ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2018 Теоретические основы прикладной дискретной математики № 39

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.157

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЯХ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ k ИЗ n СОБЫТИЙ

Ю. А. Зуев

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия

В произвольном вероятностном пространстве заданы n событий, каждое из которых имеет вероятность p. На корреляционные связи между событиями не накладывается каких-либо ограничений. Из множества n событий выбираются всевозможные подмножества из k событий, и для каждого подмножества рассматривается вероятность их совместного осуществления. Выбираются подмножество с минимальной вероятностью и подмножество с максимальной вероятностью. Получены точные границы, в которых лежит каждая из этих вероятностей.

Ключевые слова: *событие, вероятность, линейное программирование, оптимальный базис.*

DOI 10.17223/20710410/39/1

ON EXTREME JOINT PROBABILITIES OF k EVENTS CHOSEN FROM n EVENTS

Yu. A. Zuev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: 79851965730@yandex.ru

An arbitrary probability space with n events is considered. All events have the same probability p. No restrictions on correlations between the events are imposed and the events are considered simply as arbitrary subsets of measure p in the probability space. From the set of n events, all C_n^k subsets X consisting of k events are chosen, and for each such subset X the probability $\mathsf{P}(X)$ of joint implementation of its k events is considered. The subset with the minimum probability $\min\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ and the subset with the maximum probability $\max\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ are selected. In the paper, exact boundaries for both probabilities are obtained. For minimum probability:

$$\text{if } kp \leqslant k-1, \text{ then } \quad 0 \leqslant \min_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) \leqslant p;$$

$$\text{if } kp > k-1, \text{ then } \quad kp-k+1 \leqslant \min_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) \leqslant p.$$

For maximum probability:

$$\text{if } np < k-1, \text{ then} \quad 0 \leqslant \max_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) \leqslant p;$$

$$\text{if } k-1 \leqslant np < k, \text{ then} \quad \frac{np - \lfloor np \rfloor}{C_n^k} \leqslant \max_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) \leqslant p;$$

$$\text{if } k \leqslant np, \text{ then} \quad \frac{(\lfloor np \rfloor + 1 - np) C^k_{\lfloor np \rfloor} + (np - \lfloor np \rfloor) C^k_{\lfloor np \rfloor + 1}}{C_n^k} \leqslant \max_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) \leqslant p.$$

Keywords: *event, probability, linear programming, optimum base.*

Введение

С самого своего возникновения теория вероятностей была тесно связана с комбинаторикой. Впоследствии, когда теория вероятностей занялась изучением непрерывных процессов, эта связь ослабела. Сейчас, однако, она вновь окрепла. Развившийся в последние десятилетия *вероятностный метод* стал важным инструментом дискретной математики [1]. Если при становлении теории вероятностей элементарная комбинаторика была основным методом вычисления вероятностей, то теперь методами теории вероятностей в ряде случаев удаётся доказывать существование заданных комбинаторных объектов. Суть метода сводится к тому, что на множестве изучаемых объектов вводится некоторое вероятностное распределение, в простейшем случае равномерное, а затем доказывается, что вероятность объекта с заданными свойствами отлична от нуля. Это и является доказательством существования требуемого объекта, конструктивное построение которого может быть связано со значительными трудностями.

Вероятностный метод стимулировал новый интерес к конечным вероятностным пространствам. Вычисление вероятности одновременного осуществления k из n заданных на одном вероятностном пространстве событий с момента возникновения теории вероятностей было одной из её главных задач. В простейшем случае, когда события независимы и имеют одну и ту же вероятность p, вероятность осуществления ровно k событий задаётся формулой Бернулли $P(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ [2]. В случае наличия корреляций между событиями вероятности $P(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, могут быть найдены методом включения и исключения или оценены с помощью неравенств Бонферрони [3]. Для использования этих методов необходимо знание вероятностей совместного осуществления групп событий. Значительное число работ посвящено получению оценок, уточняющих неравенства Бонферрони. С обзорами этих исследований, дополненными собственными результатами авторов в этой области, можно ознакомиться по работам [4, 5].

Стоит также заметить, что ввиду того, что при использовании вероятностного метода в комбинаторных исследованиях особенную важность приобретает оценка $P(0)$ — вероятности того, что не осуществится ни одно из n событий, — здесь помимо уже перечисленных методов важную роль играет локальная лемма Ловаса, согласно которой $P(0) > 0$, если каждое из n событий зависит от не более чем d остальных событий и $pd < e^{-1}$ [1].

Задачи, рассматриваемые в настоящей работе, примыкают к перечисленным выше исследованиям и находятся в пограничной области между теорией вероятностей и дискретной математикой.

Пусть в произвольном вероятностном пространстве заданы n событий, каждое из которых имеет одну и ту же вероятность p. В случае независимости событий вероятность осуществления любых k из них одинакова и равна p^k. Постулат независимости является фундаментальным в теории вероятностей и кладётся в основу большинства вероятностных моделей [6]. Однако в большинстве практических задач, использующих вероятностные модели, условия независимости в лучшем случае могут выполняться лишь приближённо. Если требование независимости не выполняется и между событиями допускаются корреляционные связи, то вероятности совместного осуществления для различных групп из k событий могут быть различны. В этом случае можно ставить задачу выбора k событий с максимальной вероятностью совместного осуществления и задачу выбора k событий с минимальной вероятностью совместного осуществления. При этом возникает вопрос о том, в каком диапазоне могут лежать данные вероятности. Ответ на этот вопрос зависит от имеющихся между событиями корреляционных связей.

Без требования независимости и без наложения каких-либо фиксированных корреляционных связей события могут рассматриваться как произвольные подмножества меры p в множестве единичной меры, которым является всё вероятностное пространство. Если в таких условиях поставить задачу выбора группы из k событий с максимальной вероятностью совместного осуществления или из k событий с минимальной вероятностью совместного осуществления, то в каких пределах могут лежать эти вероятности? При этом рассматриваемая мощность групп k может быть любым числом от 2 до n. Такая постановка задачи представляется достаточно естественной и заслуживает внимания.

Получение интервалов, в которых лежат данные экстремальные вероятности, является темой настоящей работы. В рассматриваемой модели, в которой события являются произвольными подмножествами меры p, используемые в настоящей работе методы не принадлежат собственно теории вероятностей, а являются, по-существу, комбинаторно-мощностными методами дискретной математики.

Если X — произвольное подмножество из k событий, то через $\mathsf{P}(X)$ будем обозначать вероятность того, что все события из X осуществятся. Тогда рассматриваемые экстремальные вероятности для групп мощности k выразятся как $\max\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ и $\min\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$.

1. Границы для минимальной вероятности

Рассмотрим сначала вопрос о минимальной вероятности $\min\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$, который решается наиболее просто. Заметим, прежде всего, что верхняя граница для неё равна p. Она достигается, когда все n событий совпадают. Полностью же границы для $\min\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ задаются следующей теоремой.

Теорема 1. Для множества из n событий, каждое из которых имеет вероятность p, минимальная по всем подмножествам X из k событий ($2 \leqslant k \leqslant n$) вероятность $\min\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ совместного осуществления всех событий подмножества X лежит внутри следующих интервалов:

1) если $kp \leqslant k-1$, то $0 \leqslant \min\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) \leqslant p$;
2) если $kp > k-1$, то $kp-k+1 \leqslant \min\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) \leqslant p$.

Доказательство. Нижняя оценка, равная P, достигается в том случае, когда среди n событий имеется группа из k событий, таких, что вероятность их совместного осуществления есть P, а во всех остальных точках вероятностного пространства осуществляется ровно $k-1$ из этих событий. Тогда для вероятности P имеет место соотношение $(k-1)(1-P)+kP=kp$. Отсюда

$$P = kp - k + 1.$$

При $kp-k+1>0$ эта величина является нижней границей для $\min\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$. Если $kp-k+1 \leqslant 0$, то становится возможным случай, когда во всех точках вероятностного пространства осуществляется не более $k-1$ событий, и нижняя граница для $\min\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ оказывается равной нулю. ∎

Отметим, что интервалы, задаваемые теоремой 1, являются универсальными, т. е. для любого подмножества из k событий вероятность их совместного осуществления лежит в этих интервалах.

2. Границы для максимальной вероятности

Рассмотрим теперь вопрос о максимальной вероятности $\max\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$. Ясно, что верхняя граница для неё всегда равна p. Она достигается, когда имеется группа из k совпадающих событий. Однако нижние границы интервалов для неё поднимаются по сравнению с границами для $\min\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$. Полностью границы для $\max\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ описываются следующей теоремой.

Теорема 2. Для множества из n событий, каждое из которых имеет вероятность p, максимальная по всем подмножествам X из k событий ($2 \leqslant k \leqslant n$) вероятность $\max\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ совместного осуществления всех событий подмножества X лежит внутри следующих интервалов:

1) если $np < k-1$, то $0 \leqslant \max\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) \leqslant p$;

2) если $k-1 \leqslant np < k$, то $\dfrac{np - \lfloor np \rfloor}{C_n^k} \leqslant \max\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) \leqslant p$;

3) если $k \leqslant np$, то $\dfrac{(\lfloor np \rfloor + 1 - np) C^k_{\lfloor np \rfloor} + (np - \lfloor np \rfloor) C^k_{\lfloor np \rfloor + 1}}{C_n^k} \leqslant \max\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) \leqslant p$.

Доказательство.

1) Пусть $np \leqslant k-1$. Здесь возможен случай, когда в каждой точке вероятностного пространства осуществляется не более $k-1$ событий. Поэтому нижняя граница для $\max\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ равна нулю.

2) Пусть $k-1 \leqslant np < k$. Обозначим через $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ вероятности соответственно того, что не осуществится ни одного события, осуществится ровно одно событие, ровно два события и, наконец, ровно n событий. Тогда величины P_i должны удовлетворять следующим очевидным соотношениям:

$$\begin{cases} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n = 1, \\ P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + nP_n = np, \\ 0 \leqslant P_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{1}$$

Необходимое условие $P_i \leqslant 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, является следствием соотношений (1).

Сумма величин $\mathsf{P}(X)$ по всем подмножествам событий X мощности k может быть найдена как

$$\sum_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) = C_k^k P_k + C_{k+1}^k P_{k+1} + C_{k+2}^k P_{k+2} + \ldots + C_n^k P_n. \tag{2}$$

Теперь, если найти минимальное по всем возможным распределениям значение для величины $\sum_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$, то для величины $\max_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ будет справедливо

$$\max_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) \geqslant \frac{\min\left(\sum_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)\right)}{C_n^k}, \tag{3}$$

причём равенство достигается, когда значения вероятностей $\mathsf{P}(X)$ одинаковы для всех подмножеств X мощности k.

Таким образом, задача нахождения $\max_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ свелась к задаче нахождения минимума функционала (2) при ограничениях (1). Но эта последняя является типичной задачей линейного программирования, в которой соотношения (1) являются линейными ограничениями, а выражение (2) — минимизируемым линейным функционалом. В соответствии с основным положением линейного программирования минимальное значение этого функционала достигается на некотором базисном решении, когда не более двух из $n+1$ переменных $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ отличны от нуля [7].

Пусть $m = \lfloor np \rfloor$, т. е. m — такое натуральное число, что $m \leqslant np < m+1$. Покажем, что оптимальный базис образуют переменные P_m и P_{m+1}. Для этого выразим эти переменные из двух первых уравнений в (1) через остальные переменные. Имеем

$$\begin{cases} P_m \quad = m+1-np-(m+1)P_0 - mP_1 - (m-1)P_2 - \ldots \\ \qquad\quad - 2P_{m-1} + P_{m+2} + 2P_{m+3} + \ldots + (n-m-1)P_n, \\ P_{m+1} = np - m + mP_0 + (m-1)P_1 + (m-2)P_2 + \ldots \\ \qquad\quad + P_{m-1} - 2P_{m+2} - 3P_{m+3} - \ldots - (n-m)P_n. \end{cases} \tag{4}$$

Подставив выражения (4) для переменных P_m и P_{m+1} в линейный функционал (2), выразим этот функционал через остальные (небазисные) переменные. Заметив, что из $k-1 \leqslant np < k$ следует $k = m+1$, получаем

$$\begin{gathered} \sum_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) = C_k^k P_k + C_{k+1}^k P_{k+1} + \ldots + C_n^k P_n = C_{m+1}^{m+1} P_{m+1} + C_{m+2}^{m+1} P_{m+2} + \ldots + C_n^{m+1} P_n = \\ = np - m + mP_0 + (m-1)P_1 + (m-2)P_2 + \ldots + P_{m-1} - \\ -2P_{m+2} - 3P_{m+3} - \ldots - (n-m)P_n + C_{m+2}^{m+1} P_{m+2} + \ldots + C_n^{m+1} P_n = \\ = (np-m) + mP_0 + (m-1)P_1 + (m-2)P_2 + \ldots + P_{m-1} + \\ +(C_{m+2}^{m+1} - 2)P_{m+2} + (C_{m+3}^{m+1} - 3)P_{m+3} + \ldots + \left(C_n^{m+1} - (n-m)\right) P_n = \\ = np - m + \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)P_i + \sum_{i=m+2}^{n} \left(C_i^{m+1} - (i-m)\right) P_i. \end{gathered}$$

Покажем, что все стоящие в заключительном выражении перед величинами $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_{m+2}, \ldots, P_n$ коэффициенты положительны. Тем самым будет показано, что переменные P_m и P_{m+1} образуют оптимальный базис, минимизирующий значение функционала (2).

Коэффициент при P_i, где $0 \leqslant i \leqslant m-1$, равен $(m-i) > 0$.

Коэффициент при P_i, где $m+2 \leqslant i \leqslant n$, равен $C_i^{m+1} - (i-m) > 0$, так как $C_i^{m+1} \geqslant i$ при $i \geqslant m+2$.

Поэтому минимальное значение функционала достигается, когда все они равны нулю. При этом базисные переменные $P_m = m+1-np$, $P_{m+1} = np-m$. Этим показано, что переменные $P_m = m+1-np$ и $P_{m+1} = np-m$ образуют оптимальный базис, а минимальное значение функционала (2) равно $np-m = np-\lfloor np\rfloor$. Теперь из (3) вытекает нижняя оценка теоремы в п. 2.

3) Пусть, наконец, $k \leqslant np$. По-прежнему минимизируем линейный функционал (2) при ограничениях (1). Но теперь $k \leqslant \lfloor np\rfloor = m$. Выразив переменные P_m и P_{m+1} с помощью (4) через остальные переменные и подставив их в линейный функционал (2), получаем

$$\sum_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X) = C_k^k P_k + C_{k+1}^k P_{k+1} + \ldots + C_{m-1}^k P_{m-1} +$$
$$+ C_m^k P_m + C_{m+1}^k P_{m+1} + C_{m+2}^k P_{m+2} + \ldots + C_n^k P_n =$$
$$= C_k^k P_k + C_{k+1}^k P_{k+1} + \ldots + C_{m-1}^k P_{m-1} + C_m^k (m+1-np-(m+1)P_0 - mP_1 -$$
$$-(m-1)P_2 - \cdots - 2P_{m-1} + P_{m+2} + 2P_{m+3} + \ldots + (n-m-1)P_n) +$$
$$+ C_{m+1}^k (np - m + mP_0 + (m-1)P_1 + (m-2)P_2 + \ldots + P_{m-1} -$$
$$-2P_{m+2} - 3P_{m+3} - \ldots - (n-m)P_n) + \ldots + C_n^k P_n =$$
$$= (m+1-np)C_m^k + (np-m)C_{m+1}^k + (mC_{m+1}^k - (m+1)C_m^k)P_0 +$$
$$+((m-1)C_{m+1}^k - mC_m^k)P_1 + \ldots + ((m-k+1)C_{m+1}^k - (m-k)C_m^k))P_{k-1} +$$
$$+(C_k^k + (m-k)C_{m+1}^k - (m-k+1)C_m^k)P_k + \ldots + (C_{m-1}^k + C_{m+1}^k - 2C_m^k)P_{m-1} +$$
$$+(C_{m+2}^k - 2C_{m+1}^k + C_m^k)P_{m+2} + \ldots + (C_n^k - (n-m)C_{m+1}^k + (n-m-1)C_m^k)P_n =$$
$$= (m+1-np)C_m^k - (np-m)C_{m+1}^k + \sum_{i=0}^{k-1} \left((m-i)C_{m+1}^k - (m-i+1)C_m^k\right) P_i +$$
$$+ \sum_{i=k}^{m-1} \left(C_i^k + (m-i)C_{m+1}^k - (m-i+1)C_m^k\right) P_i + \sum_{i=m+2}^{n} \left(C_i^k - (i-m)C_{m+1}^k + (i-m-1)C_m^k\right) P_i.$$

Покажем, что все стоящие в заключительном выражении перед величинами P_0, P_1, $P_2, \ldots, P_{m-1}, P_{m+2}, \ldots, P_n$ коэффициенты положительны. Тем самым будет показано, что переменные $P_m = m+1-np$ и $P_{m+1} = np-m$ образуют оптимальный базис, минимизирующий значение функционала (2).

Коэффициент при P_i, где $0 \leqslant i \leqslant k-1$, равен

$$(m-i)C_{m+1}^k - (m-i+1)C_m^k = (m-i)(C_{m+1}^k - C_m^k) - C_m^k =$$
$$= (m-i)C_m^{k-1} - C_m^k = C_m^k \left(k\frac{m-i}{m-k+1} - 1\right) > 0,$$

так как $m-i \geqslant m-k+1$.

Коэффициент при P_i, где $k \leqslant i \leqslant m-1$, равен

$$C_i^k + (m-i)C_{m+1}^k - (m-i+1)C_m^k = C_i^k + (m-i)(C_{m+1}^k - C_m^k) - C_m^k =$$
$$= C_i^k + (m-i)C_m^{k-1} - C_m^k > 0.$$

Чтобы убедиться в справедливости последнего неравенства, рассмотрим систему из двух множеств $B \subset A$, где $|A| = m$, $|B| = i$. Подмножества множества A мощности k, которых C_m^k, или целиком состоят из элементов множества B, или содержат хотя бы один элемент из $A \setminus B$. Но последних подмножеств заведомо меньше чем $(m-i)C_m^{k-1}$, откуда и вытекает данное неравенство.

Коэффициент при P_i, где $m+2 \leqslant i \leqslant n$, равен

$$C_i^k - (i-m)C_{m+1}^k + (i-m-1)C_m^k = C_i^k - (i-m)(C_{m+1}^k - C_m^k) - C_m^k = \\ = C_i^k - (i-m)C_m^{k-1} - C_m^k > 0.$$

Чтобы убедиться в справедливости последнего неравенства, рассмотрим систему из двух множеств $B \subset A$, где $|A| = i$, $|B| = m$. Тогда $(i-m)C_m^{k-1} + C_m^k$ — это число k-элементных подмножеств множества A, имеющих не более одного элемента из множества $A \setminus B$, а C_i^k — полное число k-элементных подмножеств множества A.

Минимальное значение функционала (2), равное $(m+1-np)C_m^k + (np-m)C_{m+1}^k$, достигается, когда все переменные $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_{m+2}, \ldots, P_n$ равны нулю. Теперь из (3) вытекает нижняя оценка в п. 3. ∎

Заключение

Указанные в теоремах 1 и 2 интервалы возможных значений для $\max\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ и $\min\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ справедливы для любых распределений, дискретных или непрерывных. При этом в классе непрерывных распределений $\max\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ и $\min\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ могут принимать любое значение внутри этих интервалов.

Рассмотрим, например, случай 3 теоремы 2. Для множества событий $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ положим, что в каждой точке вероятностного пространства осуществляется либо ровно m событий, либо ровно $m+1$ событий, где $m = \lfloor np \rfloor$. При этом пусть вероятность осуществления любых m событий и неосуществления остальных $n-m$ равна $(m+1-np)/C_n^m$, а вероятность осуществления любых $m+1$ событий и неосуществления остальных $n-m-1$ равна $(np-m)/C_n^{m+1}$. Тогда вероятность осуществления каждого отдельного события оказывается, как и требуется, равной p, так как

$$C_{n-1}^{m-1}\frac{m+1-np}{C_n^m} + C_{n-1}^m\frac{np-m}{C_n^{m+1}} = \frac{(m+1-np)m}{n} + \frac{(np-m)(m+1)}{n} = p,$$

а вероятность осуществления любых k из n событий равна

$$C_{n-k}^{m-k}\frac{m+1-np}{C_n^m} + C_{n-k}^{m-k+1}\frac{np-m}{C_n^{m+1}} = \frac{(m+1-np)C_m^k + (np-m)C_{m+1}^k}{C_n^k},$$

т. е. величина $\max\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ достигает левой границы указанного в теореме интервала. Преобразуя вероятностное пространство с помощью непрерывного преобразования к виду, когда все n событий совпадают, можно получить для $\max\limits_{X:|X|=k} \mathsf{P}(X)$ все значения в интервале от $\left((m+1-np)C_m^k + (np-m)C_{m+1}^k\right)/C_n^k$ до p.

Приведённые оценки для экстремальных вероятностей осуществления k событий могут оказаться полезными в прикладных задачах, использующих вероятностные модели, в которых возможны любые корреляционные связи между событиями. Применённый при доказательстве теоремы 2 технический приём, основанный на сведении задачи к задаче линейного программирования, может быть использован в других подобного рода задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 313 с.

2. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. 11-е изд. М.: URSS, 2015. 448 с.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984. 527 с.
4. *Зубков А. М.* Неравенства для распределения числа одновременно происходящих событий // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1994. Т. 1. Вып. 4. С. 638–666.
5. *Фролов А. Н.* Об оценивании вероятностей объединений событий с приложениями к лемме Бореля — Кантелли // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2015. Т. 2(60). Вып. 3. С. 387–392.
6. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. 5-е изд. М.: URSS, 2016. 120 с.
7. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс, 1966. 600 с.

REFERENCES

1. *Alon N. and Spencer J. H.* The Probabilistic Method. N.Y., John Wiley and Sons, 2000. 313 p.
2. *Gnedenko B. V.* Kurs teorii veroyatnostey [The Course of Probability Theory]. Moscow, URSS, 2015. 448 p. (in Russian)
3. *Feller W.* An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. 1. N.Y., John Wiley and Sons, 1970. 527 p.
4. *Zubkov A. M.* Neravenstva dlya raspredeleniya chisla odnovremenno proiskhodyashchikh sobytiy [Inequalities for the distribution of the numer of simultaneosly occuring events]. Obozrenie Prikladnoi i Promyshlennoi Matematiki, 1994, vol. 1, iss. 4, pp. 638–666. (in Russian)
5. *Frolov A. N.* Ob otsenivanii veroyatnostey ob"edineniy sobytiy s prilozheniyami k lemme Borelya — Kantelli [On the evaluation of the probabilities of the unions of events with application to the Borel — Cantelli lemma]. Vestnik SPbGU, 2015, ser. 1, vol. 2(60), iss. 3, pp. 387–392. (in Russian)
6. *Kolmogorov A. N.* Osnovnye ponyatiya teorii veroyatnostey [The Fundamental Conceptions of Probability Theory]. Moscow, URSS, 2016. 120 p. (in Russian)
7. *Dantzig G. B.* Linear programming and extensions. Princeton, Princeton University Press, 1963.