J.C.*, *Rubinstein M.* Options Markets. Englewood Cliffs N.J., Prentice – Hall, 1985. 498 p.
6. *Follmer H.* Probabilistic aspects of options. Preprint. Helsinki Univ., 1990, January. 34 p.
7. *Ширяев А.Н.*, *Кабанов Ю.М.*, *Крамков Д.О.*, *Мельников А.В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. I. Дискретное время // Теория вероятностей и её применение. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 23–79.
8. *Ширяев А.Н.*, *Кабанов Ю.М.*, *Крамков Д.О.*, *Мельников А.В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время // Теория вероятностей и её применение. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 80–129.
9. *Harrison J.M.*, *Kreps D.M.* Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // Journal of Economic Theory. 1979. V. 20. P. 381–408.
10. *Harrison J.M.*, *Pliska S.R.* Martingales, stochastic integrals and continuous trading // Stoch. Processes Appl. 1981. V. 11. No. 3. P. 215–260.
11. *Karatzas I.*, *Shreve S.E.* Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer – Verlag, 1988. 470 p.
12. *Pergamenchtchikov S.* Limit theorem for Leland's strategy // The Annals of Appl. Prob. 2003. V. 13. No. 3. P. 1099–1118.
13. *Pergamenchtchikov S.*, *Berdjane B.* Optimal consumption and investment for markets with random coefficient // Finance and Stochastic. Springer, 2013. V. 17. P. 419–446.
14. *Липцер Р.Ш.*, *Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1979.
15. *Janvresse E.*, *Pergamenchtchikov S.*, *Raynaud de Fitte P.* Mathematiques pour la finance et l'assurance. Rouen: l'Univ. de Rouen, 2008.

Статья поступила 17.05.2017 г.

Shishkova A.A. (2018) CALCULATION OF ASIAN OPTIONS FOR THE BLACK–SCHOLES MODEL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 51. pp. 48–63

DOI 10.17223/19988621/51/5

Keywords: martingale, stochastic integral, financial strategy, Wiener process, hedging, option value.

AMS Mathematical Subject Classification: 60H10, 60G44, 60J65

The paper deals with one of fundamental problems of financial mathematics, namely, allocation of resources between financial assets to ensure sufficient payments.

When constructing mathematical models of the dynamics of financial indicators, various classes of random processes with discrete and continuous time are used. Therefore, the theory of martingales is a natural and useful mathematical tool in financial mathematics and engineering. In this paper, the Black–Scholes model is considered in continuous time with two financial assets

$$\begin{cases} B_t = 1, \\ dS_t = \sigma S_t dW_t, S_0 > 0. \end{cases}$$

The representation Theorem 1 of square integrable martingales is studied to calculate coefficients of the martingale representation. These coefficients allow further redistribution of the securities portfolio to obtain the greatest profit.

Theorem 1. Let $X = (x_t, F_t)_{0\le t\le T} \in \mathrm{M}_t$ and $W = (\mathrm{W}_t, F_t)_{0\le t\le T}$ be a Wiener process with respect to the natural filtration. Assume that a family of σ-algebras $(F_t)_{0\le t\le T}$ is right continuous. Then there exits a stochastic process $(\alpha(t,\omega), F_t)_{0\le t\le T}$ with $\mathrm{E}\int_0^T \alpha^2(\mathrm{t},\omega)dt < \infty$ such that for all $0 \le t \le T$,

$$x_t = x_0 + \int_0^t \alpha(s,\omega)dW_s. \quad (1)$$

$$\langle x, W\rangle_t = \int_0^t \alpha(s,\omega)ds. \quad (2)$$

Here, $\langle \bullet,\bullet\rangle_t$ is a mutual quadratic characteristic of processes.

The practical result of the research is the solution of the problem of constructing a hedging strategy. The option was used as the main financial instrument.

To construct a hedging strategy in the case of the model under consideration, we apply Theorem 1 to the martingale

$$M_t = \mathrm{E}(\mathrm{f}_T \mid F_t),$$

where $f_T = \left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K\right)_+$ is the payment function.

We found a quadratically integrable process $(\alpha_t)_{0\le t\le T}$ adapted with the filtration $(F_t)_{0\le t\le T}$ such that for all $t \in [0,T]$

$$M_t = M_0 + \int_0^t \alpha_s dW_s.$$

The strategy $\Pi = (\beta_t, \gamma_t)$ is calculated by the formulas

$$\beta_t = \mathrm{E}f_t + \int_0^t \alpha_s dW_s - \gamma_t S_t, \quad \gamma_t = \alpha_t / \sigma S_t.$$

SHISHKOVA Alena Andreevna (Tomsk State University , Tomsk, Russian Federation)
E-mail: Shishkova@sibmail.com

REFERENCES

1. Bachelier L. (1900) Théorie de la speculation. *Ann. École Norm. Sup.* 17. pp. 21–86 (Reprinted in Coothner, ed., 1967. The Random Character of Stock Market Prices. MIT Press, Cambridge, Mass. pp. 17–78).
2. Black F. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*. 81(3).
3. Merton R. (1973) Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*. 4(1).
4. Cox J.C., Ross R.A., Rubinstein M. (1979) Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*. 7. pp. 229–263.
5. Cox J.C., Rubinstein M. (1985) *Options Markets*. Englewood Cliffs N.J, Prentice – Hall.
6. Follmer H. (1990) Probabilistic aspects of options. *Preprint. Helsinki Univ*. January. 34 p.
7. Shiryaev A.N., Kabanov Yu.M., Kramkov D.O. and Mel'nikov A.V.. (1995) Toward the theory of pricing of options of both European and American Types. I Discrete time. *Theory Probab. Appl*. 39(1). pp.14–60. DOI 10.1137/1139002.
8. Shiryaev A.N., Kabanov Yu.M., Kramkov D.O. and Mel'nikov A.V. (1995) Toward the theory of pricing of options of both European and American Types. II Continuous time. *Theory Probab. Appl*. 39(1). pp.61–102. DOI 10.1127/1139003.
9. *Harrison J.M.*, *Kreps D.M.* (1979) Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*. 20. pp. 381–408.
10. Harrison J.M., Pliska S.R.(1981) Martingales, stochastic integrals and continuous trading. *Stoch. Processes Appl*. 11(3). pp. 215–260.
11. Karatzas I., Shreve S.E. (1988) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer – Verlag.
12. Pergamenchtchikov S. (2003) Limit theorem for Leland's strategy. *The Annals of Appl. Prob.* 13(3). pp.1099–1118.
13. Pergamenchtchikov S., Berdjane B. (2013) Optimal consumption and investment for markets with random coefficient. *Finance and Stochastic*. 17. pp. 419–446. DOI 10.1007/s00780.
14. Liptser R.S. and Shiryaev A.N. (2001) *Statistics of random processes.* 2nd rev. and exp. ed. Springer – Verlag, Berlin.
15. Janvresse E., Pergamenchtchikov S., Raynaud P. de Fitte (2008) *Mathematiques pour la finance et l'assurance*. Rouen: l'Univ. de Rouen.