ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 42

УДК 517.977
DOI: 10.17223/19988605/42/2

Т.Ф. Мамедова, К.Б. Мансимов

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СТУПЕНЧАТЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Рассматривается ступенчатая задача оптимального управления, описываемая дискретными двухпараметрическими системами типа Форназини–Маркезини. Установлено необходимое условие оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина и исследован особый случай.
Ключевые слова: ступенчатая система; дискретная двухпараметрическая система типа Форназини–Маркезини; необходимое условие оптимальности; особые управления.

В работах [1–8 и др.] изучаются различные аспекты задач оптимального управления системами, описываемых дискретными двухпараметрическими системами типа Форназини–Маркезини.

В предлагаемой работе исследуется одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая системой Форназини–Маркезини. Получен аналог дискретного принципа максимума. Исследован случай его вырождения (особый случай). Частный случай рассматриваемой задачи изучен в [9, 10 и др.].

1. Постановка задачи

Пусть требуется минимизировать функционал

$$S(u,v)=\varphi_1\left(z(t_1,X)\right)+\varphi_2\left(y(t_2,X)\right) \tag{1}$$

при ограничениях:

$$u(t,x)\in U\subset R^r,\quad (t,x)\in D_1=\{(t,x):\ t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1-1;\ x=x_0,x_0+1,\ldots,X-1\},$$

$$v(t,x)\in V\subset R^q,\ (t,x)\in D_2=\{(t,x):\ t=t_1,t_1+1,\ldots,t_2-1;\ x=x_0,x_0+1,\ldots,X-1\}, \tag{2}$$

$$z(t+1,x+1)=f(t,x,z(t,x),u(t,x)),\ (t,x)\in D_1, \tag{3}$$

$$z(t_0,x)=\alpha(x),\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,X,$$
$$z(t,x_0)=\beta_1(t),\ t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1, \tag{4}$$
$$\alpha(x_0)=\beta_1(t_0),$$

$$y(t+1,x+1)=g(t,x,y(t,x),v(t,x)),\quad (t,x)\in D_2, \tag{5}$$

$$y(t_1,x)=G\left(x,z(t_1,x)\right),\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,X,$$
$$y(t,x_0)=\beta_2(t),\ t=t_1,t_1+1,\ldots,t_2, \tag{6}$$
$$G\left(x_0,z(t_1,x_0)\right)=\beta_2(t_1).$$

Здесь $f(t,x,z,u)$, $(g(t,x,y,v))$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z (y) до второго порядка включительно; $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(y)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции; $\alpha(x)$, $\beta_i(t)$, $i=1,2$ – заданные дискретные вектор-функции соответствующих размерностей; $u(t,x)$ $(v(t,x))$ – r (q)-мерный вектор управляющих воздействий; U, V – заданные, непустые и ограниченные множества; $G(x,z)$ – заданная m-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z до второго порядка включительно; t_0, t_1, t_2, x_0, X – заданные числа, причем разности t_2-t_1 и $X-x_0$ есть натуральные числа.

Отметим, что ступенчатый характер модели заключается в скачкообразном изменении модели при переходе точки (t, x) из области D_1 в D_2.

Пару $(u(t, x), v(t, x))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Допустимое управление $(u(t, x), v(t, x))$, доставляющее минимум функционалу (1) при ограничениях (2)–(6), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t, x), v(t, x), z(t, x), y(t, x))$ – оптимальным процессом.

2. Формула для приращения критерия качества. Дискретный принцип максимума

Считая $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x), z^\circ(t, x), y^\circ(t, x))$ фиксированным допустимым процессом, введем обозначения:

$$H\left(t,x,z,u,\psi_1^{\mathrm{o}}\right)=\psi_1^{\mathrm{o}'} f\left(t,x,z,u\right),$$

$$M\left(t,x,y,v,\psi_2^{\mathrm{o}}\right)=\psi_2^{\mathrm{o}'} g\left(t,x,y,v\right).$$

Здесь ψ_i^{o}, $i=1,2$ – пока неизвестные *n*- и *m*-мерные вектор-функции соответственно.

Через $(\bar{u}(t,x)=u^\circ(t,x)+\Delta u(t,x),\ \bar{v}(t,x)=v^\circ(t,x)+\Delta v(t,x),\ \bar{z}(t,x)=z^\circ(t,x)+\Delta z(t,x),$ $\bar{y}(t,x)=y^\circ(t,x)+ +\Delta y(t,x))$, обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение функционала качества (1):

$$\Delta S(u^\circ,v^\circ)=S(\bar{u},\bar{v})-S(u^\circ,v^\circ)=[\varphi_1(\bar{z}(t_1,X))-\varphi_1(z^\circ(t_1,X))]+[\varphi_2(\bar{y}(t_2,X))-\varphi_2(y^\circ(t_2,X))]. \tag{7}$$

Ясно, что приращение $(\Delta z(t,x), \Delta y(t,x))$ состояния $(z^\circ(t,x), y^\circ(t,x))$ является решением краевой задачи

$$\Delta z(t+1,x+1)= f(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x))- f(t,x,z^\circ(t,x),u^\circ(t,x)), \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\Delta z(t_0,x)=0, \quad x=x_0,x_0+1,\ldots,X,\\ \Delta z(t,x_0)=0,\ t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\Delta y(t+1,x+1)=g(t,x,\bar{y}(t,x),\bar{v}(t,x))-g(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x)), \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\Delta y(t_1,x)=G(x,\bar{z}(t_1,x))-G(x,z^{\mathrm{o}}(t_1,x)),\ x=x_0,x_0+1,\ldots,X,\\ \Delta y(t,x_0)=0,\ t=t_1,t_1+1,\ldots,t_2.\end{gathered} \tag{11}$$

С учетом (8) и (10) будем иметь

$$\begin{gathered}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{\mathrm{o}'}(t,x)\Delta z(t+1,x+1)=\\ =\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[H\left(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)-H\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\right],\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{\mathrm{o}'}(t,x)\Delta y(t+1,x+1)=\\ =\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[M\left(t,x,\bar{y}(t,x),\bar{v}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)-M\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\right].\end{gathered} \tag{13}$$

Выполнив замену переменных $t+1=\tau$, $x+1=s$ получим

$$\begin{gathered}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{\mathrm{o}'}(t,x)\Delta z(t+1,x+1)=\sum_{t=t_0+1}^{t_1}\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_1^{\mathrm{o}'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)=\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_1^{\mathrm{o}'}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x)-\\ -\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_1^{\mathrm{o}'}(t_0-1,x-1)\Delta z(t_0,x)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_1^{\mathrm{o}'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)=\psi_1^{\mathrm{o}'}(t_1-1,X-1)\Delta z(t_1,X)-\\ -\psi_1^{\mathrm{o}'}(t_1-1,x_0-1)\Delta z(t_1,x_0)+\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{\mathrm{o}'}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1^{\mathrm{o}'}(t-1,X-1)\Delta z(t,X)-\end{gathered} \tag{14}$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1^{o'}(t-1,x_0-1)\Delta z(t,x_0)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x),$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o'}(t,x)\Delta y(t+1,x+1)=\sum_{t=t_1+1}^{t_2}\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_2^{o'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x)=\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_2^{o'}(t_2-1,x-1)\Delta y(t_2,x)-$$

$$-\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_2^{o'}(t_1-1,x-1)\Delta y(t_1,x)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_2^{o'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x)=\psi_2^{o'}(t_2-1,X-1)\Delta y(t_2,X)-$$

$$-\psi_2^{o'}(t_2-1,x_0-1)\Delta y(t_2,x_0)+\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o'}(t_2-1,x-1)\Delta y(t_2,x)-\psi_2^{o'}(t_1-1,X-1)\Delta y(t_1,X)+ \tag{15}$$

$$+\psi_2^{o'}(t_1-1,x_0-1)\Delta y(t_1,x_0)-\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o'}(t_1-1,x-1)\Delta y(t_1,x)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2^{o'}(t-1,X-1)\Delta y(t,X)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2^{o'}(t-1,x_0-1)\Delta y(t,x_0)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x).$$

Полагая

$$N(\psi_2^o,z,x)=\psi_2^{o'}(t_1-1,x-1)y(t_1,x)\equiv\psi_2^{o'}(t_1-1,x-1)G(x,z(t_1,x))$$

и учитывая тождества (14), (15), в (7) имеем

$$\Delta S(u^o,v^o)=\frac{\partial\varphi_1(z^o(t_1,X))}{\partial z}\Delta z(t_1,X)+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1(z^o(t_1,X))}{\partial z^2}\Delta z(t_1,X)+$$

$$+\frac{\partial\varphi_2(y^o(t_2,X))}{\partial y}\Delta y(t_2,X)+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2(y^o(t_2,X))}{\partial y^2}\Delta y(t_2,X)+\psi_1^{o'}(t_1-1,X-1)\Delta z(t_1,X)+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o'}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1^{o'}(t-1,X-1)\Delta z(t,X)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[H(t,x,z^o(t,x),\bar u(t,x),\psi^o(t,x))-H(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi^o(t,x))\Big]-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}H_z'(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi^o(t,x))\Delta z(t,x)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[H_z(t,x,z^o(t,x),\bar u(t,x),\psi^o(t,x))-H_z(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi^o(t,x))\Big]'\Delta z(t,x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x))\Delta z(t,x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta z'(t,x)\Big[H_{zz}(t,x,z^o(t,x),\bar u(t,x),\psi_1^o(t,x))-H_{zz}(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x))\Big]\Delta z(t,x)+$$

$$+o_1\left(\|\Delta z(t_1,X)\|^2\right)+o_2\left(\|\Delta y(t_2,X)\|^2\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}o_3\left(\|\Delta z(t,x)\|^2\right)+$$

$$+\psi_2^{o'}(t_2-1,X-1)\Delta y(t_2,X)-\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o'}(t_2-1,x-1)\Delta y(t_2,x)-N_z'(\psi_2^o,z^o,X)\Delta z(t_1,X)+$$

$$+\Delta z'(t_1,X)N_{zz}(\psi_2^o,z^o(t_1,X))\Delta z(t_1,X)-\sum_{x=x_0}^{X-1}N_z'(\psi_2^o,z^o(t_1,x),x)\Delta z(t_1,x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta z'(t_1,x)N_{zz}(\psi_2^o,z^o(t_1,x),x)\Delta z(t_1,x)-\sum_{x=x_0}^{X-1}o_4\left(\|\Delta z(t_1,x)\|^2\right)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2^{o'}(t-1,X-1)\Delta y(t,X)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x)- \tag{16}$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[M\big(t,x,y^{\circ}(t,x),\bar{v}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)-M\big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)\Big]-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[M_y\big(t,x,y^{\circ}(t,x),\bar{v}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)-M_y\big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)\Big]'\Delta y(t,x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta z'(t,x)M_{yy}\big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)\Delta y(t,x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta z'(t,x)\Big[M_{yy}\big(t,x,y^{\circ}(t,x),\bar{v}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)-M_{yy}\big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)\Big]\Delta y(t,x)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}o_5\left(\left\|\Delta y(t,x)\right\|^2\right)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}M_y'\big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)\Delta y(t,x).$$

Если предполагать, что $\big(\psi_1^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)$ является решением системы разностных уравнений

$$\psi_1^{\circ}(t-1,x-1)=H_z(t,x), \tag{17}$$

$$\psi_1^{\circ}(t_1-1,x-1)=G_z'\big(x,z^{\circ}(t_1,x)\big)\psi_1^{\circ}(t_1-1,x),$$

$$\psi_1^{\circ}(t-1,X-1)=0,$$

$$\psi_1^{\circ}(t_1-1,X-1)=-\frac{\partial\varphi_1\big(z^{\circ}(t_1,X)\big)}{\partial z}+G_z'\big(X,z^{\circ}(t_1,X)\big)\psi_2^{\circ}(t_1-1,X-1),$$

$$\psi_2^{\circ}(t-1,x-1)=M_y(t,x), \tag{18}$$

$$\psi_2^{\circ}(t-1,X-1)=0,$$

$$\psi_2^{\circ}(t_2-1,x-1)=0,$$

$$\psi_2^{\circ}(t_2-1,X-1)=-\frac{\partial\varphi_2\big(y^{\circ}(t_2,X)\big)}{\partial y},$$

то формула приращения (16) примет вид

$$\Delta S(u^{\circ},v^{\circ})=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[H\big(t,x,z^{\circ}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\big)-H\big(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\big)\Big]+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1\big(z^{\circ}(t_1,X)\big)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,X)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[H_z\big(t,x,z^{\circ}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi^{\circ}(t,x)\big)-H_z\big(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi^{\circ}(t,x)\big)\Big]'\Delta z(t,x)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\big(y^{\circ}(t_2,X)\big)}{\partial y^2}\Delta y(t_2,X)-\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)N_{zz}\big(\psi_2^{\circ},z^{\circ}(t_1,X),X\big)\Delta z(t_1,X)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[M\big(t,x,y^{\circ}(t,x),\bar{v}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)-M\big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)\Big]-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[M_y\big(t,x,y^{\circ}(t,x),\bar{v}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)-M_y\big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)\Big]'\Delta y(t,x)- \tag{19}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta y'(t,x)M_{yy}\big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\big)\Delta y(t,x)+o\left(\left\|\Delta z(t_1,X)\right\|^2\right)+$$

$$+o\left(\left\|\Delta y(t_2,X)\right\|^2\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}o\left(\left\|\Delta z(t,x)\right\|^2\right)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}o\left(\left\|\Delta y(t,x)\right\|^2\right)-o\left(\left\|\Delta y(t,x)\right\|^2\right).$$

Предположим, что множества

$$f\left(t,x,z^{o}(t,x),U\right)=\left\{\gamma_1:\ \gamma_1=f\left(t,x,z^{o}(t,x),u(t,x)\right),\ u(t,x)\in U,\ (t,x)\in D_1\right\},$$
$$g\left(t,x,y^{o}(t,x),V\right)=\left\{\gamma_2:\ \gamma_2=g\left(t,x,y^{o}(t,x),v(t,x)\right),\ v(t,x)\in V,\ (t,x)\in D_2\right\} \qquad (20)$$

выпуклы.

Пусть $\varepsilon\in[0,1]$ – произвольное число, а $u(t,x)\in U$, $(t,x)\in D_1$, $v(t,x)\in V$, $(t,x)\in D_2$ – произвольные допустимые управляющие функции. Используя произвольность допустимых управляющих функций $\bar{u}(t,x)$, $\bar{v}(t,x)$, вместо них возьмем допустимые управляющие функции $\bar{u}(t,x;\varepsilon)$, $\bar{v}(t,x;\varepsilon)$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения:

$$\bar{z}(t+1,x+1;\varepsilon)=\varepsilon f\left(t,x,\bar{z}(t,x;\varepsilon),u(t,x)\right)+(1-\varepsilon)f\left(t,x,\bar{z}(t,x;\varepsilon),u^{o}(t,x)\right)=$$
$$=f\left(t,x,\bar{z}(t,x;\varepsilon),\bar{u}(t,x;\varepsilon)\right), \qquad (21)$$

$$\bar{z}(t_0,x;\varepsilon)=\alpha(x),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,$$
$$\bar{z}(t,x_0;\varepsilon)=\beta_1(t),\quad t=t_0,t_0+1,\dots,t_1, \qquad (22)$$

$$\bar{y}(t+1,x+1;\varepsilon)=g\left(t,x,\bar{y}(t,x;\varepsilon),\bar{v}(t,x;\varepsilon)\right)\equiv$$
$$\equiv\varepsilon g\left(t,x,\bar{y}(t,x;\varepsilon),v(t,x)\right)+(1-\varepsilon)g\left(t,x,\bar{y}(t,x;\varepsilon),v^{o}(t,x)\right), \qquad (23)$$

$$\bar{z}(t_1,x;\varepsilon)=G\left(x,\bar{z}(t_1,x;\varepsilon)\right),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,$$
$$\bar{y}(t,x_0;\varepsilon)=\beta_2(t),\quad t=t_1,t_1+1,\dots,t_2. \qquad (24)$$

Введем обозначения

$$\alpha(t,x)=\left.\frac{\partial\bar{z}(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \qquad (25)$$

$$\beta(t,x)=\left.\frac{\partial\bar{y}(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}. \qquad (26)$$

Учитывая условия, наложенные на правые части уравнений (8), (10), получим, что

$$\bar{z}(t,x;\varepsilon)-z^{o}(t,x)=\Delta z_{\varepsilon}(t,x;\varepsilon)=\varepsilon\alpha(t,x)+o(\varepsilon;t,x), \qquad (27)$$

$$\bar{y}(t,x;\varepsilon)-y^{o}(t,x)=\Delta y_{\varepsilon}(t,x;\varepsilon)=\varepsilon\beta(t,x)+o(\varepsilon;t,x), \qquad (28)$$

где $\alpha(t,x)$ и $\beta(t,x)$ являются решениями краевых задач

$$\alpha(t+1,x+1)=\frac{\partial f\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x)\right)}{\partial z}\alpha(t,x)+\Delta_{u(t,x)}f\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x)\right), \qquad (29)$$

$$\alpha(t_0,x)=0,\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,$$
$$\alpha(t,x_0)=0,\quad t=t_0,t_0+1,\dots,t_1, \qquad (30)$$

$$\beta(t+1,x+1)=\frac{\partial g\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x)\right)}{\partial y}\beta(t,x)+\Delta_{v(t,x)}g\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x)\right), \qquad (31)$$

$$\beta(t_1,x)=G_z\left(x,z(t_1,x)\right)\alpha(t_1,x),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,$$
$$\beta(t,x_0)=0,\quad t=t_1,t_1+1,\dots,t_2. \qquad (32)$$

Учитывая разложения (27), (28), из формулы (19) получим

$$\Delta S_{\varepsilon}\left(u^{o}(t,x),v^{o}(t,x)\right)=S\left(\bar{u}(t,x;\varepsilon),v^{o}(t,x;\varepsilon)\right)-S\left(u^{o}(t,x),v^{o}(t,x)\right)=$$
$$=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[H\left(t,x,z^{o}(t,x),u(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)-H\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\right]-$$
$$-\varepsilon\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[M\left(t,x,y^{o}(t,x),v(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)-M\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\right]+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg[\alpha'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\alpha(t_1,X)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[\alpha'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi^{\circ}(t,x)\right)\alpha(t,x)+$$

$$+2\Delta_u H'_z\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi^{\circ}(t,x)\right)\alpha(t,x)\Big]\Bigg]+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg[\beta'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\beta(t_2,X)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\beta'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\times$$

$$\times\beta(t,x)+2\Delta_{v(t,x)}M'_y\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\ \beta(t,x)\Bigg]-$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\alpha'(t_1,X)N_{zz}\left(\psi_2^{\circ},z^{\circ}(t_1,X),X\right)\alpha(t_1,X)+o\left(\varepsilon^2\right). \tag{33}$$

Из разложения (33) в силу независимости и произвольности допустимых управлений $u(t,x)$ и $v(t,x)$ получаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Если множества (20) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $\left(u^{\circ}(t,x),\ v^{\circ}(t,x)\right)$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{u(t,x)}H\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\le 0\,, \tag{34}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{v(t,x)}M\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\le 0\,, \tag{35}$$

выполнялись для всех $u(t,x)\in U$, $(t,x)\in D_1$, $v(t,x)\in V$, $(t,x)\in D_2$ соответственно.

Пара соотношений (34), (35) является аналогом дискретного условия принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи.

3. Особый случай дискретного принципа максимума

Рассмотрим случай вырождения аналога дискретного условия максимума.

Определение. Допустимое управление $\left(u^{\circ}(t,x),\ v^{\circ}(t,x)\right)$ назовем особым в смысле принципа максимума Понтрягина управлением в задаче (1)–(6), если для всех $u(t,x)\in U$, $(t,x)\in D_1$, $v(t,x)\in V$, $(t,x)\in D_2$ выполняются соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{u(t,x)}H\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)=0\,, \tag{36}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{v(t,x)}M\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)=0\,. \tag{37}$$

Случай выполнения тождеств (36), (37) назовем особым случаем.

В особом случае из разложения (33) вытекает справедливость утверждения.

Теорема 2. При сделанных предположениях для оптимальности особого управления $\left(u^{\circ}(t,x),\ v^{\circ}(t,x)\right)$ необходимо, чтобы вдоль процесса $\left(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),z^{\circ}(t,x),y^{\circ}(t,x)\right)$ выполнялись неравенства

$$\alpha'(t_1,X)\left[\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}-N_{zz}\left(\psi_2^{\circ},z^{\circ}(t_1,X)\right)\right]\alpha(t_1,X)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[\alpha'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi^{\circ}(t,x)\right)\alpha(t,x)+ \tag{38}$$

$$+2\Delta_u H'_z\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi^{\circ}(t,x)\right)\alpha(t,x)\Big]-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\beta_1'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\beta_1(t,x)+\beta_1'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\beta_1(t_2,X)\geq 0,$$

где $\alpha(t,x)$ есть решение краевой задачи (29), (30), а $\beta_1(t,x)$ есть решение задачи

$$\beta_1(t+1,x+1)=g_y\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x)\right)\beta_1(t,x), \tag{39}$$

$$\beta_1(t_1,x)=G_z\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)\alpha(t_1,x), x=x_0,x_0+1,...,X,$$

$$\beta_1(t,x_0)=0, t=t_1,t_1+1,...,t_2, \tag{40}$$

$$\begin{gathered}\beta_2'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\beta_2(t_2,X)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[\beta_2'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\beta_2(t,x)+\\ +2\Delta_{v(t,x)}M_y'\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\beta_2(t,x)\Big]\geq 0,\end{gathered} \tag{41}$$

где $\beta_2(t,x)$ есть решение задачи

$$\beta_2(t+1,x+1)=g_z\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x)\right)\beta_2(t,x)+\Delta_{v(t,x)}g\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x)\right), \tag{42}$$

$$\beta_2(t_1,x)=0, x=x_0,x_0+1,...,X,$$

$$\beta_2(t,x_0)=0, t=t_1,t_1+1,...,t_2. \tag{43}$$

Неравенства (38), (41) являются неявными необходимыми условиями оптимальности особых управлений. Используя их, получим явное необходимое условие оптимальности.

Решение $\alpha(t,x)$ краевой задачи (29), (30) допускает представление [8]

$$\alpha(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t,x;\tau,s)\Delta_{u(\tau,s)}f\left(\tau,s,z^{\circ}(\tau,s),u^{\circ}(\tau,s)\right), \tag{44}$$

где $R_1(t,x;\tau,s)$ – $(n\times n)$матричная функция – решение задачи

$$R_1(t,x;\tau-1,s-1)=R(t,x;\tau,s)f_z\left(\tau,s,z^{\circ}(\tau,s),u^{\circ}(\tau,s)\right),$$

$$R_1(t,x;\tau-1,x-1)=0,$$

$$R_1(t,x;t-1,s-1)=0,$$

$$R_1(t,x;t-1,x-1)=E_1$$

(E_1 – $(n\times n)$ единичная матрица).

Через $R_2(t,x;\tau,s)$ обозначим $(m\times m)$ матричную функцию, являющуюся решением задачи

$$R_2(t,x;\tau-1,s-1)=R_2(t,x;\tau,s)g_y\left(\tau,s,y^{\circ}(\tau,s),v^{\circ}(\tau,s)\right),$$

$$R_2(t,x;\tau-1,x-1)=0,$$

$$R_2(t,x;t-1,s-1)=0,$$

$$R_2(t,x;t-1,x-1)=E_2$$

(E_2 – $(m\times m)$ единичная матрица).

Тогда решения задач (39)–(40) и (42), (43) допускают соответственно представления

$$\beta_1(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(t,x;\tau,s)\Delta_{u(\tau,s)}f\left(\tau,s,z^{\circ}(\tau,s),u^{\circ}(\tau,s)\right), \tag{45}$$

$$\beta_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\tau,s)\Delta_{u(\tau,s)}g\left(\tau,s,y^{\circ}(\tau,s),v^{\circ}(\tau,s)\right), \tag{46}$$

где $Q(t,x;\tau,s)$ определяется формулой

$$\begin{gathered}Q(t,x;\tau,s)=R_2(t,x;t_1-1,x-1)G_z\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)R_1(t_1,x;\tau,s)+\\ +\sum_{\beta=s+1}^{x-1}R_2(t,x;t_1-1,\beta-1)G_z\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)R_1(t_1,\beta;\tau,s).\end{gathered}$$

Используя представление (44), (45), получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\alpha'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)\alpha(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t,x;\tau,s)\Delta_{u(\tau,s)}f\left(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)\right)H_{zz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{\ell=t_0}^{t-1}\sum_{m=x_0}^{x-1}R(t,x;\ell,m)\Delta_{u(\ell,m)}f\left(\ell,m,z^{\mathrm{o}}(\ell,m),u^{\mathrm{o}}(\ell,m)\right)\right)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{x-1}\Delta_{u(\tau,s)}f'\left(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{t=\max(\tau,\ell)+1}^{t_1-1}\ \sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}R'(t,x;\tau,s)H_{zz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)R(t,x;\ell,m)\right\}\times \tag{47}$$

$$\times\Delta_{u(\ell,m)}f\left(\ell,m,z^{\mathrm{o}}(\ell,m),u^{\mathrm{o}}(\ell,m)\right),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{v(t,x)}H_z'\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\alpha(t,x)= \tag{48}$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left(\sum_{\tau=t+1}^{t_1-1}\ \sum_{s=x+1}^{X-1}\Delta_{u(\tau,s)}H_z\left(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s),\psi_1^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)R_1(\tau,s;t,x)\right)\Delta_{u(t,x)}f\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x)\right),$$

$$\alpha'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\alpha(t_1,X)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\Delta_{v(\tau,s)}f'\left(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)R_1(t,X;\tau,s)\times$$

$$\times\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}R_1(t_1,X;\ell,m)\Delta_{v(\ell,m)}f\left(\ell,m,z^{\mathrm{o}}(\ell,m),u^{\mathrm{o}}(\ell,m)\right), \tag{49}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\beta_1'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\beta_1(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_1(t,x;\tau,s)\Delta_{v(\tau,s)}f\left(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)\right)'M_{yy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\times \tag{50}$$

$$\times\left(\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{x-1}Q(t,x;\ell,m)\Delta_{u(\ell,m)}f\left(\ell,m,z^{\mathrm{o}}(\ell,m),u^{\mathrm{o}}(\ell,m)\right)\right)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\Delta_{u(\tau,s)}f'\left(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\ \sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}Q_1'(t,x;\tau,s)M_{yy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\right\}\Delta_{v(\ell,m)}f\left(\ell,m,z^{\mathrm{o}}(\ell,m),u^{\mathrm{o}}(\ell,m)\right),$$

$$\beta_1'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\beta_1(t_2,X)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\Delta_{v(\tau,s)}f'\left(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)Q'(t_2,X;\tau,s)\times$$

$$\times\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}Q(t_2,X;\ell,m)\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}Q(t_2,X;\ell,m)\Delta_{v(\ell,m)}f\left(\ell,m,z^{\mathrm{o}}(\ell,m),u^{\mathrm{o}}(\ell,m)\right). \tag{51}$$

Далее при помощи представления (46) получаем, что

$$\beta_2'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\beta_2(t_2,X)=\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_1}^{t_2-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\Delta_{v(\tau,s)}g'\left(\tau,s,y^{\mathrm{o}}(\tau,s),v^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)R_2'(t_2,X;\tau,s)\times$$

$$\times\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}R_2(t_2,X;\ell,m)\Delta_{v(\ell,m)}g\left(\ell,m,y^{\mathrm{o}}(\ell,m),v^{\mathrm{o}}(\ell,m)\right), \tag{52}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{v(t,x)}M_y'\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\beta_2(t,x)= \tag{53}$$

$$=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{\tau=t+1}^{t_2-1}\sum_{s=x+1}^{X-1}\Delta_{v(\tau,s)}M_y'\left(\tau,s,y^o(\tau,s),v^o(\tau,s),\psi_2^o(\tau,s)\right)R_2(\tau,s;t,x)\right]\Delta_{v(t,x)}g\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x)\right),$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\beta_2'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\beta_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_1}^{t_2-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\Delta_{v(\tau,s)}g'\left(\tau,s,y^o(\tau,s),v^o(\tau,s)\right)\times$$
$$\times\left\{\sum_{t=\max(\tau,\ell)+1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}R_2'(t,x;\tau,s)M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)R_2(t,x;\ell,m)\right\}\times \tag{54}$$
$$\times\Delta_{v(\ell,m)}g\left(\ell,m,y^o(\ell,m),v^o(\ell,m)\right).$$

Введем матричные функции $K(\tau,s,\ell,m)$, $L(\tau,s,\ell,m)$:

$$K(\tau,s,\ell,m)=\sum_{t=\max(\tau,\ell)+1}^{t_1-1}\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}R_1'(t,x;\tau,s)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)R(t,x;\ell,m)-$$
$$-R_1'(t_1,X;\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^o(t_1,X)\right)}{\partial z^2}R_1(t_1,X;\ell,m)+$$
$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}Q_1'(t,x;\tau,s)M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)-$$
$$-Q'(t_2,X;\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2,X)\right)}{\partial y^2}Q(t_2,X;\ell,m),$$

$$L(\tau,s,\ell,m)=-R_2'(t_2,X;\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2,X)\right)}{\partial y^2}R_2(t_2,X;\ell,m)+$$
$$+\sum_{t=\max(\tau,\ell)+1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}R_2'(t_2,X;\tau,s)M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)R_2(t_2,X;\ell,m).$$

Учитывая тождества (47)–(54) и выражения для $K(\tau,s,\ell,m)$, $L(\tau,s,\ell,m)$ неравенства (38), (39) записывается в виде:

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\Delta_{u(\tau,s)}f'\left(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s)\right)K(\tau,s,\ell,m)\Delta_{v(\ell,m)}f\left(\ell,m,z^o(\ell,m),u^o(\ell,m)\right)+ \tag{55}$$
$$+2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{\tau=t+1}^{t_1-1}\sum_{s=x+1}^{X-1}\Delta_{u(\tau,s)}H_z'\left(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s),\psi_1^o(\tau,s)\right)R_1(\tau,s;t,x)\right]\Delta_{u(t,x)}f\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x)\right)\le 0,$$

$$\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_1}^{t_2-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\Delta_{v(\tau,s)}g'\left(\tau,s,y^o(\tau,s),v^o(\tau,s)\right)L(\tau,s,\ell,m)\Delta_{v(\ell,m)}g\left(\ell,m,y^o(\ell,m),v^o(\ell,m)\right)+$$
$$+2\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{\tau=t+1}^{t_2-1}\sum_{s=x+1}^{X-1}\Delta_{v(\tau,s)}M_y'\left(\tau,s,y^o(\tau,s),v^o(\tau,s),\psi_2^o(\tau,s)\right)R_2(\tau,s;t,x)\right]\times \tag{56}$$
$$\times\Delta_{v(t,x)}g\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x)\right)\le 0.$$

Теорема 3. Пусть множества (20) выпуклы. Тогда для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $\left(u^o(t,x),\,v^o(t,x)\right)$ необходимо, чтобы неравенства (55), (56) выполнялись для всех $u(t,x)\in U$, $(t,x)\in D_1$, $v(t,x)\in V$, $(t,x)\in D_2$ соответственно.

Заключение

В статье изучается одна дискретная двухпараметрическая задача оптимального управления, описываемая системой Форназини–Маркензини. При помощи метода приращений доказаны необходимые условия оптимальности в форме дискретного принципа максимума. Исследован случай вырождения дискретного условия максимума. Установлено необходимое условие оптимальности особых управлений.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания, способствующие улучшению первоначального варианта статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fornazini E., Marchesini G. State-space realization theory of two-dimensional filters // IEEE Trans. Automat. Contr. 1976. V. AC–21, No. 4. P. 484-492.
2. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. Berlin, 1985.
3. Гайшун И.В., Хоанг Ван Куанг. Условия полной управляемости дискретных двухпараметрических систем // Дифференциальные уравнения. 1991. № 2. С. 187–193.
4. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Минск : Изд-во ИМ НАН Беларуси, 1996. 200 с.
5. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах // Доклады АН СССР. 1967. Т. 175, № 1. С. 17–19.
6. Васильев О.В. К оптимальным процессам в непрерывных и дискретных двухпараметрических системах // Информационный сборник трудов ВЦ Иркутского госуниверситета. Иркутск, 1968. Вып. 2. С. 87–104.
7. Степанюк Н.Н. Некоторые задачи управляемости и наблюдаемости двухпараметрических дискретных систем // Дифференциальные уравнения. 1978. № 12. С. 2190–2195.
8. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку : Изд-во Бакинск. гос. ун-та, 2013. 151 с.
9. Мансимов К.Б., Насияти М.М. Необходимые условия оптимальности в одной многоэтапной дискретной задаче управления // Математическое и компьютерное моделирование. 2011. Вып. 5. С. 162–179.
10. Насияти М.М. Условия оптимальности в ступенчатых дискретных двухпараметрических задачах управления : автореф. дис. … д-ра филос. по математике. Баку, 2015. 22 с.
11. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2010. 362 с.

Мамедова Туркан Фарман кызы. E-mail:kmansimov@mail.ru
Институт систем управления НАН Азербайджана.
Мансимов Камил Байрамали оглы, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: kamilbmansimov@gmail.com
Бакинский государственный университет (Азербайджан).

Поступила в редакцию 1 октября 2017 г.

Mammadova Turkan F. (Institute of Control Systems of NAS Azerbaijan, Baku, Azerbaijan).
Mansimov Kamil Bayramali (Baku State University, Azerbaijan).

On optimality of singular controls in control problem of the step discrete two-parametric systems.

Keywords: step system; Fornasini-Marchesini type discrete two-parameter system; necessary optimality condition; special controls.

DOI: 10.17223/19988605/42/2

Let be required to minimize the functional

$$S(u,v)=\varphi_1\left(z(t_1,X)\right)+\varphi_2\left(y(t_2,X)\right), \tag{1}$$

with constraints

$$u(t,x)\in U\subset R^r,\quad (t,x)\in D_1=\{(t,x):\ t=t_0,t_0+1,...,t_1-1;\ x=x_0,x_0+1,...,X-1\},$$
$$v(t,x)\in V\subset R^q,\quad (t,x)\in D_2=\{(t,x):\ t=t_1,t_1+1,...,t_2-1;\ x=x_0,x_0+1,...,X-1\}, \tag{2}$$

$$z(t+1,x+1)=f\left(t,x,z(t,x),u(t,x)\right),\quad (t,x)\in D_1, \tag{3}$$

$$z(t_0,x)=\alpha(x),\quad x=x_0,x_0+1,...,X,$$
$$z(t,x_0)=\beta_1(t),\ t=t_0,t_0+1,...,t_1, \tag{4}$$
$$\alpha(x_0)=\beta_1(t_0),$$

$$y(t+1,x+1)=g\left(t,x,y(t,x),v(t,x)\right),\quad (t,x)\in D_2, \tag{5}$$

$$y(t_1,x)=G\left(x,z(t_1,x)\right),\quad x=x_0,x_0+1,...,X,$$
$$y(t,x_0)=\beta_2(t),\ t=t_1,t_1+1,...,t_2, \tag{6}$$
$$G\left(x_0,z(t_1,x_0)\right)=\beta_2(t_1).$$

Here $f(t,x,z,u)$, $(g(t,x,y,v))$ is a given *n* (*m*)-dimensional vector function that is continuous with respect to the set of variables together with its partial derivatives with respect to *z* (*y*) up to the second order inclusive, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(y)$ are given twice continuously differentiable scalar functions, $\alpha(x)$, $\beta_i(t)$, $i=1,2$ are given discrete vector-valued functions of corresponding dimensions, $u(t,x)$ $(v(t,x))$ is *r* (*q*)-dimensional control actions vector, *U*, *V* are given non-empty and bounded sets, $G(x,z)$ is a given *m*-dimensional vector-valued function continuous with respect to the set of variables together with its partial derivatives with respect z up to second order inclusive, t_0, t_1, t_2, x_0, X are given numbers, and the differences $t_2 - t_0$ and $X - x_0$ are integers.

The first order necessary optimality conditions of the Pontryagin maximum principle type is established and singular case is investigated.

REFERENCES

1. Fornazini, E. & Marchesini, G. (1976) State-space realization theory of two-dimensional filters. *IEEE Transactions on Automatic Control.* AC-21(4). pp. 484–492.
2. Kaczorek, T. (1985) *Two-dimensional linear systems*. Berlin: Springer.
3. Gayshun, I.B. & Xoang, Van Kuang (1991) Conditions for complete controllability of discrete two-parameter systems. *Differential Equations.* 27(2). pp. 187–193. (In Russian).
4. Gayshun, I.B. (1996) *Mnogoparametricheskie sistemy upravleniya* [Multiparameter control systems]. Minsk: IM NAS of Belarus. (In Russian).
5. Vasilyev, O.B. & Kirillova, F.M. (1967) Ob optimal'nykh protsessakh v dvukhparametricheskikh diskretnykh sistemakh [On Optimal Processes in Two-Parameter Discrete Systems]. *Dokl. Academy of Sciences of the USSR.* 175(1). pp. 17–19. (In Russian).
6. Vasilyev, O.B. (1968) K optimal'nym protsessam v nepreryvnykh i diskretnykh dvukhparametricheskikh sistemakh [To optimal processes in continuous and discrete two-parameter systems]. *Informatsionnyy sbornik trudov VTs Irkutskogo gosuniversiteta*. 2. pp. 87–104.
7. Stepanyuk, N.N. (1978) Some problems of controllability and observability of two-parameter discrete systems. *Differential Equations*. 12. pp. 2190–2195. (In Russian).
8. Mansimov, K.B. (2013) *Diskretnye sistemy* [Discrete systems]. Baku: BSU.
9. Mansimov, K.B. & Nasiyati, M.M. (2011) Necessary conditions of optimality in a discrete multi-stage control problem. *Matematichne ta komp'yuterne modelyuvannya – Mathematical and Computer Modeling.* 5. pp. 162–179. (In Russian).
10. Nasiyati, M.M. (2015) *Usloviya optimal'nosti v stupenchatykh diskretnykh dvukhparametricheskikh zadachakh upravleniya* [Optimality conditions in stepwise discrete two-parameter control problems]. Abstract of PhD in Mathematics.
11. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.Dzh. (2013) *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa–Darbu* [Qualitative theory of optimal control of the Goursat-Darboux systems]. Baku: ELM.