ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 42

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.865.5
DOI: 10.17223/19988605/42/1

В.В. Домбровский, Т.Ю. Пашинская

ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С СЕРИАЛЬНО КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Рассматривается задача управления с прогнозированием по квадратичному критерию для нелинейных дискретных систем с сериально коррелированными параметрами. Синтезированы стратегии управления при наличии явных ограничений на управляющие воздействия. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии сводится к решению последовательности задач квадратичного программирования.
Ключевые слова: нелинейные стохастические системы; прогнозирующее управление; сериально коррелированные параметры; ограничения.

Системам со случайными параметрами уделяется значительное внимание в современной научной литературе. Это связано с тем, что такие системы нашли широкое практическое применение при управлении сложными реальными объектами.

Эффективным методом решения задач управления такими системами при наличии ограничений является метод управления с прогнозирующей моделью (управление со скользящим горизонтом, model predictive control, receding horizon control) [1–3]. В работах [4–8] синтезированы алгоритмы прогнозирующего управления линейными стохастическими системами со случайными параметрами при ограничениях на управления. При этом в [4] рассматриваются системы с мультипликативными шумами, в [5] предполагается, что динамика вектора параметров описывается разностным стохастическим уравнением авторегрессии, в работе [6] предполагается, что известны только первые и вторые моменты распределения сериально коррелированных параметров, в [7, 8] рассматривается задача управления системами со скачкообразными параметрами, меняющимися в соответствии с эволюцией дискретной марковской цепи. В работе [9] исследованы алгоритмы синтеза прогнозирующего управления для систем с запаздываниями.

Обзор литературы показывает, что большинство работ посвящено управлению линейными системами, в то время как многие реальные процессы описываются уравнениями, содержащими нелинейные компоненты [10]. Метод прогнозирующего управления с генерацией сценариев для стохастических нелинейных систем с независимыми параметрами рассматривается в [11]. В работе [12] синтезированы стратегии управления со скользящим горизонтом для класса стохастических систем с аддитивной нелинейностью без учета ограничений. При этом предполагается, что нелинейная составляющая системы зависит от состояний, управлений и вектора шумов [13]. В [14] рассматривается задача прогнозирующего управления для этого класса нелинейных систем при ограничениях на управляющие переменные. В работе [15] предложен метод синтеза стратегий прогнозирующего управления по квадратичному критерию при ограничениях для дискретных стохастических систем с марковскими переключениями, состоящих из конечного множества нелинейных подсистем с аддитивной нелинейностью.

В данной работе рассматривается задача синтеза стратегий управления с прогнозирующей моделью для дискретных нелинейных систем со случайными коррелированными параметрами. Относительно параметров предполагаются известными только первые и вторые условные моменты распределений. Синтезированы стратегии управления с прогнозированием по квадратичному критерию при наличии явных ограничений на управляющие переменные.

1. Постановка задачи

Пусть объект управления описывается уравнением

$$x(k+1) = Ax(k) + B[\eta(k+1), k+1]u(k) + f(x(k), u(k), w(k+1)), \tag{1}$$

где $x(k)$ – n_x-мерный вектор состояния, $u(k)$ – n_u-мерный вектор управления, $w(k)$ – вектор белых шумов размерности n_w с нулевым средним и единичной матрицей ковариации, $\eta(k)$ – последовательность q-мерных случайных векторов; последовательности $w(k)$ и $\eta(k)$ независимы; A, $B[\eta(k),k]$ – матрицы соответствующих размерностей, причем элементы матрицы $B[\eta(k),k]$ зависят от $\eta(k)$ линейно.

Характер нелинейной зависимости в функции f таков [13], что для любых $x(k)$

$$E\left\{ f(x(k),u(k),w(k+1))/x(k)\right\} = 0, \tag{2}$$

$$E\left\{ f(x(k),u(k),w(k+1))\, f^{\mathrm{T}}\left(x(k),u(k),w(k+1)\right)/x(k)\right\} = T^0 + \sum_{i=1}^{r} T^i \left(x^{\mathrm{T}}(k) W^i x(k) + u^{\mathrm{T}}(k) M^i u(k)\right), \tag{3}$$

где $E\{\ldots/\ldots\}$ – оператор условного математического ожидания; $r = n(n+1)/2$, T^i $(i=\overline{0,r})$, W^i и M^i $(i=\overline{1,r})$ – неотрицательно определенные симметричные матрицы.

Пусть $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_k)_{k\ge 1}$ – поток σ-алгебр, где каждая из σ-алгебр $\mathfrak{F}_k$ порождается последовательностью $\{\eta(s)$: $s = 0, 1, 2, \ldots, k\}$ и интерпретируется как доступная информация до момента времени k включительно.

Для процесса $\eta(k)$ предполагаются известными условные моменты распределений

$$E\left\{\eta(k+i)/\mathfrak{F}_k\right\} = \overline{\eta}(k+i),$$

$$E\left\{\eta(k+i)\eta^{\mathrm{T}}(k+j)/\mathfrak{F}_k\right\} = \Theta_{ij}(k), (k = 0,1,2,\ldots), (i, j = 0,1,2,\ldots,d).$$

В дальнейшем будем использовать обозначения: для любой матрицы $\psi[\eta(k),k]$, зависящей от $\eta(k)$, $\overline{\psi}(k) = E\left\{\psi[\eta(k),k]/\mathfrak{F}_k\right\}$, не указывая зависимость матриц от $\eta(k)$.

На управляющие воздействия наложены ограничения вида:

$$u_{\min}(k) \le S(k)u(k) \le u_{\max}(k), \tag{4}$$

где $S(k)$ – матрица соответствующей размерности.

Необходимо определить закон управления системой (1) при ограничениях (4) из условия минимума критерия со скользящим горизонтом управления

$$\begin{aligned} J(k+m/k) = E\{&\sum_{i=1}^{m} x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k+i)x(k+i) - R_2(k+i)x(k+i) + \\ &+u^{\mathrm{T}}(k+i-1/k)R(k+i-1)u(k+i-1/k)/x(k),\mathfrak{F}_k\}, \end{aligned} \tag{5}$$

где m – горизонт прогноза; k – текущий момент времени; $R_1(k+i) \ge 0$, $R(k+i) > 0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей; $R_2(k+i)$ – весовой вектор соответствующей размерности.

2. Синтез стратегий прогнозирующего управления

Для решения сформулированной задачи используем методологию управления с прогнозирующей моделью. Данный подход позволяет получить стратегии управления с обратной связью с учетом явных ограничений на управляющие воздействия.

Стратегии управления с прогнозированием определяются по следующему правилу. На каждом шаге k минимизируем функционал (5) по последовательности прогнозирующих управлений $u(k/k), \ldots,$ $u(k+m-1/k)$, зависящих от состояния системы в момент времени k. В качестве управления в момент времени k берем $u(k) = u(k/k)$. Тем самым получаем управление $u(k)$ как функцию состояний $x(k)$, т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента $k+1$ и т.д.

Теорема. Вектор прогнозирующих управлений $U(k)=[u^{\mathrm{T}}(k/k), \dots , u^{\mathrm{T}}(k + m - 1/k)]^{\mathrm{T}}$, минимизирующий критерий (5) при ограничениях вида (4), на каждом шаге k определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида

$$Y(k+m/k)=\left[2x^{\mathrm{T}}(k)G(k)-F(k)\right]U(k)+U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k)$$

при ограничениях

$$U_{\min}(k)\le \bar{S}(k)U(k)\le U_{\max}(k), \tag{6}$$

где

$$\bar{S}(k)=diag(S(k),\dots,S(k+m-1)),$$

$$U_{\min}(k)=\left[u_{\min}^{\mathrm{T}}(k),\dots,u_{\min}^{\mathrm{T}}(k+m-1)\right]^{\mathrm{T}}, U_{\max}(k)=\left[u_{\max}^{\mathrm{T}}(k),\dots,u_{\max}^{\mathrm{T}}(k+m-1)\right]^{\mathrm{T}},$$

$H(k)$, $G(k)$, $F(k)$ – блочные матрицы вида

$$H(k)=\begin{bmatrix} H_{11}(k) & H_{12}(k) & \cdots & H_{1m}(k)\\ H_{21}(k) & H_{22}(k) & \cdots & H_{2m}(k)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ H_{m1}(k) & H_{m2}(k) & \cdots & H_{mm}(k)\end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$G(k)=\begin{bmatrix}G_1(k) & G_2(k) & \cdots & G_m(k)\end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$F(k)=\begin{bmatrix}F_1(k) & F_2(k) & \cdots & F_m(k)\end{bmatrix}, \tag{9}$$

блоки которых равны:

$$H_{t,t}(k)=R(k+t-1)+E\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+t),k+t]Q(m-t)B[\eta(k+t),k+t]/\mathfrak{F}_k\}+\sum_{j=1}^{r}tr\left\{Q(m-t)T^{j}\right\}M^{j}, \tag{10}$$

$$H_{t,f}(k)=E\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+t),k+t](A^{f-t})^{\mathrm{T}}Q(m-f)B[\eta(k+f),k+f]/\mathfrak{F}_k\}, t<f, \tag{11}$$

$$H_{t,f}(k)=H_{f,t}^{\mathrm{T}}(k), t>f, \tag{12}$$

$$G_t(k)=\left(A^{t}\right)^{\mathrm{T}}Q(m-t)\bar{B}(k+t), \tag{13}$$

$$F_t(k)=Q_2(m-t)\bar{B}(k+t), t, f=\overline{1,m}, \tag{14}$$

где

$$Q(i)=A^{\mathrm{T}}Q(i-1)A+\sum_{j=1}^{r}tr\left\{Q(i-1)T^{j}\right\}W^{j}+R_1(k+m-i), Q(0)=R_1(k+m), \tag{15}$$

$$Q_2(i)=Q_2(i-1)A+R_2(k+m-i), Q_2(0)=R_2(k+m). \tag{16}$$

Закон управления с прогнозированием в каждый момент времени k определяется соотношением

$$u(k)=\begin{bmatrix}I_{n_u} & 0_{n_u} & \dots & 0_{n_u}\end{bmatrix}U(k), \tag{17}$$

где I_{n_u} – единичная матрица размерности n_u, 0_{n_u} – квадратная матрица с элементами, равными нулю, размерности n_u.

Оптимальная стратегия прогнозирующего управления системой (1) без учета ограничений определяется уравнением (17), где

$$U(k)=-\frac{1}{2}H^{-1}(k)[2G^{\mathrm{T}}(k)x(k)-F^{\mathrm{T}}(k)]. \tag{18}$$

При этом оптимальное значение критерия (5) определяется выражением

$$\begin{gathered} J^{opt}(k+m/k)=-\frac{1}{4}[2x^{\mathrm{T}}(k)G(k)-F(k)]H^{-1}(k)[2G^{\mathrm{T}}(k)x(k)-F^{\mathrm{T}}(k)]+\\ +x^{\mathrm{T}}(k)\left[Q(m)-R_1(k)\right]x(k)+Q_2(m-1)Ax(k)+\sum_{i=1}^{m}tr\left\{Q(i-1)T^{0}\right\}. \end{gathered} \tag{19}$$

Замечание. В силу линейной зависимости матриц от случайных параметров, условные математические ожидания в выражениях (10)–(14) можно вычислить без затруднений.

Доказательство. Критерий (5) можно записать следующим образом:

$$J(k+m/k) = E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+1)R_1(k+1)x(k+1) - R_2(k+1)x(k+1) + u^{\mathrm{T}}(k/k)R(k)u(k/k) +$$

$$+E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+2)R_1(k+2)x(k+2) - R_2(k+2)x(k+2) + u^{\mathrm{T}}(k+1/k)R(k+1)u(k+1/k) +$$

$$\ldots + E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+m)R_1(k+m)x(k+m) - R_2(k+m)x(k+m) +$$

$$+u^{\mathrm{T}}(k+m-1/k)R(k+m-1)u(k+m-1/k)/x(k+m-1),\mathfrak{F}_{k+m-1}\}/\ldots/x(k+1),\mathfrak{F}_{k+1}\}/x(k),\mathfrak{F}_k\}.$$

Введем обозначение

$$J_{k+s} = E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+s+1)R_1(k+s+1)x(k+s+1) - R_2(k+s+1)x(k+s+1) + u^{\mathrm{T}}(k+s/k)R(k+s)u(k+s/k) +$$

$$+E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+s+2)R_1(k+s+2)x(k+s+2) - R_2(k+s+2)x(k+s+2) + u^{\mathrm{T}}(k+s+1/k)R(k+s+1)u(k+s+1/k) + \ldots$$

$$+E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+m)R_1(k+m)x(k+m) - R_2(k+m)x(k+m) + u^{\mathrm{T}}(k+m-1/k)R(k+m-1)u(k+m-1/k)/$$

$$/x(k+m-1),\mathfrak{F}_{k+m-1}\}/\ldots/x(k+s+1),\mathfrak{F}_{k+s+1}\}/x(k+s),\mathfrak{F}_{k+s}\}.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} J_{k+s} = E\{&x^{\mathrm{T}}(k+s+1)R_1(k+s+1)x(k+s+1) - R_2(k+s+1)x(k+s+1) + \\ &+u^{\mathrm{T}}(k+s/k)R(k+s)u(k+s/k) + J_{k+s+1}/x(k+s),\mathfrak{F}_{k+s}\} \end{aligned} \qquad (20)$$

и

$$J(k+m/k) = J_k. \qquad (21)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} J_{k+m-1} = E\{&x^{\mathrm{T}}(k+m)R_1(k+m)x(k+m) - R_2(k+m)x(k+m) + \\ &+u^{\mathrm{T}}(k+m-1/k)R(k+m-1)u(k+m-1/k)/x(k+m-1),\mathfrak{F}_{k+m-1}\}. \end{aligned} \qquad (22)$$

Выражая $x(k+m)$ через $x(k+m-1)$ из (1), будем иметь

$$x(k+m) = Ax(k+m-1) + B[\eta(k+m),k+m]u(k+m-1) + f(x(k+m-1),u(k+m-1),w(k+m)). \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (22) и взяв условное математическое ожидание с учетом (2) и (3), получим

$$J_{k+m-1} = x^{\mathrm{T}}(k+m-1)\left[A^{\mathrm{T}}Q(0)A + \sum_{j=1}^{r} tr(Q(0)T^j)W^j\right]x(k+m-1) +$$

$$+2x^{\mathrm{T}}(k+m-1)A^{\mathrm{T}}Q(0)E\{B[\eta(k+m),k+m]/\mathfrak{F}_{k+m-1}\}u(k+m-1/k) +$$

$$+u^{\mathrm{T}}(k+m-1/k)[E\{B^{\mathrm{T}}(k+m)Q(0)B(k+m)/\mathfrak{F}_{k+m-1}\} + \sum_{j=1}^{r} tr\{Q(0)T^j\}M^j + R(k+m-1)]u(k+m-1/k) -$$

$$-Q_2(0)Ax(k+m-1) - Q_2(0)E\{B[\eta(k+m),k+m]/\mathfrak{F}_{k+m-1}\}u(k+m-1/k) + tr\{Q(0)T^0\},$$

где $Q(0) = R_1(k+m)$, $Q_2(0) = R_2(k+m)$.

Предположим далее, что для некоторого q верно:

$$J_{k+m-q} = x^{\mathrm{T}}(k+m-q)\left[A^{\mathrm{T}}Q(q-1)A + \sum_{j=1}^{r} tr\Big\{Q(q-1)T^j\Big\}W^j\right]x(k+m-q) + \qquad (24)$$

$$+2x^{\mathrm{T}}(k+m-q)A^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{q}(A^{\mathrm{T}})^{q-i}Q(i-1)E\{B[\eta(k+m-i+1),k+m-i+1]/\mathfrak{F}_{k+m-q}\}u(k+m-i/k) +$$

$$+\sum_{i=1}^{q}u^{\mathrm{T}}(k+m-i/k)[E\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-i+1),k+m-i+1]Q(i-1)B[\eta(k+m-i+1),k+m-i+1]/\mathfrak{F}_{k+m-q}\} +$$

$$+\sum_{j=1}^{r} tr\Big\{Q(i-1)T^j\Big\}M^j + R(k+m-i)]u(k+m-i/k) +$$

$$+2\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{l=i+1}^{q}u^{\mathrm{T}}(k+m-i/k)E\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-i+1),k+m-i+1]Q(i-1)\times$$

$$\times A^{l-i}B[\eta(k+m-l+1),k+m-l+1]/\mathfrak{F}_{k+m-q}\}u(k+m-l/k)+\sum_{i=1}^{q}tr\left\{Q(i-1)T^{0}\right\}-$$

$$-Q_2(q-1)Ax(k+m-q)-\sum_{i=1}^{q}Q_2(i-1)E\{B[\eta(k+m-i+1),k+m-i+1]/\mathfrak{F}_{k+m-q}\}u(k+m-i/k),$$

где $Q(i)$, $Q_2(i)$ определяются выражениями (15)–(16).

Покажем, что данная формула верна и для $q+1$. Действительно, из (20) следует, что

$$J_{k+m-(q+1)}=E\Big\{x^{\mathrm{T}}(k+m-q)R_1(k+m-q)x(k+m-q)-R_2(k+m-q)x(k+m-q)+$$

$$+u^{\mathrm{T}}(k+m-(q+1)/k)R(k+m-(q+1))u(k+m-(q+1)/k)+J_{k+m-q}/x(k+m-(q+1)),\mathfrak{F}_{k+m-(q+1)}\}. \quad (25)$$

Подставим в (25) вместо J_{k+m-q} его выражение из (24), вместо $x(k+m-q)$ его выражение через $x(k+m-(q+1))$, используя (23); возьмем условное математическое ожидание и, преобразовав выражение, получим, что

$$J_{k+m-(q+1)}=x^{\mathrm{T}}(k+m-(q+1))\left[A^{\mathrm{T}}Q(q)A+\sum_{j=1}^{r}tr\left\{Q(q)T^{j}\right\}W^{j}\right]x(k+m-(q+1))+ \quad (26)$$

$$+2x^{\mathrm{T}}(k+m-(q+1))A^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{q+1}(A^{\mathrm{T}})^{(q+1)-i}Q(i-1)E\{B[\eta(k+m-i+1),k+m-i+1]/\mathfrak{F}_{k+m-(q+1)}\}u(k+m-i/k)+$$

$$+\sum_{i=1}^{q+1}u^{\mathrm{T}}(k+m-i/k)[E\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-i+1),k+m-i+1]Q(i-1)B[\eta(k+m-i+1),k+m-i+1]/\mathfrak{F}_{k+m-(q+1)}\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{r}tr\left\{Q(i-1)T^{j}\right\}M^{j}+R(k+m-i)]u(k+m-i/k)+$$

$$+2\sum_{i=1}^{q}\sum_{l=i+1}^{q+1}u^{\mathrm{T}}(k+m-i/k)E\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-i+1),k+m-i+1]Q(i-1)\times$$

$$\times A^{l-i}B[\eta(k+m-l+1),k+m-l+1]/\mathfrak{F}_{k+m-(q+1)}\}u(k+m-l/k)+\sum_{i=1}^{q+1}tr\left\{Q(i-1)T^{0}\right\}-$$

$$-Q_2(q)Ax(k+m-(q+1))-\sum_{i=1}^{q+1}Q_2(i-1)E\{B[\eta(k+m-i+1),k+m-i+1]/\mathfrak{F}_{k+m-(q+1)}\}u(k+m-i/k).$$

Формула (26) совпадает с (24), если в (24) q заменить на $q+1$, а значит, согласно принципу математической индукции формула (24) верна для всех $q=\overline{1,m}$.

Из (24) и (21) следует, что

$$J(k+m/k)=x^{\mathrm{T}}(k)\left[A^{\mathrm{T}}Q(m-1)A+\sum_{j=1}^{r}tr\left\{Q(m-1)T^{j}\right\}W^{j}\right]x(k)+ \quad (27)$$

$$+2x^{\mathrm{T}}(k)A^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{m}(A^{\mathrm{T}})^{m-i}Q(i-1)\overline{B}(k+m-i+1)u(k+m-i/k)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+m-i/k)[E\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-i+1),k+m-i+1]Q(i-1)B[\eta(k+m-i+1),k+m-i+1]/\mathfrak{F}_{k}\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{r}tr\left\{Q(i-1)T^{j}\right\}M^{j}+R(k+m-i)]u(k+m-i/k)+$$

$$+2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{l=i+1}^{m}u^{\mathrm{T}}(k+m-i/k)E\{B^{\mathrm{T}}[\eta(k+m-i+1),k+m-i+1]Q(i-1)\times$$

$$\times A^{l-i}B[\eta(k+m-l+1),k+m-l+1]/\mathfrak{F}_{k}\}u(k+m-l/k)+\sum_{i=1}^{m}tr\left\{Q(i-1)T^{0}\right\}-$$

$$-Q_2(m-1)Ax(k)-\sum_{i=1}^{m}Q_2(i-1)\overline{B}(k+m-i+1)u(k+m-i/k).$$

Выражение (27) можно записать в матричном виде:

$$J(k+m/k) = x^{\mathrm{T}}(k)A^{\mathrm{T}}[Q(m) - R_1(k)]Ax(k) - Q_2(m-1)Ax(k) + \\ +[2x^{\mathrm{T}}(k)G(k) - F(k)]U(k) + U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k) + \sum_{i=1}^{m} tr\left\{Q(i-1)T^0\right\}, \quad (28)$$

где матрицы $H(k)$, $G(k)$, $F(k)$ имеют вид (7)–(14).

Таким образом, имеем задачу минимизации критерия (28) при ограничениях (6), которая эквивалентна задаче квадратичного программирования с критерием (5) при ограничениях (4).

Очевидно, что если ограничения на управляющие воздействия отсутствуют, то оптимальный вектор прогнозирующих управлений $U(k)$, минимизирующий критерий (28) на траекториях системы (1), определяется уравнением (18). Нетрудно показать, что при этом оптимальное значение критерия (28) имеет вид (19).

Заключение

В данной работе предложен метод синтеза стратегий прогнозирующего управления по квадратичному критерию для нелинейных дискретных систем с сериально коррелированными параметрами. Для синтеза стратегий управления достаточно знать только условные первые и вторые моменты распределений вектора случайных параметров. Данный подход позволяет в явном виде учесть ограничения на управления. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии включает решение последовательности задач квадратичного программирования. Синтезированы стратегии управления с учетом явных ограничений на управляющие воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mayne D.Q. Model predictive control: Recent developments and future promise // Automatica. 2014. V. 50 (12). P. 2967–2986.
2. Goodwin G.S., Carrasco D.C., Seron M.M. Predictive control: a historical perspective // Int. J. of Robust and Nonlinear Control. 2012. V. 22. P. 1296–1313.
3. Farina M., Giulioni L., Scattolini R. Stochastic linear model predictive control with chance constraints : a review // J. of Process Control. 2016. V. 44. P. 53–67.
4. Primbs J.A., Sung C.H. Stochastic receding horizon control of constrained linear systems with state and control multiplicative noise // IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. V. AC-54, No. 2. P. 221–230.
5. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2006. № 12. С. 71–85.
6. Dombrovskii V., Obyedko T. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization // Automatica. 2015. V. 54 (4). P. 325–331.
7. Смагин В.И., Поползухина Е.В. Синтез следящих систем управления для объектов со случайными скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 271. С. 171–174.
8. Домбровский В.В., Объедко Т.Ю. Управление с прогнозированием системами с марковскими скачками при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2011. № 5. С. 96–112.
9. Kiseleva M.Y., Smagin V.I. Model Predictive Control of Discrete Systems with State and Input Delays // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1 (14). С. 5–12.
10. Mhaskar P., El-Farra N.H., Christofides P.D. Robust hybrid predictive control of nonlinear systems // Automatica. 2005. V. 41. P. 209–217.
11. Kantas N., Maciejowski J.M., Lecchini-Visintini A. Sequential monte Carlo for model predictive control // Nonlinear Model Predictive Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences / L. Magni, D.M. Raimondo, F. Allgöwer (eds). Berlin, Heidelberg : Springer, 2009. V. 384. P. 263–273.
12. Yaz E. A control scheme for a class of discrete nonlinear stochastic systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1987. V. AC-32, No. 1. P. 77–80.
13. Jacobson D.H. A general result in stochastic optimal control of nonlinear discrete-time systems with quadratic performance criteria // J. of Mathematical Analysis and Applications. 1974. V. 47 (1). P. 153–161.
14. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием нелинейными стохастическими системами при ограничениях // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 18. С. 320–323.
15. Dombrovskii V., Obyedko T., Samorodova M. Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions // Automatica. 2018. V. 87 (1). P. 61–68. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.09.018.

Домбровский Владимир Валентинович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru
Томский государственный университет
Пашинская Татьяна Юрьевна, канд. физ.-мат. наук. E-mail: tatyana.obedko@mail.ru
Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 5 сентября 2017 г.

Dombrovskii Vladimir V., Pashinskaya Tatiana Y. (National Research Tomsk State University, Russian Federation).

Model predictive control for nonlinear stochastic systems with serially correlated parameters under constraints.

Keywords: stochastic nonlinear systems; model predictive control; serially correlated parameters; constrains.

DOI: 10.17223/19988605/42/1

Let the control object is described by the equation:

$$x(k+1) = Ax(k) + B[\eta(k+1), k+1]u(k) + f(x(k), u(k), w(k+1)), \tag{1}$$

where $x(k)$ is the n_x-dimensional vector of state; $u(k)$ is the n_u-dimensional vector of control; $w(k)$ is the n_w-dimensional vector of white noses with zero-mean and identity covariance matrix; $\eta(k)$ is the q-dimensional stochastic vector; $w(k)$ is independent of $\eta(k)$ (k = 0, 1, 2…); A, $B[\eta(k),k]$ are the matrices of corresponding dimensions. All of the elements of $B[\eta(k),k]$ are assumed to be linear functions of $\eta(k)$.

The function f is defined by its statistical properties as follows:

$$E\left\{ f(x(k),u(k),w(k+1))/x(k)\right\} = 0,$$

$$E\left\{ f(x(k),u(k),w(k+1))\, f^{\mathrm{T}}\left(x(k),u(k),w(k+1)\right)\Big/x(k)\right\} = T^0 + \sum_{i=1}^{r} T^i \left(x^{\mathrm{T}}(k)W^i x(k) + u^{\mathrm{T}}(k)M^i u(k)\right),$$

for all $x(k)$, where $r = n(n+1)/2$, T^i $(i=\overline{0,r})$, W^i and M^i $(i=\overline{1,r})$ are positive semidefinite and symmetric matrices.

Let $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_k)_{k\geq 1}$ be the complete filtration with σ-field $\mathfrak{F}_k$ generated by the $\{\eta(s)$: s = 0, 1, 2, …, $k\}$ that models the flow of information to the moment k.

We allow the parameters $\eta(k)$ to be serially correlated. Let us assume that we know the first- and second-order conditional moments for the stochastic vector $\eta(k)$ about $\mathfrak{F}_k$:

$$E\{\eta(k+i)/\mathfrak{F}_k\} = \overline{\eta}(k+i),$$

$$E\left\{\eta(k+i)\eta^{\mathrm{T}}(k+j)\Big/\mathfrak{F}_k\right\} = \Theta_{ij}(k), (k=0,1,2,...), (i,j=0,1,2,...,d).$$

We impose the following inequality constraints on the control inputs (element-wise inequality):

$$u_{\min}(k) \leq S(k)u(k) \leq u_{\max}(k), \tag{2}$$

where $S(k)$ is the matrix of corresponding dimension.

For control of system (1) we synthesize the strategies with a predictive control model. At each step k we minimize the quadratic criterion with a receding horizon

$$J(k+m/k) = E\{\sum_{i=1}^{m} x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k+i)x(k+i) - R_2(k+i)x(k+i) + u^{\mathrm{T}}(k+i-1/k)R(k+i-1)u(k+i-1/k)/x(k), \mathfrak{F}_k\},$$

on trajectories of system (1) over the sequence of predictive controls $u(k/k)$, …, $u(k+m-1/k)$ dependent on information up to moment k, under constraints (2), where $R_1(k+i) \geq 0$, $R(k+i) > 0$ are given symmetric weight matrices of corresponding dimensions, $R_2(k+i)$ is a given vector of corresponding dimension, m is the prediction horizon, k is the current moment. The synthesis of predictive control strategies is reduced to the sequence of quadratic programming tasks.

REFERENCES

1. Mayne, D.Q. (2014) Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*. 50. pp. 2967–2986. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.10.128
2. Goodwin, G.S., Carrasco, D.C. & Seron, M.M. (2012) Predictive control: a historical perspective. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 22. pp. 1296–1313. DOI: 10.1002/rnc.2824
3. Farina, M., Giulioni, L. & Scattolini, R. (2016) Stochastic linear model predictive control with chance constraints – A review. *Journal of Process Control*. 44. pp. 53–67. DOI: 10.1016/j.jprocont.2016.03.005
4. Primbs, J.A. & Sung, C.H. (2009) Stochastic receding horizon control of constrained linear systems with state and control multiplicative noise. *IEEE Transactions on Automatic Control.* AC-54(2). pp. 221–230. DOI: 10.1109/TAC.2008.2010886
5. Dombrovskii, V.V., Dombrovskii, D.V. & Lyashenko, E.A. (2006) Model predictive control of systems with random dependent parameters under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 67(12). pp. 1927–1939. DOI: 10.1134/S000511790612006X
6. Dombrovskii, V. & Obedko, T. (2015) Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization. *Automatica*. 54. pp. 325–331. DOI: 10.1016/j.automatica.2015.02.021

7. Smagin, V.I. & Popolzukhina, E.V. (2000) Synthesis tracking control systems for objects with random jump parameters and multiplicative disturbances. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 271. pp. 171–174. (In Russian).
8. Dombrovskii, V.V. & Obedko, T.Yu. (2011) Predictive control of systems with Markovian jumps under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 72(5). pp. 989–1003. DOI: 10.1134/S0005117911050079
9. Kiseleva, M.Y. & Smagin, V.I. (2011) Model Predictive Control of Discrete Systems with State and Input Delays. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 5–12.
10. Mhaskar, P., El-Farra, N.H. & Panagiotis, D.C. (2005) Robust hybrid predictive control of nonlinear systems. *Automatica*. 41. pp. 209–217. DOI: 10.1016/j.automatica.2004.08.020
11. Kantas, N., Maciejowski, J.M. & Lecchini-Visintini, A. (2009) Sequential monte Carlo for model predictive control. In: Magni, L., Raimondo, D.M. & Allgöwer, F. (eds) *Nonlinear Model Predictive Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences*. 384. Berlin, Heidelberg: Springer. pp. 263–273. DOI: 10.1007/978-3-642-01094-1_21
12. Yaz, E.A (1987) Control scheme for a class of discrete nonlinear stochastic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control.* AC-3 (1). pp. 77–80. DOI: 10.1109/TAC.1987.1104428
13. Jacobson, D.H. (1974) A general result in stochastic optimal control of nonlinear discrete-time systems with quadratic performance criteria. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 47(1). pp. 153–161. DOI: 10.1016/0022-247X(74)90043-2
14. Dombrovskii, V.V., Dombrovskii, D.V. & Lyashenko, E.A. (2006) Model predictive control for nonlinear stochastic systems under constraints. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal.* 18. pp. 320–323. (In Russian).
15. Dombrovskii, V., Obyedko, T. & Samorodova, M. (2018) Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions. *Automatica.* 87(1). pp. 61–68. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.09.018