ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 42

УДК 336.51
DOI: 10.17223/19988605/42/6

Г.А. Медведев

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ НЕАФФИННЫХ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ДОХОДНОСТИ

Рассматривается уравнение временной структуры для цены бескупонной облигации, решение которого в аналитическом виде известно в основном для простейших моделей и имеет аффинную структуру по отношению к краткосрочной ставке. Конструируются решения этого уравнения для некоторого семейства моделей временной структуры, которые основываются на процессах краткосрочной ставки, в стохастических дифференциальных уравнениях которых квадрат волатильности пропорционален третьей степени краткосрочной ставки. Решение уравнения ищется в виде определенного функционального ряда и в итоге приводится к вырожденной гипергеометрической функции. Рассматриваются три версии, лежащие в основе стохастических дифференциальных уравнений для процессов краткосрочной ставки: с нулевым дрейфом, с линейным дрейфом и с квадратичным дрейфом. Приводятся численные примеры для кривой доходности и кривой форвардных ставок для указанных версий. Формулируются некоторые условия существования нетривиальных решений уравнения временной структуры в рассматриваемом семействе процессов.
Ключевые слова: уравнение временной структуры доходности; цена бескупонной облигации; модель CIR(1980); модель Ана–Гао; кривая доходности; форвардная кривая.

Предположим, что состояние финансового рынка описывается процентной ставкой $r(t)$, которая следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением [1]

$$dr(t) = \mu(r(t))\,dt + \sigma(r(t))\,dw(t)$$

с функцией дрейфа $\mu(x)$, функцией волатильности $\sigma(x)$ и стандартным винеровским процессом $w(t)$. Для удобства рассуждений будем обозначать функцию дрейфа $m(r) = \mu(r) - \lambda(r)\sigma(r)$ и функцию диффузии $s(r) = 0{,}5\,\sigma^2(r)$. Здесь $\lambda(r)$ – так называемая рыночная цена риска [2]. Ранее [3] рассматривалась задача определения временной структуры доходности бескупонной облигации [4], когда функции $m(r)$ и $s(r)$ являются полиномами. Выяснялось, могут ли в этом случае кривые доходности быть полиномами или степенными рядами по переменной r. Оказалось, что это имеет место, если только $m(r)$ и $s(r)$ – полиномы не более чем первой степени. В этом случае модели временной структуры доходности являются аффинными.

В настоящей статье рассматривается подобная задача, но временная структура цены бескупонной облигации ищется в виде функционального ряда, отличающегося от степенного. Выяснено, что для некоторых случаев такие решения существуют. Получающаяся временная структура оказывается неаффинной и описывается вырожденными гипергеометрическими функциями. В это семейство входят такие известные модели процентных ставок, как модель CIR(1980) [5] и модель Ана–Гао [6].

1. Общее уравнение для цены облигации и ее компонентов

Рассмотрим уравнение временной структуры для цены бескупонной облигации $P(r, \tau)$ [7]:

$$-\frac{\partial P(r,\tau)}{\partial \tau} + m(r)\frac{\partial P(r,\tau)}{\partial r} + s(r)\frac{\partial^2 P(r,\tau)}{\partial r^2} - r\,P(r,\tau) = 0\,, \quad P(r,\,0) = 1. \qquad (1)$$

Здесь $m(r)$ – функция дрейфа краткосрочной процентной ставки, а $s(r)$ – квадрат ее волатильности.

Будем искать решение этого уравнения в форме

$$P(r,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha+n}c_n, \tag{2}$$

где $a(\tau)$, α и c_n, $n = 0, 1, 2, ...,$ – функция и коэффициенты, подлежащие определению.

Соответствующие производные, использованные в уравнении (1), имеют вид:

$$\frac{\partial P(r,\tau)}{\partial\tau}=\frac{a'(\tau)}{a(\tau)}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha+n}c_n,\quad \frac{\partial P(r,\tau)}{\partial r}=\frac{1}{a(\tau)}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha+n+1}c_n,$$

$$\frac{\partial^2 P(r,\tau)}{\partial r^2}=\frac{1}{a(\tau)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n+1)\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha+n+2}c_n. \tag{3}$$

Предположим, что дрейф и волатильность краткосрочной процентной ставки таковы, что функции $m(r)$ и $s(r)$ являются полиномами порядка p и q соответственно:

$$m(r)=\sum_{k=0}^{p}m_k r^k,\quad s(r)=\sum_{k=0}^{q}s_k r^k. \tag{4}$$

Прежде чем подставлять явные выражения производных (3) и полиномов (4) в уравнение (1), преобразуем второе и третье слагаемые в левой части уравнения (1) к более удобной форме.

$$m(r)\frac{\partial P(r,\tau)}{\partial r}=-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}(\alpha+n)m_k a(\tau)^{\alpha+n}\left(\frac{1}{r}\right)^{\alpha+n-k+1}c_n=-\sum_{j=1-p}^{\infty}\left(\sum_{k=\max\{0,1-j\}}^{p}(\alpha+j+k-1)m_k a(\tau)^{\alpha+j+k-1}c_{j+k-1}\right)\left(\frac{1}{r}\right)^{\alpha+j}, \tag{5}$$

$$s(r)\frac{\partial^2 P(r,\tau)}{\partial r^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{q}(\alpha+n)(\alpha+n+1)s_k a(\tau)^{\alpha+n}c_n\left(\frac{1}{r}\right)^{\alpha+n-k+2}=\sum_{j=2-q}^{\infty}\left(\sum_{k=\max\{0,2-j\}}^{q}(\alpha+j+k-2)(\alpha+j+k-1)s_k a(\tau)^{\alpha+j+k-2}c_{j+k-2}\right)\left(\frac{1}{r}\right)^{\alpha+j}. \tag{6}$$

Запишем в аналогичной форме также первое и четвертое слагаемые левой части уравнения (1):

$$-\frac{\partial P(r,\tau)}{\partial\tau}=-\sum_{j=0}^{\infty}\Big((\alpha+j)\ a'(\tau)\ a(\tau)^{\alpha+j-1}c_j\Big)\left(\frac{1}{r}\right)^{\alpha+j}, \tag{7}$$

$$-rP(r,\tau)=-\sum_{j=-1}^{\infty}\Big(a(\tau)^{\alpha+j+1}c_{j+1}\Big)\left(\frac{1}{r}\right)^{\alpha+j}. \tag{8}$$

Теперь, подставляя выражения (5)–(8) в уравнение (1), получим

$$\sum_j\Bigg(-I(j|0)(\alpha+j)\ a'(\tau)\ a(\tau)^{\alpha+j-1}c_j-I(j|-1)\ a(\tau)^{\alpha+j+1}c_{j+1}-I(j|1-p)\sum_{k=\max\{0,1-j\}}^{p}(\alpha+j+k-1)\ m_k\ a(\tau)^{\alpha+j+k-1}c_{j+k-1}+$$

$$+I(j|2-q)\sum_{k=\max\{0,2-j\}}^{q}(\alpha+j+k-2)(\alpha+j+k-1)\ s_k\ a(\tau)^{\alpha+j+k-2}c_{j+k-2}\Bigg)\left(\frac{1}{r}\right)^{\alpha+j}=0. \tag{9}$$

Определенную сложность в выражении (9) вызывает тот факт, что суммирование по индексу j для каждого слагаемого начинается по-разному: для первого слагаемого $j \geq 0$, для второго слагаемого $j \geq -1$, для третьего слагаемого $j \geq 1 - p$, для четвертого слагаемого $j \geq 2 - q$. Поэтому в выражениях слагаемых появились множители $I(j|k)$, представляющие индикаторные функции, равные единице, если $j \geq k$, и нулю в противном случае. Равенство (9) должно выполняться равномерно по переменной r. При этом, поскольку функции r^{-j} ($j = 0, \pm1, \pm2, ...$) являются линейно независимыми, коэффициенты перед этими функциями в выражении (9) должны быть равными нулю. Это приводит к системе уравнений для неизвестных параметров α, $a(\tau)$ и c_n, $n = 0, 1, 2, ...,$ в представлении (2) решения уравнения (1), если оно существует в таком виде. Заметим, что каждое слагаемое в каждом элементе суммы (9) имеет ненулевой множитель $a(\tau)^{\alpha}$, поэтому для упрощения на него можно сократить во всех элементах суммы.

2. Модель с нулевым дрейфом

Среди моделей процессов краткосрочной ставки $r(t)$ с нулевым дрейфом широко известна модель CIR(1980) [5], в которой ставка порождается в общем случае диффузионным процессом

$$dr = \sigma r^{\gamma} dw. \tag{10}$$

Для такого процесса плотность вероятностей $f(x)$ выражается в виде [8]:

$$f(x) = (\gamma - 1)(2\gamma - 1)\frac{2}{r_0}\left(\frac{x}{r_0} - 1\right)\left(\frac{x}{r_0}\right)^{-2\gamma}, \; x > r_0 > 0.$$

График этой плотности представлен на рис. 1 для случая $\gamma = 1{,}5$, который чаще всего встречается в литературе. Именно в таком виде эту модель предлагали и авторы оригинальной статьи.

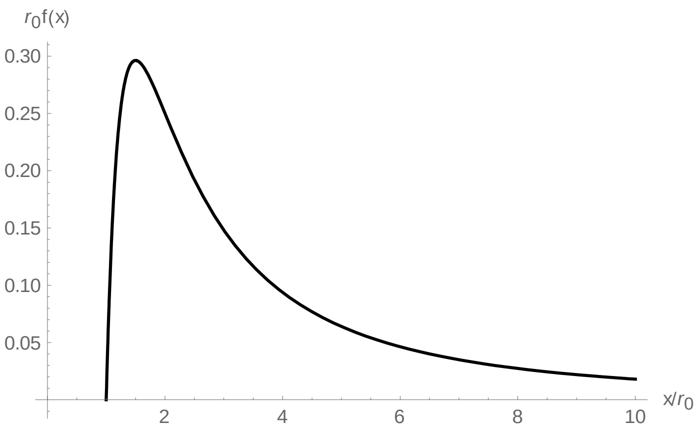

Рис. 1. Плотность вероятностей краткосрочной ставки для модели CIR(1980)

Несмотря на то что модель известна давно, до сих пор не была описана временная структура ее бескупонной доходности. Оказывается, предлагаемый способ нахождения временной структуры позволяет это сделать. Примем в уравнении (10) $\gamma = 1{,}5$ и $s \equiv 0{,}5\,\sigma^2$. Уравнение (1) для цены бескупонной облигации $P(r, \tau)$ приобретает вид

$$-\frac{\partial P(r,\tau)}{\partial \tau} + s r^3 \frac{\partial^2 P(r,\tau)}{\partial r^2} - r P(r,\tau) = 0, \quad P(r, 0) = 1. \tag{11}$$

Будем искать решение этого уравнения в форме (2). Соответствующие производные имеют вид:

$$\frac{\partial P(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{a'(\tau)}{a(\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha+n} c_n, \qquad \frac{\partial^2 P(r,\tau)}{\partial r^2} = \frac{1}{a(\tau)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+n)(\alpha+n+1)\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha+n+2} c_n.$$

После подстановки этих выражений в уравнение (11) получаем следующее равенство:

$$-\frac{a'(\tau)}{a(\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+n)\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha+n} c_n - a(\tau)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha+n-1} c_n + s\,a(\tau)\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n+1)\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha+n-1} c_n = 0.$$

Это равенство можно переписывается в более удобном виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\alpha+n)\frac{a'(\tau)}{a(\tau)} c_n + a(\tau) c_{n+1} - s\,a(\tau)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2) c_{n+1}\right]\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha+n} + a(\tau)(1 - s\alpha(\alpha+1))\, c_0 \left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha-1} = 0.$$

Поскольку выражения $(a(\tau)/r)^k$ как функции переменной r для различных значений k являются линейно независимыми, а равенство должно выполняться равномерно по r, то коэффициенты перед этими выражениями для различных k должны быть равны нулю. И мы получаем систему уравнений относительно неизвестных α, $a(\tau)$ и c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$s\alpha(\alpha + 1) = 1, \tag{12}$$

$$(\alpha+n)\frac{a'(\tau)}{a(\tau)^2} c_n + c_{n+1} - s\,(\alpha+n+1)(\alpha+n+2) c_{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Из уравнения (12) определяется параметр α:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{s}}-1\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{8+\sigma^2}}{\sigma}-1\right) > 0. \qquad (14)$$

Вообще говоря, уравнение (12) имеет два корня: положительный и отрицательный. Однако при отрицательном решении, как будет показано ниже, функция цены $P(r, \tau)$ приобретает свойства, которыми цена бескупонной облигации не обладает. Поэтому принимаем корень (14). Рассмотрим уравнение (13) для $n = 0$:

$$a'(\tau)\ \alpha c_0 + a(\tau)^2 c_1\ [1 - s\ (\alpha+1)(\alpha+2)] = 0.$$

С учетом равенства (12) его можно переписать как

$$a'(\tau) = a(\tau)^2\ 2\ \omega/\alpha^2, \qquad (15)$$

где для краткости обозначено $\omega = c_1/c_0$. Равенство (15) представляет собой дифференциальное уравнение относительно функции $a(\tau)$. Решение уравнения имеет вид:

$$a(\tau) = -\ \frac{\alpha^2}{2\omega\tau+\eta} \qquad (16)$$

с точностью до константы η, которая при необходимости определяется из свойств цены облигации. Заметим, что из равенства (15) следует, что

$$\frac{a'(\tau)}{a(\tau)^2} = \frac{2\omega}{\alpha^2}.$$

Теперь рассмотрим уравнение (13) для произвольного $n \geq 1$. Его можно записать как рекуррентное соотношение, определяющее коэффициент c_{n+1} через коэффициент c_n:

$$c_{n+1} = \frac{2(\alpha+n)\omega}{[s(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)-1]\alpha^2}c_n. \qquad (17)$$

Заметим, что

$$\frac{2(\alpha+n)}{[s(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)-1]\alpha^2} = \frac{2(\alpha+n)}{\left(\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}{\alpha(\alpha+1)}-1\right)\alpha^2} = \frac{2(\alpha+1)(n+\alpha)}{(n+1)\ \alpha\,(n+2(\alpha+1)} = \frac{\theta}{n+1}\left(\frac{n+\alpha}{n+\xi}\right),$$

где для краткости обозначено $\xi = 2(\alpha + 1)$, $\theta = \xi/\alpha$. Таким образом, последовательность коэффициентов $\{c_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ выглядит следующим образом:

$$c_0,\ c_1 = c_0\omega = c_0\,\omega\,\theta\,\frac{\alpha}{\xi}\ ,\ c_2 = c_0\frac{\omega\,\theta}{2}\frac{(1+\alpha)}{(1+\xi)},\ c_3 = c_0\frac{(\omega\,\theta)^2}{1\times2\times3}\frac{(1+\alpha)}{(1+\xi)}\frac{(2+\alpha)}{(2+\xi)},\ \dots,\ c_n = c_0\frac{(\omega\,\theta)^{n-1}}{n!}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(k+\alpha)}{(k+\xi)},\ \dots$$

Тогда решение (2) уравнения (11) можно представить в форме:

$$P(r,\tau) = c_0\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha}\left[1+\left(\frac{\omega\theta a(\tau)}{r}\right)\frac{\alpha}{\xi}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\omega\,\theta\,a(\tau)}{r}\right)^n\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(k+\alpha)}{(k+\xi)}\right]. \qquad (18)$$

Заметим, что среди специальных функций имеется так называемая вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера) ${}_1F_1(x,y,z)$ (в обозначениях системы Wolfram Mathematica), которая определяется соотношением

$${}_1F_1(x,y,z) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}\frac{(x+k-1)}{(y+k-1)} = 1+\frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(y+n)}.$$

Используя эти обозначения, цену $P(r, \tau)$ можно записать в виде:

$$P(r,\tau) = c_0\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\omega\,\theta\,\frac{a(\tau)}{r}\right)^n\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\xi+n)}\right) = c_0\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha}{}_1F_1\left(\alpha,\ \xi,\ \omega\,\theta\,\frac{a(\tau)}{r}\right).$$

По своим экономическим свойствам цена облигации как функция срока до погашения τ является непрерывной монотонно убывающей функцией, которая для всякого $r > 0$ имеет пределы [9]

$$\lim_{\tau\to 0} P(r,\tau)=1\,,\quad \lim_{\tau\to\infty} P(r,\tau)=0\,.$$

Эти требования можно удовлетворить, определяя соответствующим образом до сих пор неопределенные константы c_0 и η. Окончательное выражение для цены бескупонной облигации приобретает вид:

$$P(r,\tau)=\frac{(1+\alpha)\sqrt{\pi}}{2^{1+2\alpha}\,\Gamma(\alpha+1{,}5)}\left(\frac{1}{s\,r\,\tau}\right)^{\alpha}{}_1F_1\!\left(\alpha,\,2(1+\alpha),\,-\frac{1}{s\,r\,\tau}\right), \tag{19}$$

где $s\equiv 0{,}5\,\sigma^2$, $\alpha=0{,}5\,(\sqrt{1+4/s}-1)>0$, а $\Gamma(x)$ – гамма функция. Здесь предполагается, что $\alpha>0$. Когда $\alpha<0$, используемая в формуле (19) гамма функция $\Gamma(x)$ может иметь нежелательные свойства. Например, при целочисленных отрицательных значениях аргумента она имеет неограниченные разрывы, на интервалах $(2\kappa,\ 2\kappa+1)$, $\kappa=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, она отрицательна и т.д., что не соответствует свойствам цены облигации. Поэтому отрицательные значения параметра α нежелательны.

Обычно временную структуру на практике представляют не через цену облигации, а с помощью доходности. По определению доходность до погашения бескупонной облигации (кривая доходности) $y(r,\tau)$ и доходность форвардных ставок (форвардная кривая) $f(r,\tau)$ определяются выражениями [10]:

$$y(r,\tau)=-\frac{\ln P(r,\tau)}{\tau}\,,\qquad f(r,\tau)=-\frac{\partial\ln P(r,\tau)}{\partial\tau} \tag{20}$$

и, к сожалению, в компактном аналитическом виде не представляются и могут быть исследованы только численно. На рис. 2 представлены кривая доходности $y(r,\tau)$ и форвардная кривая $f(r,\tau)$ для следующих значений параметров: $s=0{,}8$; $r=0{,}08$. Для представления кривых «целиком» для всего интервала возможных значений сроков до погашения $\tau\in(0,\infty)$ использовано нелинейное преобразование сроков до погашения: $u=1-e^{-\rho\tau}$, которое отображает положительную полуось $(0,\infty)$ в единичный интервал $(0,1)$. Принятое при расчетах численное значение $\rho=\ln 10/30=0{,}07675$ соответствует тому, что сроки до погашения от 0 до 30 отображаются в интервал $(0,\ 0{,}9)$. В связи с таким преобразованием изменены и обозначения кривых: $y(r,\tau)\leftrightarrow Y(u)$, $f(r,\tau)\leftrightarrow F(u)$.

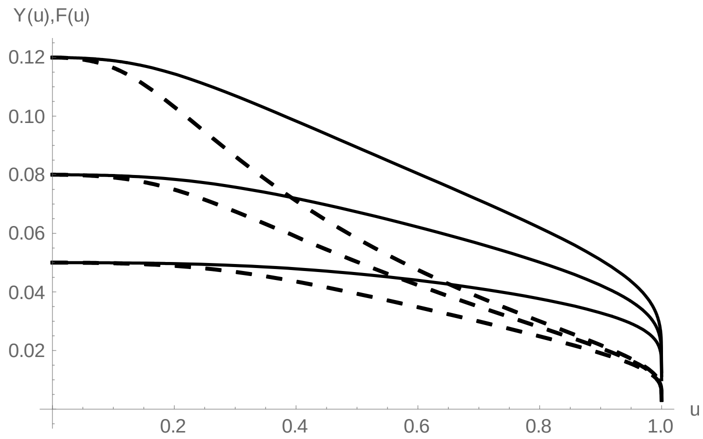

Рис. 2. Кривые доходности $Y(u)$ (сплошные) и форвардные кривые $F(u)$ (пунктирные) для модели CIR(1980) для значений ставки $r\in\{0{,}05;\ 0{,}08;\ 0{,}12\}$

Как это обычно бывает, кривые стартуют от одного и того же значения доходности, равного процентной ставке r, и с увеличением срока до погашения стремятся при $\tau\to\infty$ ($u\to 1$) к одному и тому же пределу, который в данном случае нулевого дрейфа равен нулю.

3. Модель с линейным дрейфом

Предположим теперь, что полиномы (4) определены так, что из их коэффициентов отличаются от нуля только два: $m_1=m>0$, $s_3=s>0$, т.е. $m(r)=m\,r$, $s(r)=s\,r^3$. В этом случае из равенства (9) можно получить соотношения:

$$-\ c_0\,(1-\alpha\,(\alpha+1)\ s)\ a(\tau)^{\alpha}=0.$$

$$[-(\alpha+j)\ a'(\tau)\ a(\tau)^{j-1}c_j-a(\tau)^{j+1}c_{j+1}-(\alpha+j)\ m a(\tau)^j c_j+$$

$$+(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)\ s\,a(\tau)^{j+1}c_{j+1}]\ a(\tau)^{\alpha}=0,\qquad j\ge 0.$$

Из этих соотношений получаем следующие уравнения для α, $a(\tau)$ и c_j, $j \ge 1$:

$$1-\alpha\,(\alpha+1)\ s=0.$$

$$-\alpha\,a'(\tau)\,a(\tau)^{-1}c_0-\alpha\,m c_0-a(\tau)c_1+(\alpha+1)(\alpha+2)s\,a(\tau)c_1=0.$$

$$-(\alpha+j)\ a'(\tau)\ a(\tau)^{-1}c_j-(\alpha+j)\ m\ c_j-a(\tau)\ c_{j+1}+$$

$$+(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)\ s\,a(\tau)\ c_{j+1}=0,\ \ j\ge 1.$$

Для параметра α получается квадратное уравнение и, соответственно, два решения – положительное и отрицательное:

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4}{s}+1}-1\right),\quad \alpha_2=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4}{s}+1}+1\right).$$

Функция $a(\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка, которое имеет аналитическое решение

$$a(\tau)=\frac{-\alpha m}{(e^{m\,\tau}-1)\ (s(1+\alpha)(2+\alpha)-1)\ \omega}=\frac{-\alpha^2\,m}{(e^{m\,\tau}-1)\ 2\ \omega}\ ,\quad \omega=\frac{c_1}{c_0}.$$

Наконец, коэффициенты c_j, $j \ge 1$, удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$c_{j+1}=\frac{(\alpha+j)\ c_j}{j^2 s+j\,s\,(3+2\alpha)+s(2+3\alpha+\alpha^2)-1}\ \frac{a'(\tau)+m\,a(\tau)}{a(\tau)^2}\ .$$

Используя уже полученное аналитическое выражение для функции $a(\tau)$, можно найти, что второй сомножитель этого выражения не зависит от τ и имеет вид:

$$\frac{a'(\tau)+m\,a(\tau)}{a(\tau)^2}=\frac{s\,(1+\alpha)\,(2+\alpha)-1}{\alpha}\ \omega\,,$$

так что рекуррентное соотношение для c_j можно представить в форме:

$$c_{j+1}=\frac{(\alpha+j)}{(1+j)(\beta+j)}\ \frac{2\omega}{s\,\alpha^2}\ c_j\,,\quad \beta=1+\sqrt{\frac{4}{s}+1}=2\,(1+\alpha)>\alpha\,.$$

Используя полученные результаты, находим, что n-е слагаемое ряда (2) можно записать так:

$$\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha+n}c_n=c_0\left(\frac{-m}{s\,r\,(e^{m\,\tau}-1)}\right)^{\alpha+n}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha+k}{\beta+k}\ .$$

Таким образом, цена бескупонной облигации $P(r, \tau)$ может быть представлена в аналитическом виде с помощью вырожденной гипергеометрической функции:

$$P(r,\tau)=c_0\left(-\frac{m}{s\ r(e^{m\,\tau}-1)}\right)^{\alpha}{}_1F_1\left(\alpha,\,2(1+\alpha),-\frac{m}{s\ r(e^{m\,\tau}-1)}\right).$$

Наконец, выбирая параметр c_0 так, чтобы удовлетворить поведению функции $P(r, \tau)$, получим окончательное выражение для этой функции:

$$P(r,\tau)=\frac{(1+\alpha)\sqrt{\pi}}{2^{1+2\alpha}\,\Gamma(\alpha+3/2)}\left(\frac{m}{s\ r(e^{m\,\tau}-1)}\right)^{\alpha}{}_1F_1\left(\alpha,\,2(1+\alpha),-\frac{m}{s\ r(e^{m\,\tau}-1)}\right).$$

Как и в предыдущем случае здесь используется положительный корень α.

Функции $y(r, \tau)$ и $f(r, \tau)$, определяемые формулами (20) через представление $P(r, \tau)$, можно исследовать только численными методами. Правда, предельные значения этих функций могут быть найдены в аналитическом виде:

$$\lim_{\tau\to 0}y(r,\tau)=\lim_{\tau\to 0}f(r,\tau)=r,\quad \lim_{\tau\to\infty}y(r,\tau)=\lim_{\tau\to\infty}f(r,\tau)=\alpha\,m.$$

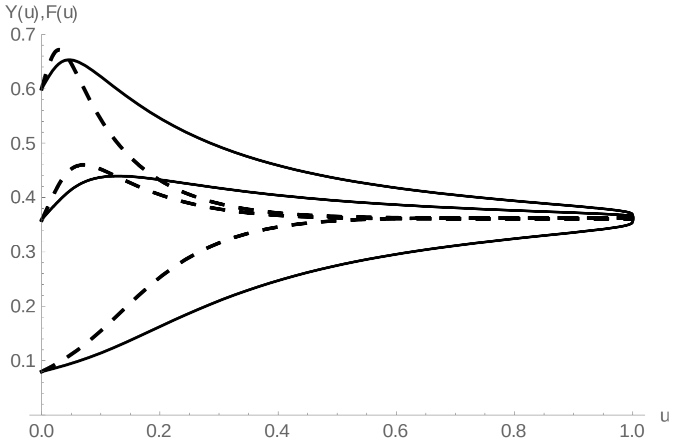

Рис. 3. Функции $Y(u)$ (сплошные) и $F(u)$ (пунктирные), вычисленные по формулам (20) для значений ставки $r \in \{0{,}08;\ 0{,}36;\ 0{,}6\}$

Как видно, левый предел определяется только состоянием рынка и не зависит от параметров модели, а правый предел определяется только структурой модели и не зависит от состояния рынка в определенный момент времени. На рис. 3 эти функции в форме $Y(u)$ и $F(u)$ представлены для следующих значений параметров: $s = 0{,}8$; $m = 0{,}5$.

4. Модель с квадратичным дрейфом

Пусть теперь полиномы $m(r)$ и $s(r)$ таковы, что $p = 2$, $q = 3$, т.е. $1 - p = 2 - q = -1$. Тогда компоненты суммы (9) будут отличаться от нуля только для $j \ge -1$, причем первое слагаемое отличается от нуля только для $j \ge 0$. В этом случае получаем следующую систему уравнений:
при $j = -1$

$$-c_0 - \alpha m_2 c_0 + \alpha(\alpha+1) s_3 c_0 = 0\,; \tag{21}$$

при $j = 0$

$$-\alpha a'(\tau)\, a(\tau)^{-1} c_0 - a(\tau) c_1 - \sum_{k=1}^{2} (\alpha + k - 1)\, m_k\, a(\tau)^{k-1} c_{k-1} + \sum_{k=2}^{3} (\alpha + k - 2)(\alpha + k - 1)\, s_k\, a(\tau)^{k-2} c_{k-2} = 0\,; \tag{22}$$

при $j = 1$

$$-(\alpha+1)\, a'(\tau)\; c_1 - a(\tau)^2 c_2 - \sum_{k=0}^{2} (\alpha + k)\, m_k\, a(\tau)^k c_k + \sum_{k=1}^{3} (\alpha + k - 1)(\alpha + k)\, s_k\, a(\tau)^{k-1} c_{k-1} = 0; \tag{23}$$

при $j > 1$

$$-(\alpha + j)\, a'(\tau)\, a(\tau)^{j-1} c_j - a(\tau)^{j+1} c_{j+1} - \sum_{k=0}^{2} (\alpha + j + k - 1)\, m_k\, a(\tau)^{j+k-1} c_{j+k-1} + \sum_{k=0}^{3} (\alpha + j + k - 2)(\alpha + j + k - 1)\, s_k\, a(\tau)^{j+k-2} c_{j+k-2} = 0. \tag{24}$$

Из уравнения (21), которое в предположении, что $c_0 \ne 0$, имеет вид: $\alpha(\alpha+1)\, s_3 = \alpha m_2 + 1$, определяется параметр α:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2s_3}\left(m_2 - s_3 - \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}\right), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2s_3}\left(m_2 - s_3 + \sqrt{4s_3 + (m_2 - s_3)^2}\right). \tag{25}$$

Поскольку уравнение (21) – квадратное, оно имеет два корня, что означает, что решение уравнения (1) может иметь две составляющие вида (2), компромисс между которыми, а также начальное условие $P(r, 0) = 1$ могут повлиять на выбор коэффициента c_0.

Уравнение (22) является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции $a(\tau)$. Его решение имеет вид:

$$a(\tau)=\frac{\lambda}{\mu+\exp[(\tau+\alpha\xi c_0)(m_1-(\alpha+1)s_2)]}, \tag{26}$$

где для компактности обозначено $\lambda = \alpha c_0((1+\alpha)s_2\alpha - m_1)$, $\mu = c_1(1+(\alpha+1)m_2-(\alpha+1)(\alpha+2)s_3)$, а ξ – постоянная интегрирования дифференциального уравнения, выбор которой делается в зависимости от свойств решения уравнения (1).

Из уравнения (23) определяется коэффициент c_2, а уравнение (24) можно рассматривать как основу для конструирования рекуррентной формулы вычисления коэффициентов c_{n+1} через предыдущие коэффициенты c_j, $j \le n$. Рассмотрим сначала уравнение (24). Оно позволяет выразить коэффициент c_{j+1} через предыдущие коэффициенты c_j, c_{j-1}, c_{j-2} по формуле

$$c_{j+1}=\frac{a(\tau)(\alpha+j)(a'(\tau)+a(\tau)(m_1-(1+\alpha+j)s_2)c_j-[a(\tau)(-m_0+(\alpha+j)s_1)c_{j-1}+(\alpha+j-2)s_0c_{j-2}](\alpha+j-1)}{a(\tau)^3[(1+\alpha+j)(2+\alpha+j)s_3-(1+\alpha+j)m_2-1]}. \tag{27}$$

Однако по определению коэффициентов c_n в выражении (2) они должны быть постоянными коэффициентами, не зависящими от переменной τ. То есть что в формуле (27) правая часть равенства не должна зависеть от τ. Это будет только тогда, когда $m_0 = 0$, $s_0 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$. Такое требование является необходимым условием существования нетривиального решения (2) и говорит о том, что нетривиальное решение имеет место не для любых полиномов $m(r)$ и $s(r)$ порядка 2 и 3 соответственно, а только для

$$m(r) = m_1r + m_2r^2,\ \ s(r) = s_3r^3. \tag{28}$$

Подстановка выявленных необходимых условий в формулу (27) для коэффициента c_{n+1} приводит к рекуррентному соотношению

$$c_{n+1}=\frac{\alpha+n}{(1+\alpha+n)(2+\alpha+n)s_3-(1+\alpha+n)m_2-1}\ \frac{a'(\tau)+a(\tau)m_1}{a(\tau)^2}\ c_n. \tag{29}$$

Заметим, что знаменатель первого сомножителя правой части равенства (29) может быть представлен в виде

$$(1+\alpha+n)\,(2+\alpha+n)s_3-(1+\alpha+n)m_2-1 = s_3(1+n)(\beta+n),$$

где

$$\beta=\begin{cases}\beta_1\equiv\dfrac{1}{s_3}\left(s_3-\sqrt{4s_3+(m_2-s_3)^2}\right) & \text{при } \alpha=\alpha_1,\\[2mm] \beta_2\equiv\dfrac{1}{s_3}\left(s_3+\sqrt{4s_3+(m_2-s_3)^2}\right) & \text{при } \alpha=\alpha_2.\end{cases} \tag{30}$$

При выполнении выявленных необходимых условий функция $a(\tau)$, определяемая по формуле (26), несколько упрощается:

$$a(\tau)=\frac{\lambda}{\mu+\exp[(\tau+\alpha\ \xi\ c_0)\ m_1]}, \tag{31}$$

где $\lambda = -m_1\alpha c_0$, $\mu = (1+(\alpha+1)m_2-(\alpha+1)(\alpha+2)s_3)c_1$. Подставляя в правую часть формулы (29) явное выражение функции $a(\tau)$, определяемой по формуле (20), получим

$$\frac{a'(\tau)+a(\tau)m_1}{a(\tau)^2}=\frac{\mu m_1}{\lambda}=\frac{s_3\beta\omega}{\alpha},$$

где $\omega \equiv c_1/c_0$. При этом зависимость от переменной τ в правой части формулы (29) исчезает. Таким образом, рекуррентная формула (29) для коэффициента c_{n+1} преобразуется к окончательному виду:

$$c_{n+1}=\frac{\beta(\alpha+n)\omega c_n}{\alpha(1+n)(\beta+n)}. \tag{32}$$

Теперь обратимся к решению последнего уравнения (23), из которого нужно определять c_2. Поскольку среди необходимых условий есть равенство $s_0 = 0$, то уравнение (23) будет совпадать с уравнением (24) при $n = 1$, а следовательно, коэффициент c_2 вычисляется по формуле (31) при $n = 1$.

Получается, что если полиномы $m(r)$ и $s(r)$ порядка 2 и 3 соответственно определяются выражениями (28), решение уравнения (1) может быть представлено в виде суммы двух рядов типа (2), каждый из которых имеет следующую структуру:

$$\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha} c_0 \left(1+\left(\frac{a(\tau)}{r}\frac{\omega\beta}{\alpha}\right)\frac{\alpha}{\beta}+\left(\frac{a(\tau)}{r}\frac{\omega\beta}{\alpha}\right)^2\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\,(\alpha+1)}{\beta\,(\beta+1)}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a(\tau)}{r}\frac{\omega\beta}{\alpha}\right)^3\frac{1}{3!}\left(\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}\right)+\ldots+\left(\frac{a(\tau)}{r}\frac{\omega\beta}{\alpha}\right)^n\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha+k}{\beta+k}+\ldots\right).$$

Используя вновь вырожденную гипергеометрическую функцию, полученный результат можно компактно записать в аналитическом виде

$$c_0\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha} {}_1F_1\left(\alpha,\, \beta,\, \frac{a(\tau)}{r}\frac{\omega\beta}{\alpha}\right). \tag{33}$$

Как уже было сказано, поскольку уравнение (21) имеет два решения (25), решение уравнения (1) может состоять из двух компонентов вида (2) с различными наборами параметров (α, β), значения которых определяются формулами (25) и (30):

$$P(r,\tau)=c_{01}\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha_1} {}_1F_1\left(\alpha_1,\, \beta_1,\, \frac{a(\tau)}{r}\frac{\omega\beta_1}{\alpha_1}\right)+c_{02}\left(\frac{a(\tau)}{r}\right)^{\alpha_2} {}_1F_1\left(\alpha_2,\, \beta_2,\, \frac{a(\tau)}{r}\frac{\omega\beta_2}{\alpha_2}\right). \tag{34}$$

Прежде чем конкретизировать решение, сделаем некоторый предварительный анализ. Вначале рассмотрим свойства диффузионного процесса, задаваемого дрейфом и волатильностью, определяемыми функциями (4) и (28). Согласно принятым предположениям процесс краткосрочной процентной ставки $r(t)$, соответствующий этим функциям, описывается уравнением:

$$dr(t) = (m_1 r(t) + m_2 r(t)^2)\, dt + \sqrt{2s_3}\; r(t)^{3/2}\, dt.$$

Маргинальная плотность вероятностей этого процесса имеет вид:

$$f(r)=\frac{\delta^{2-\gamma}\; e^{-\delta/r}}{r^{3-\gamma}\;\Gamma(2-\gamma)},\;\; \delta=\frac{m_1}{s_3}>0,\;\; \gamma=\frac{m_2}{s_3}<2,\; s_3>0,\; r\geq 0,$$

где $\Gamma(x)$ – гамма функция. Принимая во внимание эти неравенства, обратим внимание, что параметры выражения (33) согласно формулам (25) и (30) принимают значения $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_2 > 0$, а β_1 может принимать положительные значения только тогда, когда параметр волатильности $s_3 > 4$, что в реальных случаях практически не встречается.

Как известно, цена облигации при $r > 0$ является монотонно убывающей функцией по переменной $\tau \in (0, \infty)$ от $P(r, 0) = 1$ до $P(r, \infty) = 0$. Поэтому выражение (33) должно иметь такие же свойства. Функция ${}_1F_1(x, y, z)$ имеет подходящие свойства только при $x > 0$, $y > 0$, $z \in (-\infty, 0)$. Поэтому первое слагаемое в представлении (34) должно отсутствовать. Кроме того, чтобы аргумент z у ${}_1F_1$ принимал значения в интервале $(-\infty, 0)$ при изменении τ в интервале $(0, \infty)$, необходимо постоянную интегрирования ξ в выражении (20) определить равенством $\xi = \ln(\beta\omega s_3)/\alpha c_0 m_1$. Тогда

$$a(\tau)=\frac{\lambda}{\mu+\exp[(\tau+\alpha\,\xi\,c_0)\,m_1]}=\frac{-m_1}{(e^{m_1\tau}-1)\,s_3}.$$

Наконец, для того чтобы выполнялось требование $P(r, 0) = 1$, необходимо, чтобы не определенный до сих пор параметр c_0 определялся равенством $c_0 = \Gamma(\beta - \alpha)/\Gamma(\beta)$. Таким образом, окончательный вид решения (2) уравнения (1) приобретает в рассматриваемом случае окончательный вид:

$$P(r,\tau)=\frac{\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{m_1}{r\,s_3(e^{m_1\tau}-1)}\right)^{\alpha} {}_1F_1\left(\alpha,\, \beta,\, \frac{-m_1}{r\,s_3(e^{m_1\tau}-1)}\right), \tag{35}$$

где параметры α и β определяются с помощью формул (25) и (30):

$$\alpha=\frac{1}{2s_3}(m_2-s_3+\sqrt{4s_3+(m_2-s_3)^2})>0,\;\; \beta=\frac{1}{s_3}(s_3+\sqrt{4s_3+(m_2-s_3)^2})>0.$$

Заметим, что это решение полностью совпадает с решением, полученным другим путем в [6], где в обозначениях авторов $m_1 = \kappa\theta - \lambda_1 > 0$, $m_2 = -\kappa - \lambda_2 < 0$, $s_3 = \sigma^2/2$. В принципе, используя выражение (23), можно по формулам (20) найти аналитические выражения для кривой доходности $y(r, \tau)$ и форвардной кривой $f(r, \tau)$. Однако эти выражения являются очень громоздкими, и практичнее привлекать численные методы для выражения этих функций для необходимых числовых параметров. На рис. 4 представлены функции $Y(u)$ и $F(u)$, которые взаимно однозначно связаны с кривыми $y(r, \tau)$ и $f(r, \tau)$, как объяснено выше, для модели с квадратичным дрейфом при следующих значениях параметров: $s = 0{,}8$; $m_1 = 0{,}2$; $m_2 = 1$. Предельные значения этих функций, как и в предыдущей модели, могут быть найдены в аналитическом виде:

$$\lim_{u\to 0} Y(u) = \lim_{u\to 0} F(u) = r, \quad \lim_{u\to 1} Y(u) = \lim_{u\to 1} F(u) = \alpha\, m_1.$$

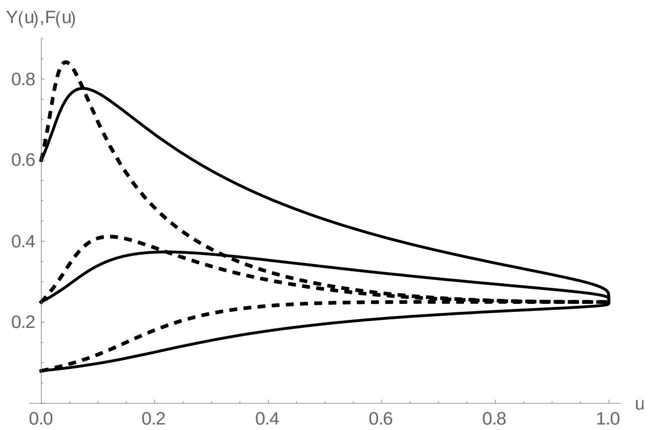

Рис. 4. Кривые доходности $Y(u)$ (сплошные) и форвардные кривые $F(u)$ (пунктирные) для модели с квадратичным дрейфом для значений ставки $r \in \{0{,}08;\ 0{,}25;\ 0{,}6\}$

Заключение

В статье представлены модели, для которых могут быть найдены кривые доходности бескупонных облигаций и соответствующие форвардные кривые, не относящиеся к классу аффинных моделей. К сожалению, модели, допускающие такие решения, немногочисленны и, в частности, включают в себя некоторые известные модели: модель CIR(1980) [5] и модель Ана–Гао [6]. Сформулируем требования к структуре модели краткосрочной процентной ставки, которая допускала бы получение временной структуры цены облигации в форме (2).

Параметры ряда (2) определяются уравнением (9), из которого, собственно, получается система уравнений относительно неизвестных α, $a(\tau)$ и c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$

1. Для получения нетривиального решения (т.е. для наличия $c_n \neq 0$) необходимо, чтобы степени p и q полиномов $m(r)$ и $s(r)$, определяющих дрейф и волатильность краткосрочной процентной ставки, удовлетворяли одному из следующих условий: $\{p \le 2, q = 3\}$, $\{p = 2, q \le 3\}$, $\{p > 2, q = p + 1\}$. В этих случаях находятся уравнения, из которых определяется положительный параметр α.

2. Другое необходимое условие связано с существованием функции $a(\tau)$, не зависящей от индекса суммирования ряда (2).

3. Кроме того, необходимо, чтобы коэффициенты $\{c_n\}$ не зависели от переменной τ.

Одновременное выполнение этих необходимых условий существенно сужает семейство моделей, для которых решение уравнения временной структуры (1) имеет вид (2).

Вообще говоря, удается найти только один основной случай $\{p = 2, q = 3\}$ – модель с квадратичным дрейфом Ана–Гао [6], из которого при $m_2 \to 0$ получается модель с линейным дрейфом. И далее при $m_1 \to 0$ имеем модель CIR(1980) [5] с нулевым дрейфом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Merton R. Continuous-Time Finance. Oxford : Blackwell Publ., 1990. 732 p.
2. Duffee G.R. Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models // J. of Finance. 2002. V. 57, No. 1. P. 405–443.
3. Медведев Г.А. Полиномиальные модели временной структуры доходности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 2 (39). С. 39–48.
4. The Handbooks of fixed income securities / F. Fabozzi, T. Fabozzi, eds. New York : IRWIN Prof. Publ., 1995. 1402 p.
5. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. An analysis of variable rate loan contracts // J. of Finance. 1980. V. 35. P. 389–403.
6. Ahn D.-H., Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics // The Review of Financial Studies. 1999. V. 12(4). P. 721–762.
7. Vasiček O.A. An equilibrium characterization of the term structure // J. of Financial Economics. 1977. V. 5. P. 177–188.
8. Медведев Г.А. Плотности вероятностей процессов процентных ставок доходности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 3 (36). С. 35–48.
9. Hull J.C. Options, futures, and other derivatives. Boston : Prentice Hall, 1998. 841 p.
10. Медведев Г.А. Стохастические процессы финансовой математики. Минск : Белорус. гос. ун-т, 2005. 243 с.

Медведев Геннадий Алексеевич, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: MedvedevGA@bsu.by
Белорусский государственный университет (г. Минск, Беларусь).

Поступила в редакцию 24 ноября 2017 г.

Medvedev Gennady A. (Belarusian State University, Minsk, Republic Belarus).

On a family of non-affine models of the term structure of yield.

Keywords: equation of term structure of yield; price of zero-coupon bond; CIR(1980) model; Ahn-Gao model; yield curve; forward curve.

DOI: 10.17223/19988605/42/6

The equation of term structure for the price of a zero-coupon bond is considered, the solution of which in analytical form is known, basically, for the simplest models and has an affine structure with respect to the short-term rate. In this paper, we construct solutions of this equation for a family of term structure models that are based on short-term rate processes, in which the square of volatility is proportional to the third power of the short-term rate in stochastic differential equations. The solution of the equation is sought in the form of a definite functional series and, as a result, is reduced to a confluent hypergeometric function. Three versions of the underlying stochastic differential equations for short-term rate processes are considered: with zero drift, linear drift, and quadratic drift. Numerical examples are given for the yield curve and the forward rate curve for these versions. Some conditions for the existence of nontrivial solutions of the equation of term structure in the family of processes under consideration are formulated.

Unfortunately, models that admit such solutions are few and, in particular, include some well-known models: the CIR (1980) model and the Ahn-Gao model. The requirements for the structure of the short-term interest rate model, which would allow the receipt of a term structure of the bond price in the form considered in the article, are reduced to the following.

1. To obtain a non-trivial solution, it is necessary that the degrees of polynomials determining the drift and volatility of the short-term interest rate satisfied certain constraints.

2. Another necessary condition is connected with the fact that the functional series is power-law with respect to a function that does not depend on the index of summation of the series.

3. In addition, it is necessary that the coefficients of the functional series do not depend on the maturity of the bond.

Simultaneous fulfillment of these necessary conditions significantly narrows the family of models for which the solution of the time-structure equation has the form considered in the article.

REFERENCES

1. Merton, R. (1990) *Continuous-Time Finance.* Oxford: Blackwell Publ.
2. Duffee, G.R. (2002) Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models. *Journal of Finance*. 57(1). pp. 405–443. DOI: 10.1111/1540-6261.00426
3. Medvedev, G.A. (2017) Polynomial models of yield term structure. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(39). pp. 39–48. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/39/6
4. Fabozzi, F. &, Fabozzi, T. (eds) (1995) *The Handbooks of Fixed Income Securities.* New York: IRWIN Prof.
5. Cox, J.C., Ingersoll, J.E. & Ross, S.A. (1980) An analysis of variable rate loan contracts. *Journal of Finance.* 35. pp. 389–403. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1980.tb02169.x

6. Ahn, D.-H. & Gao, B. (1999) A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *The Review of Financial Studies.* 12(4). pp. 721–762. DOI: 10.1093/rfs/12.4.721
7. Vasiček, O.A. (1977) An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics.* 5. pp. 177–188. DOI: 10.1016/0304-405X(77)90016-2
8. Medvedev, G.A. (2016) The probability density of the processes of yield interest rates. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(36). pp. 35–48. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/36/4
9. Hull, J.C. (1998) *Options, futures, and other derivatives.* Boston: Prentice Hall.
10. Medvedev, G.A. (2005) *Stokhasticheskie protsessy finansovoy matematiki* [Stochastic Processes of Financial Mathematics]. Minsk: BSU.