ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 42

УДК 658.512
DOI: 10.17223/19988605/42/3

Ю.И. Параев, Т.И. Грекова, К.О. Полуэктова

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКОЙ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ ФОНДОВООРУЖЕННОСТИ ТРУДА

Рассматривается задача оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении фондовооруженности труда. В качестве критерия оптимальности выбирается максимум среднего значения непроизводственного потребления на заданном периоде производства. Решение проводится с помощью метода динамического программирования.
Ключевые слова: односекторная экономика; фондовооруженность труда; непроизводственное потребление; оптимальное управление; динамическое программирование.

Проблема управления односекторной экономикой восходит к [1, 2]. Ей посвящено большое количество работ, в которых рассматриваются и решаются разные варианты задач, в том числе и задачи оптимального управления такой экономикой (например, [3–6]). Естественным продолжением этих исследований является решение задач с учетом каких-либо случайных возмущений, действующих в процессе производства. Состояние односекторной экономики определяется двумя величинами: $K(t)$ – основной капитал и $L(t)$ – трудовые ресурсы. Вообще говоря, изменение основного капитала во времени происходит случайным образом из-за таких факторов, как случайный износ основных производственных фондов, приобретение новых фондов, цена на которые зависит от курса валют, производственная неопределенность, экономическая конъюнктура и т.п. Если основной капитал изменяется случайным образом, то фондовооруженность труда $k = K/L$ и непроизводственное потребление $c = C/L$, приходящиеся на одного работника, также будут изменяться случайным образом. В [7] на основании изучения статистических данных приводится определенное обоснование того, что влияние экзогенных случайных факторов на экономическую динамику можно моделировать процессом броуновского движения.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении фондовооруженности труда. В качестве критерия оптимальности выбирается максимум среднего значения непроизводственного потребления на заданном периоде производства. Решение задачи проводится с помощью метода динамического программирования.

1. Постановка задачи

Состояние экономики характеризуется двумя величинами: фондовооруженностью труда $k(t)$ и непроизводственным потреблением $c(t)$, приходящимися на одного работника, а также производственной функцией $F(k)$ – валовым продуктом, произведенным в единицу времени. В детерминированном случае эти переменные удовлетворяют уравнениям

$$\dot{k} = uF - \mu k, \quad k(0) = k_0, \tag{1}$$

$$\dot{c} = \delta c + (1-u)F, \quad c(0) = 0, \tag{2}$$

где μ – коэффициент амортизации, δ – норма дисконтирования ($\mu \geq 0$, $\delta \geq 0$), uF – часть продукта, которая идет на увеличение основного капитала, $(1 - u)F$ – часть продукта, которая идет на увеличение непроизводственного потребления. Таким образом, в задаче управляющим параметром является коэффициент u, который должен удовлетворять условию

$$0 \leq u \leq 1. \tag{3}$$

Далее используется производственная функция Кобба–Дугласа, т.е. $F(k) = Ak^{\alpha}$, где A – масштаб темпа производства ($A > 0$), α – коэффициент эластичности по основным фондам. Предполагается, что планируемый период производства $[0, T]$ задан и достаточно велик. Согласно (2) общее непроизводственное потребление на интервале $[0, T]$ при заданном управлении u равно

$$c(T) = \int_0^T e^{\delta(T-t)}(1-u)F(k)dt. \tag{4}$$

Детерминированная задача: в течение интервала времени $[0, T]$ найти такое управление $u(t)$ с учетом (3), при котором функционал (4) достигает максимума. Эта задача с помощью принципа максимума Понтрягина подробно решена в [8].

В [7] предложено учет случайных воздействий на фондовооруженность труда представить в виде уравнения

$$\dot{k} = uF - \mu k + \sigma k\xi(t), \quad k(0) = k_0, \tag{5}$$

где $\xi(t)$ – стандартный белый гауссовский шум (или $\xi(t) = d\omega(t)/dt$, где $\omega(t)$ – винеровский процесс), σ – коэффициент волатильности. Таким образом, процесс $k(t)$ становится случайным. Однако этот процесс измеряется, т.е. в каждый момент времени t значение $k(t)$ известно.

Стохастическая задача: в течение интервала времени $[0, T]$ найти такое управление $u(t)$ для (2) и (5) с учетом (3), при котором среднее значение функционала (4) максимально. В статье задача решается с помощью метода динамического программирования [9].

2. Решение стохастической задачи

Согласно методу динамического программирования, введем функцию Беллмана

$$s(k;t,T) = \max_{u[t,T]} M\left\{\int_t^T e^{\delta(T-t)}(1-u)F(k)dt \middle| k,t\right\}$$

– среднее значение величины $c(T)$ при условии, что процесс продолжается на интервале времени $[t, T]$ с начальным условием $k(t) = k$ и на этом интервале применяется оптимальное управление. Для этой функции можно записать уравнение Беллмана:

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial s(k;t,T)}{\partial t} = \max_{0\le u(t)\le 1}\left\{\frac{\partial s(k;t,T)}{\partial k}(uF(k)-\mu k) + e^{\delta(T-t)}(1-u)F(k) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2\frac{\partial^2 s(k;t,T)}{\partial k^2}\right\} = \\
= \max_{0\le u(t)\le 1}\left\{uF(k)\left(\frac{\partial s(k;t,T)}{\partial k} - e^{\delta(T-t)}\right) - \mu k\frac{\partial s(k;t,T)}{\partial k} + e^{\delta(T-t)}F(k) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2\frac{\partial^2 s(k;t,T)}{\partial k^2}\right\}, \\
s(k;T,T) = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Из решения этого уравнения получается решение стохастической задачи. Здесь k – аргумент функции $s(k;t,T)$, а не случайный процесс, определяемый уравнением (5).

Если взять детерминированную задачу и решать ее с помощью динамического программирования, то приходим к уравнению (6) при $\sigma = 0$. Но поскольку решения с помощью принципа максимума и динамического программирования эквивалентны, то решение уравнения (6) при $\sigma = 0$ должно совпадать с решением, полученным в [8]. Это решение состоит в том, что интервал $[0, T]$ точками t_1 и t_2 ($0 < t_1 < t_2 < T$) разбивается на три интервала: $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ и $[t_2, T]$. Интервал $[0, t_1]$ соответствует выходу на магистраль, интервал $[t_1, t_2]$ – магистрали (если она существует), интервал $[t_2, T]$ – заключительному этапу (сходу с магистрали). На магистрали $k = k_{oc} = const$, причем

$$k_{oc}^{\beta} = \frac{\alpha A}{\delta+\mu}, \quad u_{oc} = \frac{\mu k_{oc}}{F(k_{oc})}, \tag{7}$$

где $\beta = 1 - \alpha$. Далее рассматривается основной вариант, когда $k(0) < k_{oc}$ и на интервале $[0, t_1]$ $u = 1$.

На заключительном интервале $[t_2, T]$ $u = 0$. Таким образом, структура оптимального управления для детерминированной задачи имеет вид:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 < t < t_1, \\ u_{oc} & \text{при} \quad t_1 < t < t_2, \\ 0 & \text{при} \quad t_2 < t < T. \end{cases} \tag{8}$$

Получается, что решение задачи сводится к нахождению моментов t_1 и t_2.

Можно предположить, что в стохастическом случае при достаточно малом коэффициенте σ структура оптимального управления имеет такой же вид. Поэтому решение стохастической задачи фактически сводится к нахождению оптимальных моментов t_1 и t_2. Эти моменты находятся в процессе решения уравнения (6). Максимум правой части этого уравнения по u с учетом (3) достигается при

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \dfrac{\partial s(k;t,T)}{\partial k} > e^{\delta(T-t)}, \\ u_{oc}, & \text{если} \quad \dfrac{\partial s(k;t,T)}{\partial k} = e^{\delta(T-t)}, \\ 0, & \text{если} \quad \dfrac{\partial s(k;t,T)}{\partial k} < e^{\delta(T-t)}. \end{cases} \tag{9}$$

3. Сход с магистрали

В этом случае решение уравнения (6) начинается с правого конца. Обозначим через $s_1(k;t,\cdot)$, $s_2(k;t,\cdot)$, $s_3(k;t,\cdot)$ функции Беллмана, если момент t относится к интервалам $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, T]$ соответственно.

На интервале $[t_2, T]$ $u = 0$. Поэтому уравнение (6) принимает вид:

$$-\frac{\partial s_3(k;t,T)}{\partial t} = -\mu k \frac{\partial s_3(k;t,T)}{\partial k} + e^{\delta(T-t)} F(k) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 \frac{\partial^2 s_3(k;t,T)}{\partial k^2},\ s_3(k;T,T) = 0. \tag{10}$$

Его решение можно записать в виде:

$$s_3(k;t,T) = F(k) w_3(t,T), \tag{11}$$

где $w_3(t,T)$ – искомая функция. Подставляя (11) в (10), получаем

$$-F(k)\dot{w}_3(t,T) = -\mu k F'(k) w_3(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 F''(k) w_3(t,T) + F(k) e^{\delta(T-t)}$$

или

$$-F(k)\dot{w}_3(t,T) = -\alpha\mu F(k) w_3(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 \alpha(\alpha-1) F(k) w_3(t,T) + F(k) e^{\delta(T-t)}.$$

Сократив на $F(k)$, получаем

$$-\dot{w}_3(t,T) = -\vartheta w_3(t,T) + e^{\delta(T-t)},\ w_3(T,T) = 0,$$

где $\vartheta = \alpha\mu + \frac{1}{2}\alpha\beta\sigma^2$. Решение этого уравнения:

$$w_3(t,T) = \frac{e^{\delta(T-t)} - e^{-\vartheta(T-t)}}{\delta + \vartheta}. \tag{12}$$

Согласно (9) на интервале $[t_1, t_2]$ должно выполняться условие

$$\frac{\partial s_2(k;t,T)}{\partial k} \equiv e^{\delta(T-t)} \tag{13}$$

и, следовательно, условие

$$\frac{\partial^2 s_2(k;t,T)}{\partial k^2} \equiv 0. \tag{14}$$

Кроме того, из принципа оптимальности Беллмана следует, что $s_2(k;t,T) = s_2(k;t,t_2) + s_3(k(t_2);t_2,T)$. Поэтому из (6) получаем

$$-\frac{\partial s_2(k;t,t_2)}{\partial t}=-\mu k\frac{\partial s_2(k;t,t_2)}{\partial k}+e^{\delta(T-t)}F(k),\quad s_2(k;t_2,t_2)=0. \tag{15}$$

Согласно методу разделения переменных его решение ищем в виде:

$$s_2(k;t,t_2)=H(k)e^{\delta(T-t)}+B, \tag{16}$$

где $H(k)$ – искомая функция, B – некоторая константа. Подставляя (16) в (15) и сокращая на $\exp\{\delta(T-t)\}$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка с независимым аргументом k:

$$\mu kH'(k)+\delta H(k)=F(k).$$

Его решение состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, что приводит к выражению [10]

$$H(k)=Ck^{-\frac{\delta}{\mu}}+\frac{Ak^{\alpha}}{\alpha\mu+\delta}, \tag{17}$$

где C – константа интегрирования. Эта константа находится из условия (13) или, как следует из (16), из условия $H'=1$. В результате имеем

$$H'(k)=-\frac{\delta}{\mu k}Ck^{-\frac{\delta}{\mu}}+\frac{\alpha Ak^{\alpha-1}}{\alpha\mu+\delta}=1.$$

Находя отсюда константу C и подставляя в (17), получаем

$$H(k)=\frac{F-\mu k}{\delta}. \tag{18}$$

К выражению (18) еще раз применим условие $H'=1$. Получаем

$$H'(k)=\frac{\alpha Ak^{\alpha-1}-\mu}{\delta}=1.$$

Отсюда следует (7). Выражение для u_{oc} получается из (1), так как $k_{oc}=const$. Таким образом, свойства магистрали в детерминированном и стохастическом случаях совпадают. Константа B находится из условия $s_2(k;t_2,t_2)=0$. Из (16) следует, что

$$B=-H(k(t_2)e^{\delta(T-t_2)}.$$

Этот же результат можно получить непосредственно. Так как на интервале $[t_1, t_2]$ $k=k_{oc}=const$ и $(1-u)F=F-\mu k=const$, то получаем

$$s_2(k;t,t_2)=\int_t^{t_2}e^{\delta(T-t)}(1-u)F(k)dt=(F-\mu k)\frac{e^{\delta(T-t)}-e^{\delta(T-t_2)}}{\delta},$$

что совпадает с (16).

4. Выбор оптимального параметра t_2

Из полученного выше следует, что при $t<t_2$

$$s_2(k;t,T)=H(k)(e^{\delta(T-t)}-e^{\delta(T-t_2)})+Q(e^{\delta(T-t_2)}-e^{-\vartheta(T-t_2)}), \tag{19}$$

где

$$Q=\frac{F(k_2)}{\delta+\vartheta}.$$

Поскольку эта функция зависит от параметра t_2, то естественно выбрать его так, чтобы функция достигала максимума. Вычислим производную

$$\frac{ds_2}{dt_2}=H(k)\delta e^{\delta(T-t_2)}-Q(\delta e^{\delta(T-t_2)}+\vartheta e^{-\vartheta(T-t_2)})=0.$$

Отсюда

$$e^{-(\delta+\vartheta)(T-t_2)}=\frac{\delta(H-Q)}{\vartheta Q}, \tag{20}$$

$$T - t_2 = r_3 = \frac{1}{\delta + \vartheta} \ln\left(\frac{\vartheta Q}{\delta(H - Q)} \right). \tag{21}$$

Таким образом, длина интервала $[t_2, T]$ равна значению r_3.

5. Выход на магистраль

На интервале $[0, t_1]$ $u = 1$. Поэтому непроизводственное потребление равно нулю и поэтому при $t < t_1$ $s_1(k;t, t_1) \equiv 0$ и $s_1(k;t,T) = s_2(k(t_1);t_1,T)$. Поскольку $s_1(k;t,t_1) \equiv 0$, то вторая производная этой функции по k равна нулю. Поэтому уравнение (6) принимает вид:

$$-\frac{\partial s_1(k;t,t_1)}{\partial t} = \frac{\partial s_1(k;t,t_1)}{\partial k}(F(k) - \mu k), \quad s_1(k;t_1,t_1) = 0.$$

Это уравнение можно решать методом характеристик. В результате получается, что переменная k удовлетворяет уравнению (1), решение которого на интервале $[t_0, t)$ с начальным условием $k(t_0) = k_0$ имеет вид [2]:

$$k^{\beta}(t) = \frac{A}{\mu}(1 - e^{-\beta\mu(t - t_0)}) + k_0^{\beta} e^{-\beta\mu(t - t_0)}. \tag{22}$$

Момент времени t_1 определяется из условия $k(t_1) = k_{oc}$, что приводит к выражению

$$t_1 = \frac{1}{\mu\beta} \ln\left(\frac{A - \mu k_0^{\beta}}{A - \mu k_{oc}^{\beta}} \right). \tag{23}$$

Таким образом, выражения (21) и (23) определяют структуру управления и дают решение задачи. Для существования данного решения необходимо, чтобы сумма длин интервалов $[0, t_1]$ и $[t_2, T]$ была меньше T, т.е. $t_1 + r_3 < T$.

6. Общее непроизводственное потребление

Из полученных результатов следует, что максимальное среднее значение непроизводственного потребления на интервале $[0, T]$ равно

$$\begin{aligned} &s(k_0;0,T) = s_2(k(t_1);t_1,t_2) + s_3(k(t_2);t_2,T) = \\ &= H(k(t_1))(e^{\delta(T - t_1)} - e^{\delta(T - t_2)}) + Q(k(t_2))(e^{\delta(T - t_2)} - e^{-\vartheta(T - t_2)}). \end{aligned} \tag{24}$$

Сюда нужно подставить (21) и (23). При этом в формулах (21) и (24) $k = k(t_1) = k(t_2) = k_{oc}$, т.е. нужно учитывать (7). В частности, получается

$$Q = \frac{F(k_{oc})}{\delta + \vartheta}, \tag{25}$$

$$T - t_2 = r_3 = \frac{1}{\delta + \vartheta} \ln\left(\frac{\vartheta(\delta + \mu)}{(\delta + \beta\mu)\vartheta - \alpha\mu\delta} \right). \tag{26}$$

Можно рассмотреть, как ведет себя функционал (24) с ростом σ или, что то же самое, параметра ϑ. Из (26) видно, что при увеличении ϑ длина интервала $[t_2, T]$ стремится к нулю. Также стремится к нулю и величина Q. В результате получаем, что с ростом параметра ϑ функционал (24) стремится к величине

$$s(k_0;0,T) = H(k_{oc})(e^{\delta(T - t_1)} - 1).$$

На рисунках приведены результаты численного моделирования при следующих значениях параметров: $A = 1$, $\alpha = 0{,}5$, $\mu = 0{,}1$, $\delta = 0{,}1$, $T = 12$, $k_0 = 5$, $k_{oc} = 6{,}25$, $t_1 = 0{,}7$. На рис. 1 приведено изменение во времени фондовооруженности труда при разных значениях коэффициента волатильности σ. На рис. 2 приведено изменение во времени непроизводственного потребления при разных значениях коэффициента волатильности σ. Видно, что эта величина убывает с ростом σ.

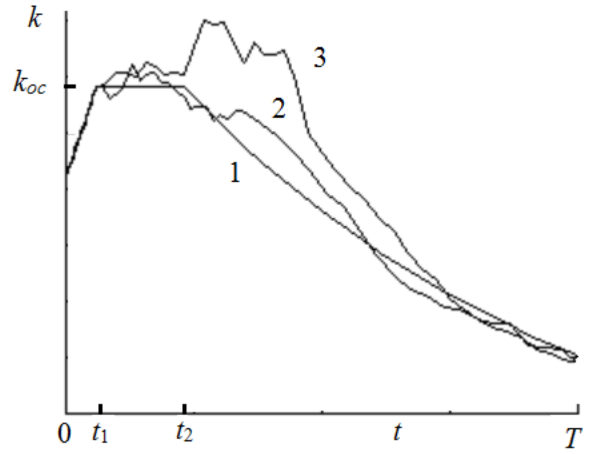

Рис.1. Изменение фондовооруженности труда
(кривая *1* соответствует $\sigma = 0$;
кривая *2* – $\sigma = 0,1$; кривая *3* – $\sigma = 0,2$)

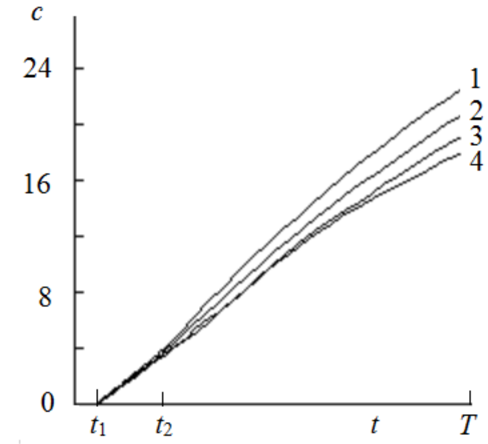

Рис. 2. Изменение непроизводственного потребления
(кривая *1* соответствует $\sigma = 0$; кривая *2* – $\sigma = 0,1$;
кривая *3* – $\sigma = 0,2$, кривая *4* – $\sigma = 0,3$)

Заключение

В результате исследования установлено, что структура управления решения детерминированной и стохастической задач совпадают и определяются значениями моментов t_1 и t_2. При этом стохастическая составляющая влияет только на момент t_2. Увеличение коэффициента волатильности σ приводит к уменьшению среднего значения непроизводственного потребления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эрроу К. Применение теории управления к экономическому росту // Математическая экономика. М. : Мир, 1974. 745 с.
2. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М. : Наука, 1984. 286 с.
3. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Максимизация потребления работодателей в случае производственной функции общего вида // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11, вып. 2. С. 326–327.
4. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом потребления работодателей // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 140–155.
5. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Принцип магистрали в задаче управления односекторной экономикой при наличии ограничений на накопление и потребление // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 2 (7). С. 5–23.
6. Анисимов А.В., Григоренко Н.Л., Лукьянова Л.Н. Задача оптимального управления для односекторной модели экономического роста со смешанными ограничениями // Прикладная математика и информатика : труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва : МАКС Пресс, 2013. Т. 44. С. 5–21.
7. Соловьев В.И. Стохастические методы в экономике и финансах. М. : Гос. ун-т управления, 2000. 154 с.
8. Параев Ю.И., Грекова Т.И., Данилюк Е.Ю. Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4 (17). С. 5–15.
9. Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М. : Сов. радио, 1976. 184 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : ГИФМЛ, 1961. 702 с.

Параев Юрий Иванович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: paraev@mail.ru
Грекова Татьяна Ивановна, канд. техн. наук, доцент. E-mail: ti_gre@mail.ru
Полуэктова Ксения Олеговна. E-mail: poluekt.kseni@mail.ru
Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 28 сентября 2017 г.

Paraev Jury. I., Grekova Tatiana. I., Poluektova Ksenia O. (National Research Tomsk State University, Russian Federation).
Optimal control of one-sector economy under random variation labor funds.
Keywords: the one-sector economy; capital-labor ratio; non-productive consumption; optimal control; dynamic programming.

DOI: 10.17223/19988605/42/3

The problem of optimal control of one-sector economy under random variation labor funds is considered. The state of the economy is characterized by two variables: capital-labor ratio $k(t)$ and non-productive consumption per an employee $c(t)$ along with the production function $F(k)$ being the gross product made per one unit of time. In this study the Kobb-Douglas production function is considered, that is $F(k) = Ak^{\alpha}$, where A denotes the scale of rate of production ($A > 0$), α is the elasticity coefficient on fixed assets. Variables $k(t)$ and $c(t)$ satisfy the following equations:

$$\dot{k} = uF - \mu k + \sigma k \xi(t), \quad k(0) = k_0,$$
$$\dot{c} = \delta c + (1-u)F, \quad c(0) = 0,$$

where μ is the depreciation rate, δ is the discount rate ($\mu \geq 0$, $\delta \geq 0$), $\xi(t)$ denotes the standard white Gaussian noise (or $\xi(t) = d\omega(t)/dt$, where $\omega(t)$ is the Wiener process), σ is the coefficient of volatility, uF is the product fraction which is used to increase a fixed capital, $(1 - u)F$ is the product fraction which is used to increase a non-productive consumption. Thus, the coefficient u is the controlling parameter in considered problem. This coefficient should satisfy the following condition: $0 \leq u \leq 1$. It is assumed that the planned production period $[0, T]$ is specified and sufficiently long. The general non-productive consumption on the interval $[0, T]$ for a given control u is defined as follows*:*

$$c(T) = \int_0^T e^{\delta(T-t)}(1-u)F(k)dt .$$

The objective of this study is to find such control $u(t)$ on the interval $[0, T]$ for which the average value of $c(T)$ reaches its maximum. This problem is solved using a dynamic programming method. Bellman's function $s(k;t,T)$ is introduced; $s(k;t,T)$ is an average value of value $c(T)$ provided that process continues on time interval $[t, T]$ with an initial condition $k(t) = k$ and on this interval is applied optimal control. For this function Bellman's equation is specified. The formulated objective is a solution of the Bellman's equation. This solution consists that an interval $[0, T]$ by points t_1 and t_2 ($0 < t_1 < t_2 < T$) breaks into three intervals: $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, and $[t_2, T]$. The interval $[0, t_1]$ corresponds to the output to the highway, the interval $[t_1, t_2]$ – to the highway (if it exists), the interval $[t_2, T]$ – to the final stage (to a descent from the highway). On the highway, there is $k = k_{oc} = const$, and

$$k_{oc}^{1-\alpha} = \frac{\alpha A}{\delta + \mu}, \; u = u_{oc} = \frac{\mu k_{oc}}{F(k_{oc})}.$$

If $k(0) < k_{oc}$, then u is equal to 1 on the interval $[0, t_1]$; u is equal to 1 on the interval $[t_2, T]$. As a result, it turns out that the control structure is determined by values of t_1 and t_2. The moment t_1 depends only on initial condition $k(0)$ and doesn't depend on a stochastic component, the moment t_2 doesn't depend on initial condition, but it depends on σ. Thus, the greater σ, the less length of the interval $[t_2, T]$ and average value of non-productive consumption.

REFERENCES

1. Arrow, K. (1974) *Primenenie teorii upravleniya k ekonomicheskomu rostu* [Application of Control Theory to Economic Growth]. Translated from English. Moscow: Mir.
2. Ashmanov, S.A. (1984) *Vvedenie v matematicheskuyu ekonomiku* [Introduction to mathematical economy]. Moscow: Nauka.
3. Demin, N.S. & Kuleshova, E.V. (2004) Maximizing consumption of employers in case of production function of a general view. *Review of Applied and Industrial Mathematics*. 11(2). pp. 326–327. (In Russian).
4. Demin, N.S. & Kuleshova, E.V. (2008) Control of single-sector economy over a finite time interval with allowance for employer consumption. *Automation and Remote Control*. 69(9). pp. 140–155. (In Russian).
5. Demin, N.S. & Kuleshova, E.V. (2009) Turnpike principle in a problem of management onesectoreconomy in the presence of restrictions on saving and consumption. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2(7). pp. 5–23. (In Russian).
6. Anisimov, A.V., Grigorenko, N.L. & Lukyanova, L.N. (2013) Problem of optimum control for one-sector model of economic growth with the mixed restrictions *Prikladnaya matematika i informatika*. 44. pp. 5–21. (In Russian).
7. Solovyev, V.I. (2000) *Stokhasticheskie metody v ekonomike i finansakh* [Stochastic methods in economy and finance]. Moscow: GUU.
8. Paraev, Yu.I., Grekova, T.I. & Daniliuk, E.Yu. (2011) The analytical decision of a problem of optimumcontrol one-sector economy on a final interval of time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 4(17). pp. 5–15 (In Russian).
9. Paraev, Yu.I. (1976) *Vvedenie v statisticheskuyu dinamiku protsessov upravleniya i fil'tratsii* [Introduction to statistical dynamics of control processes and filtrations]. Moscow: Sovetskoe Radio.
10. Kamke, E. (1961) *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [A reference-book on the ordinary differential equations]. Moscow: GIFML.