МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2018 **№ 43**

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук», Высшей аттестационной комиссии

Founder – Tomsk State University

EDITIRIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Operation Research Department, Tomsk State University. Tel: +72822529599
Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Operation Research Department Tomsk State University. Tel: +72822529599
Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Doctor. of Sc.,
Docent of the Operation Research Department.
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Sc., Prof. of theHigher Mathematics and Mathematical Modeling Department Tomsk State University
Vladimir Vishnevsky – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gennady Koshkin – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Cybernetics Department Tomsk State University
Yury Kostyuk – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Departmen Tomsk State University
Anjela Matrosova – Doctor of Sc., Prof., Head of the Programming Department Tomsk State University
Anatoly Nazarov– Doctor of Sc., Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University
Konstantin Samouylov– Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)
Eugene Semenkin – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State Aerospace University (Krasnoyarsk, Russia)
Sergey Sushchenko – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department, Director of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science Tomsk State University
Mais Farkhadov – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gurami Tsitsiashvili – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)

Editorial address:
Faculty of applied mathematics and cybernetics
National Research Tomsk State University
36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050
Telephone / fax: +72822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli
PhD, Prof.
University VII
Paris, France

Vladimir Dombrovskii
Doctor of Sc., Prof.
Tomsk State University
Russia

Alexander Dudin
Doctor of Sc., Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Enco Orsingher
PhD, Prof.
University of Rome
Italy

Paolo Prinetto
Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Gilbert Saporta
PhD, Prof.
Pierre and Marie Curie
University, Paris, France

Raimund Ubar
Doctor of Sc., Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia

Reindert Nobel
Doctor of Sc., Associate Prof.
Vrije University of Amsterdam
Netherlands

Nina Yevtushenko
Doctor of Sc., Prof.
Tomsk State University
Russia

Yervant Zorian
PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

JORNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031
The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.
The topics of the journal are the following:

- *control of dynamical systems,*
- *mathematical modeling,*
- *data processing,*
- *informatics and programming,*
- *discrete function and automation,*
- *designing and diagnostics of computer systems.*

Rules of registration articles are given in a site:
http://journals.tsu.ru/informatics/
ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

Учредитель – Томский государственный университет

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой исследования операций ТГУ. Тел. +72822529599
Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры исследования операций ТГУ. Тел. +72822529599
Нежельская Людмила Алексеевна – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, доц. кафедры исследования операций ТГУ
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики и математического моделирования ТГУ
Вишневский Владимир Миронович – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Кошкин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры теоретической кибернетики ТГУ
Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ
Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, зав. кафедры программирования ТГУ
Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ
Самуйлов Константин Евгеньевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)
Семенкин Евгений Станиславович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СГАУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)
Сущенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики, директор института прикладной математики и компьютерных наук ТГУ
Фархадов Маис Паша Оглы – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Цициашвили Гурами Шалвович – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
факультет прикладной математики и кибернетики
Телефон / факс: +72822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Кавалли
д-р философии, проф.
Университет VII,
Париж, Франция

Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Александр Дудин
д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Енцо Орзингер
д-р философии, проф.
Римский университет,
Италия

Паоло Принетто
проф.
Политехнический институт,
Турин, Италия

Жильберт Сапорта
д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии,
Кюри, Париж, Франция

Раймонд Убар
д-р, проф.
Технологический университет,
Таллинн, Эстония

Рейндерт Нобель
д-р, доцент
Свободный университет,
Амстердам, Нидерланды

Нина Евтушенко
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Ервант Зориан
д-р философии, гл. науч. сотр.
фирмы «Синопсис», США

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке
Статьи публикуются на русском и английском языках.
Тематика публикаций журнала:

- *управление динамическими системами,*
- *математическое моделирование,*
- *обработка информации,*
- *информатика и программирование,*
- *дискретные функции и автоматы,*
- *проектирование и диагностика вычислительных систем.*

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).
Правила оформления статей приведены на сайте:
http://journals.tsu.ru/informatics/
ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 43

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Мансимов К.Б., Аликберов А.А.
Необходимые условия оптимальности второго порядка в одной задаче управления с переменной структурой..... 4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Дмитренко А.Г.
Моделирование электромагнитного рассеяния на структуре из двух идеально проводящих трехосных эллипсоидов..... 16

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Dogadova T.V., Vasiliev V.A.
Adaptive prediction of non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck process..... 26
Завгородняя М.Е.
Вероятностные характеристики потока событий с продлевающимся мертвым временем специального типа..... 33
Земцов А.Н.
Представление изображений с помощью преобразования Ле Галла..... 42
Осипов О.А.
Анализ RQ-сети массового обслуживания с делением и слиянием требований..... 49
Поздниченко Н.Н., Гуменюк А.С., Шпынов С.Н.
Карта генов – новое средство представления множества однохромосомных геномов и их компонентов..... 56
Цициашвили Г.Ш.
Устойчивость в теореме Неймана–Пирсона и ее применения..... 65

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Бабанов А.М., Петров А.В.
Проблема непротиворечивости схем данных и ее решение в ERM-репозитории..... 72

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Ефанов Д. В.
Экспериментальные исследования кодов с суммированием единичных и одного взвешенного разрядов в системах функционального контроля..... 81

Сведения об авторах 95

CONTENTS

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Mansimov K.B., Alekberov A.A.
The second order necessary optimality conditions in a control problem with variable structure..... 4

MATHEMATICAL MODELING

Dmitrenko A.G.
Simulation of electromagnetic scattering by the structure of two perfectly conducting three-axes ellipsoids..... 16

DATA PROCESSING

Dogadova T.V., Vasiliev V.A.
Adaptive prediction of non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck process..... 26
Zavgorodnyaya M.E.
Probabilistic characteristics of the flow of events with prolonging dead time of special type..... 33
Zemtsov A.N.
Representation of images using Le Gall transform..... 42
Osipov O.A.
Analysis of fork/join queueing networks with retrials 49
Pozdnichenko N.N., Gumenyuk A.S. Shpynov S.N.
Map of genes – new tool for representation of a single-chromosome genomes and their components..... 56
Tsitsiashvili G.Sh.
Stability in the Neumann–Pearson theorem and its applications..... 65

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Babanov A.M., Petrov A.V.
Problem of data scheme consistency and its solution in the ERM repository..... 72

DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS

Efanov D.V.
Experimental studies of one-bit and one weighted bit sum codes within concurrent error detection systems..... 81

Brief information about the authors 95

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 43

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 517.977
DOI: 10.17223/19988605/43/1

К.Б. Мансимов, А.А. Аликберов

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений. Установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.
Ключевые слова: дифференциальное уравнение; интегральное уравнение типа Вольтерра; необходимое условие оптимальности; аналог уравнения Эйлера; аналог условия Лежандра–Клебша; необходимое условие оптимальности второго порядка.

На практике очень важным вопросом является адекватное описание изучаемого процесса. Во многих случаях это приводит к необходимости изучения многоэтапных процессов (составных или ступенчатых), которые очень широко распространены на практике. Такие процессы возникают в космонавтике, теории локомоционнных процессов, химической технологии и др. [1–4].

В работах [1–10] и других изучен ряд задач оптимального управления многоэтапными процессами, описываемых на различных отрезках времени (или же в различных областях) разными дифференциальными (разностными) уравнениями. Подобные задачи оптимального управления называются также задачами оптимального управления с переменной структурой. В предлагаемой работе исследуется одна многоэтапная задача оптимального управления, описываемая совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений. При предположении открытости области управления установлен аналог уравнения Эйлера [11–13]. Выведены необходимые условия оптимальности второго порядка.

1. Постановка задачи

Допустим, что на заданном отрезке времени $T = T_1 \cup T_2$ $\left(T_1 = [t_0, t_1],\ T_2 = [t_1, t_2]\right)$ управляемый процесс описывается системой уравнений

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f\left(t, s, x(s), u(s)\right) ds, \quad t \in T_1, \tag{1}$$

$$\dot{y} = g(t, y, v), \quad t \in T_2, \tag{2}$$

$$y(t_1) = G\left(x(t_1)\right). \tag{3}$$

Здесь $f(t,s,x,u)$ $\left(g(t,y,v)\right)$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x,u) $\left((y,v)\right)$ до второго порядка включительно, $G(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая m-мерная вектор-функция, t_0, t_1, t_2 заданы, причем $t_0 < t_1 < t_2$, $u(t)$ $\left(v(t)\right)$ – $r(q)$-мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества U (V), т.е.

$$u(t)\in U\subset R^r,\quad t\in T_1=[t_0,t_1],$$
$$v(t)\in V\subset R^q,\quad t\in T_2=[t_1,t_2]. \tag{4}$$

Пару $(u^o(t),v^o(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $(u^o(t),v^o(t))$ соответствует единственное непрерывное (кусочно-гладкое) решение $x^o(t)$ $(y^o(t))$ уравнения (1) (задачи Коши (2)–(3)).

На решениях системы (1)–(3), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим терминального типа функционал

$$I(u,v)=\varphi_1(x(t_1))+\varphi_2(y(t_2)). \tag{5}$$

Здесь $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Допустимое управление $(u^o(t),v^o(t))$, доставляющее минимум функционалу (5) при ограничениях (1)–(4), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u^o(t),v^o(t),x^o(t),y^o(t))$ – оптимальным процессом.

Нашей целью является вывод необходимых условий оптимальности при предположении открытости области управления.

2. Вариации функционала и неявные необходимые условия оптимальности

Пусть $(u^o(t),v^o(t),x^o(t),y^o(t))$ – фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar u(t)=u^o(t)+\Delta u(t),\ \bar v(t)=v^o(t)+\Delta v(t),\ \bar x(t)=x^o(t)+\Delta x(t),\ \bar y(t)=y^o(t)+\Delta y(t))$ обозначим произвольный допустимый процесс и, используя формулу Тейлора, запишем приращение критерия качества (5):

$$\begin{aligned}\Delta I(u^o,v^o)&=\mathrm{I}(\bar u,\bar v)-\mathrm{I}(u^o,v^o)=\left[\varphi_1(\bar x(t_1))-\varphi_1(x^o(t_1))\right]+\left[\varphi_2(\bar y(t_2))-\varphi_2(y^o(t_2))\right]=\\&=\frac{\partial\varphi_1'(x^o(t_1))}{\partial x}\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1(x^o(t_1))}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+\frac{\partial\varphi_2'(y^o(t_2))}{\partial y}\Delta y(t_2)+\\&+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2}\Delta y(t_2)+\mathrm{o}_1\left(\|\Delta x(t_1)\|^2\right)+\mathrm{o}_2\left(\|\Delta y(t_2)\|^2\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем $\|\alpha\|$ есть норма вектора $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)'$, в R^n определяемая формулой $\|\alpha\|=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$, штрих для матриц – операция транспонирования, а для векторов – знак скалярно произведения, а $\mathrm{o}(\beta^2)$ есть величина более высокого порядка малости, чем β^2, т.е. $\mathrm{o}(\beta^2)/\beta^2\to 0$ при $\beta\to 0$.

Далее ясно, что $(\Delta x(t),\Delta y(t))$ будет решением задачи

$$\Delta x(t)=\int_{t_0}^{t}\left[f(t,s,\bar x(s),\bar u(s))-f(t,s,x^o(s),u^o(s))\right]ds,\ \ t\in T_1, \tag{7}$$

$$\Delta\dot y(t)=g(t,\bar y(t),\bar v(t))-g(t,y^o(t),v^o(t)), \tag{8}$$

$$\Delta y(t_1)=G(\bar x(t_1))-G(x^o(t_1)). \tag{9}$$

Предположим, что $\psi^o(t)$, $p^o(t)$ –пока неизвестные *n* и *m*-мерные вектор-функции.

Умножая обе части соотношения (7) ((8)) слева скалярно на $\psi^{o}(t)$ $\left(p^{o}(t)\right)$, а затем интегрируя обе части полученного тождества по T_1 (T_2), будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\Delta x(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\left[\int_{t_0}^{t}\left[f\left(t,s,\overline{x}(s),\overline{u}(s)\right)-f\left(t,s,x^{o}(s),u^{o}(s)\right)\right]ds\right]dt, \tag{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(t)\Delta\dot{y}(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(t)\left[g\left(t,\overline{y}(t),\overline{v}(t)\right)-g\left(t,y^{o}(t),v^{o}(t)\right)\right]dt. \tag{11}$$

Полагая $N\left(p^{o},x\right)=p^{o}(t_1)G(x)$ и используя формулу интегрирования по частям, в определенном интеграле получим

$$\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(t)\Delta\dot{y}(t)dt=p^{o'}(t_2)\Delta y(t_2)-\left[N\left(p^{o},\overline{x}(t_1)\right)-N\left(p^{o},x^{o}(t_1)\right)\right]-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{o'}(t)\Delta y(t)dt. \tag{12}$$

Учитывая тождества (10)–(12), из формулы приращения (6) получим

$$\begin{aligned}\Delta I\left(u^{o},v^{o}\right)&=\frac{\partial\varphi_1'\left(x^{o}(t_1)\right)}{\partial x}\Delta x(t_1)+\frac{\partial\varphi_2'\left(y^{o}(t_2)\right)}{\partial y}\Delta y(t_2)+\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\Delta x(t)dt-\\&-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi^{o}(s)\left[f\left(s,t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)\right)-f\left(s,t,x^{o}(t),u^{o}(t)\right)\right]ds\right]dt+p^{o'}(t_2)\Delta y(t_2)-\\&-\frac{\partial N'\left(p^{o},x^{o}(t_1)\right)}{\partial x}\Delta x(t_1)-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{o'}(t)\Delta y(t)dt-\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(t)\left[g\left(t,\overline{y}(t),\overline{v}(t)\right)-g\left(t,y^{o}(t),v^{o}(t)\right)\right]dt+\\&+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{o}(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)-\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^{o},x^{o}(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+\\&+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{o}(t_2)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2)+o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta y(t_2)\right\|^2\right)-o_3\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Из (7) ясно, что

$$\Delta x(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\left[f\left(t_1,t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)\right)-f\left(t_1,t,x^{o}(t),u^{o}(t)\right)\right]dt. \tag{13}$$

Принимая во внимание (13), из (12) будем иметь

$$\begin{aligned}\Delta I\left(u^{o},v^{o}\right)&=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_1'\left(x^{o}(t_1)\right)}{\partial x}\left[f\left(t_1,t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)\right)-f\left(t_1,t,x^{o}(t),u^{o}(t)\right)\right]dt+\frac{\partial\varphi_2'\left(y^{o}(t_2)\right)}{\partial y}\Delta y(t_2)+\\&+\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\Delta x(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi^{o}(s)\left[f\left(s,t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)\right)-f\left(s,t,x^{o}(t),u^{o}(t)\right)\right]ds\right]dt+p^{o'}(t_2)\Delta y(t_2)-\\&-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial N'\left(p^{o},x^{o}(t_1)\right)}{\partial x}\left[f\left(t_1,t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)\right)-f\left(t_1,t,x^{o}(t),u^{o}(t)\right)\right]dt-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{o'}(t)\Delta y(t)dt-\\&-\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(t)\left[g\left(t,\overline{y}(t),\overline{v}(t)\right)-g\left(t,y^{o}(t),v^{o}(t)\right)\right]dt+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{o}(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)-\\&-\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^{o},x^{o}(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{o}(t_2)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2)+o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right)+\\&+o_2\left(\left\|\Delta y(t_2)\right\|^2\right)-o_3\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Введем аналоги функции Гамильтона–Понтрягина:

$$H\left(t,\mathrm{x},\mathrm{u},\psi^{\mathrm{o}}\right)=-\frac{\partial\varphi_1'\left(x^{\mathrm{o}}\left(t_1\right)\right)}{\partial x}f\left(t_1,t,x,u\right)+\int_t^{t_1}\psi^{\mathrm{o}'}\left(s\right)f\left(s,t,x,u\right)ds+\frac{\partial N'\left(p^{\mathrm{o}},x^{\mathrm{o}}\left(t_1\right)\right)}{\partial x}f\left(t_1,t,x,u\right),$$

$$M\left(t,\mathrm{y},\mathrm{v},p^{\mathrm{o}}\right)=p^{\mathrm{o}'}g\left(t,y,v\right).$$

С учетом введенных обозначений формула приращения (14) примет вид:

$$\begin{aligned}\Delta I\left(u^{\mathrm{o}},v^{\mathrm{o}}\right)=&-\int_{t_0}^{t_1}\left[H\left(t,\bar{x}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right),\psi^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)-H\left(t,x^{\mathrm{o}}\left(t\right),u^{\mathrm{o}}\left(t\right),\psi^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\right]dt-\\&-\int_{t_1}^{t_2}\left[M\left(t,\bar{y}\left(t\right),\bar{v}\left(t\right),p^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)-M\left(t,y^{\mathrm{o}}\left(t\right),v^{\mathrm{o}}\left(t\right),p^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\right]dt+\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\mathrm{o}}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(t_1\right)+\\&+\frac{1}{2}\Delta y'\left(t_2\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}\left(t_2\right)\right)}{\partial y^2}\Delta y\left(t_2\right)-\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 N\left(p^{\mathrm{o}},x^{\mathrm{o}}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(t_1\right)+\int_{t_0}^{t_1}\psi^{\mathrm{o}'}\left(t\right)\Delta y\left(t\right)dt+p^{\mathrm{o}'}\left(t_2\right)\Delta y\left(t_2\right)-\\&-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{\mathrm{o}'}\left(t\right)\Delta y\left(t\right)dt+\frac{\partial\varphi_2'\left(y^{\mathrm{o}}\left(t_2\right)\right)}{\partial y}\Delta y\left(t_2\right)+\mathrm{o}_1\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|^2\right)+\mathrm{o}_2\left(\left\|\Delta y\left(t_2\right)\right\|^2\right)-\mathrm{o}_3\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|^2\right).\end{aligned}\tag{15}$$

Из (15), используя формулу Тейлора, будем иметь

$$\begin{aligned}\Delta I\left(u^{\mathrm{o}},v^{\mathrm{o}}\right)=&\frac{\partial\varphi_2'\left(y^{\mathrm{o}}\left(t_2\right)\right)}{\partial y}\Delta y\left(t_2\right)+p^{\mathrm{o}'}\left(t_2\right)\Delta y\left(t_2\right)-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{\mathrm{o}'}\left(t\right)\Delta y\left(t\right)dt+\int_{t_0}^{t_1}\psi^{\mathrm{o}'}\left(t\right)\Delta x\left(t\right)dt-\\&-\int_{t_0}^{t_1}H_u'\left(t,x^{\mathrm{o}}\left(t\right),u^{\mathrm{o}}\left(t\right),\psi^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\Delta u\left(t\right)dt-\int_{t_0}^{t_1}H_x'\left(t,x^{\mathrm{o}}\left(t\right),u^{\mathrm{o}}\left(t\right),\psi^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\Delta x\left(t\right)dt-\\&-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta x'\left(t\right)H_{xx}\left(t,x^{\mathrm{o}}\left(t\right),u^{\mathrm{o}}\left(t\right),\psi^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\Delta x\left(t\right)+2\Delta u'\left(t\right)H_{ux}\left(t,x^{\mathrm{o}}\left(t\right),u^{\mathrm{o}}\left(t\right),\psi^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\Delta x\left(t\right)+\right.\\&\left.+\Delta x'\left(t\right)H_{uu}\left(t,x^{\mathrm{o}}\left(t\right),u^{\mathrm{o}}\left(t\right),\psi^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\Delta u\left(t\right)\right]dt-\int_{t_1}^{t_2}M_v'\left(t,y^{\mathrm{o}}\left(t\right),v^{\mathrm{o}}\left(t\right),p^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\Delta v\left(t\right)dt-\\&-\int_{t_1}^{t_2}M_y'\left(t,y^{\mathrm{o}}\left(t\right),v^{\mathrm{o}}\left(t\right),p^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\Delta y\left(t\right)dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta y'\left(t\right)M_{yy}\left(t,y^{\mathrm{o}}\left(t\right),v^{\mathrm{o}}\left(t\right),p^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\Delta y\left(t\right)+\right.\\&\left.+2\Delta v'\left(t\right)M_{vy}\left(t,y^{\mathrm{o}}\left(t\right),v^{\mathrm{o}}\left(t\right),p^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\Delta y\left(t\right)+\Delta v'\left(t\right)M_{vv}\left(t,y^{\mathrm{o}}\left(t\right),v^{\mathrm{o}}\left(t\right),p^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)\Delta v\left(t\right)\right]dt+\\&+\mathrm{o}_1\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|^2\right)+\mathrm{o}_2\left(\left\|\Delta y\left(t_2\right)\right\|^2\right)-\mathrm{o}_3\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|^2\right)+\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\mathrm{o}}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(t_1\right)+\\&+\frac{1}{2}\Delta y'\left(t_2\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}\left(t_2\right)\right)}{\partial y^2}\Delta y\left(t_2\right)-\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 N\left(p^{\mathrm{o}},x^{\mathrm{o}}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(t_1\right)-\\&-\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{o}_4\left(\left[\left\|\Delta x\left(t\right)\right\|+\left\|\Delta u\left(t\right)\right\|\right]^2\right)dt-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{o}_5\left(\left[\left\|\Delta y\left(t\right)\right\|+\left\|\Delta v\left(t\right)\right\|\right]^2\right)dt.\end{aligned}$$

Предположим, что $\left(\psi^{\mathrm{o}}\left(t\right),p^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right)$ удовлетворяет соотношениям

$$\psi^{\mathrm{o}}\left(t\right)=H_x\left(t,x^{\mathrm{o}}\left(t\right),u^{\mathrm{o}}\left(t\right),\psi^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right),\tag{17}$$

$$\dot{p}^{\mathrm{o}}\left(t\right)=-M_y\left(t,y^{\mathrm{o}}\left(t\right),v^{\mathrm{o}}\left(t\right),p^{\mathrm{o}}\left(t\right)\right),\tag{18}$$

$$p^{\mathrm{o}}\left(t_2\right)=-\frac{\partial\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}\left(t_2\right)\right)}{\partial y}.\tag{19}$$

Соотношение (17) есть линейное неоднородное интегральное уравнение типа Вольтерра относительно $\psi^{\circ}(t)$, а соотношение (28) – линейное однородное дифференциальное уравнение относительно $p^{\circ}(t)$. Систему (17)–(19) назовем сопряженной системой для задачи (1)–(5).

При выполнении соотношений (17)–(19) формула приращения (16) примет вид:

$$\Delta I\left(u^{\circ},v^{\circ}\right)=-\int_{t_0}^{t_1}H'_u\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\Delta u(t)\,dt-\int_{t_1}^{t_2}M'_v\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\Delta v(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2)-\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\Delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\Delta x(t)+2\,\Delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\Delta x(t)+$$
$$+\Delta x'(t)H_{uu}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\Delta u(t)\Big]dt-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big[\Delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\Delta y(t)+$$
$$+2\,\Delta v'(t)M_{vy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\Delta y(t)+\Delta v'(t)M_{vv}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\Delta v(t)\Big]dt+\eta_1(\Delta u,\Delta v),\tag{20}$$

где по определению

$$\eta_1(\Delta u,\Delta v)=o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta y(t_2)\right\|^2\right)-o_3\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right)-\int_{t_0}^{t_1}o_4\left(\left[\left\|\Delta x(t)\right\|+\left\|\Delta u(t)\right\|\right]^2\right)dt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}o_5\left(\left[\left\|\Delta y(t)\right\|+\left\|\Delta v(t)\right\|\right]^2\right)dt.\tag{21}$$

Из (7)–(9), используя условию Липшица, получаем, что

$$\left\|\Delta x(t)\right\|\le L_1\int_{t_0}^{t}\left[\left\|\Delta x(\tau)\right\|+\left\|\Delta u(\tau)\right\|\right]d\tau,\tag{22}$$

$$\left\|\Delta y(t)\right\|\le L_2\int_{t_0}^{t}\left[\left\|\Delta y(\tau)\right\|+\left\|\Delta v(\tau)\right\|\right]d\tau+L_2\left\|\Delta x(t_1)\right\|,\tag{23}$$

где $L_i=\text{const}>0$, $i=\overline{1,3}$ – некоторые постоянные.

Применяя к неравенству (22) аналог леммы Гронуолла–Беллмана будем иметь

$$\left\|\Delta x(t)\right\|\le L_4\int_{t_0}^{t_1}\left\|\Delta u(\tau)\right\|d\tau.\tag{24}$$

А из (23) следует, что

$$\left\|\Delta y(t)\right\|\le L_5\int_{t_1}^{t_2}\left\|\Delta v(\tau)\right\|d\tau+L_6\left\|\Delta x(t_1)\right\|,\tag{25}$$

где L_4, L_5, L_6 – некоторые положительные постоянные.

С учетом (24) из (25) получим

$$\left\|\Delta y(t)\right\|\le L_5\int_{t_1}^{t_2}\left\|\Delta v(\tau)\right\|d\tau+L_6\int_{t_1}^{t_2}\left\|\Delta u(\tau)\right\|d\tau,\tag{26}$$

где $L_7=const>0$ – некоторое постоянное.

По предположению, U и V открытые множества. Поэтому специальное приращение управления $\left(u^{\circ}(t),v^{\circ}(t)\right)$ можно определить как

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon\,\delta u(t),\ \ t \in T_1,$$
$$\Delta v_\varepsilon(t) = \varepsilon\,\delta v(t),\ \ t \in T_2, \tag{27}$$

где ε – достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t) \in R^r,\ t \in T_1$ $\left(\delta v(t) \in R^r,\ t \in T_2\right)$ – произвольная кусочно-непрерывная (с конечным числом точек разрыва первого рода) r (q)-мерная вектор-функция – допустимая вариация управляющей функции $u^{\circ}(t)$ $\left(v^{\circ}(t)\right)$.

Через $\left(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t)\right)$ обозначим специальное приращение траектории $\left(x^{\circ}(t), y^{\circ}(t)\right)$, отвечающее приращению (27) управления $\left(u^{\circ}(t), v^{\circ}(t)\right)$.

Из оценок (24), (26) следует, что

$$\left\|\Delta x_\varepsilon(t)\right\| \le L_8\,\varepsilon,\ \ t \in T_1,$$
$$\left\|\Delta y_\varepsilon(t)\right\| \le L_9\,\varepsilon,\ \ t \in T_2, \tag{28}$$

где $L_8,\ L_9 = \text{const} > 0$ – некоторые постоянные.

Используя оценки (18) и учитывая (27), при помощи (7)–(9) по схеме, например, из [14] доказывается

Лемма 1. Для $\left(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t)\right)$ справедливы разложения

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon\,\delta x(t) + \mathrm{o}(\varepsilon; t), \tag{29}$$
$$\Delta y_\varepsilon(t) = \varepsilon\,\delta y(t) + \mathrm{o}(\varepsilon; t), \tag{30}$$

где $\left(\delta x(t), \delta y(t)\right)$ – вариация траектории, являющаяся решением уравнения в вариациях

$$\delta x(t) = \int_{t_0}^{t} \Big[f_x\left(t, s, x^{\circ}(s), u^{\circ}(s)\right)\delta x(s) + f_u\left(t, s, x^{\circ}(s), u^{\circ}(s)\right)\delta u(s) \Big] ds,\quad t \in T_1, \tag{31}$$

$$\delta\dot{y}(t) = g_y\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t)\right)\delta y(t) + g_v\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t)\right)\delta v(t),\quad t \in T_2, \tag{32}$$

$$\delta y(t_1) = G_x\left(x^{\circ}(t_1)\right)\delta y(t_1). \tag{33}$$

Учитывая (27) и разложения (29), (30) в формуле приращения (20) получаем, что

$$\Delta I_\varepsilon\left(u^{\circ}, v^{\circ}\right) = I\left(u^{\circ} + \Delta u_\varepsilon, v^{\circ} + \Delta v_\varepsilon\right) - I\left(u^{\circ}, v^{\circ}\right) =$$
$$= -\varepsilon\left[\int_{t_0}^{t_1} H'_u\left(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t)\right)\delta u(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} M'_v\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right)\delta v(t)\,dt\right] +$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg[\delta x'(t_1)\frac{\partial^2 \varphi_1\left(x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1) - \delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ}, x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1) + \delta y'(t_2)\frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2) -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta x'(t) H_{xx}\left(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t) + 2\,\delta u'(t) H_{ux}\left(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t) +$$
$$+\delta x'(t) H_{uu}\left(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t)\right)\delta u(t)\Big]dt - \int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta y'(t) M_{yy}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right)\delta y(t) +$$
$$+2\delta v'(t) M_{vy}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right)\delta y(t) + \delta v'(t) M_{vv}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right)\delta v(t)\Big]dt\Bigg] + \mathrm{o}\left(\varepsilon^2\right). \tag{34}$$

Из разложения (34) следует, что первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала качества (5) имеют соответственно вид:

$$\delta^1 I\left(u^{\circ}, v^{\circ}; \delta u, \delta v\right) = -\int_{t_0}^{t_1} H'_u\left(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t)\right)\delta u(t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} M'_v\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right)\delta v(t)\,dt, \tag{35}$$

$$\delta^2 I\left(u^{\circ},v^{\circ};\,\delta u,\delta v\right)=\delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\delta x\left(t_1\right)-\delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\delta x\left(t_1\right)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t)+$$

$$+2\,\delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t)+\delta x'(t)H_{uu}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta u(t)\Big]dt+ \tag{36}$$

$$+\delta y'\left(t_2\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}\left(t_2\right)\right)}{\partial y^2}\delta y\left(t_2\right)-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta y(t)+$$

$$+2\delta v'(t)M_{vy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta y(t)+\delta v'(t)M_{vv}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta v(t)\Big]dt\,.$$

Из результатов классического вариационного исчисления (см. напр.: [11–14]) с учетом (35), (36) следует, что вдоль оптимального процесса $\left(u^{\circ}(t),v^{\circ}(t),x^{\circ}(t),y^{\circ}(t)\right)$ для всех $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T_1$, $\delta v(t)\in R^r$, $t\in T_2$ выполняются соотношения

$$\int_{t_0}^{t_1}H_u'\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta u(t)\,dt+\int_{t_1}^{t_2}M_v'\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta v(t)\,dt=0\,, \tag{37}$$

$$\delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\delta x\left(t_1\right)-\delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\delta x\left(t_1\right)+\delta y'\left(t_2\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}\left(t_2\right)\right)}{\partial y^2}\delta y\left(t_2\right)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t)+2\,\delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t)+$$

$$+\delta x'(t)H_{uu}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta u(t)\Big]dt-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta y(t)+$$

$$+2\delta v'(t)M_{vy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta y(t)+\delta v'(t)M_{vv}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta v(t)\Big]dt\ge 0. \tag{38}$$

3. Необходимые условия оптимальности

Тождество (37) является неявным необходимым условием оптимальности первого порядка, а неравенство (38) есть неявное необходимое условие оптимальности второго порядка.

Используя произвольность и независимость вариаций $\delta u(t)$, $\delta v(t)$ управляющих функций $u^{\circ}(t)$ и $v^{\circ}(t)$, при помощи (37) доказывается

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $\left(u^{\circ}(t),v^{\circ}(t)\right)$ в задаче (1)–(5) необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$H_u\left(\theta,x^{\circ}(\theta),u^{\circ}(\theta),\psi^{\circ}(\theta)\right)=0\,, \tag{39}$$

для всех точек непрерывности $\theta\in[t_0,t_1)$ управления $u^{\circ}(t)$;

$$M_v\left(\theta,y^{\circ}(\theta),v^{\circ}(\theta),p^{\circ}(\theta)\right)=0\,, \tag{40}$$

для всех точек непрерывности $\theta\in[t_1,t_2)$ управления $v^{\circ}(t)$.

Система соотношений (39), (40) есть необходимые условия оптимальности первого порядка и представляют собой аналог уравнения Эйлера.

Каждое допустимое управление $\left(u^{\circ}(t),v^{\circ}(t)\right)$, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности (39), (40), назовем классической экстремалью. Ясно, что оптимальное управление (если оно существует) находится среди классических экстремалей.

Для сужения множества классических экстремалей, подозрительных на оптимальность, надо иметь необходимые условия оптимальности второго порядка, выраженные непосредственно через параметры задачи (1)–(5). С этой целью будем использовать неявное необходимое условие оптимальности второго порядка (38).

Пусть $R(t,\tau)$ $(n\times n)$ матричная функция, удовлетворяющая матричным интегральным уравнениям типа Вольтерра [15–17]:

$$R(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}R(t,s)\,f_x\left(s,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right)ds+f_x\left(t,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right),$$

$$R(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}f_x\left(s,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right)R(s,\tau)ds+f_x\left(s,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right).$$

Через $F(t,\tau)$ обозначим $(m\times m)$ матричную функцию, являющуюся решением матричного дифференциального уравнения

$$F_{\tau}(t,\tau)=-F(t,\tau)\,g_y\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau)\right)$$

с начальным условием

$$F(t,t)=E,$$

где E – $(m\times m)$ единичная матрица.

Решение $\delta x(t)$ интегрального уравнения (31) допускает представление [15–17]

$$\delta x(t)=\int_{t_0}^{t}R(t,\tau)\left[\int_{t_0}^{\tau}f_u\left(s,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right)\delta u(s)ds+f_u\left(t,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right)\delta u(\tau)\right]d\tau. \qquad (41)$$

Преобразуя правую часть представления (40), используя формулу Дирихле (см. напр.: [11]), получим

$$\delta x(t)=\int_{t_0}^{t}Q(t,\tau)\delta u(\tau)d\tau, \qquad (42)$$

где по определению

$$Q(t,\tau)=f_u\left(t,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right)+\int_{\tau}^{t}R(t,s)\,f_u\left(s,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right)ds.$$

А решение задачи Коши (32)–(33) допускает представление [11, 18]

$$\delta y(t)=F(t,t_1)\delta y(t_1)+\int_{t_1}^{t}F(t,\tau)\,g_v\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau)\right)\delta v(\tau)d\tau.$$

Следовательно,

$$\delta y(t)=F(t,t_1)G_x\left(x^{\circ}(t_1)\right)\delta x(t_1)+\int_{t_1}^{t}F(t,\tau)\,g_v\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau)\right)\delta v(\tau)d\tau. \qquad (43)$$

С учетом (42) представление (43) записывается в виде

$$\delta y(t)=\int_{t_0}^{t_1}F(t,t_1)G_x\left(x^{\circ}(t_1)\right)Q(t_1,\tau)\delta u(\tau)d\tau+\int_{t_1}^{t}F(t,\tau)\,g_v\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau)\right)\delta v(\tau)d\tau. \qquad (44)$$

Учитывая произвольность вариаций $\delta u(t)$ и $\delta v(t)$, предположим, что $\delta v(t)\equiv 0$.

Тогда из представления (44) будем иметь

$$\delta y(t)=\int_{t_0}^{t_1}L(t,\tau)\delta u(\tau)d\tau, \qquad (45)$$

где по определению

$$L(t,\tau)=F(t,t_1)G_x\left(x^{\circ}(t_1)\right)Q(t_1,\tau).$$

А неравенство (36) примет вид

$$\delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1)-\delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1)+\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t)+2\delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t)+ \tag{46}$$

$$+\delta x'(t)H_{uu}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta u(t)\Big]dt-\int_{t_0}^{t_1}\delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta y(t)\ge 0.$$

Используя представление (42), доказывается, что

$$\delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)Q'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}Q(t_1,s)\delta u(s)\,d\tau\,ds, \tag{47}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t)\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{\tau}^{t_1}\delta u'(\tau)H_{ux}\left(\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau),\psi^{\circ}(\tau)\right)Q(\tau,t)\,d\tau\right]\delta u(t)\,dt, \tag{48}$$

$$\delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)Q'(t_1,\tau)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}Q(t_1,s)\delta u(s)\,d\tau\,ds,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t)\,dt=$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}Q'(t,\tau)H_{xx}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)Q(t,s)\,dt\right]\delta u(s)\,ds\,d\tau, \tag{49}$$

Далее при помощи представления (45) доказывается, что

$$\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)L'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}L(t_2,s)\delta u(s)\,d\tau\,ds, \tag{50}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta y(t)\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)\left[\int_{t_1}^{t_2}L'(t,\tau)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)L(t,s)\,dt\right]\delta u(s)\,ds\,d\tau.$$

Введя обозначение

$$K(\tau,s)=-Q'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}Q(t_1,s)-L'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}L(t_2,s)+$$

$$+\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}Q'(t,\tau)H_{xx}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)Q(t,s)\,dt- \tag{51}$$

$$-Q'(t_1,\tau)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}Q(t_1,s)+\int_{t_1}^{t_2}L'(t,\tau)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)L(t,s)\,dt$$

и учитывая тождества (47)–(50), из неравенства (46) получим, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)K(\tau,s)\delta u(s)\,ds\,d\tau+2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\delta u'(\tau)H_{ux}\left(\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau),\psi^{\circ}(\tau)\right)L(\tau,t)\,d\tau\right]\delta u(t)\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(t)H_{uu}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta u(t)\,dt\le 0. \tag{52}$$

Теперь предположим, что $\delta u(t) \equiv 0$, $\delta v(t) \neq 0$. Тогда из представлений (42), (44) получим, что

$$\delta x(t) \equiv 0, \quad t \in T_1,$$

$$\delta y(t) = \int_{t_1}^{t} F(t,\tau) g_v\left(\tau, y^{\circ}(\tau), v^{\circ}(\tau)\right) \delta v(\tau) d\tau. \tag{53}$$

При этом неравенство (36) примет вид

$$\delta y'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2} \delta y(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} \Big[\delta y'(t) M_{yy}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right) \delta y(t) + \tag{54}$$

$$+2\delta v'(t) M_{vy}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right) \delta y(t) + \delta v'(t) M_{vv}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right) \delta v(t) \Big] dt \geq 0.$$

Используя представление (53), доказывается, что

$$\delta y'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2} \delta y(t_2) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \delta u'(\tau) g_v'\left(\tau, y^{\circ}(\tau), v^{\circ}(\tau)\right) F'(t_2,\tau) \frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2} F(t_2,s) g_v\left(s, y^{\circ}(s), v^{\circ}(s)\right) \delta u(s) ds\, d\tau, \tag{55}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta v'(t) M_{vy}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right) \delta y(t) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{t}^{t_2} \delta v'(\tau) M_{vy}\left(\tau, y^{\circ}(\tau), v^{\circ}(\tau), p^{\circ}(\tau)\right) F(\tau,t) d\tau \right] g_v\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t)\right) \delta u(t) dt, \tag{56}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta y'(t) M_{yy}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right) \delta y(t) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \delta u'(\tau) g_v'\left(\tau, y^{\circ}(\tau), v^{\circ}(\tau)\right) \times$$

$$\times \left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_2} F'(t,\tau) M_{yy}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right) F(t,s) dt \right] g_v\left(s, y^{\circ}(s), v^{\circ}(s)\right) \delta u(s) ds\, d\tau. \tag{57}$$

Введя обозначение

$$M(\tau,s) = F'(t_2,\tau) \frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2} F(t_2,s) + \int_{\max(\tau,s)}^{t_2} F'(t,\tau) M_{yy}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right) F(t,s) dt$$

и учитывая тождества (55)–(57), неравенство (54) записывается в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \delta v'(\tau) g_v'\left(\tau, y^{\circ}(\tau), v^{\circ}(\tau)\right) M(\tau,s) g_v\left(s, y^{\circ}(s), v^{\circ}(s)\right) \delta u(s) ds\, d\tau +$$

$$+2 \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{t_1}^{t_2} \delta v'(\tau) g_v'\left(\tau, y^{\circ}(\tau), v^{\circ}(\tau)\right) M_{vy}\left(\tau, y^{\circ}(\tau), v^{\circ}(\tau), p^{\circ}(\tau)\right) F(\tau,t) d\tau \right] g_v\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t)\right) \delta v(t) dt + \tag{58}$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \delta v'(t) M_{vv}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right) \delta v(t) \leq 0.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали $\left(u^{\circ}(t), v^{\circ}(t)\right)$ в задаче (1)–(5) необходимо, чтобы неравенства (52), (58) выполнялись для всех $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T_1$, $\delta v(t) \in R^r$, $t \in T_2$ соответственно.

Заметим, что полученный результат является довольно общим. Из него, используя произвольность вариаций $\delta u(t)$, $\delta v(t)$ управляющих функций $u^{\circ}(t)$, $v^{\circ}(t)$, можно получить ряд более легко проверяемых условий оптимальности и, в частности, исследовать особые в классическом смысле [14, 19, 20] управления.

Заключение

В статье изучается одна задача оптимального управления, описываемая совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений. При предположении открытости области управления установлен аналог уравнения Эйлера. Выведено конструктивно проверяемое необходимое условие оптимальности второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габелко К.Н. Последовательное улучшение многоэтапных процессов // Автоматика и телемеханика. 1974. № 11. С. 72–80.
2. Кириченко С.Б. Оптимальное управление системами с промежуточными фазовыми ограничениями // Кибернетика и системный анализ. 1994. № 4. С. 104–111.
3. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами // Доклады АН СССР. 1976. Т. 176, № 4. С. 754–756.
4. Никольский М.С. Об одной вариационной задаче с переменной структурой // Вестник Московского университета. Сер. Вычислительная математика и кибернетика. 1987. № 1. С. 36–41.
5. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск : Наука, 1987. 226 с.
6. Тадумадзе Т.А., Авалишвили Н.М. Регулярные возмущения в оптимальных задачах с переменной структурой // Оптимальные задачи в системах с переменной структурой : сб. Тбилиси : Изд-во Тбилисского гос. ун-та, 1985. С. 100–154.
7. Харатишвили Г.Л. Принцип максимума в оптимальных задачах с переключением // Труды ИСУ АН ГССР. 1980. Т. 19, № 1. С. 5–17.
8. Магеррамов Ш.Ф., Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных ступенчатых систем управления // Журнал вычислительной математики и математияческой физики. 2001. № 3. С. 360–366.
9. Багирова С.А., Мансимов К.Б. Особые управления в одной ступенчатой задаче управления // Автоматика и вычислительная техника. 2007. № 3. С. 74–81.
10. Мансимов К.Б., Насияти М.М. Необходимые условия оптимальности в одной многоэтапной дискретной задаче управления // Математическое и компьютерное моделирование. Сер. физико-математических наук. 2011. № 5. С. 162–179.
11. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. : Наука, 1979. 429 с.
12. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М. : Высшая школа, 2005. 335 с.
13. Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др. Методы оптимизации. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
14. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Наука, 1973. 256 с.
15. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2013. 224 с.
16. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1989. 156 с.
17. Цалюк З.Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Сер. математический анализ. 1977. Т. 15. С. 131–138.
18. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1973. 256 с.
19. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задаче оптимального управления : автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. Баку, 1994. 42 с.
20. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку : Изд-во ЭЛМ, 1999. 174 с.

Поступила в редакцию 2 октября 2017 г.

Mansimov K.B., Alekberov A.A. (2018) THE SECOND ORDER NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN A CONTROL PROBLEM WITH VARIABLE STRUCTURE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 43. pp. 4–15

DOI: 10.17223/19988605/43/1

The paper deals with the problem of optimal control by minimizing functional of a terminal type

$$I(u,v)=\varphi_1\left(x(t_1)\right)+\varphi_2\left(y(t_2)\right) \tag{1}$$

with constraints

$$\begin{aligned} u(t)&\in U\subset R^r, \quad t\in T_1=[t_0,t_1],\\ v(t)&\in V\subset R^q, \quad t\in T_2=[t_1,t_2], \end{aligned} \tag{2}$$

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} f\left(t,s,x(s),u(s)\right)ds, \ \ t\in T_1, \tag{3}$$

$$\dot{y}=g(t,y,v), \ t\in T_2 \tag{4}$$

$$y(t_1)=G\left(x(t_1)\right). \tag{5}$$

Here $f(t,s,x,u)$, $(g(t,y,v))$ are give n (m)-dimensional vector-functions, respectively, continuous with respect to all the variables together with partial derivatives with respect to (x,u) $((y,v))$ up to the second order inclusive, $G(x)$ is m-dimensional twice continuously differentiable vector-function, t_0, t_1, t_2 are given and $t_0 < t_1 < t_2$, $u(t)$ $(v(t))$ are r (q)-dimensional piecewise-continuous (with a finite number of points of discontinuity of the first kind) vector-functions of control actions, values from a given non-empty, bounded, and open sets U (V), $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ are given twice continuously differentiable in $R^n(R^m)$ scalar functions. Here $\varphi_1(x)$ and $\varphi_2(y)$ are given m-dimensional vector functions, respectively, continuous with respect to all the variables together with partial derivatives up to the second order inclusive.

Keywords: differential equations; Volterra type integral equations; necessary optimality conditions; analog Euler equation; analog Lejandr–Klebch conditions; second order necessary optimality conditions.

MANSIMOV Kamil Bairamali ogly (Doktor of Physics and Mathematics, Professor, Baku State University, Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

ALEKBEROV Aydyn Abdulla ogly. (Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: kmansimov@mail.ru

REFERENCES

1. Gabelko, K.N. (1974) Consistent improvement of multi-stage processes. *Automation and Remote Control*. 11. pp. 72–80. (In Russian).
2. Kirichenko, S.B. (1994) Optimal'noye upravleniye sistemami s promezhutochnymi fazovymi ogranicheniyami [Optimum control of systems with intermediate phase constraints]. *Kibernetika i sistemnyy analiz – Cybernetics and Systems Analysis*. 4. pp. 104–111.
3. Velichenko, V.V. (1976) Optimal'noye upravleniye sostavnymi sistemami [Optimal control of composite systems]. *Doklady AN SSSR*. 176(4). pp. 754–756.
4. Nikolskiy, M.S. (1987) Ob odnoy variatsionnoy zadache s peremennoy strukturoy [On a variational problem with a variable structure]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. Vychislitel'naya matematika i kibernetika*. 1. pp. 36–41.
5. Ashchepkov, L.T. (1987) *Optimal'noye upravleniye razryvnymi sistemami* [Optimum control of discontinuous systems]. Novosibirsk: Nauka.
6. Tadumadze, T.A. & Avalishvili, N.M. (1985) Regulyarnyye vozmushcheniya v optimal'nykh zadachakh s peremennoy strukturoy [Optimum problems in systems with variable structure]. In: *Optimal'nyye zadachi v sistemakh s peremennoy strukturoy* [Optimum problems in systems with variable structure]. Tbilisi: Tbilisi State University. pp. 100–154.
7. Kharatishvili, G.L. (1980) Printsip maksimuma v optimal'nykh zadachakh s pereklyucheniyem [The maximum principle in optimal switching problems]. *Trudy ISU AN GSSR*. 19(1). pp. 5–17.
8. Magerramov, Sh.F. & Mansimov, K.B. (2001) Optimization of a class of discrete step control systems. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematiyacheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 3. pp. 360–366. (In Russian).
9. Bagirova, S.A. & Mansimov, K.B. (2007) Singular control in a single step control problem. *Automation and Remote Control*. 3. pp. 74–81.
10. Mansimov, K.B. & Nasiyati, M.M. (2011) Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti v odnoy mnogoetapnoy diskretnoy zadache upravleniya [Necessary optimality conditions in one multi-stage discrete control problem]. *Matematicheskoye i komp'yuternoye modelirovaniye. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk*. 5. pp. 162–179.
11. Alekseyev, V.M., Tikhomirov, V.M. & Fomin, S.V. (1979) *Optimal'noye upravleniye* [Optimal control]. Moscow: Nauka.
12. Demyanov, V.F. (2005) *Usloviya ekstremuma i variatsionnoye ischisleniye* [Extremum conditions and calculus of variations]. Moscow: Vysshaya shkola.
13. Gabasov, R., Kirillova, F.M. et al. (2011) *Metody optimizatsii* [Methods of optimization]. Minsk: Chetyre chetverti.
14. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Osobyye optimal'nyye upravleniya* [Singular optimal controls]. Moscow: Nauka.
15. Abdullayev, A.A. & Mansimov, K.B. (2013) *Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti v protsessakh, opisyvayemykh sistemoy integral'nykh uravneniy tipa Vol'terra* [Necessary optimality conditions in processes described by a system of integral equations of Volterra type]. Baku: ELM.
16. Vasilyeva, A.B. & Tikhonov, A.N. (1989) *Integral'nyye uravneniya* [Integral equations]. Moscow: Moscow State University.
17. Tsalyuk, Z.B. (1977) Integral'nyye uravneniya Vol'terra [Integral equations of Volterra]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. matematicheskiy analiz*. 15. pp. 131–138.
18. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Optimizatsiya lineynykh system* [Optimization of linear systems]. Minsk: Belarusian State University.
19. Mansimov, K.B. (1994) *Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti osobykh protsessov v zadache optimal'nogo upravleniya* [Necessary conditions for the optimality of singular processes in the optimal control problem]. Abstract of Physics and Mathematics Dr. Diss. Baku.
20. Mansimov, K.B. (1999) *Osobyye upravleniya v sistemakh s zapazdyvaniyem* [Singular controls in systems with time delay]. Baku: ELM.

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 43

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.874.6
DOI: 10.17223/19988605/43/2

А.Г. Дмитренко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО РАССЕЯНИЯ НА СТРУКТУРЕ ИЗ ДВУХ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ТРЕХОСНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ

Метод дискретных вспомогательных источников использован для моделирования в резонансной частотной области электромагнитного рассеяния на структуре из двух идеально проводящих трехосных эллипсоидов. Приведены некоторые результаты численных расчетов сечений рассеяния для эллипсоидов с различными геометрическими параметрами.
Ключевые слова: электромагнитное рассеяние; метод дискретных источников; идеально проводящий трехосный эллипсоид; сечение рассеяния.

Значительный интерес для исследователей представляет изучение рассеяния электромагнитных волн структурами, образованными совокупностью идеально проводящих тел, имеющих размеры, сравнимые с длиной волны. Этот интерес обусловлен необходимостью решения ряда практически важных проблем, например таких, как проблемы электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств, радионавигации, дефектоскопии, радиолокационной заметности и идентификации объектов. Особый интерес представляет случай, когда расстояние между телами структуры меньше длины волны. В этом случае поле, рассеянное каждым телом, наводит вторичные токи на всех других телах. В результате токи на всех телах структуры оказываются взаимосвязанными, и структуру приходится рассматривать как единое целое, что существенно усложняет решение соответствующей задачи рассеяния.

Частным случаем задачи электромагнитного рассеяния совокупностью тел является задача рассеяния на двух телах. Структура из двух тел удобна для исследований, во-первых, потому, что решение соответствующей граничной задачи для нее проще, чем для структуры с большим количеством тел, а во-вторых, в этом случае проще выделить эффекты, обусловленные взаимодействием рассеивателей.

Анализ имеющейся в распоряжении автора литературы показывает, что к настоящему времени уже решен ряд задач электромагнитного рассеяния на двух идеально проводящих телах. Так, в работах [1–3] рассмотрено рассеяние плоской электромагнитной волны на двух идеально проводящих сферах. В работах [4–5] приведены результаты, касающиеся рассеяния плоской волны на двух соосных круговых цилиндрах конечной длины; в работах [6–7] – на двух соосных вытянутых сфероидах, а в работе [8] – на двух суперэллипсоидах. Рассматривалось также электромагнитное рассеяние на ряде структур, состоящих из идеально проводящих тел различной геометрии. В частности, в работах [5, 9] рассмотрено рассеяние на структуре, состоящей из конечного кругового цилиндра и сферы, а в работе [8] – на структуре, состоящей из сфероида и биконуса.

Из вышеприведенного обзора видно, что все рассмотренные структуры обладают осевой симметрией. Такой набор рассмотренных структур объясняется тем, что использование осевой симметрии позволяет свести пространственную задачу к более простой плоской задаче.

В данной статье построено решение более сложной задачи рассеяния электромагнитной волны на структуре из двух идеально проводящих тел, когда тела структуры и структура в целом не обладают симметрией вращения, а именно задачи рассеяния на двух трехосных эллипсоидах. В основе решения лежит предложенный ранее в работах [10–11] общий метод решения задач электромагнитного рассеяния на структурах из конечного числа гладких идеально проводящих тел с произвольной формой

поверхности. Частными случаями рассмотренной в статье задачи являются упомянутые выше задачи рассеяния на идеально проводящих сферах и сфероидах. Выполнено сравнение полученных результатов с известными результатами. Исследовано влияние отклонений формы структуры от осесимметричной на ее сечения рассеяния.

1. Формулировка задачи

В безграничной однородной изотропной среде D_e с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_e и μ_e расположена структура, состоящая из двух идеально проводящих трехосных эллипсоидов D_1 и D_2, ограниченных гладкими поверхностями S_1 и S_2 (рис. 1). Структура возбуждается стационарным электромагнитным полем $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$, зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$. Требуется найти рассеянное поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в области D_e.

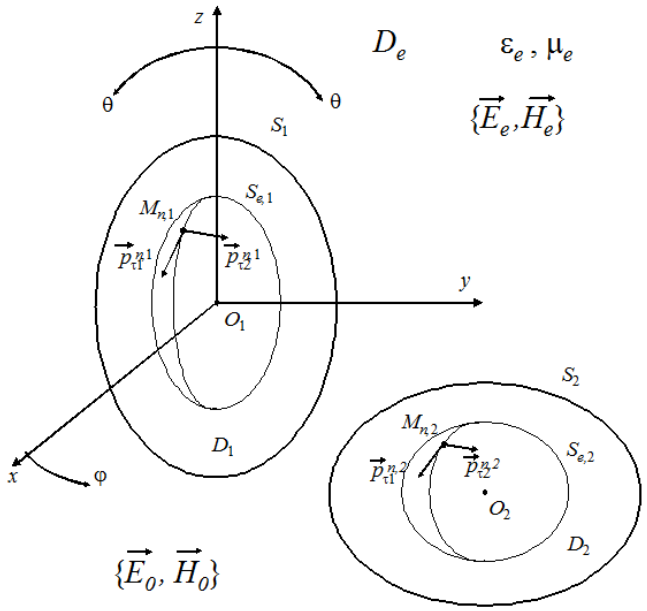


Рис. 1. Геометрия задачи

Поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ должно удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \vec{E}_e = i\omega\mu_e \vec{H}_e, \quad \nabla \times \vec{H}_e = -i\omega\varepsilon_e \vec{E}_e \text{ в } D_e, \tag{1}$$

граничным условиям

$$\vec{n} \times \vec{E}_e = -\vec{n} \times \vec{E}_0 \text{ на } S_1 \text{ и } S_2 \tag{2}$$

и условиям излучения

$$\{\sqrt{\varepsilon_e}\vec{E}_e; \sqrt{\mu_e}\vec{H}_e\} \times \vec{R}/R + \{\sqrt{\mu_e}\vec{H}_e; -\sqrt{\varepsilon_e}\vec{E}_e\} = O(R^{-1}), R \to \infty. \tag{3}$$

В выражениях (1)–(3) $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхностям S_1 и S_2, ограничивающим тела D_1 и D_2; $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$; $\vec{a} \times \vec{b}$ – векторное произведение.

2. Модель рассеянного поля

Модель рассеянного поля строится следующим образом. Введем внутри первого эллипсоида D_1 вспомогательную поверхность $S_{e,1} = K_{e,1} S_1$, подобную поверхности эллипсоида S_1 в смысле гомотетии с центром в центре эллипсоида O_1. Аналогично введем внутри второго эллипсоида D_2 вспомогательную

поверхность $S_{e,2} = K_{e,2} S_2$, подобную поверхности эллипсоида S_2 в смысле гомотетии с центром в центре второго эллипсоида O_2. Коэффициенты гомотетии (подобия) $K_{e,1}$ и $K_{e,2}$ характеризуют удаление вспомогательных поверхностей от поверхностей эллипсоидов, их значения лежат в интервале $0 < K_{e,1}, K_{e,2} < 1$ (при $K_{e,1}, K_{e,2} = 0$ вспомогательные поверхности стягиваются в точки, при $K_{e,1}, K_{e,2} = 1$ они совпадают с поверхностью соответствующего эллипсоида).

Выберем на вспомогательной поверхности $S_{e,1}$ внутри эллипсоида D_1 конечную совокупность точек $\{M_{n,1}\}_{n=1}^{N_1}$ и в каждой точке $M_{n,1}$ разместим пару независимых вспомогательных элементарных электрических диполей с моментами $\vec{p}_{\tau_1}^{n,1} = p_{\tau_1}^{n,1} \vec{e}_{\tau_1}^{n,1}$, $\vec{p}_{\tau_2}^{n,1} = p_{\tau_2}^{n,1} \vec{e}_{\tau_2}^{n,1}$, ориентированными вдоль единичных направлений $\vec{e}_{\tau_1}^{n,1}$, $\vec{e}_{\tau_2}^{n,1}$, выбранных в плоскости, касательной к $S_{e,1}$ в точке $M_{n,1}$. Аналогично выберем на вспомогательной поверхности $S_{e,2}$ внутри второго эллипсоида D_2 конечную совокупность точек $\{M_{n,2}\}_{n=1}^{N_2}$ и в каждой точке $M_{n,2}$ разместим пару независимых вспомогательных элементарных электрических диполей с моментами $\vec{p}_{\tau_1}^{n,2} = p_{\tau_1}^{n,2} \vec{e}_{\tau_1}^{n,2}$, $\vec{p}_{\tau_2}^{n,2} = p_{\tau_2}^{n,2} \vec{e}_{\tau_2}^{n,2}$, ориентированными вдоль единичных направлений $\vec{e}_{\tau_1}^{n,2}$, $\vec{e}_{\tau_2}^{n,2}$, выбранных в плоскости, касательной к $S_{e,2}$ в точке $M_{n,2}$. Число точек размещения диполей на $S_{e,1}$ равно N_1, а число точек размещения диполей на $S_{e,2}$ равно N_2. Предполагается, что все диполи излучают в однородную среду с параметрами ε_e и μ_e.

Представим неизвестное рассеянное поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в D_e в виде суммы полей введенных вспомогательных диполей:

$$\vec{E}_e(M) = (i/\omega\varepsilon_e)\left\{\sum_{n=1}^{N_1} \nabla\times(\nabla\times\vec{\Pi}_{n,1}) + \sum_{n=1}^{N_2} \nabla\times(\nabla\times\vec{\Pi}_{n,2})\right\},$$

$$\vec{H}_e(M) = \sum_{n=1}^{N_1} \nabla\times\vec{\Pi}_{n,1} + \sum_{n=1}^{N_2} \nabla\times\vec{\Pi}_{n,2},$$

$$\vec{\Pi}_{n,1} = \Psi_e(M, M_{n,1})\vec{p}_\tau^{n,1}, \quad \vec{\Pi}_{n,2} = \Psi_e(M, M_{n,2})\vec{p}_\tau^{n,2},$$

$$\Psi_e(M, M_{n,1}) = \exp(ik_e R_{MM_{n,1}})/(4\pi R_{MM_{n,1}}),\ \Psi_e(M, M_{n,2}) = \exp(ik_e R_{MM_{n,2}})/(4\pi R_{MM_{n,2}}),$$

$$\vec{p}_\tau^{n,1} = p_{\tau_1}^{n,1}\vec{e}_{\tau_1}^{n,1} + p_{\tau_2}^{n,1}\vec{e}_{\tau_2}^{n,1}, \quad \vec{p}_\tau^{n,2} = p_{\tau_1}^{n,2}\vec{e}_{\tau_1}^{n,2} + p_{\tau_2}^{n,2}\vec{e}_{\tau_2}^{n,2}, \quad M \in D_e. \qquad (4)$$

Здесь $k_e = \omega\sqrt{\varepsilon_e\mu_e}$ – волновое число в среде D_e; $R_{MM_{n,1}}$ – расстояние от точки $M_{n,1}$ на $S_{e,1}$ до точки M в D_e; $R_{MM_{n,2}}$ – расстояние от точки $M_{n,2}$ на $S_{e,2}$ до той же точки M в D_e; $p_{\tau_1}^{n,1}$, $p_{\tau_2}^{n,1}$ $(n = \overline{1, N_1})$ и $p_{\tau_1}^{n,2}$, $p_{\tau_2}^{n,2}$ $(n = \overline{1, N_2})$ – неизвестные комплексные постоянные (дипольные моменты); N_1 – число точек размещения диполей на вспомогательной поверхности $S_{e,1}$; N_2 – число точек размещения диполей на вспомогательной поверхности $S_{e,2}$.

Поле (4) удовлетворяет уравнениям Максвелла (1) и условиям излучения (3). Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (2), необходимо соответствующим образом выбрать дипольные моменты $p_{\tau_1}^{n,1}$, $p_{\tau_2}^{n,1}$ $(n = \overline{1, N_1})$ и $p_{\tau_1}^{n,2}$, $p_{\tau_2}^{n,2}$ $(n = \overline{1, N_2})$.

Используем для этого метод коллокаций. Суть этого метода заключается в поточечном удовлетворении граничным условиям на некоторых дискретных множествах точек, выбранных на поверхностях S_1 и S_2.

Пусть $M_{j_1}(j_1 = 1,2,...,L_1)$ – точки коллокации на поверхности S_1 первого эллипсоида, а $M_{j_2}(j_2 = 1,2,...,L_2)$ – точки коллокации на поверхности S_2 второго эллипсоида; L_1 – число точек

коллокации на S_1, L_2 – число точек коллокации на S_2. Тогда для определения неизвестных $p_{\tau_1}^{n,1}$, $p_{\tau_2}^{n,1}$ $(n=\overline{1,N_1})$ и $p_{\tau_1}^{n,2}$, $p_{\tau_2}^{n,2}$ $(n=\overline{1,N_2})$ получим следующую систему линейных алгебраических уравнений с комплексной матрицей размером $2(L_1+L_2)\times 2(N_1+N_2)$:

$$\vec{n}^{j_1}\times\vec{E}_e^{j_1}=-\vec{n}^{j_1}\times\vec{E}_0^{j_1},\qquad j_1=\overline{1,L_1},$$
$$\vec{n}^{j_2}\times\vec{E}_e^{j_2}=-\vec{n}^{j_2}\times\vec{E}_0^{j_2},\qquad j_2=\overline{1,L_2}. \tag{5}$$

В выражениях (5) $\vec{n}^{j_1}$ и $\vec{n}^{j_2}$ – единичные векторы нормалей в точках M_{j_1} и M_{j_2}; $\vec{E}_e^{j_1},\vec{E}_e^{j_2}$ и $\vec{E}_0^{j_1},\vec{E}_0^{j_2}$ – значения компонент рассеянного (4) и возбуждающего полей в этих же точках. Решение системы (5) находим путём минимизации функции

$$\Phi=\sum_{j=1}^{L_1}\left|\vec{n}^{j_1}\times(\vec{E}_e^{j_1}+\vec{E}_0^{j_1})\right|^2+\sum_{j=1}^{L_2}\left|\vec{n}^{j_2}\times(\vec{E}_e^{j_2}+\vec{E}_0^{j_2})\right|^2. \tag{6}$$

После решения задачи минимизации, т.е. определения неизвестных дипольных моментов $p_{\tau_1}^{n,1}$, $p_{\tau_2}^{n,1}$ $(n=\overline{1,N_1})$ и $p_{\tau_1}^{n,2}$, $p_{\tau_2}^{n,2}$ $(n=\overline{1,N_2})$, необходимые характеристики рассеянного поля определяем из (4). В частности, для компонент рассеянного поля в дальней зоне имеем

$$E_{e,\theta}(M)=(\mu_e/\varepsilon_e)^{1/2}H_{e,\varphi}(M)=(\exp(ik_eR)/k_eR)D_\theta(\theta,\varphi)+O(R^{-2}),$$
$$E_{e,\varphi}(M)=-(\mu_e/\varepsilon_e)^{1/2}H_{e,\theta}(M)=(\exp(ik_eR)/k_eR)D_\varphi(\theta,\varphi)+O(R^{-2}), \tag{7}$$

где компоненты диаграммы рассеяния $D_\theta(\theta,\varphi)$ и $D_\varphi(\theta,\varphi)$ определены выражениями

$$\mathrm{D}_\theta(\theta,\varphi)=(i\omega k_e\mu_e/4\pi)\left\{\sum_{n=1}^{N_1}\mathrm{G}_{n,1}(\theta,\varphi)[(\cos\theta\cos\varphi\cos\alpha_1^{n,1}+\cos\theta\sin\varphi\cos\beta_1^{n,1}-\sin\theta\cos\gamma_1^{n,1})p_{\tau_1}^{n,1}+\right.$$
$$+(\cos\theta\cos\varphi\cos\alpha_2^{n,1}+\cos\theta\sin\varphi\cos\beta_2^{n,1}-\sin\theta\cos\gamma_1^{n,1})p_{\tau_2}^{n,1}]+$$
$$+\sum_{n=1}^{N_2}\mathrm{G}_{n,2}(\theta,\varphi)[(\cos\theta\cos\varphi\cos\alpha_1^{n,2}+\cos\theta\sin\varphi\cos\beta_1^{n,2}-\sin\theta\cos\gamma_1^{n,2})p_{\tau_1}^{n,2}+$$
$$\left.+(\cos\theta\cos\varphi\cos\alpha_2^{n,2}+\cos\theta\sin\varphi\cos\beta_2^{n,2}-\sin\theta\cos\gamma_2^{n2})p_{\tau_2}^{n,2}]\right\},$$

$$\mathrm{D}_\varphi(\theta,\varphi)=(i\omega k_e\mu_e/4\pi)\left\{\sum_{n=1}^{N_1}\mathrm{G}_{n,1}(\theta,\varphi)[(\cos\varphi\cos\beta_1^{n,1}-\sin\varphi\cos\alpha_1^{n,1})p_{\tau_1}^{n,1}+(\cos\varphi\cos\beta_2^{n,1}-\sin\varphi\cos\alpha_2^{n,1})p_{\tau_2}^{n,1}]+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{N_2}G_{n,2}(\theta,\varphi)[(\cos\varphi\cos\beta_1^{n,2}-\sin\varphi\cos\alpha_1^{n,2})p_{\tau_1}^{n,2}+(\cos\varphi\cos\beta_2^{n,2}-\sin\varphi\cos\alpha_2^{n,2})p_{\tau_2}^{n,2}]\right\},$$

$$G_{n,1}(\theta,\varphi)=\exp\{-ik_e(x_{n,1}\sin\theta\cos\varphi+y_{n,1}\sin\theta\sin\varphi+z_{n,1}\cos\theta)\},$$
$$G_{n,2}(\theta,\varphi)=\exp\{-ik_e(x_{n,2}\sin\theta\cos\varphi+y_{n,2}\sin\theta\sin\varphi+z_{n,2}\cos\theta)\}, \tag{8}$$

в которых $\cos\alpha_1^{n,1},\cos\beta_1^{n,1},\cos\gamma_1^{n,1}$ и $\cos\alpha_2^{n,1},\cos\beta_2^{n,1},\cos\gamma_2^{n,1}$ – направляющие косинусы единичных векторов $\vec{e}_{\tau_1}^{n,1}$ и $\vec{e}_{\tau_2}^{n,1}$; $\cos\alpha_1^{n,2},\cos\beta_1^{n,2},\cos\gamma_1^{n,2}$ и $\cos\alpha_2^{n,2},\cos\beta_2^{n,2},\cos\gamma_2^{n,2}$ – направляющие косинусы единичных векторов $\vec{e}_{\tau_1}^{n,2}$ и $\vec{e}_{\tau_2}^{n,2}$; $x_{n,1},y_{n,1},z_{n,1}$ – декартовы координаты точки $M_{n,1}$; $x_{n,2},y_{n,2},z_{n,2}$ – декартовы координаты точки $M_{n,2}$; θ и φ – общепринятые угловые сферические координаты точки наблюдения *M*.

Контроль точности решения осуществляем путем вычисления относительного значения функции (6) на сетке точек, промежуточных по отношению к точкам коллокации, выбираемых на поверхностях S_1 и S_2 обоих эллипсоидов:

$$\Delta=(\Phi'/\Phi_0)^{1/2}, \tag{9}$$

где Φ' – значение функции (6) на указанной выше совокупности точек; Φ_0 – значение соответствующей нормы падающего поля на этой же совокупности точек, определяемое выражением

$$\Phi_0 = \sum_{j_1=1}^{L_1'} |\vec{n}^{j_1} \times \vec{E}_0^{j_1}|^2 + \sum_{j_2=1}^{L_2'} |\vec{n}^{j_2} \times \vec{E}_0^{j_2}|^2 ,$$

в котором L_1' и L_2' – число промежуточных точек соответственно на поверхностях S_1 и S_2.

3. Результаты моделирования

На основании изложенного выше метода была создана программа для расчета компонент рассеянного поля и контроля точности полученного решения. Входными величинами программы являются координаты центров эллипсоидов, ориентация их осей в декартовой системе координат (см. рис. 1), величины их полуосей в длинах волн, возбуждающее поле $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$, параметры подобия $K_{e,1}$ и $K_{e,2}$, числа точек размещения диполей N_1 и N_2 на вспомогательных поверхностях $S_{e,1}$ и $S_{e,2}$, а также числа точек коллокации L_1 и L_2 на поверхностях эллипсоидов S_1 и S_2. Выходными величинами программы являются компоненты диаграммы рассеяния $D_\theta(\theta,\varphi)$ и $D_\varphi(\theta,\varphi)$, бистатические сечения рассеяния

$$\sigma(\theta,\varphi) = \lim_{R\to\infty} 4\pi R^2 [|E_{e,\theta}|^2 + |E_{e,\varphi}|^2] / |\vec{E}_0|^2 , \qquad (10)$$

а также относительная норма невязки граничных условий (9). Минимизация функции (6) осуществляется методом сопряженных градиентов; итерационный процесс останавливается при условии, если относительное изменение функции на каждой из десяти последних итераций не превышает 0,001. С помощью данной программы выполнена серия вычислительных экспериментов, направленных на сравнение получаемых результатов с известными результатами и исследование влияния отклонения формы структуры от осесимметричной на сечения рассеяния.

Рисунок 2 иллюстрирует результаты сравнения сечений обратного рассеяния структуры в виде двух соприкасающихся сфер с соотношением радиусов 1,0 : 0,7, рассчитанных с помощью разработанной программы, с такими же результатами, приведенными в работе [2]. Отметим, что сфера является частным случаем эллипсоида при равенстве всех трех его полуосей. Структура размещена таким образом, что центры сфер расположены на оси *z*. Плоская волна падает на структуру вдоль оси *z*. По отношению к направлению прихода волны первой расположена сфера меньшего радиуса. По оси абсцисс на рис. 2 отложен волновой радиус $k_e a$ большей сферы; по оси ординат – сечение обратного рассеяния, нормированное на (πa^2).

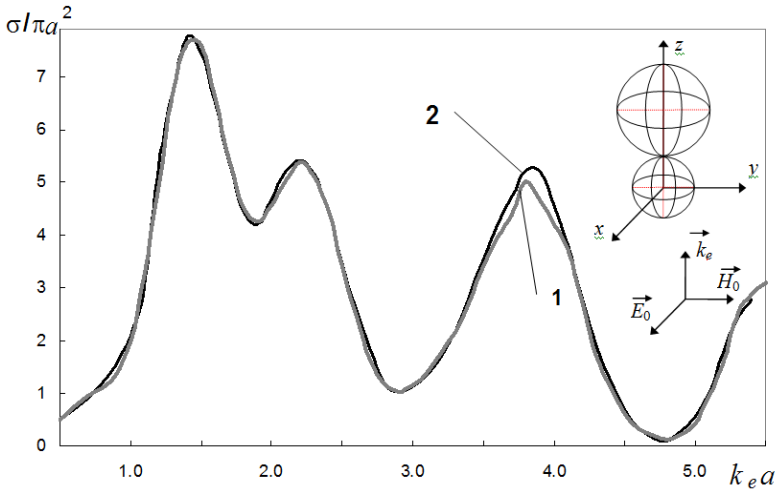


Рис. 2. Сечения обратного рассеяния структуры в виде двух соприкасающихся сфер с соотношением радиусов 1,0 : 0,7, рассчитанные различными методами: *1* – используемый метод, *2* – результаты работы [2]

При получении обсуждаемых результатов на каждой сфере число точек коллокации было выбрано равным числу точек размещения диполей: $L_1 = L_2 = N_1 = N_2 = 128$. Алгоритм размещения тех и других для обеих сфер выбран одинаковым: в каждом из шестнадцати полусечений φ = const, отстоящих друг от друга на угловое расстояние $\Delta\varphi = 22{,}5^{\circ}$, равномерно по углу θ расположено восемь точек коллокации. Коэффициенты подобия $K_{e,1}$ и $K_{e,2}$ были выбраны равными 0,5. Направления $\vec{e}_{\tau_1}^{\,n,1}$, $\vec{e}_{\tau_2}^{\,n,1}$ и $\vec{e}_{\tau_1}^{\,n,2}$, $\vec{e}_{\tau_2}^{\,n,2}$, вдоль которых ориентированы вспомогательные диполи, выбраны совпадающими с ортами $\vec{e}_{\theta}$ и $\vec{e}_{\varphi}$ сферической системы координат. Кривая *1* представляет результаты, полученные используемым методом, кривая *2* – результаты, приведенные в [2].

Как видно из рис. 2, имеет место очень хорошее совпадение сравниваемых результатов. Небольшие наблюдаемые отличия можно объяснить ошибками при графическом съеме информации с рисунка статьи [2], а также возрастанием ошибки наших расчетов (параметры метода фиксированы) при возрастании величины $k_e a$; при $k_e a > 3{,}0$ норма невязки граничных условий (9) превышает 8%.

С помощью разработанной программы было исследовано влияние отклонений формы структуры от осесимметричной на бистатические сечения рассеяния (10). Интерес к подобного рода исследованиям обусловлен тем, что при моделировании электромагнитных явлений удобно аппроксимировать рассматриваемую структуру, имеющую сложную форму, подходящей осесимметричной структурой. Эта аппроксимация оправдана тем, что решение задачи рассеяния на осесимметричных структурах существенно проще, чем решение такой же задачи на структурах более сложной формы, не обладающих симметрией вращения. Однако при этом возникает вопрос, насколько полученные при такой аппроксимации результаты соответствуют исходной структуре, не обладающей осевой симметрией.

Исследования были проведены для структуры, геометрия которой показана на рис. 3. Структура состоит из двух одинаковых трехосных эллипсоидов. Полуоси эллипсоидов $k_e a$, $k_e b$, $k_e c$ ориентированы вдоль осей *x*, *y*, *z* соответственно. Центры эллипсоидов расположены на оси *z* симметрично относительно начала координат. Структура возбуждается линейно поляризованной плоской волной, распространяющейся вдоль оси *z*, с вектором $\vec{E}_0$, ориентированным вдоль оси *x*. Алгоритм исследований заключался в следующем. Первоначально предполагалось, что структура обладает осевой симметрией, т.е. оба эллипсоида являются сфероидами ($k_e a = k_e b$). Затем последовательно изменялось значение полуоси $k_e a$; значения полуосей $k_e b$ и $k_e c$ сохранялись при этом неизменными. Для каждого случая рассчитывались бистатические сечения рассеяния.

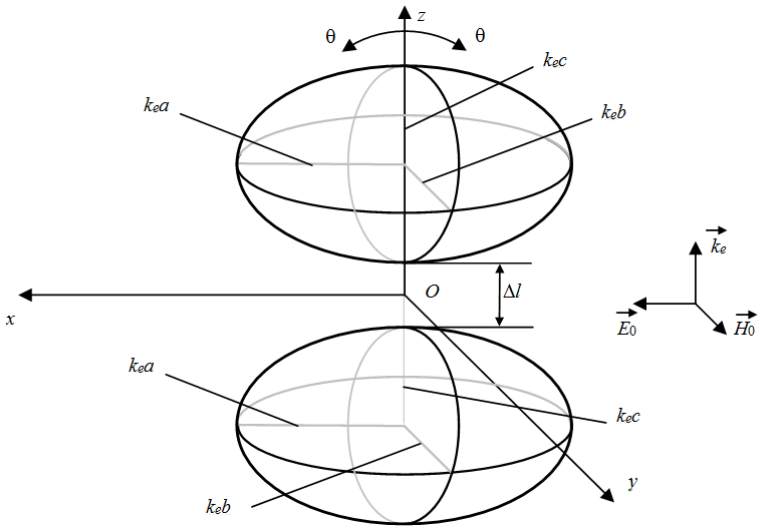


Рис. 3. Структура, состоящая из двух одинаковых трехосных эллипсоидов

Некоторые результаты проведенных исследований представлены на рисунках 4–7 для различных расстояний Δl между эллипсоидами. Результаты относятся к *E*-плоскости (плоскость векторов $\vec{k}_e$ и $\vec{E}_0$). В этой плоскости бистатические сечения рассеяния симметричны относительно оси *z*, поэтому результаты представлены только в полусечении $\varphi = 0$. Параметры метода для каждого эллипсоида выбраны одинаковыми: $N_1 = N_2 = 256$, $L_1 = L_2 = 512$. В локальных системах координат с центрами в центрах эллипсоидов точки размещения диполей и точки коллокации распределены следующим образом. В каждом из шестнадцати полусечений φ = const, отстоящих одно от другого на угловое расстояние $\Delta\varphi = 22{,}5^{\circ}$, равномерно по углу θ выбраны шестнадцать точек размещения диполей. Для точек коллокации алгоритм их расположения по углу θ выбран таким же, как для точек размещения диполей, но выбирают их как в полусечениях φ = const, определенных для точек размещения диполей, так и посередине между ними. При вышеуказанных параметрах метода значения невязки не превышали 15%.

Рисунок 4 относится к случаю, когда расстояние Δl между эллипсоидами равно $0{,}01\lambda$, рис. 5 – к случаю, когда Δl равно $0{,}1\lambda$, рис. 6 соответствует $\Delta l = 0{,}5\lambda$ и рис. 7 – $\Delta l = \lambda$. На каждом рисунке приведены три кривые. Кривые *1* относятся к структуре со значениями длин полуосей $k_e a = 4{,}0$, $k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$ (осесимметричная структура), кривые *2* – к структуре со значениями длин полуосей $k_e a = 4{,}2$, $k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$ (отклонение от осевой симметрии вдоль оси *x* – 5%), кривые *3* – к структуре со значениями длин полуосей $k_e a = 4{,}4$, $k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$ (отклонение от осевой симметрии вдоль оси *x* – 10%).

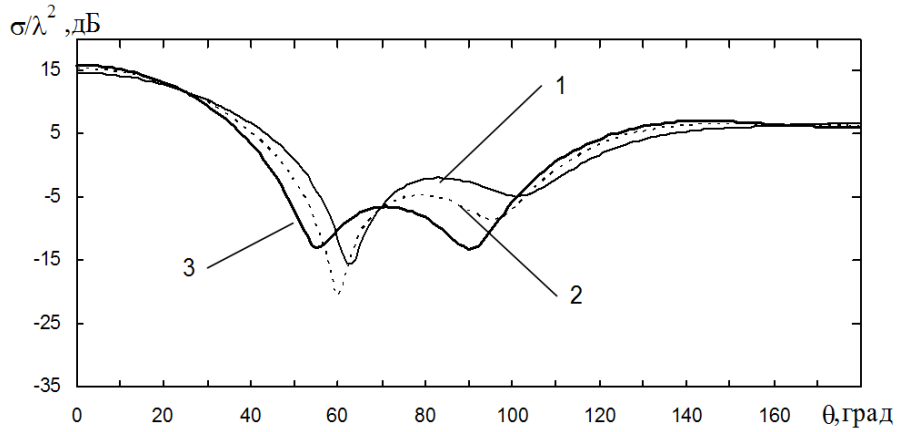


Рис. 4. Бистатические сечения рассеяния в *E*-плоскости двух одинаковых эллипсоидов, расположенных на расстоянии $\Delta l = 0{,}01\lambda$. *1* – $k_e a = k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$, *2* – $k_e a = 4{,}2$, $k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$, *3* – $k_e a = 4{,}4$, $k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$

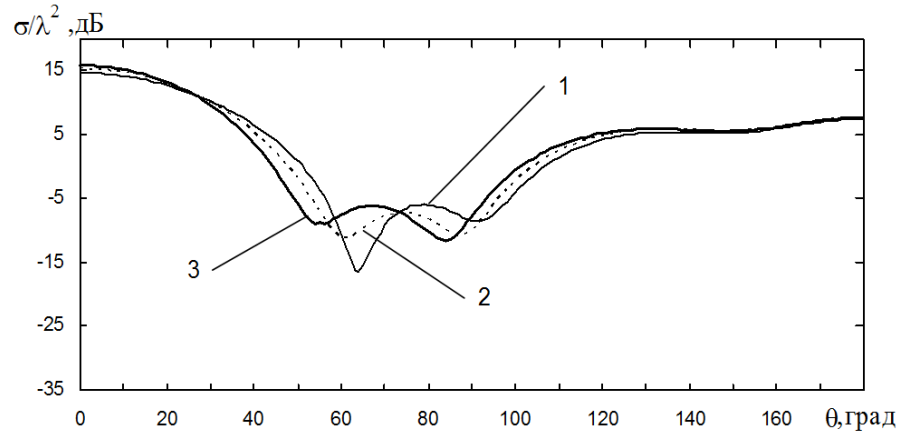


Рис. 5. Бистатические сечения рассеяния в *E*-плоскости двух одинаковых эллипсоидов, расположенных на расстоянии $\Delta l = 0{,}10\lambda$. *1* – $k_e a = k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$, *2* – $k_e a = 4{,}2$, $k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$, *3* – $k_e a = 4{,}4$, $k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$

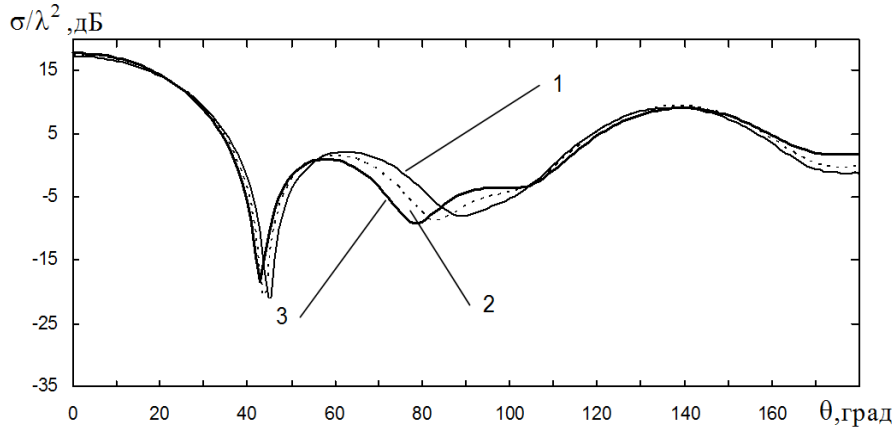


Рис. 6. Бистатические сечения рассеяния в *E*-плоскости двух одинаковых эллипсоидов, расположенных на расстоянии $\Delta l = 0{,}50\lambda$. *1* – $k_e a = k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$, *2* – $k_e a = 4{,}2$, $k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$, *3* – $k_e a = 4{,}4$, $k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$

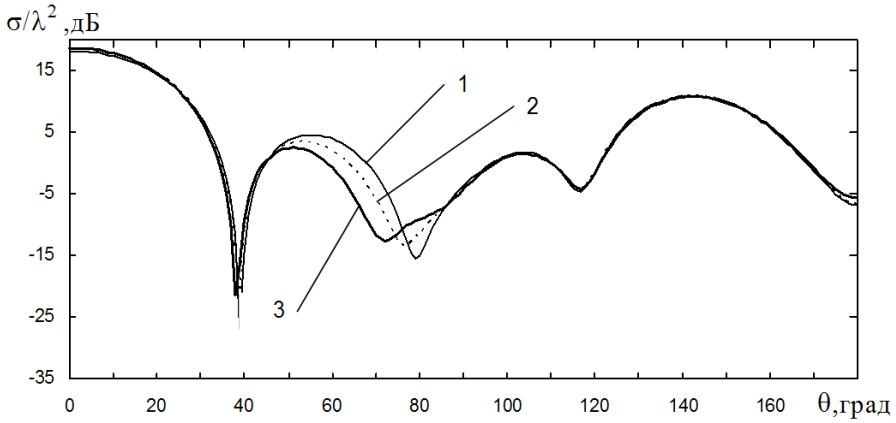


Рис. 7. Бистатические сечения рассеяния в *E*-плоскости двух одинаковых эллипсоидов, расположенных на расстоянии $\Delta l = 1{,}00\lambda$. *1* – $k_e a = k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$, *2* – $k_e a = 4{,}2$, $k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$, *3* – $k_e a = 4{,}4$, $k_e b = 4{,}0$, $k_e c = 2{,}0$

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. Отклонение формы структуры от осесимметричной в рассмотренных пределах почти не влияет на бистатические сечения рассеяния в направлениях $0° < \theta < 30°$, прилегающих к направлению прямого рассеяния ($\theta = 0°$), и в направлениях $150° < \theta < 180°$, прилегающих к направлению обратного рассеяния ($\theta = 180°$). Для остальных направлений рассеяния наблюдается существенное перераспределение энергии рассеянного поля в пространстве. Это говорит о том, что предсказать характер изменения диаграмм рассеяния даже при небольших изменениях геометрии структуры не представляется возможным без проведения численных расчетов, что оправдывает усилия, направленные на разработку универсальных (пригодных для рассеивателей произвольной формы) методов.

Заключение

Таким образом, в данной работе на основе метода дискретных источников построена модель поля, рассеянного структурой, состоящей из двух идеально проводящих трехосных эллипсоидов. На основе этой модели разработан численный алгоритм решения задачи электромагнитного рассеяния рассматриваемой структурой. Алгоритм реализован в виде компьютерной программы для расчета компонент рассеянного поля. Выполнено сравнение получаемых результатов с известными результатами. Приведены некоторые результаты моделирования, касающиеся влияния отклонения формы структуры от осесимметричной на бистатические сечения рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов И.П. Дифракция электромагнитных волн на двух шарах // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 2. С. 180–185.
2. Свешников А.Г., Еремин Ю.А. Численные методы электродинамики. М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1980. Вып. 4. С. 3–7. 122 с.
3. Bruning J.H., Yuen T.L. Multiple scattering of EM waves by spheres // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1971. V. 19, No. 3. P. 391–400.
4. Кюркчан А.Г., Скородумова Е.А. Решение задачи дифракции электромагнитной волны на группе тел методом диаграммных уравнений // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 11. С. 1330–1337.
5. Hunka J.F., Mei K.K. Electromagnetic scattering by two bodies of revolution // Electromagnetics. 1987. V. 1, No. 3. P. 329–347.
6. Cooray M.F.R., Ciric I.R. Electromagnetic scattering by a system of two parallel prolate spheroids // Canadian Journal of Physics. 1990. V. 68, No. 4-5. P. 376–384.
7. Sinha B.P., MicPhie R.H. Electromagnetic plane wave scattering by a system of two parallel conducting prolate spheroids // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1983. V. 31, No. 2. P. 294–304.
8. Кюркчан А.Г., Маненков С.А., Негорожина Е.С. Моделирование рассеяния волн группой близко расположенных тел // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53, № 3. С. 276–285.
9. Sarabandi K., Polatin P.F. Electromagnetic scattering from two adjacent objects // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1994. V. 42, No. 4. P. 510–517.
10. Дмитренко А.Г., Колчин В.А. Рассеяние электромагнитных волн на структурах из конечного числа трехмерных идеально проводящих тел // Известия вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 9. С. 766–772.
11. Дмитренко А.Г., Колчин В.А. Численный метод анализа электромагнитного рассеяния структурами из конечного числа трехмерных идеально проводящих тел // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 3. С. 277–282.

Поступила в редакцию 10 января 2018 г.

Dmitrenko A.G. (2018) SIMULATION OF ELECTROMAGNETIC SCATTERING BY THE STRUCTURE OF TWO PERFECTLY CONDUCTING THREE-AXES ELLIPSOIDS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 43. pp. 16–25

DOI: 10.17223/19988605/43/2

The problem of electromagnetic scattering by a structure of two perfectly conducting three-axes ellipsoids is solved in the resonance frequency range by means of the discrete sources method. The gist of the method to be used is the following. The unknown scattered field in the outer medium D_e is represented as a sum of the fields of the pairs of auxiliary elementary electric dipoles placed at the points $\{M_{n,1}\}_{n=1}^{N_1}$ and $\{M_{n,2}\}_{n=1}^{N_2}$ on the auxiliary surfaces $S_{e,1}$ and $S_{e,2}$ introduced inside each ellipsoid; N_1 and N_2 are the numbers of dipole pairs on $S_{e,1}$ and $S_{e,2}$, respectively. The form of auxiliary surface is similar to the form of ellipsoid's surface, and electric dipoles are oriented tangentially to the auxiliary surfaces. This way, we have the following representations for scattered field $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$:

$$\vec{E}_e(M) = (i/\omega\varepsilon_e)\left\{\sum_{n=1}^{N_1}\nabla\times(\nabla\times\vec{\Pi}_{n,1}) + \sum_{n=1}^{N_2}\nabla\times(\nabla\times\vec{\Pi}_{n,2})\right\},\ \vec{H}_e(M) = \sum_{n=1}^{N_1}\nabla\times\vec{\Pi}_{n,1} + \sum_{n=1}^{N_2}\nabla\times\vec{\Pi}_{n,2},$$

$$\vec{\Pi}_{n,1} = \Psi_e(M, M_{n,1})\vec{p}_\tau^{\,n,1},\quad \vec{\Pi}_{n,2} = \Psi_e(M, M_{n,2})\vec{p}_\tau^{\,n,2},\ \Psi_e(M, M_{n,1}) = \exp(ik_e R_{MM_{n,1}})/(4\pi R_{MM_{n,1}}),$$

$$\Psi_e(M, M_{n,2}) = \exp(ik_e R_{MM_{n,2}})/(4\pi R_{MM_{n,2}}),\ \vec{p}_\tau^{\,n,1} = p_{\tau_1}^{n,1}\vec{e}_{\tau_1}^{\,n,1} + p_{\tau_2}^{n,1}\vec{e}_{\tau_2}^{\,n,1},\quad \vec{p}_\tau^{\,n,2} = p_{\tau_1}^{n,2}\vec{e}_{\tau_1}^{\,n,2} + p_{\tau_2}^{n,2}\vec{e}_{\tau_2}^{\,n,2}.$$

Here $M \in D_e$, $k_e = \omega\sqrt{\varepsilon_e\mu_e}$ is the wave number in the outer medium D_e; $R_{MM_{n,1}}$ is the distance from the point $M_{n,1}$ on $S_{e,1}$ to the point M in D_e; $R_{MM_{n,2}}$ is the distance from the point $M_{n,2}$ on $S_{e,2}$ to the same point M in D_e; $p_{\tau_1}^{n,1}, p_{\tau_2}^{n,1} (n = \overline{1, N_1})$ and $p_{\tau_1}^{n,2}, p_{\tau_2}^{n,2} (n = \overline{1, N_2})$ are unknown complex constants (dipole moments). The chosen representations of the field satisfy to the Maxwell equations and radiation conditions. To find the unknown dipole moments of the auxiliary dipoles, we use the boundary conditions on the ellipsoid's surfaces which are satisfied according to the collocation method. Based on the method described above, we developed a computer program for calculating the scattered-field components. To verify results produced by developed computer program, we have compared theirs with known results for structure consisting of two spheres. At last, we present some results concerning the influence of structure form deviations from axisymmetric one on scattering cross-section. In particular, it is discovered even if these deviations are small, their influence on scattering cross-section can be significant, especially in the lateral scattering directions.

Keywords: electromagnetic scattering; discrete sources method; perfectly conducting three-axes ellipsoid; scattering cross-section.

DMITRENKO Anatoly Grigorievich (Doktor of Physics and Mathematics, Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: dmitr@fpmk.tsu.ru

REFERENCES

1. Kozlov, I.P. (2001) Difraktsiya elektromagnitnykh voln na dvukh sharakh [Diffraction of electromagnetic waves from two spheres]. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*. 46(2). pp. 180–185.
2. Sveshnikov, A.G. & Yeremin, Yu.A. (1980) *Chislennyye metody elektrodinamiki* [Numerical methods of elecrodinamics]. Moscow: Moscow State University. pp. 3–7.
3. Bruning, J.H. & Yuen, T.L. (1971) Multiple scattering of EM waves by spheres. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 19(3). pp. 391–400.
4. Kyurkchan, A.G. & Skorodumova, Ye.A. (2007) Resheniye zadachi difraktsii elektromagnitnoy volny na gruppe tel metodom diagrammnykh uravneniy [Solving of an electromagnetic wave diffraction problem for a group of bodies by diagram equations method]. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*. 52(11). pp. 1330–1337.
5. Hunka, J.F. & Mei, K.K. (1987) Electromagnetic scattering by two bodies of revolution. *Electromagnetics*. 1(3). pp. 329–347. DOI: 10.1080/02726348108915138
6. Cooray, M.F.R. & Ciric, I.R. (1990) Electromagnetic scattering by a system of two parallel prolate spheroids. *Canadian Journal of Physics*. 68(4-5). pp. 376–384. DOI: 10.1139/p90-060
7. Sinha, B.P. & MicPhie, R.H. (1983) Electromagnetic plane wave scattering by a system of two parallel conducting prolate spheroids. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 31(2). pp. 294–304.
8. Kyurkchan, A.G., Manenkov, S.A. & Negorozhina, Ye.S. (2008) Modelirovaniye rasseyaniya voln gruppoy blizko raspolozhennykh tel [Simulating of wave scattering by group of adjacent bodies]. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*. 53(3). pp. 276–285.
9. Sarabandi, K. & Polatin, P.F. (1994) Electromagnetic scattering from two adjacent objects. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 42(4). pp. 510–517.
10. Dmitrenko, A.G. & Kolchin, V.A. (2000) Scattering of electromagnetic waves by structures composed of a finite number of three-dimensional perfectly conducting bodies. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 43(9). pp. 766–772.
11. Dmitrenko, A.G. & Kolchin, V.A. (2001) Numerical method for analyze of electromagnetic scattering problem by structures consisting of finite number three-dimensional perfectly conducting bodies. *Radiotekhnika i elektronika – Journal of Communications Technology and Electronics*. 46(3). pp. 277–282.

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 43

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/43/3

T.V. Dogadova, V.A. Vasiliev

ADAPTIVE PREDICTION OF NON-GAUSSIAN ORNSTEIN–UHLENBECK PROCESS

This study was supported by the Russian Science Foundation under grant No. 17-11-01049 and performed in National Research Tomsk State University.

This paper proposes adaptive predictors of non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck process with unknown parameters. Predictors are based on the truncated parameter estimators. Asymptotic and non-asymptotic properties of the predictors are investigated. In particular, there is found the rate of convergence of the second moment of a prediction error to its minimum value. In addition, there is established an asymptotic optimality of the adaptive predictors in the sense of a special risk function. The structure of the risk function assumes the optimization of both the duration of observations and the prediction quality.
Keywords: truncated parameter estimation; adaptive optimal prediction; non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck process; risk function.

Nowadays mathematical statistics along with economics, financial mathematics, engineering, biology and other fields of science that use mathematical tools for their benefits, are turned to development of predictive methods. Models allowing making predictions of high statistical quality are highly appreciated. Currently, one of the most popular continuous-time models that is extensively used in financial mathematics is a non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process driven by the Lévy process. Usually in practice the applied models depend on unknown parameters. Estimation problem of the unknown parameters of dynamic systems is a relevant one since the estimators of the dynamic parameters are to be used in various adaptive problems including the problem of adaptive prediction. The quality of adaptive predictors significantly depends on a choice of estimators of the model parameters. One of the most proper methods to solve this problem is the truncated estimation method proposed in [1]. It gives an opportunity to obtain the estimators of guaranteed quality by samples of fixed size under low level of a'priory information on system parameters.

Adaptive prediction problem for discrete-time systems was solved in [2] on the basis of truncated estimators proposed in [1]. Later, the same problem for Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process was solved in [3,4] on the basis of truncated estimators. In this paper we propose adaptive predictors of non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process constructed on the basis of truncated estimators of dynamic parameters which are optimal in the sense of a special risk function. The risk function aims to optimize both the duration of observations and the predictive quality. The risk function of similar structure first appeared in [5] for the problems of parameter estimator's optimization. Later on, this idea was developed in [6, 7] etc. for optimization of predictors of dynamic discrete-time systems.

1. Problem statement. Optimal prediction

Consider the following regression model:

$$dx_t = ax_t dt + d\xi_t,\ t \geq 0 \qquad (1)$$

with zero mean initial condition x_0, having all the moments. Here $\xi_t = \rho_1 W_t + \rho_2 Z_t, \rho_1 \neq 0$ and ρ_2 are some constants, $(W_t, t \geq 0)$ is a standard Wiener process, given on a filtered probability space $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geq 0}, P)$, adapted to a filtration $\{F_t\}_{t\geq 0}$, $Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$ is a compound Poisson process, where $Y_k, k \geq 0$ are i.i.d. random zero mean variables having all the moments and (N_t) is a Poisson process with the intensity $\lambda > 0$, i.e.

$$N_t = \sum_{j\geq 1} \chi\{T_j \leq t\} \quad \text{and} \quad T_j = \sum_{l=1}^{j} \tau_j.$$

Here $(T_j)_{j\geq 1}$ are jumps of the Poisson process $(N_t)_{t\geq 0}$ and $(\tau_l)_{l\geq 1}$ are i.i.d. random variables that are exponentially distributed with the parameter λ.

It should be noted that for $\rho_2 = 0$ the process (1) is a standard Ornstein–Uhlenbeck process.

Suppose that the process (1) is stable, i.e. the parameter $a < 0$. Note that in this case for every $m \geq 1$

$$\sup_{t\geq 0} E x_t^{2m} < \infty.$$

The purpose is to construct a predictor for x_t by observations $x^{t-u} = (x_s)_{0\leq s\leq t-u}$ which is optimal in a sense of the risk function introduced below. Here $u > 0$ is a fixed time delay.

The solution of the process x_t, obtained by the Ito formula, has the form

$$x_t = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-z)} d\xi_z, t \geq 0$$

and for given $u > 0$ we have the representation

$$x_t = b x_{t-u} + \eta_{t,t-u}, \quad t \geq u,$$

where

$$b = e^{au}, \ \eta_{t,t-u} = \int_{t-u}^{t} e^{a(t-s)} d\xi_s, \ E\eta_{t,t-u} = 0 \ \text{ and } \ \sigma^2 := D\eta_{t,t-u} = \frac{1}{2a}\left(\rho_1^2 + \lambda\rho_2^2 E Y_1^2\right)[b^2 - 1].$$

Optimal in the mean square sense predictor is the conditional mathematical expectation

$$x_t^0 = b x_{t-u}, \ t > u.$$

2. Adaptive prediction. Model parameter estimators

As in practice the parameter *a* and, as follows, *b* are unknown, it is impossible to construct the optimal predictor for real processes. In order to solve the problem of prediction we define an adaptive predictor that is constructed by an estimator a_t of unknown parameter *a*.

Define adaptive predictor as

$$\hat{x}_t(t-u) = \hat{b}_{t-u} x_{t-u}, \ t > u, \tag{2}$$

where $\hat{b}_{t-u} = e^{\hat{a}_{t-u} u}$, $t > u$; $\hat{a}_t = proj_{(-\infty,0]} a_t$, a_t is the truncated estimator of the parameter *a* constructed similar to discrete-time case [2] on the basis of the least squares estimator

$$a_t = \frac{\int_0^t x_v dx_v}{\int_0^t x_v^2 dv} \chi\left(\int_0^t x_v^2 dv \geq t \log^{-1} t\right). \tag{3}$$

3. Risk functions and prediction criteria

Denote the prediction errors of x_t^0 and $\hat{x}_t(t-u)$ as

$$e_t^0 := x_t - x_t^0 = \eta_{t,t-u}, \ e_t(t-u) := x_t - \hat{x}_t(t-u) = \left(b - \hat{b}_{t-u}\right) x_{t-u} + \eta_{t,t-u}, t \geq u.$$

Now we define the loss function

$$L_t = \frac{A}{t} e^2(t) + t,\ t \geq u,$$

where

$$e^2(t) = \frac{1}{t} \int_u^t e_s^2(s-u)ds$$

and the parameter A > 0 stands for the cost of prediction error. We also define the risk function $R_t = EL_t$ which has the following form

$$R_t = \frac{A}{t} Ee^2(t) + t$$

and consider optimization problem

$$R_t \to \min_t.$$

For the optimal predictors x_t^0 it is possible to optimize the corresponding risk function directly

$$R_t^0 = E\left(\frac{A}{t} (e^0(t))^2 + t \right) = \frac{A\sigma^2}{t} + t \to \min_t, \tag{4}$$

where

$$(e^0(t))^2 = \frac{1}{t} \int_u^t (e_s^0)^2 ds.$$

In this case the optimal duration of observations T_A^0 and the corresponding value of $R_{T_A^0}^0$ are respectively

$$T_A^0 = A^{1/2}\sigma,\ R_{T_A^0}^0 = 2A^{1/2}\sigma, \tag{5}$$

where $\sigma := \sqrt{\sigma^2}$. However, since *a* and as follows, σ are unknown and both T_A^0 and $R_{T_A^0}^0$ depend on *a*, the optimal predictor can not be used. Then we define the estimator T_A of the optimal time T_A^0 as

$$T_A = \inf\{t \geq t_A : t \geq A^{1/2}\sigma_{t_A}\}, \tag{6}$$

where $t_A := A^{1/2} \log^{-1} A = o(A^{1/2})$. Here $\sigma_t := \sqrt{\sigma_t^2}$ is the estimator of unknown σ,

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{t-u} \int_u^t \left(x_s - \hat{b}_t x_{s-u} \right)^2 ds.$$

The estimator is defined like that since $\sigma^2 = E\eta_{t,t-u}^2 = E(x_t - bx_{t-u})^2$.

4. Properties of parameter estimators and adaptive predictors

Estimators a_t, b_t and σ_t that are used in construction of adaptive predictors have the properties given in Lemma below which can be proven similar to [3]. Compare to [3] this way of estimation of the variance σ^2 does not require the knowledge of parameters the model parameters. In this particular case it is not dependant on the true values of parameters $\rho_1, \rho_2, EY_1^2\lambda$ and their estimators. Moreover, the upper boundary for the moments of deviation of σ_t^2 is more accurate than in [3].

In what follows, *C* will denote a generic non-negative constant whose value is not critical (and not always the same).

Lemma 1. Assume the model (1). Then for $t - u > s_0 := \exp(2|a|)$ and some numbers *C* estimators $\hat{a}_t$ and $\hat{b}_t$ have the properties:

$$E\left(\hat{a}_t - a\right)^{2p} \le \frac{C}{t^p} \tag{7}$$

and

$$E\left(\hat{b}_t - b\right)^{2p} \le \frac{C}{t^p}, \ \ p \ge 1. \tag{8}$$

$$E\left(\sigma_t^2 - \sigma^2\right)^{2p} \le \frac{C}{t^p}, \ p \ge 1.$$

Proof. We prove the property (7) similar to [3]. By the definition (3) of the estimator a_t and using (1) let us find representation for the deviation of the estimator

$$a_t - a = \frac{\int_0^t x_v d\xi_v}{\int_0^t x_v^2 dv}\chi\left(\int_0^t x_v^2 dv \ge t\log^{-1} t\right) - a\cdot\chi\left(\int_0^t x_v^2 dv < t\log^{-1} t\right).$$

Define

$$g_t = \frac{1}{t}\int_0^t x_v^2 dv, \ \ g = -\frac{1}{2a}\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 EY_1^2\lambda\right) > 0, \ \ f_t = \frac{1}{t}\int_0^t x_v d\xi_v.$$

Then

$$E\left(a_t - a\right)^{2p} = E\left[\frac{f_t}{g_t}\right]^{2p}\cdot\chi\left[g_t \ge \log^{-1} t\right] + a^{2p}\cdot P\left[g_t < \log^{-1} t\right] =: I_1 + I_2. \tag{9}$$

Using the Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality for the first summand we get:

$$I_1 = E\left[\frac{f_t}{g} + f_t\frac{g - g_t}{gg_t}\right]^{2p}\cdot\chi\left[g_t \ge \log^{-1} t\right] = \frac{Ef_t^{2p}}{g^{2p}}\cdot\left(1 + \sum_{k=1}^{2p} C_{2p}^k\cdot\frac{(g-g_t)^k}{g_t^k}\right)\cdot\chi\left[g_t \ge \log^{-1} t\right] \le$$

$$\le \frac{C}{t^p} + C\cdot\log t\cdot Ef_t^{2p}\cdot\left|g - g_t\right| \le \frac{C}{t^p} + C\cdot\log t\cdot\left(Ef_t^{4p}\cdot E\left(g - g_t\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{C}{t^p} + C\cdot\log t\cdot\frac{1}{t^p}\cdot\left(E\left(g - g_t\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Now we estimate the moments $E\left(g - g_t\right)^{2m}$.

By the Ito formula for x_t^2 from [8] it is true that

$$x_t^2 = x_0^2 + 2\int_0^t x_{s-} dx_s + \rho_1^2 t + \sum_{0\le s\le t}\left(\Delta x_s\right)^2 =$$

$$= x_0^2 + 2a\int_0^t x_s^2 ds + \rho_1\int_0^t x_s dW_s + \rho_2\sum_{0\le s\le t} x_{s-}\Delta Z_s + \rho_1^2 t + \rho_2^2\sum_{0\le s\le t}\left(\Delta Z_s\right)^2.$$

Note that

$$\sum_{0\le s\le t}\left(\Delta Z_s\right)^2 = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} Y_k^2\chi\left\{T_j \le t\right\},$$

where $\Delta x_s = x_s - x_{s-}$. Then by making use of the representation

$$g_t - g = \frac{1}{2a}\frac{x_t^2 - x_0^2}{t} - \frac{\rho_1}{2at}\int_0^t x_s dW_s - \frac{\rho_2}{2at}\sum_{0\le s\le t} x_{s-}\Delta Z_s - \frac{\rho_2^2}{2a}\left[\frac{1}{t}\sum_{0\le s\le t}\left(\Delta Z_s\right)^2 - \lambda EY_1^2\right] \tag{10}$$

and the strong law of large numbers one can show that

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x_s^2 ds = -\frac{1}{2a}\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 EY_1^2\lambda\right) \quad \text{a.s.}$$

By (10) for every $m \geq 1$ it holds

$$E\left(g_t - g\right)^{2m} \leq \frac{C}{t^m}. \tag{11}$$

Then

$$I_1 \leq \frac{C}{t^p} + C\frac{\log t}{t^{p+1/2}} \leq \frac{C}{t^p},\ t > u \tag{12}$$

and applying (11) , as well as the Chebyshev inequality for $t > s_0$ we have

$$I_2 \leq a^{2p} \cdot P\left(\left|g_t - g\right| \geq g - \log^{-1} t\right) \leq \frac{a^{2p}}{\left(g - \log^{-1} t\right)^{4p}} \cdot E\left(g_t - g\right)^{4p} \leq \frac{C}{t^{2p}}. \tag{13}$$

From (9), (12), (13) and definition of $\hat{a}_t$ the property (7) follows.

The assertion (8) follows from the obvious inequality $\left|\hat{b}_t - b\right| \leq u \cdot e^{u|a|} \cdot \left|\hat{a}_t - a\right|$, which can be obtained by the Taylor expansion for the exponent $\exp\left(\left(\hat{a}_t - a\right)u\right)$.

Using the following representation of the estimator σ_t^2

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{t-u}\int_u^t \left(x_s - \hat{b}_t x_{s-u}\right)^2 ds = \frac{1}{t-u}\left\{\int_u^t x_{s-u}^2 ds \cdot \left(b - \hat{b}_t\right)^2 + \int_u^t \eta_{s,s-u}^2 ds + 2\int_u^t x_{s-u} \cdot \eta_{s,s-u} ds \cdot \left(b - \hat{b}_t\right)\right\}$$

we get its deviation in a form

$$\sigma_t^2 - \sigma^2 = \frac{1}{t-u}\int_u^t \left(\eta_{s,s-u}^2 - \sigma^2\right)ds + \frac{1}{t-u}\int_u^t x_{s-u}^2 ds \cdot \left(\hat{b}_t - b\right)^2 + \frac{2}{t-u}\int_u^t x_{s-u} \cdot \eta_{s,s-u} ds \cdot \left(b - \hat{b}_t\right) := I_1 + I_2 + I_3.$$

Let us estimate the mathematical expectation of each summand separately. For the first one consider the case of $p = 1$

$$EI_1^2 = \frac{1}{(t-u)^2} E\left(\int_u^t \left(\eta_{s,s-u}^2 - \sigma^2\right)ds\right)^2 = \frac{1}{(t-u)^2}\int_u^t\int_u^t E\left(\eta_{s,s-u}^2 - \sigma^2\right)\left(\eta_{v,v-u}^2 - \sigma^2\right) \cdot \chi\left[|v-s| \leq u\right]dvds \leq$$

$$\leq \frac{1}{(t-u)^2}\int_u^t\int_u^t \chi\left[|v-s| \leq u\right]dvds = \frac{1}{(t-u)^2}\int_u^t\int_{s-u}^{s+u} dvds = \frac{2u}{(t-u)^2}\int_u^t dv = \frac{2u}{(t-u)}.$$

Similarly, for an arbitrary number *p* we get the inequality

$$EI_1^{2p} \leq \frac{C}{(t-u)^p}.$$

We apply the Cauchy–Schwarz–Bunyakovsky inequality and (6) to the third summand and since the process x_t is stable it holds

$$EI_2^{2p} \leq \frac{1}{(t-u)^{2p}}\sqrt{E\left(\int_u^t x_{s-u}^2 ds\right)^{4p}} \cdot \sqrt{E \cdot \left(\hat{b}_t - b\right)^{4p}} \leq \frac{C}{t^p}.$$

Using the independency of $\eta_{t,t-u}$ and x_{t-u}, the Cauchy–Schwarz–Bunyakovsky inequality and (8), we obtain

$$EI_3^{2p} \leq \frac{4}{(t-u)^{2p}}\sqrt{E\left(\int_u^t x_{s-u} \cdot \eta_{s,s-u} ds\right)^{4p}} \cdot \sqrt{E\left(b - \hat{b}_t\right)^{2p}} \leq \frac{C}{t^p}.$$

Lemma is proven.

Now we are ready to investigate the statistical properties of the adaptive predictor (3). The prediction error has the form

$$e_t\left(t-u\right) := x_t - \hat{x}_t\left(t-u\right) = \left(b - \hat{b}_{t-u}\right)x_{t-u} + \xi_{t,t-u}.$$

Thus, for some C

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} t\cdot\left(Ee_t^2\left(t-u\right)-\sigma^2\right)\le C$$

and if there is a'priori information that $|a|\le L$ then

$$Ee_t^2\left(t-u\right)-\sigma^2\le\frac{C}{t},\quad t>u+\exp\left(2L\right).$$

Analogously to [4], our purpose is to prove the asymptotic equivalence of T_A and T_A^0 in the almost surely and mean senses and the optimality of the presented adaptive prediction procedure in the sense of equivalence of $R_{T_A^0}^0$ and the obviously modified risk

$$\bar{R}_A=A\cdot E\frac{1}{T_A}e^2(T_A)+ET_A. \tag{14}$$

Theorem 1. Assume the model (1). Let the predictors $\hat{x}_t\left(t-u\right)$ be defined by (2), the times T_A^0, T_A and the risk functions $R_{T_A^0}^0, \bar{R}_A$ defined by (5), (6) and (14). Then for every $a < 0$

$$\text{i)}\quad \frac{T_A}{T_A^0}\xrightarrow[A\to\infty]{}1 \text{ a.s.};$$

$$\text{ii)}\quad \frac{ET_A}{T_A^0}\xrightarrow[A\to\infty]{}1;$$

$$\text{iii)}\quad \frac{\bar{R}_A}{R_{T_A^0}^0}\xrightarrow[A\to\infty]{}1.$$

Proof of Theorem 1 in general is similar to one from [4].

Conclusion

Adaptive prediction problem of the non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process is solved. Non-asymptotic upper bound of the second moment of the prediction errors is found. It is shown that this bound is inverse proportional to the duration of observations. Non-asymptotic properties of adaptive predictors are obtained due to the usage of the truncated estimators [1] of the unknown parameters constructed by samples of fixed size. This method can be applied to various problems of parametric and non-parametric statistics.

In this paper we propose adaptive optimal predictors of non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process. Their optimality in the sense of a special risk function is shown. The used risk function makes it possible to optimize the duration of observations along with the prediction quality.

The authors are very thankful to S. Pergamenshchikov for the helpful comments and remarks.

REFERENCES

1. Vasiliev, V.A. (2014) A Truncated Estimation Method with Guaranteed Accuracy. *Annals of Institute of Statistical Mathematics.* 66. pp. 141–163. DOI: 10.1007/s10463-013-0409-x
2. Kusainov, M.I. & Vasiliev, V.A. (2015) On optimal adaptive prediction of multivariate autoregression. *Sequential Analysis: Design Methods and Applications.* 34. pp. 211–234. DOI: 10.1080/07474946.2015.1030977
3. Dogadova, T.V. & Vasiliev, V.A. (2017) Adaptive prediction of stochastic differential equations with unknown parameters. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 38. pp. 17–23. DOI: 10.17223/19988605/38/3
4. Dogadova, T.V. & Vasiliev, V.A. (2017) On adaptive optimal prediction of Ornstein-Uhlenbeck process. *Applied Mathematical Science*. 11. pp. 591–600. DOI: 10.12988/ams.2017.7247
5. Chernoff, H. (1972) *Sequential Analysis and Optimal Design*. SIAM, Philadelphia.
6. Sriram, T.N. (1988) Sequential estimation of the autoregressive parameter in a first order autoregressive process. *Sequential Analysis.* 7(1). pp. 53–74. DOI: 10.1080/07474948808836142
7. Sriram, T.N. & Ross, I. (2014) Sequential estimation for time series models. *Sequential Analysis*. 33(2). pp. 136–157.
8. Liptzer, R.S. & Shiryaev, A.N. (1989) *Theory of Martingales*. Dordrecht: Kluwer.

Received: January 19, 2018

Догадова Т.В., Васильев В.А. АДАПТИВНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НЕГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2018. № 43. С. 26–32

DOI: 10.17223/19988605/43/3

В работе предлагаются адаптивные прогнозы негауссовского процесса Орнштейна–Уленбека с неизвестными параметрами. Прогнозы основаны на усеченных оценках параметров. Исследуются асимптотические и неасимптотические свойства прогнозов. В частности, найдена скорость сходимости второго момента ошибки прогнозирования к ее минимальному значению. Кроме того, установлена асимптотическая оптимальность адаптивных прогнозов в смысле особой функции риска. Структура функции риска предполагает оптимизацию как длительности наблюдений, так и качества прогнозирования.

Ключевые слова: усеченное оценивание параметров; адаптивное оптимальное прогнозирование; негауссовский процесс Орнштейна–Уленбека; функция риска.

VASILIEV Vyacheslav Arthurovich (Doktor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of High Mathematics and Mathematical Modelling of National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: vas@mail.tsu.ru

DOGADOVA Tatiana Valeryevna (PhD Student of the Department of High Mathematics and Mathematical Modelling of National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: aurora1900@mail.ru

Dogadova T.V., Vasiliev V.A. (2018) ADAPTIVE PREDICTION OF NON-GAUSSIAN ORNSTEIN–UHLENBECK PROCESS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 43. pp. 26–32

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 43

УДК 519.21
DOI: 10.17223/19988605/43/4

М.Е. Завгородняя

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПРОДЛЕВАЮЩИМСЯ МЕРТВЫМ ВРЕМЕНЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

Рассматривается однородный поток событий, функционирующий в условиях продлевающегося мертвого времени, порождаемого каждым текущим событием с заданной плотностью распределения вероятностей интервала между соседними событиями. Полагается, что длительность мертвого времени также имеет заданную плотность распределения вероятностей. В данной работе получены преобразования Лапласа для интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке и общего периода мертвого времени. Приведены примеры для некоторых типов распределения.

Ключевые слова: поток событий; интервал между соседними событиями; продлевающееся мертвое время; плотность распределения вероятностей; функция распределения вероятностей; преобразование Лапласа.

Потоки однородных событий являются распространенными математическими моделями многих физических процессов и явлений. Такие модели применяются при исследовании информационных потоков сообщений в телекоммуникационных системах, спутниковых сетях связи, оптических и лазерных системах, функционирующих в режиме счета фотонов и т.п. В большинстве публикаций авторы рассматривают математические модели потоков событий, когда события потока доступны наблюдению. Однако на практике возникают ситуации, когда наступившее событие влечет за собой ненаблюдаемость последующих событий. Причиной ненаблюдаемости выступает мертвое время регистрирующих приборов [1, 2], в течение которого зарегистрированное событие обрабатывается; другие же события, поступившие в этот период, теряются. Регистрирующие приборы при этом делятся на два вида: с непродлевающимся мертвым временем, и продлевающимся [1, 2]. Задачи по оценке параметров и состояний потока событий в условиях наличия мертвого времени фиксированной длительности рассматривались в работах [3–33]. При этом в [3, 4, 6–8, 10, 12–16, 18–31] получены результаты для непродлевающегося мертвого времени, в [5, 9, 11, 17] – для продлевающегося.

Задачи по оценке параметров в условиях наличия непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности решены в [3, 4] для пуассоновского потока, в [6] для синхронного альтернирующего потока, в [7, 8, 10] для асинхронного альтернирующего потока, в [12] для синхронного потока, в [13–15] для асинхронного потока, в [16, 18] для полусинхронного потока, в [19–21] для обобщенного асинхронного потока, в [22, 23] для обобщенного полусинхронного потока, в [24, 25] для MAP-потока, в [26, 27] для модулированного синхронного потока, в [28, 29] для модулированного обобщенного полусинхронного потока, в [30–33] для модулированного MAP-потока; при продлевающемся мертвом времени фиксированной длительности – в [5] для пуассоновского потока, в [9] для альтернируюшего асинхронного потока, в [11] для синхронного потока, в [17] для полусинхронного потока.

Задачи по оценке параметров пуассоновского потока, функционирующего в условиях наличия непродлевающегося мертвого времени случайной длительности, рассматривались в работах [34, 35]. В настоящей статье рассматривается однородный поток событий, функционирующий в условиях продлевающегося мертвого времени специального типа.

1. Математическая модель наблюдаемого потока

Рассматривается поток однородных событий с заданной плотностью или функцией распределения вероятностей интервала между соседними событиями (входящий поток событий). После каждого зарегистрированного события во входящем потоке наступает период мертвого времени случайной длительности θ_i, с заданной плотностью или функцией распределения вероятностей, в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. В то же время, хотя события и не наблюдаются в течение мертвого времени, они вызывают продление периода ненаблюдаемости на случайную длительность, имеющую те же вероятностные характеристики, как и предыдущий период ненаблюдаемости, но при этом предыдущий период мертвого времени в этот момент заканчивается (обрезается), так что наблюдаться будет лишь то событие потока, которое наступит после окончания последнего периода ненаблюдаемости. Таким образом, создается общий период мертвого времени. По окончании общего периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени случайной длительности и т.д. Полагается, что длительность мертвого времени имеет заданную плотность или функцию распределения вероятностей. Вариант возникновения ситуации приведен на рис. 1, где прямоугольниками обозначены периоды мертвого времени, t_1, t_2, – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

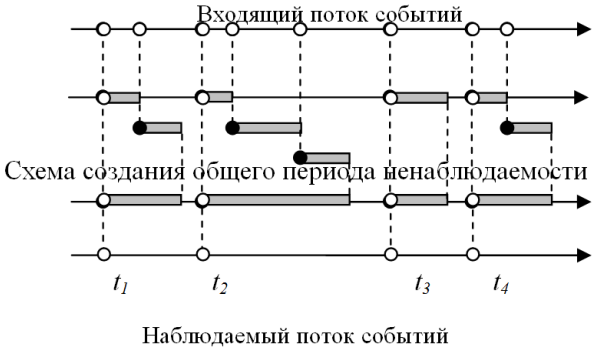


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Необходимо найти вероятностные характеристики интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке и общего периода мертвого времени, такие как преобразование Лапласа для плотности распределения вероятностей в общем случае и плотности распределения вероятностей в частных случаях.

2. Преобразование Лапласа интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке

Обозначим через τ_i, $i=1,2...$ длительность i-го интервала между соседними событиями входящего потока событий с заданной плотностью или функцией распределения вероятностей, через θ_i $i=1,2...$ − длительность i-го периода мертвого времени с заданной плотностью или функцией распределения вероятностей.

Введем две вспомогательные случайные величины:

$$\beta_i = \tau_i \cdot \chi(\tau_i > \theta_i), \quad \gamma_i = \tau_i \cdot \chi(\tau_i \le \theta_i), \ i \ge 1, \tag{1}$$

где $\chi(A)$ − индикатор множества A и функции:

$$F_\beta(x) = P(0 < \tau_i < x, \tau_i \ge \theta_i), \quad f_\beta(x) = F'_\beta(x),$$
$$F_\gamma(x) = P(0 < \tau_i < x, \tau_i < \theta_i), \quad f_\gamma(x) = F'_\gamma(x), \ i \ge 1. \tag{2}$$

Обозначим через момент ν:

$$\nu = \min\{i \ge 1 : \gamma_i = 0\}. \tag{3}$$

Тогда длительность интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке τ, учитывая (1)–(3), определяется следующим образом:

$$\tau = \sum_{i=1}^{\nu-1} \gamma_i + \beta_\nu . \tag{4}$$

Теорема 1. Преобразование Лапласа $\Phi_\tau(s)$ для плотности вероятностей $f_\tau(x)$ интервала τ между соседними событиями в наблюдаемом потоке из (4) имеет вид:

$$\Phi_\tau(x) = \frac{\Phi_\beta(s)}{1-\Phi_\gamma(s)}, \tag{5}$$

где $\Phi_\beta(s), \Phi_\gamma(s)$ − преобразования Лапласа для функций $f_\beta(x)$ и $f_\gamma(x)$ соответственно.

Доказательство. Обозначим через $F_n(x)$ функцию

$$F_n(x) = P(\gamma_1 + \cdots + \gamma_n < x, \gamma_1 > 0, ..., \gamma_n > 0), \ f_n(x) = F_n'(x) .$$

Тогда

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(u) f_\gamma(x-u) du \ , \ n \geq 2 . \tag{6}$$

Найдем распределение τ:

$$P(\tau < x) = P(0 < \beta_1 < x) + P(\gamma_1 + \beta_2 < x, \gamma_1 > 0, \beta_2 > 0) + P(\gamma_1 + \gamma_2 + \beta_3 < x, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, \beta_3 > 0) + ... =$$

$$= \int_0^x f_\beta(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x f_n(t) dt \int_0^{x-t} f_\beta(s) ds = \int_0^x f_\beta(t) dt + \int_0^x g(t) dt \int_0^{x-t} f_\beta(s) ds, \tag{7}$$

где

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) . \tag{8}$$

Дифференцируя равенство (7), получим, что плотность распределения вероятностей $f_\tau(x)$ интервала τ определяется соотношением:

$$f_\tau(x) = f_\beta(x) + \int_0^x g(t) f_\beta(x-t) dt, \quad x > 0. \tag{9}$$

Суммируя (6) по $n = \overline{2, \infty}$ и учитывая соотношение (8), получим уравнение для нахождения $g(t)$:

$$g(x) = f_\gamma(x) + \int_0^x g(t) f_\gamma(x-t) dt. \tag{10}$$

Применяя преобразование Лапласа для (10), получаем уравнение

$$G(s) = \Phi_\gamma(s) + G(s) \cdot \Phi_\gamma(s),$$

разрешая которое относительно $G(s)$, получим

$$G(s) = \frac{\Phi_\gamma(s)}{1-\Phi_\gamma(s)}. \tag{11}$$

Применяя преобразование Лапласа для плотности распределения вероятностей $f_\tau(x)$ из (9) и учитывая (11), находим

$$\Phi_\tau(s) = \Phi_\beta(s) + G(s) \cdot \Phi_\beta(s) = \frac{\Phi_\beta(s)}{1-\Phi_\gamma(s)} . \tag{12}$$

Полученная формула (12) полностью совпадает с формулой (5). Теорема 1 доказана.

Рассмотрим частные случаи для конкретных видов распределений.

Частный случай 1. Пусть τ_i и θ_i − независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами λ и μ соответственно.

Получим вид функции $F_\beta(x)$ из (2) для этого конкретного случая:

$$F_\beta(x) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \int_t^\infty \mu e^{-\mu s} ds = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \left(1 - e^{-\mu t}\right) dt,$$

тогда

$$f_\beta(x) = F_\beta'(x) = \lambda \left(e^{-\lambda t} - e^{-(\lambda+\mu)t}\right), \ x > 0. \tag{13}$$

Аналогично найдем вид функции $F_\gamma(x)$ из (2)

$$F_\gamma(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt\int_t^\infty \mu e^{-\mu s}ds=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}e^{-\mu t}dt,$$

тогда

$$f_\gamma(x)=F_\gamma'(x)=\lambda e^{-(\lambda+\mu)x},\ x>0. \tag{14}$$

Получим преобразования Лапласа $\Phi_\beta(s)$, $\Phi_\gamma(s)$ для функций $f_\beta(x)$ и $f_\gamma(x)$ соответственно из (13)–(14) в виде:

$$\Phi_\beta(s)=\lambda\left(\frac{1}{\lambda+s}-\frac{1}{\lambda+\mu+s}\right)=\frac{\lambda\cdot\mu}{(\lambda+s)\cdot(\lambda+\mu+s)}, \tag{15}$$

$$\Phi_\gamma(s)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}. \tag{16}$$

Используя результат (5) теоремы 1 и формулы (15)–(16), находим преобразование Лапласа $\Phi_\tau(s)$ для плотности вероятностей $f_\tau(x)$:

$$\Phi_\tau(s)=\frac{\Phi_\beta(s)}{1-\Phi_\gamma(s)}=\frac{\lambda\cdot\mu}{(\lambda+s)\cdot(\mu+s)}=\frac{\lambda\cdot\mu}{\lambda-\mu}\left(\frac{1}{\mu+s}-\frac{1}{\lambda+s}\right),\ \lambda\neq\mu. \tag{17}$$

С помощью обратного преобразования Лапласа получим явный вид плотности вероятностей $f_\tau(x)$ интервала τ между соседними событиями в наблюдаемом потоке:

$$f_\tau(x)=\frac{\lambda\cdot\mu}{\lambda-\mu}\left(e^{-\mu x}-e^{-\lambda x}\right),\quad x>0. \tag{18}$$

Замечание. Стоит отметить интересный факт: формула (18) совпала с результатом, полученным в статье [34]. Действительно, продлевающееся мертвое время в таком варианте для экспоненциальных распределений сводится к непродлевающемуся мертвому времени, что достаточно просто объясняется в вероятностном смысле.

Частный случай 2. Пусть τ_i – независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами λ, а $\theta_i\equiv T$, где $T=\text{const}$.

Тогда функции $f_\beta(x)$ и $f_\gamma(x)$ из (2) для этого конкретного случая имеют вид:

$$f_\beta(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>T,\\ 0, & x\le T,\end{cases}\qquad f_\beta(x)=\begin{cases}0, & x\le T,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\le T.\end{cases} \tag{19}$$

Получим преобразования Лапласа $\Phi_\beta(s)$, $\Phi_\gamma(s)$ для функций $f_\beta(x)$ и $f_\gamma(x)$ соответственно из (19) в виде:

$$\Phi_\beta(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}e^{-(\lambda+s)T},\qquad \Phi_\gamma(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}\left(1-e^{-(\lambda+s)T}\right). \tag{20}$$

Используя результат (5) теоремы 1 и формулы (20), находим преобразование Лапласа $\Phi_\tau(s)$ для плотности вероятностей $f_\tau(x)$:

$$\Phi_\tau(s)=\frac{\Phi_\beta(s)}{1-\Phi_\gamma(s)}=\frac{\dfrac{\lambda}{\lambda+s}e^{-(\lambda+s)T}}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda+s}\left(1-e^{-(\lambda+s)T}\right)}. \tag{21}$$

3. Преобразование Лапласа длительности общего периода ненаблюдаемости

Введем две вспомогательные случайные величины:

$$\tilde{\beta}_i=\theta_i\cdot\chi(\tau_i>\theta_i),\quad \gamma_i=\tau_i\cdot\chi(\tau_i\le\theta_i),\ i\ge 1, \tag{22}$$

где $\chi(A)$ − индикатор множества A и функции:

$$F_{\tilde{\beta}}(x) = P\left(0 < \tau_i < x, \tau_i \geq \theta_i\right), \quad f_{\tilde{\beta}}(x) = F'_{\tilde{\beta}}(x),$$
$$F_{\gamma}(x) = P\left(0 < \tau_i < x, \tau_i < \theta_i\right), \quad f_{\gamma}(x) = F'_{\gamma}(x), \; i \geq 1. \tag{23}$$

Обозначим через момент ν:

$$\nu = \min\{i \geq 1 : \gamma_i = 0\}. \tag{24}$$

Тогда длительность общего периода ненаблюдаемости θ, учитывая (22)–(24), определяется следующим образом:

$$\theta = \sum_{i=1}^{\nu-1} \gamma_i + \tilde{\beta}_{\nu}. \tag{25}$$

Теорема 2. Преобразование Лапласа $\Phi_{\theta}(s)$ для плотности вероятностей $f_{\theta}(x)$ общего периода ненаблюдаемости θ из (25) имеет вид

$$\Phi_{\theta}(x) = \frac{\Phi_{\tilde{\beta}}(s)}{1 - \Phi_{\gamma}(s)}, \tag{26}$$

где $\Phi_{\tilde{\beta}}(s)$, $\Phi_{\gamma}(s)$ − преобразования Лапласа для функций $f_{\tilde{\beta}}(x)$ и $f_{\gamma}(x)$ соответственно.

Так как вывод формулы (26) аналогичен выводу формулы (5), то приводить доказательство теоремы 2 не будем.

Частный случай. Пусть τ_i и θ_i независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами λ и μ соответственно.

Получим вид функции $F_{\tilde{\beta}}(x)$ из (22) для этого конкретного случая:

$$F_{\tilde{\beta}}(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu t} dt \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} ds = \int_0^x \mu e^{-(\lambda+\mu)t} dt,$$

тогда

$$f_{\tilde{\beta}}(x) = F'_{\tilde{\beta}}(x) = \mu e^{-(\lambda+\mu)x}, \; x > 0. \tag{27}$$

Для функции $f_{\gamma}(x)$ справедлива формула (14).

Получим преобразование Лапласа $\Phi_{\tilde{\beta}}(s)$ для функций $f_{\tilde{\beta}}(x)$ из (27) в виде:

$$\Phi_{\tilde{\beta}}(s) = \frac{\mu}{\lambda + \mu + s}. \tag{28}$$

Преобразование Лапласа для функций $f_{\gamma}(x)$ из (14) имеет вид (16).

Используя результат (26) теоремы 2 и формулы (28), (16), находим преобразование Лапласа $\Phi_{\theta}(s)$ для плотности вероятностей $f_{\theta}(x)$:

$$\Phi_{\theta}(s) = \frac{\Phi_{\tilde{\beta}}(s)}{1 - \Phi_{\gamma}(s)} = \frac{\mu}{\mu + s}. \tag{29}$$

С помощью обратного преобразования Лапласа для формулы (29) получим явный вид плотности вероятностей $f_{\theta}(x)$ общего периода ненаблюдаемости θ:

$$f_{\theta}(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x > 0. \tag{30}$$

Замечание. Стоит отметить, что плотность вероятностей $f_{\theta}(x)$ общего периода ненаблюдаемости (30) совпала с плотностью вероятностей длительности θ_i мертвого времени, что достаточно просто объясняется в вероятностном смысле.

Заключение

Для потока однородных событий с заданной плотностью или функцией распределения вероятностей интервала между соседними событиями в схеме с продлевающимся мертвым временем

специального типа, подробно описанным в разд. 1 настоящей статьи и наглядно представленным на рис. 1, длительность которого имеет также заданную плотность или функцию распределения вероятностей, получены вероятностные характеристики для интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке и общего периода мертвого времени, такие как преобразования Лапласа для плотностей распределения вероятностей в общем случае и плотностей распределения вероятностей в частных случаях.

Автор выражает признательность доктору физико-математических наук С.Э. Воробейчикову и доктору технических наук, профессору А.М. Горцеву за обсуждение вопросов, связанных с написанием данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курочкин С.С. Многомерные статистические анализаторы. М. : Атомиздат, 1968. 446 с.
2. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
3. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of intensity of the Poisson stream of events for condition under which it is partially unobservable // Telecommunications and Radio Engineering. 1992. V. 47, No. 1. P. 33–38.
4. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events // Telecommunications and Radio Engineering. 1993. V. 48, No. 10. P. 40–45.
5. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow // Radiotekhnika. 1996. No. 2. P. 8–11.
6. Горцев А.М., Нежельская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 6. С. 232–239.
7. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Известия высших учебных заведений. Физика. 2005. № 10. С. 35–49.
8. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 137–145.
9. Gortsev A.M., Parshina M.E. Estimation of parameters of an alternate stream of events in “dead” time conditions // Russian Physics Journal. 1999. V. 42, No. 4. P. 373−378.
10. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10, № 3. С. 273–280.
11. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
12. Горцев А.М., Нежельская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. № 10. С. 8–16.
13. Vasileva L.A., Gortsev A.M. Estimation of the dead time of an asynchronous double stochastic flow of events under incomplete observability // Automation and Remote Control. 2003. V. 64, No.12. P. 1890–1898.
14. Vasileva L.A., Gortsev A.M. Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability // Automation and Remote Control. 2002. V. 63, No. 3. P. 511–515.
15. Горцев А.М., Куснатдинов Р.Т. Оценивание состояний МС-потока событий при его частичной наблюдаемости // Известия высших учебных заведений. Физика. 1998. № 4. С. 22–30.
16. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
17. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Semisynchronous double stochastic flow of events when the dead time is prolonged // Vychislitel’nye teknologii. 2008. V. 13, No. 1. P. 31–41.
18. Нежельская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
19. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
20. Леонова М.А., Нежельская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
21. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
22. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.

23. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
24. Gortsev A.M., Solov'ev A.A. Joint probability density of interarrival interval of a flow of physical events with unextendable dead time period // Russian Physics Journal. 2014. V. 57, No. 7. P. 973–983.
25. Горцев А.М., Соловьев А.А. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлевающегося мертвого времени в потоке физических событий // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 11. С. 141–149.
26. Сиротина М.Н., Горцев А.М. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1 (34). С. 50–64.
27. Gortsev A., Sirotina A. Joint probability density function of modulated synchronous flow interval duration under conditions of fixed dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 41–52.
28. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1 (26). С. 13–24.
29. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 13–27.
30. Nezhelskaya L. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 342–350.
31. Нежельская Л.А. Условия рекуррентности потока физических событий при непродлевающемся мертвом времени // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 12. С. 168–175.
32. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
33. Nezhel'skaya L. Estimation of the unextendable dead time period in a flow of physical events by the method of maximum likelihood // Russian Physics Journal. 2016. V. 59, No. 5. P. 651–662.
34. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценивание параметра непродлевающегося мертвого времени случайной длительности в пуассоновском потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 40. С. 32–40.
35. Завгородняя М.Е., Шитина А.А. Исследование простейшего потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы V Междунар. молодежной науч. конф. / под общ. ред. И.С. Шмырина. Томск : Издательский Дом ТГУ, 2017. С. 128–133.

Поступила в редакцию 12 января 2018 г.

Zavgorodnyaya M.E. (2018) PROBABILISTIC CHARACTERISTICS OF THE FLOW OF EVENTS WITH PROLONGING DEAD TIME OF SPECIAL TYPE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 43. pp. 33–41

DOI: 10.17223/19988605/43/4

The flow of events with dead times is studied. Denote τ_i, $i=1,2\ldots$, the time intervals between events of the flow with known distribution function. The arrival of event is followed by the period of random length with known distribution function when the events of the flow are unobservable (dead time). If a next event arrives during this period, then the current dead time period is finished but a new period is generated (prolonging dead time). Denote θ_i, $i=1,2\ldots$, the duration of dead times. To study the characteristics of the process, we introduce the random values

$$\beta_i = \tau_i \cdot \chi(\tau_i > \theta_i), \quad \gamma_i = \tau_i \cdot \chi(\tau_i \le \theta_i), \quad i \ge 1,$$

where $\chi(A)$ is the indicator of a set A and the functions:

$$F_\beta(x) = P(0 < \tau_i < x, \tau_i \ge \theta_i), \quad f_\beta(x) = F'_\beta(x),$$
$$F_\gamma(x) = P(0 < \tau_i < x, \tau_i < \theta_i), \quad f_\gamma(x) = F'_\gamma(x), \; i \ge 1.$$

Define the time ν

$$\nu = \min\{i \ge 1 : \gamma_i = 0\}.$$

Taking the time interval τ between observed events is defined in the following way:

$$\tau = \sum_{i=1}^{\nu-1} \gamma_i + \beta_\nu .$$

Theorem 1. The Laplace transformation $\Phi_\tau(s)$ of the probability density $f_\tau(x)$ of a time interval τ between observed events has the form

$$\Phi_\tau(x) = \frac{\Phi_\beta(s)}{1-\Phi_\gamma(s)},$$

where $\Phi_\beta(s)$, $\Phi_\gamma(s)$ are the Laplace transformations of the functions $f_\beta(x)$ and $f_\gamma(x)$ respectively.

To find the characteristics of the time interval θ when the events cannot be observable, we introduce the auxiliary random variables

$$\tilde{\beta}_i = \theta_i \cdot \chi(\tau_i > \theta_i), \quad \gamma_i = \tau_i \cdot \chi(\tau_i \le \theta_i), \quad i \ge 1,$$

and functions:

$$F_{\tilde{\beta}}(x) = P(0 < \tau_i < x, \tau_i \ge \theta_i), \quad f_{\tilde{\beta}}(x) = F'_{\tilde{\beta}}(x),$$

$$F_{\gamma}(x) = P(0 < \tau_i < x, \tau_i < \theta_i), \quad f_{\gamma}(x) = F'_{\gamma}(x), \; i \ge 1.$$

Denote the time ν:

$$\nu = \min\{i \ge 1 : \gamma_i = 0\}.$$

Taking the time interval θ is defined as follows:

$$\theta = \sum_{i=1}^{\nu-1} \gamma_i + \tilde{\beta}_{\nu}.$$

Theorem 2. The Laplace transformation $\Phi_{\theta}(s)$ of the density function $f_{\theta}(x)$ of time interval θ has the form

$$\Phi_{\theta}(x) = \frac{\Phi_{\tilde{\beta}}(s)}{1 - \Phi_{\gamma}(s)},$$

where $\Phi_{\tilde{\beta}}(s)$, $\Phi_{\gamma}(s)$ are the Laplace transformations of functions $f_{\tilde{\beta}}(x)$ and $f_{\gamma}(x)$, respectively.

Examples of using Theorem 1and Theorem 2 for some types of distribution are given.

Thus, for a flow of homogeneous events with a given density or probability distribution function of the interval between observed events in a flow with prolonging dead time of special type, the duration of which also has a given probability distribution function, the Laplace transformations for the probability density distribution in the General case and the probability density distribution in particular cases are obtained.

Keywords: flow of events; time interval between observed events; prolonged dead time; probability density; distribution function; Laplace transformation.

ZAVGORODNYAYA Maria Evgenievna (Candidate of Technical Sciences, National Research Tomsk State University, Russian Federation). E-mail: mari.zavgor@mail.ru

REFERENCES

1. Kurochkin, S.S. (1968) *Mnogomernyye statisticheskiye analizatory* [Multivariate statistical analyzers]. Moscow: Atomizdat.
2. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoye.
3. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1992) Estimation of intensity of the Poisson stream of events for condition under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering – Telecommunications and Radio Engineering*. 47(1). pp. 33–38. (In Russian).
4. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1993) Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events. *Telecommunications and Radio Engineering – Telecommunications and Radio Engineering*. 48(10). pp. 40–45. (In Russian).
5. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow. *Radiotekhnika – Radioengineering*. 2. pp. 8–11.
6. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Otsenivaniye dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy [Dead time period and parameter estimation of synchronous alternating flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 6. pp. 232–239.
7. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2005) Otsenivaniye dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy pri neprodlevayushchemsya mertvom vremeni [Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 10. pp. 35–49.
8. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) The estimation of the dead time period and parameters of the asynchronous alternating event flow with extra event initiation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 137–145. (In Russian).
9. Gortsev, A.M. & Parshina, M.E. (1999) Estimation of parameters of an alternate stream of events in “dead” time conditions. *Russian Physics Journal*. 42(4). pp. 373−378. (In Russian).
10. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (1997) Otsenka parametrov al'terniruyushchego potoka sobytiy pri uslovii yego chastichnoy na-blyudayemosti [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of particulate observability]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 10(3). pp. 273–280.
11. Bushlanov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 69(9). pp. 1517–1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075
12. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Otsenivaniye dlitel'nosti “mertvogo vremeni” i intensivnostey sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy [Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochasticevent flow]. *Radiotekhnika – Radioengineering*. 10. pp. 8–16.

13. Vasileva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002a) Estimation of the dead time of an asynchronous double stochastic flow of events under incomplete observability. *Automation and Remote Control*. 64(12). pp. 1890–1898. DOI: 10.1023/B:AURC.0000008427.99676.df
14. Vasileva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002b) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control*. 63(3). pp. 511–515. DOI: 10.1023/A:1014718921138
15. Gortsev, A.M. & Kusnatdinov, R.T. (1998) Otsenivaniye sostoyaniy MS-potoka sobytiy pri yego chastichnoy nablyudayemosti [Estimation of states of the MC-flow of events under its partial observation]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 4. pp. 22–30.
16. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536–545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
17. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semisynchronous double stochastic flow of events when the dead time is prolonged. *Vychislitel'nye teknologii – Computational Technologies*. 13(1). pp. 31–41. (In Russian).
18. Nezhelskaya, L.A. (2000) The optimum estimation of states of the half-synchronous event flow in conditions of its partial observability. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95–98. (In Russian).
19. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized asynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(21). pp. 14–25. (In Russian).
20. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54–63. (In Russian).
21. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32–42. (In Russian).
22. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized semysynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27–37. (In Russian).
23. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19–29. (In Russian).
24. Gortsev, A.M. & Soloviev, A.A. (2014) Joint probability density of interarrival interval of a flow of physical events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal*. 57(7). pp. 973–983. DOI: 10.1007/s11182-014-0333-4
25. Gortsev, A.M. & Soloviev, A.A. (2015) Maximum likelihood estimation of fixed dead time in physical flow of events. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 58(11). pp. 141–149. (In Russian).
26. Sirotina, M.N. & Gortsev, A.M. (2016) Maxumum likelihood estimator of dead time duration in modulated synchronous twice stochastic flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(34). pp. 50–64. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/34/6
27. Gortsev, A. & Sirotina, A. (2015) Joint probability density function of modulated synchronous flow interval duration under conditions of fixed dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 41–52. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_4
28. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2014) Optimal states estimation of the modulated semisyncronous integrated flow of events in the condition of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 13–24. (In Russian).
29. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2015) Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 13–27. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
30. Nezhelskaya, L. (2014) Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 342–350. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_39
31. Nezhelskaya, L.A. (2015) Usloviya rekurrentnosti potoka fizicheskikh sobytiy pri neprodlevayushchemsya mertvom vremeni [Conditions for recurrence of flow of physical events with unextendable dead time period]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 58(12). pp. 168–175.
32. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_12
33. Nezhelskaya, L. (2016) Estimation of the unextendable dead time period in a flow of physical events by the method of maximum likelihood. *Russian Physics Journal*. 59(5). pp. 651–662. DOI: 10.1007/s11182-016-0818-4
34. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (2017) Otsenivaniye parametra neprodlevayushchegosya mertvogo vremeni sluchaynoy dlitel'nosti v puassonovskom potoke sobytiy [Optimal states estimation of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in the condition of constant dead time]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 40. pp. 32–40. DOI: 10.17223/19988605/40/4
35. Zavgorodnyaya, M.Ye. & Shitina, A.A. (2017) [Investigation of the simplest flow of events under conditions of an unextended dead time]. *Matematicheskoye i programmnoye obespecheniye informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software support of information, technical and economic systems]. Proc. of the Fifth International Conference. Tomsk. May 19, 2017. Tomsk. pp. 128–133. (In Russian).

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 43

УДК 621.391
DOI: 10.17223/19988605/43/5

А.Н. Земцов

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕ ГАЛЛА

Рассматривается проблема аппроксимации изображений с помощью вейвлетов. Предлагается методика аппроксимации изображений с помощью преобразования Ле Галла. Приведены результаты численных экспериментов, показывающие возможность использования методики для решения задач обработки изображений.
Ключевые слова: кодирование изображений; сжатие изображений; вейвлет-преобразование; преобразование Ле Галла; метрика PSNR.

По мере развития информационных и телекоммуникационных систем, а также технических средств регистрации изображений, отмечается интенсивное расширение применения методов цифровой обработки изображений в различных сферах человеческой деятельности. Увеличение требований конечных пользователей к такого рода системам является одной из основных причин их постоянного совершенствования и развития, увеличения производительности и эффективности их функционирования.

В настоящее время очевидно, что традиционный подход к анализу стационарных сигналов на основе преобразования Фурье является малоэффективным для представления функций и сигналов с локальными особенности [1].

Одним из главных недостатков такого подхода является использование в качестве базовой функции синусоиды, имеющей область определения *R*. Как следствие, преобразование Фурье не обладает хорошей локализацией в пространстве и не способно описывать нестационарные сигналы [2].

1. Вейвлет-анализ сигналов

Обозначим через $L^2(0,2\pi)$ множество всех измеримых функций *f*, определенных на интервале $(0,2\pi)$ и таких, что

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (1)$$

Здесь *f* является периодически продолжаемой на *R* кусочно-непрерывной функцией, поэтому $L^2(0,2\pi)$ называют 2π-периодической функцией со среднеквадратичной сходимостью. Функция *f* может быть представлена рядом Фурье [3]:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (2)$$

где c_n – коэффициенты Фурье, которые определяются как

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (3)$$

Из формулы (2) видно, что для получения преобразования необходимо иметь сведения о поведении сигнала не только в прошлом, но и в будущем [4]. Любая функция $f \in L^2(0,2\pi)$ представляется суперпозицией целочисленных растяжений базисной функции $\omega(x) = e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, являющейся синусоидой. Необходимо отметить, что функция $\omega_n(x) = \omega(nx)$ не принадлежит пространству $L^2(R)$, являющемуся одним из случаев гильбертова пространства, для которого

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (4)$$

Из (4) следует, что любая $f \in L^2(R)$ должна затухать при $x \to \pm\infty$ и $\omega_n(x) \notin L^2(R)$. Таким образом, для использования функций $\omega_n(x)$ для порождения $L^2(R)$ необходимо, чтобы $\omega_n(x)$ затухали до нуля при $x \to \pm\infty$.

Основная идея вейвлет-анализа состоит в разложении сигнала *f* по базису функций ψ_i [5]:

$$f = \sum_i c_i \psi_i, \tag{5}$$

т.е. в представлении исходного сигнала *f* в виде взвешенной суммы базисных функций ψ_i, помноженных на спектральные коэффициенты c_i. Из формулы (5) следует, что только спектральные коэффициенты c_i представляют информацию об исходном сигнале *f*, так как базисные функции ψ_i предполагаются заданными. Как ранее отмечалось в (2), разложение в ряд Фурье также представляется в соответствии с данной концепцией [2, 6].

Для эффективного представления исходного сигнала *f* посредством малого количества спектральных коэффициентов c_i необходимо потребовать соответствия базисной функции ψ_i особенностям исходного сигнала *f* [7]. Реальные сигналы локализованы и в частотной, и во временной области [4, 8]. Первое множество сигналов эффективно представляется с помощью импульсной функции Кронекера:

$$\psi_i(t) = \delta_i(t) = \begin{cases} 1, & k = t, \\ 0, & k \neq t. \end{cases} \tag{6}$$

Компромиссным подходом для анализа сигналов является вейвлет-преобразование сигналов, основанное на кратномасштабном анализе. В противоположность оконному преобразованию Фурье базисные функции вейвлет-преобразования соответствуют эффективному окну по времени, подстроенному путем их масштабирования под основные частоты сигнала.

2. Кратномасштабный анализ

Кратномасштабный анализ есть последовательность $\{V_j\}_{j \in Z}$ замкнутых подпространств $L^2(R)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

$$V_j \subset V_{j+1}; \tag{7}$$

$$\overline{\bigcup_{j \in Z} V_j} = L^2(R); \tag{8}$$

$$\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}; \tag{9}$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}; \tag{10}$$

$$f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0. \tag{11}$$

Существует функция $\varphi \in V_0$, такая что $\{\varphi(x-k)\}_{k \in Z}$ порождает базис Рисса в V_0.

Кратномасштабный анализ задает последовательность непересекающихся вложенных аппроксимационных пространств V_j в $L^2(R)$. Если P_j является ортогональным проектором на V_j, то из условия (8) следует, что $\lim_{j \to \infty} P_j f = f$ для любой функции $f \in L^2(R)$. В силу (10) все подпространства V_j однозначно определяются из пространства V_0 при помощи соответствующего масштабирования одной функции φ. Функция φ называется масштабирующей функцией, если она порождает кратномасштабное разложение. Пространства V_j и V_{j+1} связаны таким соотношением, что при изменении масштаба функции *f* пространства V_j на 2, *f* становится элементом пространства V_{j+1}.

Сигналы, представленные крадратично-интегрируемыми функциями, определенными на вещественной оси, образуют гильбертово пространство $L^2(R)$, всегда имеющее ортонормированные базисы:

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}, \tag{11}$$

$$\|f\|^2 = \int |f(x)|^2 dx = \sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2 . \quad (12)$$

В гильбертовом пространстве существуют и более общие семейства линейно независимых базисных векторов, носящие название базиса Рисса, для которых условие (12) обобщается на два неравенства:

$$\alpha \|f\|^2 \le \sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2 \le \beta \|f\|^2, \quad (13)$$

где $\alpha > 0,\ \beta < \infty$. Данные базисы являются безусловными, т.е. порядок размещения в базисе векторов может быть произвольным.

Существует такая функция $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k);\ j,k \in Z$, что, как следствие из (10) и (11), последовательность $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in Z}$ является базисом Рисса в V_j для любого $j \in Z$.

Существует последовательность $\{h_k\}_{k \in Z}$, такая что

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in Z} h_k \varphi(2x - k). \quad (14)$$

Выражение (14) называется масштабным соотношением для масштабирующих функций.

Пространство W_j определяется как ортогональное дополнение к V_j в V_{j+1}, т.е. $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ и $W_j \perp V_j, j \in Z$. В силу (8) и (9) имеет место следствие:

$$L^2(R) = ... \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus ... = \oplus_{j \in Z} W_j . \quad (15)$$

Схематическое представление кратномасштабного анализа с разложением пространства V_{j+1} на пространство V_j и ортогональное дополнение W_j показано на рис. 1.

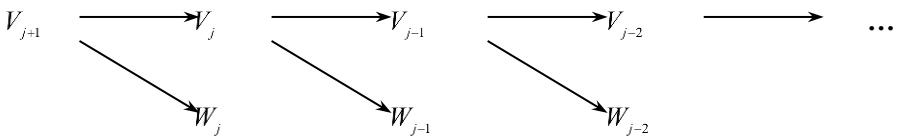


Рис. 1. Схематическое представление кратномасштабного анализа

Рис. 2. Пример двумерного сигнала и его трехуровневое вейвлет-преобразование

Пусть существует вейвлет-функция $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k),\ j,k \in Z$. Тогда, как следствие из (14), последовательность $\{\psi_{j,k}\}_{k \in Z}$ является базисом Рисса в W_j для любого $j \in Z$ и существует последовательность $\{g_k = (-1)^k h_{1-k}\}_{k \in Z}$, такая что

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in Z} g_k \varphi(2x - k), \quad (16)$$

где $\{h_k\}$ – коэффициенты фильтра для масштабирующей функции, $\{g_k\}$ – коэффициенты фильтра для вейвлет-функции, позволяющие численно находить значения φ и ψ, а также спектральные коэффициенты дискретного вейвлет-преобразования $\{d_j\}$.

Пример разложения сигнала в пространстве R^2 показан на рис. 2.

Вейвлет-преобразование эффективно локализует низкочастотные детали в частотной области и высокочастотные детали во временной [4], что является решающей характеристикой для использования при анализе сигналов сложной формы [9]. Еще одним достоинством вейвлет-преобразования по сравнению с преобразованием Фурье и дискретным косинусным преобразованием является возможность построения быстрых алгоритмов вычисления.

3. Преобразование Ле Галла

В силу того, что $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, представляется возможным определить функцию $f(x)$, записанную в терминах базисных функций пространства V_j, в терминах базисных функций пространств V_{j-1} и W_{j-1} с учетом (14) и (16):

$$P_j f(x) = \sum_k c_{j,k}\varphi_{j,k}(x) = \sum_k c_{j-1,k}\varphi_{j-1,k}(x) + \sum_k d_{j-1,k}\psi_{j-1,k}(x). \quad (17)$$

Соотношение (16) называется масштабным соотношением для вейвлет-функций.

Таким образом, дискретное вейвлет-преобразование определяется как отображение W, переводящее последовательности $\{c_{j,k}\}$ в последовательности $\{c_{j-1,k}, d_{j-1,k}\}$.

Выражение (17) называется быстрым вейвлет-преобразованием в связи с тем, что имеет сложность порядка $O(n)$, т.е. сложность вычислений пропорциональна длине сигнала.

Необходимо также отметить, что $\psi(x)$ из (16) определяется коэффициентами $\{g_k\}_{k\in Z}$, если определена порождающая масштабирующая функция $\varphi(x)$, которая определяется коэффициентами $\{\mathrm{h_k}\}_{k\in Z}$ соотношения (14). Следовательно, система вейвлет-функций и масштабирующих функций может быть определена множествами $\{g_k\}_{k\in Z}$ и $\{h_k\}_{k\in Z}$.

Из (17) следует, что любая функция $f \in L^2(R)$ на некотором заданном уровне разрешения j_n представима в виде:

$$f(x) = \sum_k c_{j_n,k}\varphi_{j_n,k}(x) + \sum_{j_n}\sum_k d_{j,k}\psi_{j,k}(x). \quad (18)$$

Видно, что первый член взвешенной суммы (18) является грубым приближением f, а члены $d_{j,k}$ – детализирующими, после добавления которых степень детализации f увеличивается. Другими словами, увеличивается разрешение представления некоторого заданного сигнала. Отметим, что переход от уровня j к уровню $j + 1$ эквивалентен замене x на $2x$.

Для вычисления преобразования Ле Галла [10] воспользуемся соответствующими коэффициентами фильтрации для масштабирующей и вейвлет-функции:

$$h_k = \left\{-\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right\},\ g_k = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right\}. \quad (19)$$

С учетом (18) и (19) найдем выражения для декомпозиции сигнала в виде:

$$\begin{aligned} d_{j,k} &= c_{j-1,2k+1} - \frac{1}{2}\left(c_{j-1,2k} + c_{j-1,2k+2}\right), \\ c_{j,k} &= c_{j-1,2k} + \frac{1}{4}\left(d_{j,k-1} + d_{j,k}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Реконструкция осуществляется в обратном порядке:

$$c_{j-1,2k} = c_{j,k} - \frac{1}{4}\left(d_{j,k-1} + d_{j,k}\right),$$
$$c_{j-1,2k+1} = d_{j,k} + \frac{1}{2}\left(c_{j-1,2k} + c_{j-1,2k+2}\right). \quad (21)$$

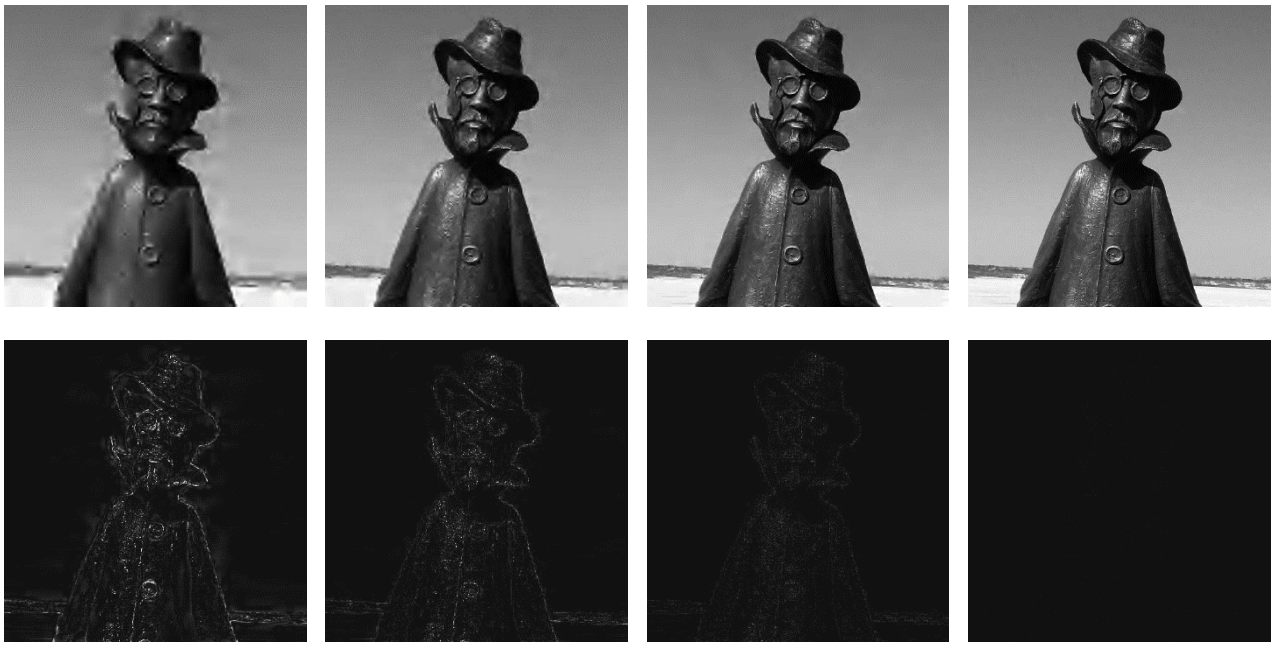
Необходимо отметить, что h_k и g_k в (19) являются коэффициентами вида $c \cdot 2^i$, где $c, i \in Z$. Следовательно, при вычислении преобразования Ле Галла вычислительно сложную операцию умножения можно заменить сдвигом на i бит.

4. Численные эксперименты

Продемонстрируем на конкретном примере возможность применения описанной методики аппроксимации изображений. Для сравнения алгоритмов часто используется характеристика степени искажения изображения. Для оценки искажений будем использовать меру пикового отношения уровня сигнала к уровню шума (PSNR, Peak Signal-to-Noise Ratio), которая является общепринятой в данной предметной области [11]. Степень искажения, измеряемая через отношение уровня сигнала к уровню шума, определяется с помощью реконструкции сигнала и сравнения декодированного сигнала с исходным. Для оценки объема полученных изображений будем также оценивать необходимое для хранения закодированного изображения удельное количество бит (bpp, bit per pixel).

В качестве тестового изображения будем использовать фрагмент фотографии памятника А.П. Чехову в городе Томске. На рис. 3 показан результат реконструкции тестового изображения с помощью различных наборов спектральных коэффициентов, полученных путем декомпозиции исходного изображения.

На рис. 3 с каждым изображением, полученным с помощью аппроксимации исходного изображения, сопоставлено изображение, являющееся разностью этих двух изображений. Это изображение показывает пиксельную ошибку, т.е. степень искажения, вносимого алгоритмом кодирования в изображение.



PSNR = 29,34 дБ, 0,01 bpp | PSNR = 32,26 дБ, 0,04 bpp | PSNR = 35,26 дБ, 0,1 bpp | PSNR = 44,80 дБ, 0,04 bpp

Рис. 3. Аппроксимация изображения на основе преобразования Ле Галла

Из рис. 3 видно, что предложенная методика аппроксимации устойчива при использовании для реконструкции даже малого количества коэффициентов, сохраняя при этом качество изображения на приемлемом уровне.

Заключение

Предлагаемая методика аппроксимации изображений с помощью преобразования Ле Галла является основным этапом построения множества последующих алгоритмов обработки и анализа. Над изображением, представленным в виде множества коэффициентов вейвлет-преобразования, можно выполнять операции фильтрации, выделения различных признаков, пороговой обработки и др. Предложенный подход к вычислению характеризуется низкой вычислительной сложностью. Для демонстрации возможности применения предлагаемой методики в работе приводятся результаты численных экспериментов, показывающие возможность использования методики для решения задач обработки изображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Unser M. Sampling – 50 years after Shannon // Proc. of the IEEE. 2000. V. 88. P. 569–587.
2. He K., Sun. J., Tang X. Guided image filtering // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2013. V. 35. P. 1397–1409.
3. Broughton S. Discrete Fourier Analysis and Wavelets: Applications to Signal and Image Processing. Wiley-Interscience, 2008. 360 p.
4. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Izhevsk : SPC “Regular and Chaotic Dynamics”, 2001. 464 p.
5. Gall D., Tabiatai A. Sub-band coding of digital images using symmetric short kernel filters and arithmetic coding techniques // Speech and Signal Processing. 1988. P. 761–764.
6. Donoho D.L. Compressed sensing // IEEE Trans. on Information Theory. 2006. V. 52. P. 1289–1306.
7. Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. Elsevier Inc., 2009. 832 p.
8. Akansu A. Wavelet, Subband and Block Transforms in Communications and Multimedia. Springer US, 1999. 408 p.
9. Zitova B., Flusser J. Image registration methods: A survey // Image and Vision Computing. 2003. V. 21. P. 977–1000.
10. Sikora T. Trends and perspectives in image and video coding // Proc. of IEEE. 2005. V. 93. P. 6–17.
11. Lin W., Jay Kuo C. Perceptual visual quality metrics: a survey // Journal of Visual Communication and Image Representation. 2011. V. 22. P. 297–312.

Поступила в редакцию 22 октября 2017 г.

Zemtsov A.N. (2018) REPRESENTATION OF IMAGES USING LE GALL TRANSFORM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 43. pp. 42–48

DOI: 10.17223/19988605/43/5

It is now obvious that the traditional approach to the analysis of stationary signals based on the Fourier transform is ineffective for the representation of functions and signals with local singularities. A compromise approach for signal analysis is the wavelet transform of signals based on a multiscale analysis. In this paper, we propose a technique for approximating images using Le Gall transform.

A multi-scale analysis defines a sequence of disjoint nested approximative spaces V_j in $L^2(R)$. The space W_j is defined as the orthogonal complement to V_j in V_{j+1}, i.e. $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ and $W_j \perp V_j, j \in Z$.

As $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ it seems possible to define the function $f(x)$, written in terms of basis functions of space V_j, in terms of basis functions of spaces V_{j-1} and W_{j-1} a fast wavelet transformation having a complexity $O(n)$ is written in the form:

$$P_j f(x) = \sum_k c_{j,k}\varphi_{j,k}(x) = \sum_k c_{j-1,k}\varphi_{j-1,k}(x) + \sum_k d_{j-1,k}\psi_{j-1,k}(x),$$

from which it follows that any function $f \in L^2(R)$ at a certain resolution level j_n is representable in the form:

$$f(x) = \sum_k c_{j_n,k}\varphi_{j_n,k}(x) + \sum_{j_n}\sum_k d_{j,k}\psi_{j,k}(x).$$

To calculate the Le Gall transform, we use the appropriate filter coefficients for the scaling and wavelet functions:

$$\mathrm{h_k} = \left\{-\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right\},\ \mathrm{g_k} = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right\},$$

then the expressions for the decomposition of the signal will be written in the form:

$$d_{j,k} = c_{j-1,2k+1} - \frac{1}{2}\left(c_{j-1,2k} + c_{j-1,2k+2}\right),$$

$$c_{j,k} = c_{j-1,2k} + \frac{1}{4}\left(d_{j,k-1} + d_{j,k}\right).$$

Reconstruction is carried out in the reverse order:

$$c_{j-1,2k} = c_{j,k} - \frac{1}{4}\left(d_{j,k-1} + d_{j,k}\right),$$

$$c_{j-1,2k+1} = d_{j,k} + \frac{1}{2}\left(c_{j-1,2k} + c_{j-1,2k+2}\right).$$

The application of the proposed image representation technique allows obtaining the required resolution, as well as controlled original image detalisation, which is especially important in image compression and pattern recognition problems in the multiscale representation of real-world objects in an image. Above the image represented as a set of wavelet transform coefficients, can be perform filtering operations, highlighting various characteristics, thresholding, and others. The proposed approach to computing is characterized by low computational complexity.

Keywords: image coding; image compression; wavelet transform; Le Gall transform; quality metrics, PSNR.

ZEMTSOV Andrey Nikolaevich (Candidate of Technical Sciences, Volgograd State Technical University, Russian Federation).
E-mail: ecmsys@yandex.ru

REFERENCES

1. Unser, M. (2000) Sampling – 50 years after Shannon. *Proc. of the IEEE*. 88. pp. 569–587.
2. He, K., Sun. J. & Tang, X. (2013) Guided image filtering. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 35. pp. 1397–1409.
3. Broughton, S. & Bryan, K. (2008) *Discrete Fourier Analysis and Wavelets: Applications to Signal and Image Processing*. Wiley-Interscience.
4. Daubechies, I. (2001) *Ten Lectures on Wavelets.* Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics.
5. Gall, D. & Tabiatai, A. (1998) Sub-band coding of digital images using symmetric short kernel filters and arithmetic coding techniques. *Speech and Signal Processing.* pp. 761–764. DOI: 10.1109/ICASSP.1988.196696
6. Donoho, D.L. (2006) Compressed sensing. *IEEE Trans. on Information Theory*. 52. pp. 1289–1306.
7. Mallat, S. (2009) A *Wavelet Tour of Signal Processing.* Elsevier Inc.
8. Akansu, A. (1999) *Wavelet, Subband and Block Transforms in Communications and Multimedia*. Springer US.
9. Zitova, B. & Flusser, J. (2003) Image registration methods: A survey. *Image and Vision Computing*. 21. pp. 977–1000. DOI: 10.1016/S0262-8856(03)00137-9
10. Sikora, T. (2005) Trends and perspectives in image and video coding. *Proc. of IEEE.* 93. pp. 6–17.
11. Lin, W. & Jay Kuo, C. (2011) Perceptual visual quality metrics: A survey. *Journal of Visual Communication and Image Representation*. 22. pp. 297–312. DOI: 10.1016/j.jvcir.2011.01.005

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 43

УДК 519.21, 519.87
DOI: 10.17223/19988605/43/6

О.А. Осипов

АНАЛИЗ RQ-СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДЕЛЕНИЕМ И СЛИЯНИЕМ ТРЕБОВАНИЙ

Рассматривается экспоненциальная сеть массового обслуживания, состоящая из параллельных систем обслуживания с конечным числом мест для ожидания в очереди. Ключевой особенностью является деление поступающих требований на фрагменты, которые обслуживаются параллельно и независимо. Требование будет считаться обслуженным только после того, как завершится обслуживание всех его фрагментов. Ограниченность числа мест для ожидания в системах сети приводит к возникновению повторных вызовов. Для сети обслуживания с использованием матричных методов получены основные стационарные характеристики.
Ключевые слова: сети обслуживания с делением и слиянием требований; матрично-геометрическое решение; источник повторных вызовов.

Сети массового обслуживания (СеМО) с делением и слиянием требований (fork-join queueing networks) [1] являются математическими моделями, используемыми для анализа стохастических систем с параллельным или распределенным принципом функционирования (телекоммуникационные системы, распределенные базы данных, многопроцессорные системы). В таких реальных системах поступающие для обработки задачи делятся на более простые для выполнения подзадачи, которые распределяются по системе, занимая выделенные им ресурсы, однако исходная задача будет считаться выполненной только после выполнения всех ее подзадач.

В большинстве работ рассматриваются сети массового обслуживания с делением и слиянием требований, состоящие из параллельных систем массового обслуживания (СМО). Для сети обслуживания, состоящей из двух одноприборных параллельных СМО, в [2] получено выражение для производящей функции стационарного распределения вероятностей состояний сети. Анализ же сетей обслуживания большей размерности с делением и слиянием требований проводится только приближенными методами [3–5]. Обзор основных результатов за тридцатилетний период изучения СеМО с делением и слиянием требований можно найти в [6].

Характерной особенностью моделируемых реальных систем является наличие повторных обращений от поступающих для выполнения задач спустя некоторое время, они возникают в случае отказа в выполнении, что имеет место в связи с ограниченностью ресурсов системы. Для моделирования процессов, возникающих при повторных обращениях, используют модели массового обслуживания с повторными вызовами – RQ-системы и сети массового обслуживания (retrial queues). В таких моделях требование, получившее отказ в обслуживании, поступает в источник повторных вызовов (ИПВ), из которого снова пытается получить обслуживание.

Для исследования моделей обслуживания с повторными вызовами применяются матричные методы [7, 8], а также методы асимптотического анализа [9, 10]. Основные результаты можно найти в монографиях [11, 12].

В данной работе будет рассмотрена сеть массового обслуживания с делением и слиянием требований, состоящая из параллельных СМО, в которой имеют место повторные вызовы. Возникновение повторных вызовов связано с ограниченностью числа мест для ожидания в каждой системе обслуживания сети.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 описывается изучаемая сеть массового обслуживания. Стационарное распределение вероятностей состояний сети, а также выражения для

основных стационарных характеристик приводятся в разд. 2 и 3 соответственно. Раздел 4 содержит численные примеры.

1. Описание сети обслуживания

Рассматривается RQ-сеть массового обслуживания с делением и слиянием требований, состоящая из M параллельных одноприборных систем обслуживания, каждая с конечным числом B мест для ожидания в очереди (рис. 1).

В сеть обслуживания из внешнего источника поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью Λ. Вновь поступающее требование, застающее сеть в состоянии, когда в каждой очереди имеются свободные места для ожидания, делится на M фрагментов, которые распределяются по системам сети и ожидают своего обслуживания в соответствии с дисциплиной FCFS в очередях. Длительность обслуживания фрагментов на приборе системы i имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i.

Фрагмент, завершивший свое обслуживание, освобождает обслуживающий его прибор. Требование будет считаться обслуженным только после того, как будет завершено обслуживание всех его фрагментов. Сразу после этого фрагменты требования мгновенно объединяются в исходное обслуженное требование.

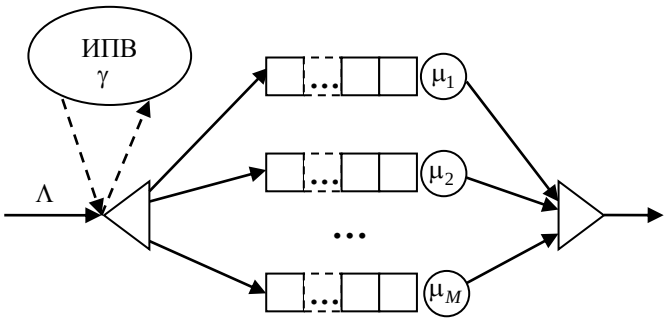


Рис. 1. RQ-сеть обслуживания с делением и слиянием требований

В том случае, когда хотя бы одна очередь заполнена полностью, поступившее требование не может быть поделено и переходит в источник повторных вызовов, где после случайной задержки вновь пытается обратиться к системам сети для получения обслуживания; если требование снова не может получить обслуживание, то оно вновь возвращается в ИПВ. Предполагается, что если в ИПВ есть требования, то длительность интервала времени между повторными вызовами имеет экспоненциальное распределение с параметром γ.

2. Стационарное распределение вероятностей состояний сети

Состояние рассматриваемой сети обслуживания в момент времени t определим как вектор $\boldsymbol{x}(t) = (r(t), n_1(t), \ldots, n_M(t))$, где $r(t)$ – число требований в ИПВ, $n_i(t)$ – число фрагментов в системе обслуживания i, $i = 1, \ldots, M$.

Очевидно, что $(M + 1)$-мерный процесс $\{\boldsymbol{x}(t), t \geq 0\}$ есть цепь Маркова с непрерывным временем, определенная на пространстве состояний $\boldsymbol{X}$,

$$\boldsymbol{X} = \{(r, n_1, \ldots, n_M) : r \geq 0, 0 \leq n_i \leq B+1, i = 1, \ldots, M\}.$$

Обозначим через $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ интенсивность перехода цепи из состояния $\boldsymbol{x}$ в состояние $\boldsymbol{x}'$.

Справедливо:

1) если $n_i < B + 1$, $i = 1, \ldots, M$,

$$q((r, n_1, \ldots, n_M), (r, n_1 + 1, \ldots, n_M + 1)) = \Lambda; \quad (1)$$

2) если $n_i < B + 1$, $i = 1, \ldots, M$, $r > 0$,

$$q\left(\left(r, n_1, ..., n_M\right), \left(r-1, n_1+1, ..., n_M+1\right)\right) = \gamma; \quad (2)$$

3) если существует $j \in \{1, ..., M\}$, такое, что $n_j = B + 1$,

$$q\left(\left(r, n_1, ..., n_{j-1}, B+1, n_{j+1}, ..., n_M\right), \left(r+1, n_1, ..., n_{j-1}, B+1, n_{j+1}, ..., n_M\right)\right) = \Lambda; \quad (3)$$

4) если существует $j \in \{1, ..., M\}$, такое, что $n_j > 0$,

$$q\left(\left(r, n_1, ..., n_{j-1}, n_j, n_{j+1}, ..., n_M\right), \left(r, n_1, ..., n_{j-1}, n_j-1, n_{j+1}, ..., n_M\right)\right) = \mu_j. \quad (4)$$

Упорядочим состояния цепи Маркова в лексикографическом порядке, под макросостоянием с номером i будем понимать множество состояний $\boldsymbol{X}_i$ мощности $(B + 2)^M$, определяемое как

$$\boldsymbol{X_i} = \left\{(r, n_1, ..., n_M) \in \boldsymbol{X} : r = i\right\}.$$

Цепь Маркова $\{\boldsymbol{x}(t), t \geq 0\}$ является квазипроцессом размножения и гибели [7, 13], инфинитезимальный оператор $\boldsymbol{Q}$ цепи имеет блочно-диагональный вид:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_{00}$, $\mathbf{B}_{01}$, $\mathbf{B}_{10}$ суть квадратные матрицы порядка $(B + 2)^M$.

Матрицы $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_2$ задаются выражениями (2) и (3) соответственно, $\mathbf{B}_{10} = \mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_{01} = \mathbf{A}_2$. Выражения (1) и (4) определяют внедиагональные элементы матриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_{00}$; диагональные элементы матриц определяются из условий:

$$\mathbf{A}_0\mathbf{1} + \mathbf{A}_1\mathbf{1} + \mathbf{A}_2\mathbf{1} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{B}_{00}\mathbf{1} + \mathbf{B}_{01}\mathbf{1} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{1}$ обозначает единичный вектор-столбец.

Для вычисления стационарного распределения $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \ldots)$ воспользуемся аппаратом матрично-аналитических решений [7, 13], а именно матрично-геометрическим методом. Здесь $\boldsymbol{\pi}_i$, $i = 0, 1, \ldots$ есть вектор-строка, каждая компонента которого задает вероятность нахождения в некотором состоянии из макросостояния $\boldsymbol{X}_i$ в соответствии с введенным лексикографическим порядком.

Будем использовать следующие обозначения: $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\pi}(r, n_1, \ldots, n_M)$ – стационарная вероятность нахождения сети обслуживания в состоянии $\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{X}_i)$ – стационарная вероятность нахождения сети в макросостоянии $\boldsymbol{X}_i$,

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{X_i}) = \sum_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X_i}} \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\pi}_i\mathbf{1}.$$

Для сети обслуживания стационарный режим будет существовать тогда и только тогда, когда выполнено условие [13]

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}_0\mathbf{1} > \boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}_2\mathbf{1},$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ есть решение уравнения $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \mathbf{0}$ с условием нормировки $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{1} = 1$.

Известно, что тогда стационарное распределение имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\pi}_i = \boldsymbol{\pi}_1\mathbf{R}^{i-1}, i = 1, 2, ...,$$

где $\mathbf{R}$ есть решение уравнения $\mathbf{A_2} + \mathbf{RA_1} + \mathbf{R^2A_0} = \mathbf{0}$, векторы $\boldsymbol{\pi}_0$ и $\boldsymbol{\pi}_1$ находятся как решение уравнения

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_0 & \boldsymbol{\pi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{A}_1 + \mathbf{RA}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

с условием нормировки $\boldsymbol{\pi_0}\mathbf{1} + \boldsymbol{\pi_1}\mathbf{(I-R)^{-1}1}=1$, здесь $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

3. Вычисление стационарных характеристик

Используя стационарное распределение $\boldsymbol{\pi}$, определим математическое ожидание (м.о.) $\bar{N}_R$ числа требований в ИПВ:

$$\bar{N}_R = \sum_{i=1}^{\infty} i\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{X}_i) = \boldsymbol{\pi}_1 \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{R}^{i-1}\mathbf{1} = \boldsymbol{\pi}_1(\mathbf{I}-\mathbf{R})^{-2}\mathbf{1}.$$

Обозначим через $(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_{(B+2)^M})$ вектор-столбец, составленный в соответствии с введенным лексикографическим порядком из всех элементов множества $\{(n_1, \ldots, n_M) : 0 \le n_i \le B+1\}$, который отображает все возможные способы распределения фрагментов по M системам сети. Пусть $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_M)$, через $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n})$ обозначим следующую стационарную вероятность:

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n}) = \sum_{r=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}(r, n_1, \ldots, n_M).$$

Положим $\mathbf{d} = (\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n}_1), \ldots, \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n}_{(B+2)^M}))$, тогда справедливо

$$\mathbf{d} = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_i = \boldsymbol{\pi}_0 + \boldsymbol{\pi}_1(\mathbf{I}-\mathbf{R})^{-1}.$$

Предположим, что сеть обслуживания находится в состоянии $(r, n_1, \ldots, n_M)$, тогда число требований, разделившихся на фрагменты, будет, очевидно, равно $\max\{n_1, \ldots, n_M\}$. Математическое ожидание $\bar{N}_S$ числа таких требований

$$\bar{N}_S = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}_i} \max\{n_1, \ldots, n_M\}\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{d}\left(\max\{\boldsymbol{n}_1\}, \ldots, \max\left\{\boldsymbol{n}_{(B+2)^M}\right\}\right).$$

Под длительностью пребывания требования в сети обслуживания будем понимать длительность интервала времени от момента разделения требования на фрагменты и распределения по системам до завершения обслуживания последнего из этих фрагментов. Тогда м.о. $\bar{T}_S$ длительности времени пребывания требований в сети обслуживания будет равно

$$\bar{T}_S = \bar{N}_S / \Lambda.$$

С учетом возможного пребывания в ИПВ м.о. $\bar{T}$ длительности интервала от поступления требования из источника до завершения его обслуживания будет равно

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}_S + \bar{N}_R}{\Lambda}.$$

Обозначим через b вероятность того, что требование, поступающее из источника, перейдет в ИПВ, тогда интенсивность Λ_R потока требований из источника в ИПВ составит

$$\Lambda_R = b\Lambda,$$

$$b = \sum_{\substack{i=1 \\ \max\{\boldsymbol{n}_i\}=B+1}}^{(B+2)^M} \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n}_i).$$

Требование, находящееся в ИПВ, осуществляет попытки занятия систем обслуживания сети, математическое ожидание $\bar{T}_R$ суммарной длительности времени пребывания требований в ИПВ, будет равно

$$\bar{T}_R = \frac{\bar{N}_R}{\Lambda_R}.$$

Для требования, находящегося в ИПВ, можно рассмотреть число повторных обращений к системам обслуживания. Обозначим через $\bar{K}$ математическое ожидание числа попыток захвата систем обслуживания. Будем исходить из следующих соображений: интенсивность входящего потока из источника в ИПВ равна Λ_R, требования из ИПВ обращаются к системам сети, интенсивность обращений к системам равна $\gamma(1-\boldsymbol{\pi}(\mathbf{X}_0))$. Тогда

$$\bar{K} = \frac{\gamma(1-\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{X}_0))}{\Lambda_R}.$$

4. Примеры

Рассмотрим изменение м.о. $\bar{T}$ длительности интервала времени от поступления требования из источника до завершения его обслуживания в зависимости от числа мест для ожидания в очереди (B = 0, 1, 2) и интенсивности Λ входящего потока. Результаты численных экспериментов изображены на рис. 2, здесь M = 2, $\mu_1 = \mu_2 = 6$, $\gamma = 10$.

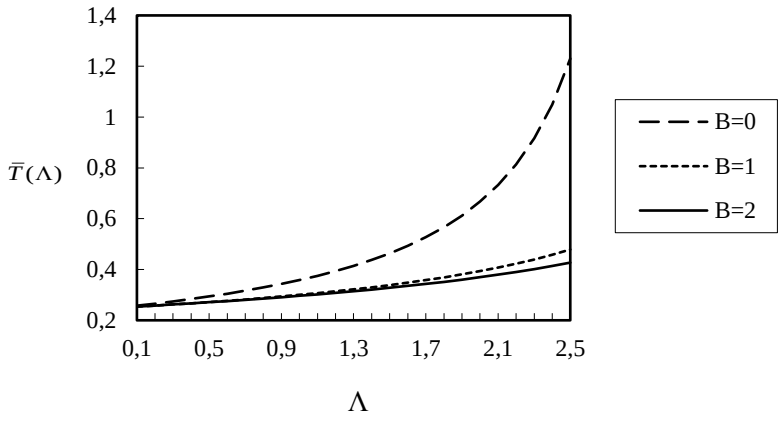


Рис. 2. Графики зависимости $\bar{T}(\Lambda)$ при 0,1 < Λ < 2,5

В данном примере численно решим задачу оптимального выбора параметра γ – интенсивности поступления требований из ИПВ, исходя из следующего: будем предполагать, что каждая неудачная попытка поступления из ИПВ приводит к выплате C_K; с другой стороны, C_T есть плата за нахождение одного требования в ИПВ в течение единицы времени.

Тогда целевая функция $C_{KT}(\gamma)$ имеет вид:

$$C_{KT}(\gamma) = C_K \bar{K}(\gamma) + C_T \bar{T}_R(\gamma).$$

На рис. 3 представлен график целевой функции $C_{KT}(\gamma)$ для следующих параметров сети обслуживания: Λ = 1, M = 5, $\mu_1 = \ldots = \mu_5 = 2$, B = 2, C_K = 1, C_T = 0,5.

При интенсивности поступления из ИПВ γ_{KT} = 1,98, целевая функция достигает минимума и принимает значение $C_{KT}(\gamma_{KT})$ = 4,15.

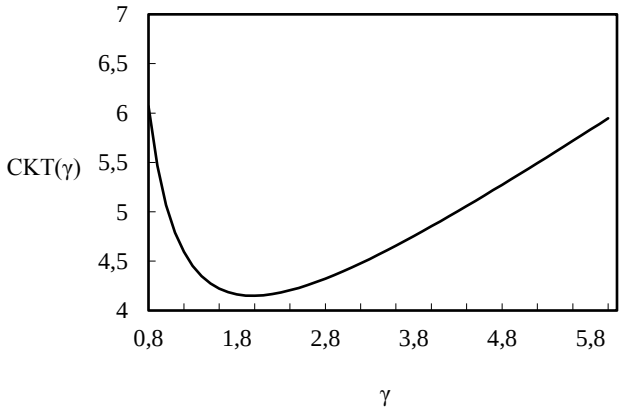


Рис. 3. График целевой функции $C_{KT}(\gamma)$ при 0,8 < γ < 6

Пусть теперь целевая функция определена следующим образом:

$$C_{Kb}(\gamma) = C_K \bar{K}(\gamma) + C_b(1 - b(\gamma)),$$

т.е. каждая неудачная попытка поступления из ИПВ приводит к выплате C_K; с другой стороны, C_b есть плата за нахождение всех очередей систем в незаполненном состоянии.

На рис. 4 представлен график целевой функции $C_{Kb}(\gamma)$ для следующих параметров сети обслуживания: $\Lambda = 1$, $M = 5$, $\mu_1 = \ldots = \mu_5 = 2$, $B = 2$, $C_K = 1$, $C_b = 50$.

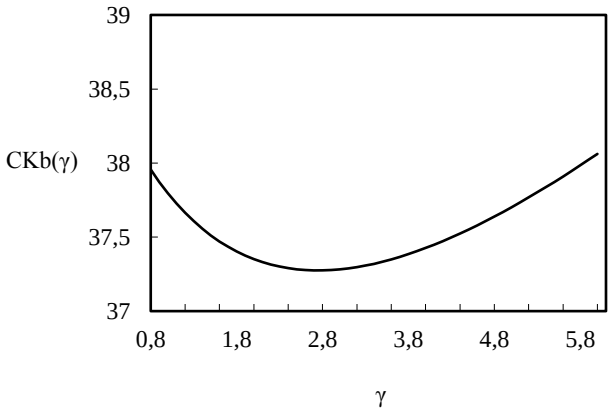


Рис. 4. График целевой функции $C_{Kb}(\gamma)$ при $0{,}8 < \gamma < 6$

Минимальное значение целевой функции достигается при интенсивности поступления из ИПВ $\gamma_{Kb} = 2{,}74$, $C_{Kb}(\gamma_{Kb}) = 37{,}27$.

Заключение

В статье рассмотрена RQ-сеть массового обслуживания с делением и слиянием требований. Получены выражения для основных стационарных характеристик сети обслуживания. Приведены примеры и рассмотрены задачи численной оптимизации.

Представленная в работе сеть массового обслуживания может применяться в качестве модели многопроцессорных вычислительных систем, а также других систем с параллельным и распределенным принципами функционирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Narahari Y., Sundarrajan P. Performability analysis of fork-join queueing systems // Journal of the Operational Research Society. 1995. V. 6, No. 10. P. 1237–1249.
2. Flatto L., Hahn S. Two parallel queues created by arrivals with two demands I // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1984. V. 4, No. 5. P. 1041–1053.
3. Nelson R., Tantawi A.N. Approximate analysis of fork/join synchronization in parallel queues // IEEE Trans. Comp. 1988. V. 37, No. 6. P. 739–743.
4. Ko S.-S., Serfozo R.F. Sojourn times in G/M/1 fork-join networks // Naval Research Logistics (NRL). 2008. V. 55, No.5. P. 432–443.
5. Ko S.-S., Serfozo R.F. Response times in M/M/s fork-join networks // Adv. Appl. Prob. 2004. V. 36, No. 3. P. 432–443.
6. Thomassian A. Analysis of fork/join and related queueing systems // ACM Computing Surveys. 2014. V. 47, No. 2. P. 17:1–17:71.
7. Neuts M. Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: an Algorithmic Approach. Baltimore : The Johns Hopkins University Press, 1981. 352 p.
8. Klimenok V.I., Savko R.Ch. Tandem system with retrials and impatient customers // Automation and Remote Control. 2015. V. 76, No. 8. P. 1387–1399.
9. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
10. Nazarov A.A., Semenova I.A. Asymptotic analysis of retrial queueing systems // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2011. V. 47, No. 4. P. 406–413.
11. Falin G.I., Tempelton J.G.C. Retrial queues. London : Chapman & Hall, 1997. 328 p.
12. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. Springer, 2008. 332 p.
13. He Q.-M. Fundamentals of Matrix-Analytic Methods. New York : Springer, 2014. 349 p.

Поступила в редакцию 29 декабря 2017 г.

Osipov O.A. (2018) ANALYSIS OF FORK/JOIN QUEUEING NETWORKS WITH RETRIALS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 43. pp. 49–55

DOI: 10.17223/19988605/43/6

In this paper, we consider a fork/join queueing network with retrials. Jobs arrive at the network according to a Poisson process with rate Λ. Each node operates like a /M/1/B queueing system under a FCFS discipline.

When each node has less then B+1 tasks, an arriving job is split into *M* tasks which are simultaneously assigned to the *M* nodes. The tasks are serviced independently, and their service times at node *i* have an exponential distribution with rate μ_i, $i = 1, \ldots, M$. When all of its *M* tasks are finished, the job is completed and exits the network.

In other case, the job goes to the retrial orbit to retry for service after a random time. The retrial policy is assumed to be independent of the number of jobs in the orbit, i.e., a constant retrial policy.

We represent the state of the network over time by the stochastic process $\boldsymbol{x}(t) = (r(t), n_1(t), \ldots, n_M(t))$, where $r(t)$ denotes the number of jobs in orbit at time t, $n_i(t)$ denotes the number of tasks in node i at time t. This is an $(M + 1)$-dimensional continuous time Markov chain on the state space $\boldsymbol{X}$,

$$\boldsymbol{X} = \{(r, n_1, \ldots, n_M) : r \geq 0, 0 \leq n_i \leq B+1, i = 1, \ldots, M\}.$$

Applying a matrix-geometric approach, we obtain the stationary distribution of the number of jobs in the network under exponential assumptions. Using the distribution, we determine performance measures. Finally, some numerical examples and a section of conclusions commenting the main research contributions of this paper are presented.

The results can be used for the performance analysis of multiprocessor systems and other modern distributed systems.

Keywords: fork/join queueing networks; retrial queues; matrix-geometric method; distributed computing systems.

OSIPOV Oleg Alexandrovich (National Research Saratov State University, Russian Federation).
E-mail: oleg.alex.osipov@gmail.com

REFERENCES

1. Narahari, Y. & Sundarrajan, P. (1995) Performability analysis of fork-join queueing systems. *Journal of the Operational Research Society*. 6(10). pp. 1237–1249. DOI: 10.1057/jors.1995.17
2. Flatto, L. & Hahn, S. (1984) Two parallel queues created by arrivals with two demands I. *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 44(5). pp. 1041–1053. DOI: 10.1137/0144074
3. Nelson, R. & Tantawi, A.N. (1988) Approximate analysis of fork/join synchronization in parallel queues. *IEEE Trans. Comp*. 37(6). pp. 739–743. DOI: 10.1109/12.2213
4. Ko, S.-S. & Serfozo, R.F. (2008) Sojourn times in G/M/1 fork-join networks. *Naval Research Logistics (NRL)*. 55(5). pp. 432–443. DOI: 10.1002/nav.20294
5. Ko, S.-S. & Serfozo, R.F. (2004) Response times in M/M/s fork-join networks. *Advances in Applied Probability*. 36(3). pp. 432–443. DOI: 10.1017/S000186780001315X
6. Thomassian, A. (2014) Analysis of fork/join and related queueing systems. *ACM Computing Surveys*. 47(2). pp.17:1-17:71.
7. Neuts, M. (1981) *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press.
8. Klimenok, V.I. & Savko, R.Ch. (2015) Tandem system with retrials and impatient customers. *Automation and Remote Control*. 76(8). pp. 1387–1399. DOI: 10.1134/S0005117915080056
9. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Method of asymptotic analysis in queuing theory]. Tomsk: NTL.
10. Nazarov, A.A. & Semenova, I.A. (2011) Asymptotic analysis of retrial queueing systems. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 47(4). DOI: 10.3103/S8756699011040121
11. Falin, G.I., Tempelton, J.G.C. (1997) *Retrial queues*. London: Chapman & Hall.
12. Artalejo, J.R. & Gomez-Corral, A. (2008) *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Springer.
13. He, Q.-M. (2014) *Fundamentals of Matrix-Analytic Methods*. New York: Springer.

.

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 43

УДК 004.8: 575
DOI: 10.17223/19988605/43/7

Н.Н. Поздниченко, А.С. Гуменюк, С.Н. Шпынов

КАРТА ГЕНОВ – НОВОЕ СРЕДСТВО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОЖЕСТВА ОДНОХРОМОСОМНЫХ ГЕНОМОВ И ИХ КОМПОНЕНТОВ

Отмечена возможность однозначного отображения полных геномов и их компонентов информационными числовыми характеристиками строя, что позволяет быстро различать, сравнивать и осуществлять поиск длинных нуклеотидных последовательностей. На этой основе предложено наглядное картографическое представление аннотированных геномов, что позволяет облегчить неформальный экспертный анализ совокупностей организмов, а также их интерактивное и автоматическое исследование.
Ключевые слова: формальный анализ строя, межнуклеотидное расстояние, карта генов, хеширование характеристиками строя.

В работах [1,2] представлен новый подход, разрабатываемый на основе теории информации М. Мазура. При обработке упорядоченных массивов данных разной природы (так называемых информационных цепей) с использованием средств формального описания и анализа строя (ФОАС) непосредственно учитывается расположение компонентов в отдельных последовательностях. Для этих целей осуществляется предварительное преобразование массивов данных в строй цепи. Связи между компонентами строя – отдельные информации – определяются с помощью интервалов между ближайшими одинаковыми элементами (в случае нуклеотидных последовательностей – это межнуклеотидные расстояния [2–4]). Интервалы представляют описательные информации, а их произведение – число таких информаций. Двоичный логарифм от этого числа представляет количество идентифицирующих информаций. Полученные таким образом числовые информационные характеристики строя представляют полное оригинальное расположение элементов в целостном объекте.

Ранее формализм и характеристики строя при исследовании генетических последовательностей использовались для следующих целей: классификация организмов на высоких таксономических уровнях [2]; классификация прокариот на уровнях вида, рода, семейства [5]; определение сходства (близости) генетических последовательностей посредством сравнения распределений характеристик однородных последовательностей и вычисления матриц соответствий [2]; изучение локальной структуры нуклеотидных последовательностей; поиск различающихся фрагментов последовательностей с одинаковым строем [2].

1. Числовые характеристики строя как меры полных геномов и их компонентов

В данной работе предлагается использовать отдельные характеристики строя для двух новых задач: «хеширование» [6–8] генетических текстов и построение «карты генов». Использование одной характеристики не гарантирует отсутствия коллизий. Однако использование нескольких характеристик (в том числе частотных) позволяет значительно снизить их число.

Адекватное высокочувствительное числовое отображение расположения компонентов в длинных нуклеотидных последовательностях позволяет осуществлять «хеширование» как полных геномов, так и их фрагментов и составляющих частей. Хеширование нуклеотидных

последовательностей с помощью характеристик строя (т.е. их расположение в соответствии со значением той или иной характеристики) позволяет быстро различать, сравнивать и осуществлять поиск цепей без необходимости их поэлементного сравнения. При этом последовательности можно «расположить» и на числовой оси для экспертного либо автоматизированного анализа.

Среди разнообразных характеристик строя в результате обработки больших массивов данных были выделены наиболее емко отображающие целостную последовательность – глубина G и средняя удаленность g, представленные здесь в виде

$$G = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} \log_2 \Delta_{ij},$$

$$G = n \cdot \log_2 \Delta_g, \qquad (1)$$

$$g = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} \log_2 \Delta_{ij},$$

$$g = \sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{n} \log_2 \Delta_{gj}, \qquad (2)$$

$$g = \log_2 \Delta_g,$$

где m – мощность алфавита ($m = 4$); n – длина последовательности; n_j – число вхождений j-го нуклеотида; Δ_{ij} – интервал от i-го до $(i + 1)$-го вхождения j-го нуклеотида; Δ_g – среднее геометрическое всех интервалов последовательности; Δ_{gj} – средний геометрический интервал j-й однородной цепи.

Первая характеристика – глубина расположения нуклеотидов в полной последовательности, – как видно из формулы (1), оценивает целостный объект длиной n. Вторая характеристика представляет усредненную удаленность гомологичных нуклеотидов в последовательности, которая позволяет эффективно определять сходство геномов организмов независимо от длины последовательности. Эти же характеристики показали свою эффективность и при хешировании.

Несмотря на внешнее сходство, характеристики строя (в том числе формула (2)) не являются статистическими. Как правило, статистические оценки некоторой величины осуществляются суммированием ее отдельных значений без учета их расположения (с последующим делением на число слагаемых). Поэтому разные по порядку следования «выборки реализаций» могут давать одинаковые значения статистических характеристик. Напротив, все характеристики строя основаны на перемножении «межсобытийных» (межкомпонентных) интервалов (с последующим извлечением корня степени числа сомножителей). При изменении порядка следования событий в последовательности почти всегда меняются сомножители, поэтому числовые характеристики строя непосредственно учитывают расположение компонентов (строя) информационной цепи. В логарифмическом масштабе характеристики строя основаны на простом суммировании логарифмов межсобытийных интервалов.

Важно отметить, что характеристики строя можно использовать вместо хеш-суммы для компактного представления и быстрого сравнения символьных последовательностей (в том числе нуклеотидных). Однако они не могут непосредственно использоваться в криптографических целях, так как, в отличие от общепринятого хеша, не обладают свойствами динамического хаоса и лавинным эффектом (хеш-сумма двух схожих, но не идентичных, объектов будет сильно отличаться, и наоборот, имея хеш, практически невозможно найти, для какого объекта он вычислен). Характеристики строя для схожих объектов дают близкие значения.

2. Некоторые особенности организации данных в GenBank

В настоящее время наиболее крупной (международной) библиотекой нуклеотидных последовательностей и, в частности, полных геномов является GenBank (NCBI). Авторы последовательностей, представляющих полные геномы, при загрузке последовательности могут дать ее аннотацию и / или воспользоваться средством автоматического аннотирования [9]. Такая аннотация включает в себя информацию о «расположении» в полном геноме различных компонентов, таких как гены, различные РНК (рибосомальные, транспортные и т.д.), псевдогены, повторы, мобильные элементы и т.д. Поэтому для большинства геномов аннотации представлены в двух видах: загружаемые авторами или автоматические, выполненные инструментарием GenBank. Поэтому разные аннотации могут значительно отличаться, что затрудняет исследование и сравнение организмов по их компонентам.

Как правило, на сайте NCBI нуклеотидная последовательность полноразмерного генома, секвенированная одной группой авторов, доступна в двух базах данных: RefSeq (NCBI Reference Sequence Database) и INSDC (International Nucleotide Sequence Database Collaboration). Различия в номенклатуре и структуре аннотаций, а также отсутствие некоторых данных при депонировании последовательностей авторами зачастую усложняют процесс сравнения геномов по существующим аннотациям. Так, в связи с несовершенством способов автоматической аннотации для многих компонентов неизвестны их точные позиция и длина. Автоматическую обработку аннотаций также усложняет то, что любая кодирующая область (и большинство других типов компонентов) размечена дважды: как CDS (coding sequence – кодирующая последовательность) и как gene (ген), в то время как некоторые редкие типы компонентов размечены только один раз. В файле, соответствующем отдельном геному, в разделе «Особенности» (Features) не всегда заполнены рубрики: источник (source), организм (organism) и описание (description). Зачастую авторы последовательностей заполняют эти поля несогласованно, что затрудняет автоматическое извлечение имен и описаний геномов.

Вследствие этого и ряда других причин формат аннотаций, представленных в GenBank, является полуструктурированным и не приспособлен для полностью автоматической обработки [10, 11].

Отмеченные недостатки организации структуры данных в GenBank потребовали значительных усилий для разработки автоматизированных средств импорта и обработки больших совокупностей полных геномов и их компонентов и, в свою очередь, являются основанием для совершенствования представления данных в GenBank, а также проведения исследований с целью выявления естественных компонентов геномов.

3. Картографическое представление геномов по их компонентам

Логическим развитием идеи представления нуклеотидных последовательностей с помощью характеристик строя явилась идея «картографирования» компонентов полных геномов (генов и других областей) посредством характеристик строя. При построении карты генов заданная характеристика полных геномов откладывается по оси x, а заданная характеристика компонентов (генов) – по оси y. Отмеченная точка $<x_i, y_j>$ на плоскости карты генов представляет j-й компонент i-го генома. При этом координата x_i точки соответствует значению характеристики i-го полного генома, а ее координата y_j – значению характеристики соответствующего j-го фрагмента этого генома. Таким образом, каждый геном оказывается представлен «столбцом» точек, каждая из которых представляет определенный компонент этого генома.

Кроме того, разработанные программные средства позволяют отображать геномы на карте по их порядковому номеру, полученному при сортировке геномов по той же характеристике. Это необходимо, если на карте два или более генома, например близкородственных видов, или штаммы одного вида микроорганизмов визуально неразличимы, так как имеют слишком близкое значение характеристик.

В данной работе построены две карты генов для полных геномов и плазмид с заданными перечнями их компонентов (таких как гены, рибосомальные РНК, транспортные РНК, некодирующие области, псевдогены и т.д.). На рис. 1 и 2 представлены фрагменты этих карт генов. На обоих рисунках в качестве характеристики полных последовательностей выбрана средняя удаленность g, а в качестве характеристик компонентов – глубина G. Единицами измерения как удаленности, так и глубины являются биты. По оси x $g < 1{,}5$ бит, по оси y $G < 8\,000$ бит. На рисунках выбранные компоненты геномов обозначены эллипсами, а на черном фоне показаны всплывающие подсказки со всей информацией о них.

Картографическое представление геномов множества организмов позволяет осуществлять неформальный экспертный анализ на предмет сходства отдельных их компонентов и, как следствие, организмов и геномов в целом. В свою очередь, хешированное представление компонентов и организмов позволяет частично автоматизировать и упростить экспертный анализ. Кроме того, с помощью карты генов возможно выборочно автоматизировать процесс сравнения геномов и их компонентов.

Картографирование компонентов (кодирующих и некодирующих последовательностей) геномов позволяет сравнивать их по различным характеристикам как внутри одного генома, так и в массивах геномов близкородственных микроорганизмов. Предлагаемый подход актуален для обнаружения кодирующих последовательностей при сравнении характеристик фрагментов геномов «de novo» с помощью библиотеки нуклеотидных последовательностей, доступных по адресу: http://foarlab.org/. Другим возможным направлением его применения может стать определение структурного и функционального назначения различных областей геномов.

4. Программная реализация интерактивной карты генов

Разработанная программная реализация карты генов содержит также интерактивные функции. Среди них динамическая фильтрация геномов и типов отображаемых компонентов. Для фильтрации компонентов достаточно отметить или убрать соответствующие «галочки» в их списке перед картой. Чтобы скрыть или показать все компоненты отдельного генома, достаточно выбрать его название в «легенде».

Для выбранного фрагмента генома на карте может отображаться дополнительная информация, включающая название генома (со ссылкой на его страницу в GenBank), тип фрагмента, атрибуты фрагмента и их значения, его позицию в полном геноме и длину, в случае кодирующих последовательностей – ссылка на страницу этой последовательности в GenBank, а также значения характеристик текущего компонента и полного генома. Также возможен автоматизированный и автоматический поиск схожих компонентов (по их характеристике) в заданном диапазоне сходства (с заданной точностью). При выборе определенного компонента выполняется поиск других компонентов, значение характеристики которых отличается от данного не более чем на величину заданной погрешности. При этом все «совпадающие» компоненты на карте приобретают форму эллипса, а их данные отображаются во «всплывающей» подсказке. Процедуру поиска можно представить как построение горизонтальной полосы, ширина которой соответствует заданной точности, а центр проходит через данный элемент; все элементы, оказавшиеся в полосе, считаются подобными при подтверждении с помощью данных GenBank.

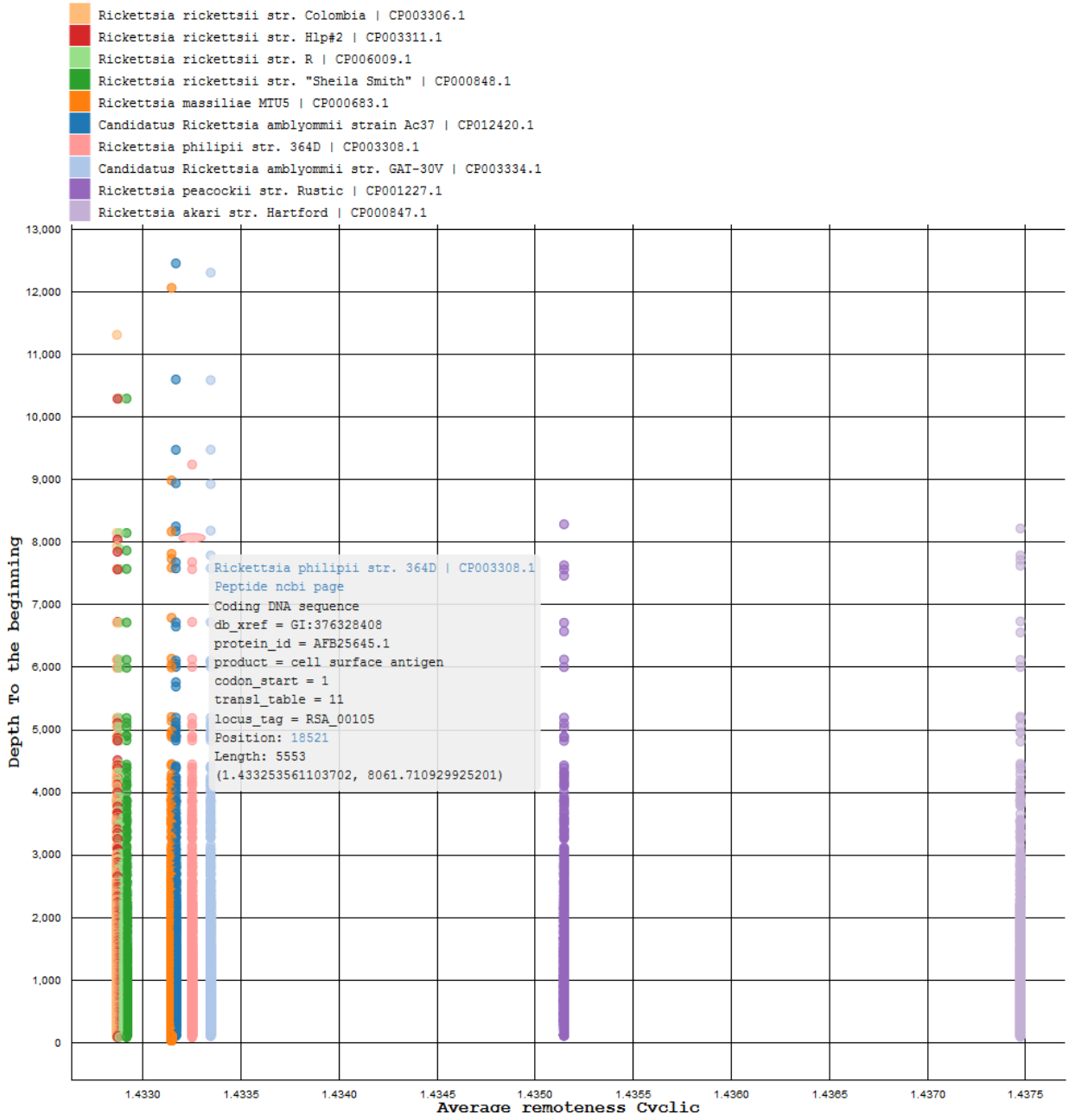


Рис. 1. Фрагмент карты генов полных геномов организмов семейства Rickettsia

Расшифровка всплывающей подсказки отдельного компонента (рис. 2):
Rickettsia felis URRWXCal2 plasmid pRF | CP000054.1 – название полной последовательности и ссылка на ее страницу в GenBank;
Peptide ncbi page – ссылка на страницу аминокислотной последовательности выбранного гена в GenBank;
Coding DNA sequence – тип выбранного фрагмента (кодирующая последовательность);
db_xref = GI:67005365 – номер выбранного фрагмента в GenBank;
protein_id = AAY62290.1 – id выбранного фрагмента в GenBank;
product = Conjugative transfer protein TraA_Ti – продукт выбранного фрагмента;
note = Possible nickase and helicase activities – пояснение;
codon_start = 1 – номер первого кодона фрагмента с которого начинается трансляция белка;
transl_table = 11 – таблица аминокислот;

locus_tag = RF_p39
Position: 36851 – позиция фрагмента в полной последовательности и ссылка на страницу фрагмента в GenBank;
Length: 2724 – длина выбранного фрагмента;
(1.4697611729042888, 4131.392884569981) – характеристика полной последовательности и выбранного фрагмента соответственно.

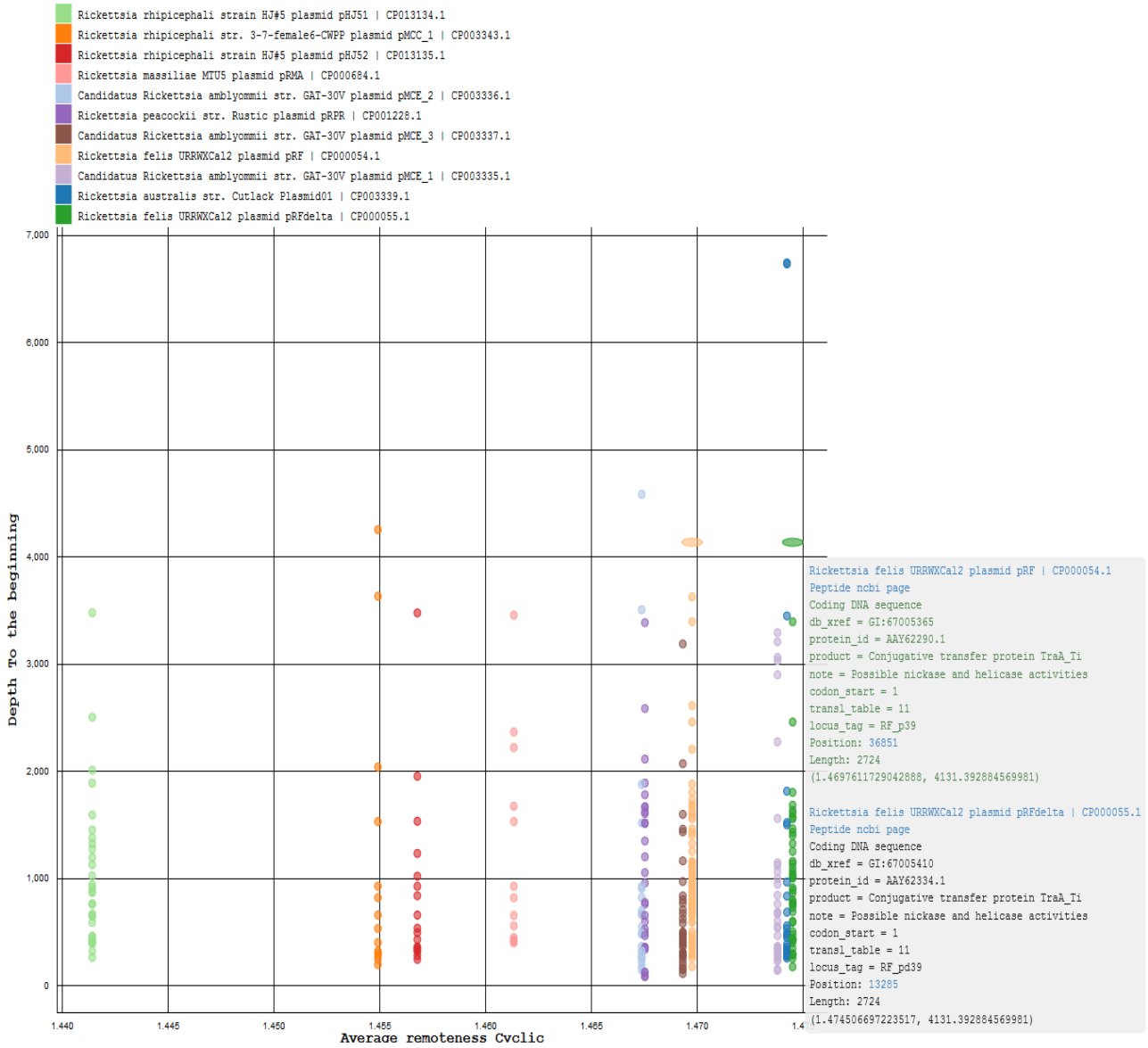


Рис. 2. Карта генов плазмид (внехромосомная ДНК) организмов семейства Rickettsia

Разработанное программное обеспечение позволяет формировать, сортировать и сравнивать компоненты изучаемой выборки геномов и плазмид по различным группам компонентов (кодирующая ДНК, рибосомальная РНК, транспортная РНК, псевдогены, некодирующие последовательности, повторяющиеся регионы и др.). Кроме того, для лучшего различения отдельных компонентов внутри генома карту можно масштабировать по вертикали. Анализ генов рибосомальной РНК в 38 геномах риккетсий и ориентий позволил получить представление о распределении нуклеотидов в последовательностях генов 5S, 16S и 23SРНК среди представителей рода Rickettsiaceae.

Заключение

В работе представлено два новых инструмента для описания и исследования нуклеотидных последовательностей. «Хеширование» с помощью числовых характеристик позволяет, во-первых, компактно и адекватно представлять длинные, в том числе полногеномные, последовательности, во-вторых, легко сравнивать множества таких последовательностей между собой и, наконец, быстро осуществлять их поиск.

Впервые удалось адекватно обозначить точками совокупности компонентов геномов (и плазмид) разных организмов и расположить их на плоскости «карты генов». Картографирование полных геномов по их компонентам (генам и др.) дает их наглядное представление и позволяет осуществлять неформальный экспертный и автоматизированный анализ, в том числе сравнивать и находить новые компоненты в полных геномах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gumenyuk A., Kostyshin A., Simonova S. An approach to the research of the structure of linguistic and musical texts // Glottometrics. 2002. No. 3. C. 61–69.
2. Гуменюк А.С., Поздниченко Н.Н., Шпынов С.Н., Родионов И.Н. О средствах формального анализа строя нуклеотидных цепей // Математическая биология и биоинформатика. 2013. Т. 8, № 1. С. 373–397. URL: http://www.matbio.org/article.php?journ_id=15&id=158 (дата обращения: 15.04.2016).
3. Nair A.S.S., Mahalakshmi T. Visualization of genomic data using inter-nucleotide distance signals // Proceedings of IEEE Genomic Signal Processing. Bucharest, 2005. P. 11–13.
4. Afreixo V., Bastos C.A.C., Pinho A.J., Garcia S.P., Ferreira P.J.S.G. Genome analysis with inter-nucleotide distances. Bioinformatics. 2009. V. 25 (23). P. 3064–3070.
5. Shpynov S., Pozdnichenko N., Gumenuk A. Application of Formal Order Analysis (FOA) to Higher Order Grouping of Bacteria in the Genera Rickettsia and Orientia // Microbes and Infection. 2015. V. 17. P. 839–844.
6. Indyk P., Motwani R. Approximate nearest neighbors: towards removing the curse of dimensionality // Proc. of 30th STOC'98 Proceedings of the thirtieth annual ACM symposium on Theory of computing. 1998. P. 604–613. DOI: 10.1145/276698.276876.
7. Buldas A., Kroonmaa A., Laanoja R. Keyless Signatures' Infrastructure: How to Build Global Distributed Hash-Trees // Secure IT Systems. NordSec 2013 / N.H. Riis, D. Gollmann (eds.) // Lecture Notes in Computer Science. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2013. V. 8208. P. 313–320.
8. Brinza D. et al. RAPID detection of gene–gene interactions in genome-wide association studies // Bioinformatics. 2010. V. 26 (22). P. 2856–2862. DOI:10.1093/bioinformatics/btq529.
9. NCBI Prokaryotic Genome Annotation Pipeline. URL: http://www.ncbi.nlm.nih.gov/genome/annotation_prok/ (access date: 15.04.2016).
10. GenBank Flat File Format. URL: http://www.ncbi.nlm.nih.gov/Sitemap/samplerecord.html (access date: 15.04.2016).
11. The DDBJ/ENA/GenBank Feature Table Definition. URL: http://www.insdc.org/files/feature_table.html (access date: 15.04.2016).

Поступила в редакцию 4 ноября 2017 г.

Pozdnichenko N.N., Gumenyuk A.S. Shpynov S.N. (2018) MAP OF GENES – NEW TOOL FOR REPRESENTATION OF A SINGLE-CHROMOSOME GENOMES AND THEIR COMPONENTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 43. pp. 56–64

DOI: 10.17223/19988605/43/7

Previous works presented new approach – formal order analysis (FOA) based on Mazur's information theory and allowing describing and analyzing ordered data arrays of various nature (information chains). This approach directly takes into account arrangement of elements in sequences. Connections between elements of order (individual informations) are calculated as intervals between nearest similar elements (for nucleotide sequences this is inter-nucleotide distances). Multiplication of intervals gives number of descriptive informations. Binary logarithm of this value gives number of identifying informations. Characteristics calculated this way represents arrangement of elements in the whole object. Previously, order characteristics have been used in the study of genetic sequence for the following purposes: classification of

prokaryotes on levels of species, genus and family; classification of organisms at higher taxonomic levels; determination of the similarity of genetic sequences by comparison of the characteristics of distributions of congeneric sequences and using corresponding matrices; study of the local structure of the nucleotide sequences; search sequence fragments with the same order, etc.

The logical development of representation of the nucleotide sequences using the characteristics of order was the idea of a "mapping" of genomes and their components. In this case, the characteristic of whole genomes is plotted along the *x* axis, and along the *y* axis characteristic of their components is plotted; dot $<x_j, y_i>$ represents separate component of the genome. Cartographic representation of a set of organisms allows for expert analysis in order to search for the similarities of the individual components and consequently in the whole genomes.

Currently GenBank is the largest library of nucleotide sequences and in particular the whole genomes. Authors of sequences representing the complete genomes, upon upload of the sequence can give and its annotation or use the automatic annotation tool provided by GenBank. Such annotation includes information about the "location" of the different components in the genome. Two annotations presented for most genomes: one uploaded by authors and another automatically executed by GenBank annotation tool. Unfortunately, different annotations of one sequence can differ considerably, making it difficult to study and compare organisms by their components. Annotations presented in the GenBank are semi-structured and not adapted for completely automatic processing. In particular, each coding region is marked twice: as a CDS (coding sequence), and as a gene, while, for example, rRNA marked only once. Due to imperfections in both automatic and manual annotations, for many components their exact position and length are unknown and annotations of similar genomes are often marking very different lists of components, which also complicates the comparison of organisms using existing annotations.

Cartography of genome's components allows using of order characteristics as for comparison of components within the same genome, as within several genomes of closely related organisms. This approach is relevant for the detection and identification of (unnamed) coding regions and other important components. Another application of this approach can be definition of the functional and structural purpose of coding regions of the genome. This software allows one to filter, sort, and compare the sample of genomes and plasmids components into different groups.

Keywords: formal order analysis; inter-nucleotide distance; genes map; hashing with order characteristics.

POZDNICHENKO Nikolai Nikolaevich (Omsk State Technical University, Russian Federation).
E-mail: nick670@yandex.ru

GUMENYUK Alexander Stepanovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Omsk State Technical University, Russian Federation).
E-mail: gumas45@mail.ru

SHPYNOV Stanislav Nikolaevich (Doctor of Medical Sciences, N.F. Gamaleya FRCEM, Moscow, Russian Federation).
E-mail: stan63@inbox.ru

REFERENCES

1. Gumenyuk, A., Kostyshin, A. & Simonova, S. (2002) An approach to the research of the structure of linguistic and musical texts. *Glottometrics*. 3. pp. 61–69.
2. Gumenuk, A.S., Pozdnichenko, N.N., Shpynov, S. N. & Rodionov, I.N. (2013) Formal analysis of structures of nucleotide chains. *Mathematical Biology & Bioinformatics – Mathematical Biology and Bioinformatics.* 8(1). pp. 373–397. [Online] Available from: http://www.matbio.org/article.php?journ_id=15&id=158. (Accessed: 15th April 2016). (In Russian). DOI: 10.17537/2013.8.373
3. Nair, A.S.S.S. & Mahalakshmi, T. (2005) Visualization of genomic data using inter-nucleotide distance signals. *Proceedings of IEEE Genomic Signal Processing*. DOI: 10.17537/2016.11.336
4. Afreixo, V., Bastos, C.A.C., Pinho, A.J., Garcia, S.P. & Ferreira, P.J.S.G. (2009) Genome analysis with inter-nucleotide distances. *Bioinformatics*. 25(23). pp. 3064–3070. DOI: 10.1093/bioinformatics/btp546
5. Shpynov, S., Pozdnichenko, N. & Gumenuk, A. (2015) Application of Formal Order Analysis (FOA) to Higher Order Grouping of Bacteria in the Genera Rickettsia and Orientia. *Microbes and Infection*. 17. pp. 839–844.
6. Indyk, P. & Motwani, R. (1998) Approximate nearest neighbors: towards removing the curse of dimensionality. *Proc. of 30th STOC'98 Proceedings of the thirtieth annual ACM symposium on Theory of computing*. pp. 604–613. DOI: 10.1145/276698.276876
7. Buldas, A., Kroonmaa, A. & Laanoja, R. (2013) Keyless Signatures' Infrastructure: How to Build Global Distributed Hash-Trees. In: Riis Nielson, H. & Gollmann, D. (eds) *Secure IT Systems. NordSec 2013. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 8208. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-41488-6_21

8. Brinza, D. et al. (2010) RAPID detection of gene–gene interactions in genome-wide association studies. *Bioinformatics*. 26(22). pp. 2856–2862. DOI: 10.1093/bioinformatics/btq529
9. *NCBI Prokaryotic Genome Annotation Pipeline*. [Online] Available from: http://www.ncbi.nlm.nih.gov/genome/annotation_prok/. (Accessed: 15th April 2016).
10. *GenBank Flat File Format*. [Online] Available from: http://www.ncbi.nlm.nih.gov/Sitemap/samplerecord.html. (Accessed: 15th April 2016).
11. *The DDBJ/ENA/GenBank Feature Table Definition*. [Online] Available from: http://www.insdc.org/files/feature_table.html. (Accessed: 15th April 201).

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 43

УДК 519.246.5
DOI: 10.17223/19988605/43/8

Г.Ш. Цициашвили

УСТОЙЧИВОСТЬ В ТЕОРЕМЕ НЕЙМАНА–ПИРСОНА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Рассматривается задача определения состояния ненаблюдаемого альтернирующего процесса по наблюдениям за пуассоновским точечным потоком, управляемым альтернирующим процессом. Для решения этой задачи используется лемма Неймана–Пирсона с приближенно заданными распределениями, соответствующими различным состояниям альтернирующего процесса.

Ключевые слова: альтернирующий процесс; случайный точечный поток; лемма Неймана–Пирсона.

В работе [1] рассматривается задача определения состояния ненаблюдаемого альтернирующего процесса по наблюдениям за точечным потоком пуассоновского типа, интенсивность которого меняется в зависимости от состояния альтернирующего процесса. В работе [2] рассматривается пороговый алгоритм, учитывающий старение информации и ошибки измерений моментов наступления событий потока.

При решении данной задачи используются методы выбора статистических гипотез относительно параметра точечного пуассоновского потока при условии, что наблюдения подчиняются не точно параметрическому семейству распределений, а некоторой его аппроксимации.

Поэтому в процедуру поиска байесовского решающего правила необходимо вводить аппроксимации, оценивать получающуюся при этом погрешность и вставлять эти оценки в известные статистические процедуры. В частности, используя лемму Неймана–Пирсона, необходимо вместо оптимального искать ε-оптимальное байесовское решающее правило.

В настоящей работе строятся такие оценки в предположении, что время наблюдения достаточно невелико и потому вероятность изменения состояния альтернирующего потока также невелика. Приводится результат вычислительного эксперимента, иллюстрирующего предлагаемый подход.

Идея построения предлагаемых в работе оценок основана на классификации статистических задач, предложенной в монографиях [3, 4] и на идеях применения метрического подхода [5] к построению оценок устойчивости в вероятностных моделях массового обслуживания [6–9], характеризации распределений [10], аппроксимации распределений нормированных сумм независимых случайных величин [11].

1. Оценки устойчивости в теореме Неймана-Пирсона

В дальнейшем нам понадобится следующая версия леммы Неймана–Пирсона. Пусть $\Omega = \{1,\ldots,N\}$ – множество результатов измерения, $\delta(x)$ – решающее правило, в соответствие с которым по измерению $x \in \Omega$ принимается решение о выполнении той или иной гипотезы $k = 1,\ldots,m.$ Решающее правило $\delta(x) = j,$ если $x \in \Omega_j \subseteq \Omega,$ где

$$\Omega_j \cap \Omega_k = \varnothing,\ j,k = 1,\ldots,m,\ j \neq k,\ \bigcup_{j=1}^{m} \Omega_j = \Omega. \tag{1}$$

Пусть $p_j(x)$ – условная вероятность того, что при выполнении гипотезы j измерение равно $x,$ а q_j – априорная вероятность выполнения гипотезы $j \in \{1,\ldots,m\},\ \sum_{j=1}^{m} q_j = 1.$ Полагаем, что

$$\alpha_j(\delta) = p_j(x \notin \Omega_j) = \sum_{x \in \Omega_j} p_j(x),\ \alpha(\delta) = \sum_{j=1}^{N} q_j \alpha_j(\delta).$$

Лемма 1. *Предположим, что при любом* $x \in \Omega$ *существует такое* $j(x) \in \{1, \ldots, m\}$, *что*

$$q_{j(x)} p_{j(x)}(x) > q_k p_k(x), \ k = 1, \ldots, m, k \neq j(x).$$

Тогда байесовское решающее правило $\delta(x)$, *минимизирующее вероятность* $\alpha(\delta)$, *определяется равенством* $j = j(x), x \in \Omega$.

Доказательство. Вычислим вероятность ошибочного отклонения правильной гипотезы $\alpha(\delta)$:

$$\alpha(\delta) = \sum_{j=1}^{m} q_j \alpha_j(\delta) = 1 - \sum_{j=1}^{m} q_j p_j(\Omega_j) = 1 - \sum_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^{m} q_j p_j(x) I_{\Omega_j}(x), \tag{2}$$

где индикаторная функция $I_{\Omega_{j(x)}} = 1$, если $x \in \Omega_j$, иначе $I_{\Omega_{j(x)}} = 0$. Из равенства (2) следует, что минимизация $\alpha(\delta)$ эквивалентна максимизации суммы $\sum_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^{m} q_j p_j(x) I_{\Omega_j}(x)$ при каждом $x \in \Omega$. В силу последнего равенства в соотношениях (1) получаем, что байесовское решающее правило подчиняется равенству $j = j(x)$. Лемма доказана.

По фиксированным $N^*, 0 \le N^* \le N$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ определим следующие множества:

$$X(N^*) = \{x : x \le N^*\}, \ \overline{X}(N^*) = \{x : N^* < x \le N\}, \ X_j(N^*) = \{x : j(x) = j, x \le N^*\},$$

$$X_j'(N^*) = \{x : q_j p_j'(x) > q_k p_k'(x), \ x \le N^*, k = 1, \ldots, m, k \neq j\}.$$

Теорема 1. *Предположим, что невозмущенные* $p_j(x)$ *и возмущенные* $p_j'(x)$ *условные вероятности при некотором* $N^* < N$ *и при любых* $x \le N^*$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$q_{j(x)} p_{j(x)}(x) - q_k p_k(x) > \varepsilon, \ k = 1, \ldots, m, k \neq j(x), \tag{3}$$

$$\left| p_j(x) - p_j'(x) \right| < \varepsilon, \tag{4}$$

$$\left| \left[\sum_{x \in X(N^*) \setminus X_j(N^*)} + \sum_{x \in \overline{X}(N^*)} \right] (p_j'(x) - p_j(x)) \right| < \varepsilon. \tag{5}$$

Тогда байесовское решающее правило δ' *удовлетворяет неравенству*

$$\alpha(\delta') \le \alpha(\delta) + \sum_{j=1}^{m} q_j \sum_{x \in \overline{X}(N^*)} p_j(x) + \varepsilon. \tag{6}$$

Доказательство. В силу неравенств (3), (4) приходим к равенствам $X_j'(N^*) = X_j(N^*)$. Действительно, в силу (3) при $x \le N^*, k \in \{1, \ldots, m\}, k \neq j(x)$, имеем

$$q_{j(x)} p_{j(x)} > q_k p_k(x) + \varepsilon.$$

Следовательно, в силу (4)

$$q_{j(x)} p_{j(x)}' > q_{j(x)} p_{j(x)} - q_{j(x)} \varepsilon + \varepsilon > q_k p_k'(x) - q_k \varepsilon - q_{j(x)} \varepsilon + \varepsilon > q_k p_k'(x).$$

Поэтому справедливы неравенства

$$\alpha(\delta') \le \sum_{j=1}^{m} q_j \left[\sum_{x \in X(N^*) \setminus X_j(N^*)} + \sum_{x \in \overline{X}(N^*)} \right] p_j'(x) = \sum_{j=1}^{m} q_j \left[\sum_{x \in X(N^*) \setminus X_j(N^*)} + \sum_{x \in \overline{X}(N^*)} \right] p_j(x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} q_j \left[\sum_{x \in X(N^*) \setminus X_j(N^*)} + \sum_{x \in \overline{X}(N^*)} \right] (p_j'(x) - p_j(x)) \le \alpha(\delta) + \sum_{j=1}^{m} q_j \sum_{x \in \overline{X}(N^*)} p_j(x) + \varepsilon.$$

Формула (6) доказана. Теорема доказана.

2. Применение оценок устойчивости к оценке состояния альтернирующего процесса

Рассмотрим стационарный дискретный марковский процесс $y(t),\ t \ge 0,$ с множеством состояний 1, 2. Интенсивность перехода из состояния 1 в состояние 2 равна γ_1, интенсивность перехода обратно равна γ_2. Случайный процесс $y(t),\ t \ge 0,$ с вероятностью $q_1 = \gamma_2 / (\gamma_1 + \gamma_2)$ равен 1 и с вероятностью $q_2 = \gamma_1 / (\gamma_1 + \gamma_2)$ равен 2. Он разбивает временную полуось $t \ge 0$ на полуотрезки $0 = T_0 \le t < T_1,\ T_1 \le t < T_2 \ldots$ таким образом, что на полуотрезках $[T_0, T_1),\ [T_2, T_3) \ldots$ процесс $y(t)$ принимает значение $y(0)$ а на полуотрезках $[T_1, T_2),\ [T_3, T_4) \ldots$ процесс $y(t)$ принимает значение $y(T_1).$

Полагаем, что на полуотрезках $[T_i, T_{i+1}), i \ge 0,$ заданы пуассоновские потоки точек интенсивности $\lambda_{y(T_i)}$. Тем самым определяется точечный поток Λ_T на полуинтервале $[0, T).$ По числу точек $n(T)$ потока Λ_T требуется построить процедуру оценки состояния $y(T)$ альтернирующего процесса.

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon_j = P(T_1 \le T / y(0) = j) = 1 - \exp(-\gamma_j T),$ *тогда для любого множества* $Z \subseteq \Omega,\ j = 1, 2,$ *справедливы следующие соотношения:*

$$P(n(T) \in Z / y(0) = j, T_1 > T) - \varepsilon \le P(n(T) \in Z / y(T) = j) \le$$

$$\le P(n(T) \in Z / y(0) = j, T_1 > T) + \frac{q_1 \varepsilon_1 + q_2 \varepsilon_2}{q_j}. \qquad (7)$$

Доказательство. Действительно,

$$P(n(T) \in Z / y(T) = j) = \frac{P(n(T) \in Z, y(T) = j)}{q_j} \ge \frac{P(n(T) \in Z, y(0) = j, T_1 > T)}{q_j} =$$

$$= \frac{P(n(T) \in Z / y(0) = j, T_1 > T) P(y(0) = j, T_1 > T)}{q_j} =$$

$$= \frac{P(n(T) \in Z / y(0) = j, T_1 > T) P(T_1 > T / y(0) = j) P(y(0) = j)}{q_j} =$$

$$= P(n(T) \in Z / y(0) = j, T_1 > T) P(T_1 > T / y(0) = j) =$$

$$= P(n(T) \in Z / y(0) = j, T_1 > T) \exp(-\gamma_j T) = P(n(T) \in Z / y(0) = j, T_1 > T)(1 - \varepsilon_j).$$

Таким образом, доказано, что

$$P(n(T) \in Z / y(0) = j, T_1 > T) - \varepsilon \le P(n(T) \in Z / y(0) = j, T_1 > T)(1 - \varepsilon_j) \le P(n(T) \in Z / y(T) = j). \qquad (8)$$

Аналогично получаем

$$P(n(T) \in Z / y(T) = j) = \frac{P(n(T) \in Z, y(T) = j)}{q_j} \le \frac{P(n(T) \in Z, y(0) = j, T_1 > T)}{q_j} +$$

$$+ \frac{P(T_1 \le T)}{q_j} = P(n(T) \in Z / y(0) = j, T_1 > T)(1 - \varepsilon_j) + \sum_{l=1}^{2} \frac{q_l P(T_1 \le T / y(0 = l)}{q_j} =$$

$$= P(n(T) \in Z / y(0) = j, T_1 > T)(1 - \varepsilon_j) + \frac{q_1 \varepsilon_1 + q_2 \varepsilon_2}{q_j}.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$P(n(T)\in Z \,/\, y(T)=j) \le P(n(T)\in Z \,/\, y(0)=j, T_1>T)(1-\varepsilon_j)+\frac{q_1\varepsilon_1+q_2\varepsilon_2}{q_j}\le$$

$$\le P(n(T)\in Z \,/\, y(0)=j, T_1>T)+\frac{q_1\varepsilon_1+q_2\varepsilon_2}{q_j}. \qquad (9)$$

Из неравенств (8), (9) получаем неравенство (7).

Следствие 1. *Для любых* $N^*, 0\le N^*\le N,\ j=1,2,\ x=0,1,\ldots,$ *при* $\varepsilon=\max\limits_{j=1,2}\max\left(\varepsilon_j, \frac{q_1\varepsilon_1+q_2\varepsilon_2}{q_j}\right),$

$$p_j(x)=P(n(T)=x \,/\, y(0)=j, T_1>T)=\exp(-\lambda_j T)\frac{(\lambda_j T)^x}{x!},$$

$$p_j'(x)=P(n(T)=x \,/\, y(T)=j),\ x=0,1,\ldots,$$

справедливы неравенства (4), (5).

Доказательство. Для получения неравенств (4), (5) достаточно в неравенстве (7) положить

$$Z=\{x\},\ Z=(X(N^*)\setminus X_j(N^*))\cup \overline{X}(N^*),\ j=1,\ldots,m.$$

Следствие 2. *Предположим, что* $N^*=N<\infty$ *и при* $j=1,2$ *выполнены соотношения*

$$p_j(x)=P(n(T)=x \,/\, y(0)=j, T_1>T)=\exp(-\lambda_j T)\frac{(\lambda_j T)^x}{x!},$$

$$p_j'(x)=P(n(T)=x \,/\, y(T)=j),\ x=0,1,\ldots,N-1,$$

$$p_j(N)=1-\sum_{x=0}^{N-1}p_j(x),\ p_j'(N)=1-\sum_{x=0}^{N}p_j'(x),$$

$$|\,p_j(N)-p_j'(N)\,|<\varepsilon,\ q_{j(N)}p_{j(N)}-q_k p_k(N)>\varepsilon,\ \ k\in\{1,\ldots,m\},\ k\ne j(N).$$

Тогда выполнены соотношение (5) *и соотношение* (4), *принимающее форму*

$$|\,p_j(x)-p_j'(x)\,|<\varepsilon,\ x=0,\ldots,N. \qquad (10)$$

Причем байесовское решающее правило δ' *удовлетворяет неравенству*

$$\alpha(\delta')\le\alpha(\delta)+\varepsilon. \qquad (11)$$

Доказательство. Для получения неравенств (4), (5) достаточно в неравенстве (7) положить

$$Z=\{x\},\ Z=\{N,N+1,\ldots\},\ j=1,\ldots,m.$$

Таким образом, можно воспользоваться теоремой 1 для построения оценки погрешности в лемме Неймана–Пирсона применительно к задаче оценки состояния альтернирующего процесса по наблюдениям за точечным потоком пуассоновского типа.

3. Результаты вычислительного эксперимента

Пример 1. Пусть $\alpha_1=\alpha_2=0{,}01,\ T=1,\ \lambda_1=2,\ \lambda_2=1,\ N^*=5,$ тогда имеем

$$q_1=q_2=0{,}5,\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=0{,}01,\ \varepsilon=0{,}02,\ \min_{1\le x\le N^*}|\,q_1p_1(x)-q_2p_2(x)\,|=0{,}02,$$

$$P(n(T)>N^*/y(0)=1)\approx 0{,}0166,\ P(n(T)>N^*/y(0)=2)\approx 0{,}0006.$$

Следовательно, из следствия 2 и теоремы 1 имеем, что вероятность ошибки байесовского решающего правила δ', основанного на наблюдениях за потоком точек на сравнительно небольшом отрезке времени длины $T=1$, удовлетворяет неравенству

$$\alpha(\delta')\le\alpha(\delta)+\varepsilon+\sum_{x>N^*}(q_1p_1(x)+q_2p_2(x))\le\alpha(\delta)+0{,}0283.$$

На рис. 1 показаны значения $q_k p_k(j), k = 1,2,\ j = 0,1,\ldots,$ позволяющие определить $\varepsilon = 0,02.$

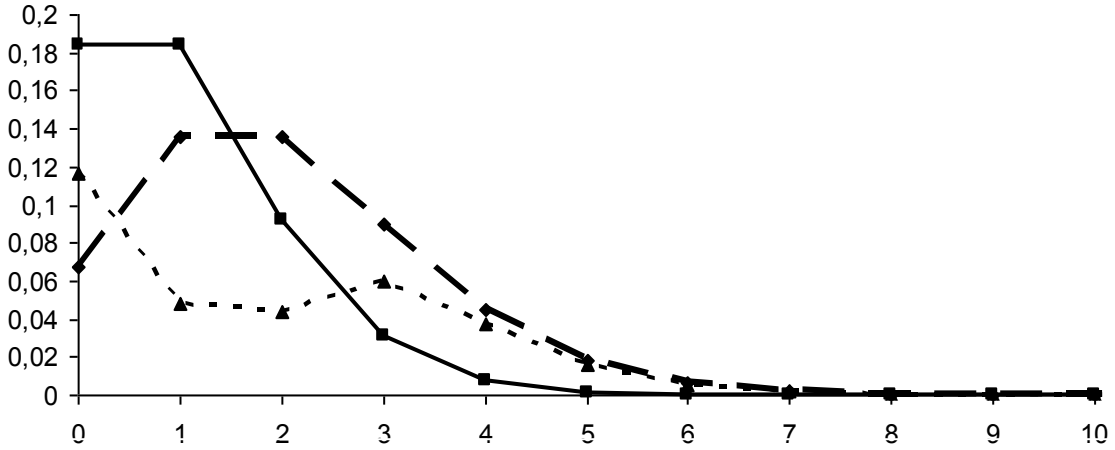


Рис. 1. Значения $q_1 p_1(j)$ отображены сплошной линией, значения $q_2 p_2(j)$ отображены пунктирной линией, значения $|q_1 p_1(j) - q_2 p_2(j)|$ отображены точечной линией.

Пример 2. Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,01, T = 1, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, N^* = N = 4,$ тогда имеем

$$q_1 = q_2 = 0,5, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,01, \varepsilon = 0,02, \min_{1 \le x \le N^*} |q_1 p_1(x) - q_2 p_2(x)| = 0,04.$$

Следовательно, из следствия 2 и теоремы 1 имеем, что вероятность ошибки байесовского решающего правила $\delta',$ основанного на наблюдениях за потоком точек на сравнительно небольшом отрезке времени длины $T = 1,$ удовлетворяет неравенству

$$\alpha(\delta') \le \alpha(\delta) + \varepsilon = \alpha(\delta) + 0.02.$$

На рис. 1 показаны значения $q_k p_k(j), k = 1,2,\ j = 0,\ldots,4,$ позволяющие определить $\varepsilon = 0,02.$

В приложениях обсуждается задача построения байесовского решающего правила при наличии более двух гипотез. Условия теорем 1, 2 нетрудно распространить и на этот случай.

Заключение

В настоящей работе строится оценка состояния альтернирующего процесса (управляющего интенсивностью пуассоновского потока) в заданный момент времени по наблюдениям за числом точек потока на сравнительно небольшом предшествующем отрезке времени. Поэтому применение оценок устойчивости в лемме Неймана–Пирсона позволяет в качестве предельного для данного числа точек (наряду с нормальным) взять пуассоновское распределение. Это предоставляет дополнительные возможности для проверки гипотез применительно к важной прикладной задаче, рассмотренной в работах [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Горцев А.М., Нежельская Л.А. Оптимизация параметров адаптера при наблюдениях за МС-потоком // Стохастические и детерминированные модели сложных систем. Новосибирск : Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988. С. 20–32.
2. Горцев А.М., Нежельская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Известия вузов. Физика. 1993. Т. 36, № 12. С. 67–85.
3. Боровков А.А. Математическая статистика. М. : Наука, 1984.
4. Боровков А.А. Математическая статистика. Дополнительные главы. М. : Наука, 1984.
5. Золотарев В.М. Метрические расстояния в пространствах случайных величин и их распределений // Математический сборник. 1976. Т. 101 (143), № 3 (11). С. 416–454.

6. Золотарев В.М. О непрерывности стохастических последовательностей, порождаемых рекуррентными процедурами // Теория вероятностей и ее применения. 1975. Т. 20, № 4. С. 834–847.
7. Золотарев В.М. О стохастической непрерывности систем массового обслуживания типа G|G|1 // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Т. 21, № 2. С. 260–279.
8. Золотарев В.М. Количественные оценки свойства непрерывности систем массового обслуживания типа G|G|∞ // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, № 4. С. 700–711.
9. Цициашвили Г.Ш. Кусочно-линейные цепи Маркова и исследование их устойчивости // Теория вероятностей и ее применения. 1975. Т. 20, № 2. С. 345–357.
10. Золотарев В.М. Эффект устойчивости характеризации распределений // Записки научного семинара ЛОМИ. 1976. Т. 61. С. 38–55.
11. Золотарев В.М. Идеальные метрики в проблеме аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, № 3. С. 449–465.

Поступила в редакцию 15 декабря 2017 г.

Tsitsiashvili G.Sh. (2018) STABILITY IN THE NEYMAN–PEARSON THEOREM AND ITS APPLICATIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 43. pp. 65–71

DOI: 10.17223/19988605/43/8

This paper considers the problem of determining the state of the unobservable process of alternating observations of the Poisson point flow controlled alternating process. To solve this problem, we use the Lemma of Neyman-Pearson with approximated distributions corresponding to different states of alternating process. This Lemma is proving in the following assumptions.

Theorem 1. Suppose that the unperturbed $p_j(x)$ and perturbed $p_j^{'}(x)$ conditional probabilities for some $N^* < N$ and all $x \le N^*$, $j \in \{1,\ldots,m\}$ satisfy the inequalities

$$q_{j(x)}p_{j(x)}(x) - q_k p_k(x) > \varepsilon,\ k = 1,\ldots,m, k \ne j(x),\ \left|p_j(x) - p_j^{'}(x)\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\left[\sum_{x\in X(N^*)\setminus X_j(N^*)} + \sum_{x\in\overline{X}(N^*)}\right](p_j^{'}(x) - p_j(x))\right| < \varepsilon.$$

Then the Bayesian decision rule, defined by the unperturbed distributions $p_j(x)$, but applied to the perturbed distributions $p_j^{'}(x)$, satisfies the inequality for a probability of mistakenly rejecting the correct hypothesis:

$$\alpha(\delta^{'}) \le \alpha(\delta) + \sum_{j=1}^{m} q_j \sum_{x\in\overline{X}(N^*)} p_j(x) + \varepsilon.$$

Theorem 1 is applied to the stationary discrete Markov process $y(t), t \ge 0$, with the set of states 1, 2 and the intensity of transition γ_1, from state 1 to state 2 and the transition intensity γ_2. back. Random process $y(t), t \ge 0$, with the probability $q_1 = \gamma_2/(\gamma_1 + \gamma_2)$ equals 1 and with the probability $q_2 = \gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2)$ equals 2. It splits the time axis $t \ge 0$ into politiskies $0 = T_0 \le t < T_1, T_1 \le t < T_2, \ldots$, so that on politiskies $[T_0, T_1), [T_2, T_3), \ldots$ the process $y(t)$ accepts the value $y(0)$ and on politiskies $[T_1, T_2), [T_3, T_4), \ldots$ it takes the value $y(T_1)$. We believe that on politiskies $[T_i, T_{i+1}), i \ge 0$, we have Poisson points flows with the intensities $\lambda_{y(T_i)}$. Thus, we define the point flow Λ_T on the half interval $[0, T)$. Using the number $n(T)$ of flow Λ_T points on this half interval, it is required to build the procedure for the assessment of alternating process $y(T)$ states. Here, as the unperturbed and the perturbed distributions we take

$$p_j(x) = P(n(T) = x/y(0) = j, T_1 > T) = \exp(-\lambda_j T)\frac{(\lambda_j T)^x}{x!},\quad p_j^{'}(x) = P(n(T) = x/y(T) = j),\ x = 0,1,\ldots$$

We construct estimates of the proximity of the unperturbed $p_j(x)$ and perturbed $p_j^{'}(x)$ distributions and derive inequalities for the similarity measures corresponding to these probability distributions, probabilities to reject the correct hypothesis. Numerical examples of the application of the approximate Bayesian decision rules are built in such a way.

Keyword: alternation process; random point flow; Neumann–Pearson lemma.

TSITSIASHVILI Gurami Shalvovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Applied Mathematics FEB of RAS, Far Eastern Federal University, Russian Federation).
E-mail: guram@iam.dvo.ru

REFERENCES

1. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (1988) Optimizatsiya parametrov adaptera pri nablyudeniyakh za MS-potokom [Optimization of adapter parameter for observations of M-C flow]. In: *Stokhasticheskiye i determinirovannyye modeli slozhnykh sistem* [Stochastic and Deterministic models of complex systems]. Novosibirsk: SB RAS. pp. 20–32.
2. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Otsenivaniye sostoyaniy MC-potoka sobytiy pri nalichii oshibok izmereniy [Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 36(12). pp. 67–85.
3. Borovkov, A.A. (1984) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Moscow: Nauka.
4. Borovkov, A.A. (1984) *Matematicheskaya statistika. Dopolnitel'nyye glavy* [Mathematical statistics. Additional chapters]. Moscow: Nauka.
5. Zolotarev, V.M. (1976) Metricheskiye rasstoyaniya v prostranstvakh sluchaynykh velichin i ikh raspredeleniy [Metric distances in spaces of random variables and their distributions]. *Matematicheskiy sbornik*. 101(143). pp. 416–454.
6. Zolotarev, V.M. (1975) O nepreryvnosti stokhasticheskikh posledovatel'nostey, porozhdayemykh rekurrentnymi protsedurami [On continuity of stochastic sequences generated by recurrent procedures]. *Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 20(4). pp. 834–847.
7. Zolotarev, V.M. (1976) O stokhasticheskoy nepreryvnosti sistem massovogo obsluzhivaniya tipa G|G|1 [On stochastic continuity of queuing systems of the G|G|1 type]. *Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 21(2). pp. 260–279.
8. Zolotarev, V.M. (1977) Kolichestvennyye otsenki svoystva nepreryvnosti sistem massovogo obsluzhivaniya tipa G|G|∞ [Quantitative estimates for the continuity property of queuing systems of the type G|G|∞]. *Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 22(4). pp. 700–711.
9. Tsitsiashvili, G.Sh. (1975) Kusochno-lineynyye tsepi Markova i issledovaniye ikh ustoychivosti [Piecewise linear Markov chains and analysis of their stability]. *Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 20(2). pp. 345–357.
10. Zolotarev, V.M. (1976) Effekt ustoychivosti kharakterizatsii raspredeleniy [The stability phenomenon in characterization of distributions]. *Zapiski nauchnogo seminara LOMI*. 61. pp. 38–55.
11. Zolotarev, V.M. (1977) Ideal'nyye metriki v probleme approksimatsii raspredeleniy summ nezavisimykh sluchaynykh velichin [Ideal metrics in the problem of approximating the distributions of sums of independent random variables]. *Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 22(3). pp. 449–465.

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 43

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.652.8
DOI: 10.17223/19988605/43/9

А.М. Бабанов, А.В. Петров

ПРОБЛЕМА НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ СХЕМ ДАННЫХ И ЕЕ РЕШЕНИЕ В ERM-РЕПОЗИТОРИИ

Статья продолжает обсуждение основных архитектурных и проектных решений, положенных в основу разработанного для ERM-модели репозитория схем данных. В ней пойдет речь о проблеме обеспечения непротиворечивости этих схем. Широкие возможности описания семантики в ERM-модели делают эту проблему весьма актуальной и очень острой. Для ее решения в репозитории предусмотрен блок многочисленных проверок, гарантирующих высокое качество схем.
Ключевые слова: ERM-модель; непротиворечивость; схема данных; репозиторий; Oracle Designer.

В предыдущей статье авторов [1] описаны общие принципы и архитектура прототипа CASE-репозитория, созданного для апробации решений, которые принимаются в ходе исследований по развитию семантической модели данных «Сущность–Связь–Отображение» (ERM-модель) [2]. Важный аспект работы, а именно механизм проверки данных репозитория на непротиворечивость, был лишь кратко упомянут как важная составная часть системы. Однако особенности ERM-модели (богатые выразительные способности, синонимия элементов схемы, возможность наличия в схеме одновременно нескольких представлений одних и тех же явлений предметной области) требуют повышенного внимания к проблеме непротиворечивости схем данных. О решении этой проблемы в ERM-репозитории пойдет речь в настоящей статье.

1. Обострение проблемы непротиворечивости схем в ERM-модели

Задача реализации механизма проверки схем на непротиворечивость является одной из основных в рамках работ по созданию репозитория схем данных [3–7]. Важно, чтобы в любой момент времени данные, хранимые в репозитории, были целостными и непротиворечивыми. Чтобы предупредить создание ошибочных артефактов, в CASE-системе предусматривают соответствующие проверки формируемых в репозитории аналитических и проектных документов.

Р. Велке [3] указывает несколько классов ошибок проектировщиков:

– нарушение правил именования, дублирование имен;

– неправильный тип объекта;

– недопустимый тип объекта в связи;

– ошибочная комбинация объектов в связи;

– связь с опущенным обязательным объектом.

Это типичный набор ошибок для ER-модели и подобных ей моделей. Он является следствием их общего понятийного базиса и метасхемы (рис. 1) [8, 9].

В попытках повышения степени автоматизации проектирования и расширения спектра генерируемых исполняемых артефактов создатели ERM-модели существенно развили описательные возможности, позволяющие при ограниченном наборе понятий определять в схеме все структурные элементы и практически все бизнес-правила предметной области (ПрО). Об этом свидетельствует развитая метасхема модели. На рис. 2 представлена ее каркасная часть.

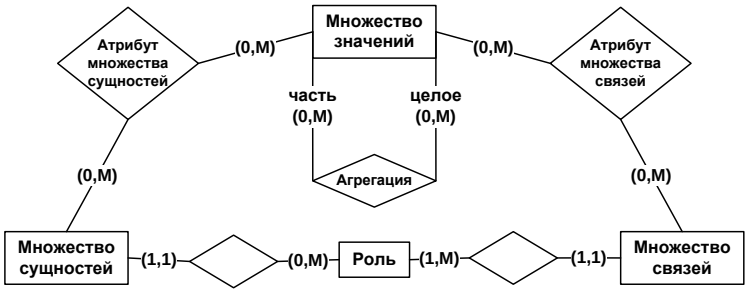


Рис. 1. Метасхема ER-модели

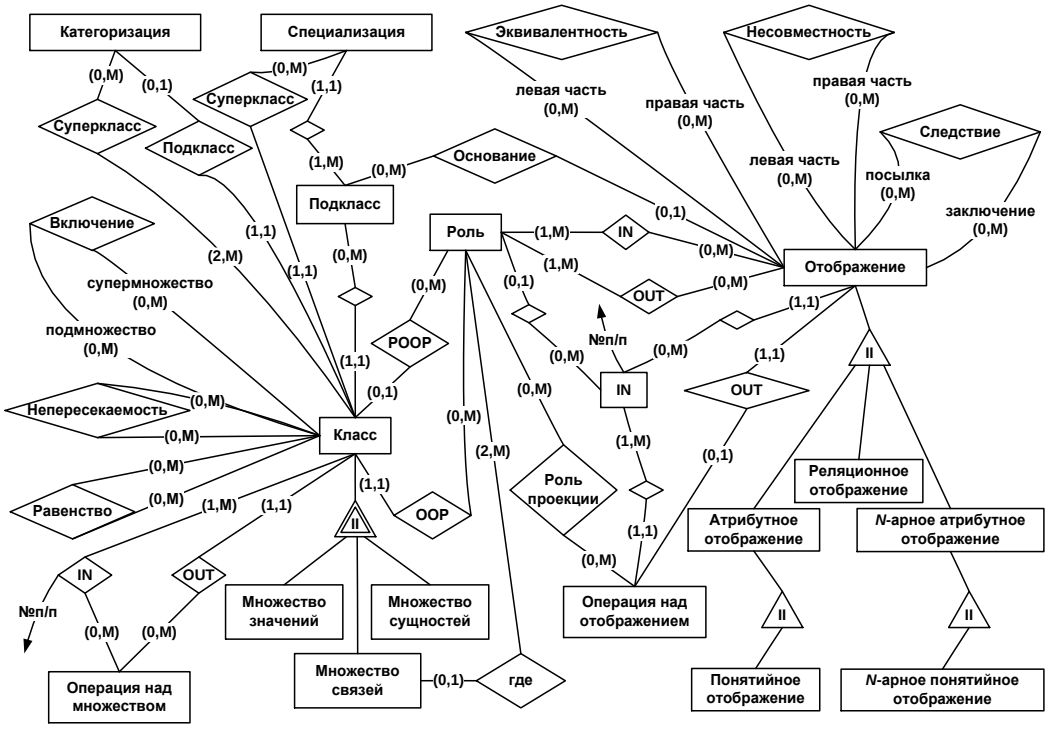


Рис. 2. Основная часть метасхемы ERM-модели

С целью упрощения работы проектировщиков наряду с базовым набором понятий (объект и отображение), обеспечивающим всю семантическую мощь модели, введены производные понятия, позволяющие оперировать ставшими традиционными терминами – «сущность», «связь», «атрибут». Когда для описания законов ПрО достаточно простых понятий, используются они, когда же их описательных способностей недостаточно, проектировщик для более точной передачи семантики прибегает к использованию базовых понятий. Более того, можно обеспечить автоматический переход между этими двумя понятийными базисами, что является важным элементом редактора ERM-схем [10]. В связи с этим открывается возможность наличия в одной и той же схеме одновременно разных форм представления явлений ПрО – на языке базовых и производных терминов.

Наконец, желание обеспечить хранение в репозитории всех схем ПрО (внешних, концептуальной, внутренней), а также взаимосвязей между элементами этих схем, представляющими одни и те же, а также родственные понятия [10], привело к дополнительному источнику противоречий. Но, несмотря на это обстоятельство, наличие в репозитории всех указанных артефактов существенно облегчает работу аналитиков и проектировщиков, способствует повышению автоматизации их труда и обеспечивает более высокое качество результата.

Таким образом, к ставшим уже традиционными проверкам пришлось добавить гораздо большее количество новых проверок схем данных на непротиворечивость. Для корректной реализации таких проверок требовалось предварительно их проанализировать и классифицировать.

2. Система классификации проверок ERM-схемы

Р. Велке [3] выделяет следующие стратегии проектировщиков схем данных по борьбе с нецелостностью спецификаций (мы предпочитаем использовать для схем термин «противоречивость», оставляя по традиции термин «нецелостность» для данных):

– делать проверки и исправления в момент ввода или изменения описаний;

– делать их по окончании всего процесса задания спецификаций;

– оставлять проверки для другой группы людей – верификаторов.

В рамках CASE-репозитория может быть реализована любая из этих стратегий. Однако первая из них является предпочтительной, так как позволяет определить и исправить ошибку сразу после ее возникновения и вообще исключает нецелостность репозитория, даже на короткий период.

Также Велке предлагает три основных уровня проверок целостности [3]:

– проверки на уровне метасхемы;

– проверки на уровне представлений (диаграмм);

– проверки на уровне методики.

«Проверки уровня метасхемы (или репозитория) касаются правил законного существования экземпляров типов репозитория, зафиксированных в метасхеме. Для объектов они включают проверку уникальности имен и правильности значений свойств; для связей – проверку легальности комбинации ассоциированных объектов, требуемой кардинальности и правильности значений свойств. Проверки уровня репозитория должны осуществляться незамедлительно, чтобы гарантировать, что правила, указанные в метасхеме, не нарушены.

Проверки уровня представлений могут выполняться в любой момент проектирования в конкретном окне (или диаграмме), например в DFD (Data Flow Diagram – диаграмма потоков данных). Можно ввести информацию, которая корректна на уровне метасхемы, но нарушает директиву конструирования представлений. Например, связь «вызов» между двумя процессами может быть абсолютно корректна на уровне типов репозитория, но неправильна в контексте DFD. Тонкость заключается в том, что один и тот же процесс может быть только на одной DFD. Более очевидный пример – процесс с входом, но без выхода.

Реализация целостности уровня представлений может иметь две формы. Сначала фиксируем (commit) информацию спецификации, затем в постпроцессе проверяем, что эта информация удовлетворяет контексту, в котором она введена, и устраняем недостатки последующей модификацией репозитория. Второй вариант – не фиксируем в репозитории информацию представления до тех пор, пока она не пройдет все поверки уровня представления. Несмотря на то, что последний подход соответствует принципу «чистого» репозитория, он приводит к проблемам для аналитика-конструктора.

Проверки уровня методики принципиально осуществляются над всеми спецификациями репозитория. Они обнаруживают и устраняют аномалии между представлениями (такие как балансировка DFD с ее родителем и ее братьями, балансировка диаграммы потоков управления с ассоциированной с ней диаграммой переходов состояний), проверяют устойчивость проекта по всем стадиям разработки, трассируют требования по отношению к элементам репозитория и т.д. Для проведения таких проверок в репозитории должна иметься полная аналитическая и проектная информация по системе. Следовательно, это наиболее важная задача постпроцессинга» [3. С. 22].

Сложная, обладающая богатыми выразительными средствами модель данных требует серьезного анализа источников противоречивости схем и систематизации проверок, необходимых для исключения некорректности. При построении системы классификации проверок схемы на непротиворечивость необходимо использовать строгие логические принципы, главным из которых является принцип единства основания деления. Он гласит, что, выполняя деление родительского понятия (класса проверок), следует выделять дочерние понятия (подклассы проверок) на основании одного

и того же признака. Деление методом дихотомии порождает два понятия: одно объединяет объекты, у которых признак есть, другое – объекты, у которых его нет. Такой принцип деления осуществляется, как правило, на основании свойств объектов. Второй вариант деления понятия – деление по видоизменению признака – некоторой характеристики, принимающей разные значения для объектов различных понятий.

В соответствии с этим принципом можно выделить следующие главные основания (признаки) для классификации проверок:

– свойство проверки, говорящее о том, что она формально представлена в метасхеме модели (Metascheme);

– характеристика времени проверки (проверки непосредственно при изменении схемы (Immediate), выполняемые как часть операции изменения схемы, и отложенные проверки (Deferred), как правило, комплексные, транзакционные, запускающиеся специальным скриптом);

– характеристика места проверки (проверки на уровне элементов управления диалога и в коде клиентского приложения (Client) не являются задачей репозитория; проверки на уровне структур и декларативных ограничений целостности репозитория (Repository или Scheme) обеспечивает базовая СУБД; проверки на уровне триггеров и процедур API (Server или Code) требуют программирования на языке сервера СУБД);

– характеристика охвата элементов схемы (локальные проверки только изменяемого элемента (Local); глобальные проверки, затрагивающие неизменяемые элементы (Global)).

Каждая проверка в зависимости от своих свойств и характеристик по каждому из критериев попадает в тот или иной класс, и в силу этого для ее осуществления применяются соответствующие средства.

3. Классификации проверок ERM-схемы

В результате анализа возможных противоречий ERM-схемы был получен документ, содержащий 179 различных проверок. К полученному списку проверок применена классификация по следующим признакам (наряду с главными признаками, упомянутыми в предыдущем разделе, использовались дополнительные признаки, которые принимались во внимание в ходе реализации проверок):

– тип объекта согласно метамодели репозитория (элементный или ассоциативный);

– структурный элемент ERM-модели (класс, подкласс специализации, эквивалентность отображений и т.д.);

– действие в репозитории (добавление, изменение, удаление структурного элемента модели);

– время инициирования проверки (немедленно, по окончании транзакции);

– охват элементов схемы (локальные проверки только изменяемого элемента, глобальные проверки, затрагивающие неизменяемые элементы);

– наличие ограничения в текущей ERM-метасхеме;

– форма реализации в рамках репозитория (обеспечивается структурой репозитория или специально написанным программным кодом);

– возможность задания декларативными инструментами реляционной модели.

Наличие последнего признака позволяет осуществлять проверки средствами реляционной СУБД, так как репозиторий – не что иное, как реляционная БД. А значит, данные БД (элементы ERM-схем) должны удовлетворять всем ограничениям, декларированным в схеме этой БД (ERM-метасхеме).

По результатам классификации проверок был получен список проверок, фрагмент которого приведен в таблице 1.

Таблица 1

Фрагмент списка проверок ERM-схем на непротиворечивость

Элемент ERM-модели	Проверка	Immediate / Deferred	Local / Global	Meta scheme	Scheme / Code	Можно задать декларативными инструментами реляционной модели
Множество сущностей	Проверка соединения с множествами связей через роль	Immediate	Local	Да	Scheme	Да
Множество сущностей	Проверка соединения с множествами значений через атрибут	Immediate	Local	Да	Scheme	Да
Множество связей	Проверка соединения с множествами сущностей через роль	Immediate	Local	Да	Scheme	Да
Множество связей	Проверка соединения с множествами значений через атрибут	Immediate	Local	Да	Scheme	Да
Операция над классами	Проверка правильности атрибута «Тип»	Immediate	Local	Нет	Code	Да
Операция над классами	Проверка правильности атрибута «Кандидат»	Immediate	Local	Нет	Code	Да
Операция над классами	Проверка наличия одного класса-результата	Deferred	Local	Да	Code	Да
Операция над классами	Проверка наличия минимум одного аргумента	Deferred	Local	Да	Code	Да
Операция над классами	Проверка отсутствия некандидатов в аргументах операции	Deferred	Local	Нет	Code	Нет
Операция над классами	Проверка отсутствия некандидатов в результатах операции	Deferred	Local	Нет	Code	Нет
Операция над классами	Проверка наличия нумерации аргументов только у разности	Deferred	Local	Нет	Code	Нет
Операция над классами	Проверка правильности нумерации аргументов у разности	Deferred	Local	Нет	Code	Нет
Операция над классами	Проверка одинаковости всех типов классов	Deferred	Local	Нет	Code	Нет

В соответствии с этим списком и были реализованы проверки схемы на непротиворечивость в ходе разработки репозитория. Часть из них удалось выразить декларативными средствами реляционной модели (модели репозитория Oracle Designer), другая часть потребовала использования программных средств этой модели (триггеров), третий класс проверок осуществляется в процедурах API репозитория.

Следует отметить, что в соответствии с принципами разработки, управляемой моделями (Model Driven Development – MDD) [7, 11], следовало представить все условия непротиворечивости схем в ERM-метасхеме и осуществлять проведение всех проверок на основании только этой декларативной информации. В случае такой реализации проверок добавление новой проверки осуществлялось бы как расширение метасхемы без специального программирования.

Но задача синтеза полной (и в плане структурных компонентов, и в плане условий непротиворечивости) метасхемы ERM-модели находится в стадии решения, поэтому пока для проведения проверок используются самые различные инструменты.

4. Реализация проверок схемы в ERM-репозитории на базе Oracle Designer

Для того, чтобы при выполнении комплексных модификаций иметь возможность их отменить, в системах хранения, как правило, применяются транзакции. Генерируемое Oracle Designer (OD) API предоставляет возможность управления начальной и конечной точками транзакции, что и было использовано при создании механизма проверки.

Накапливаемые в ходе транзакции изменения схемы проверяются по мере возможности при наличии в репозитории необходимых для этого элементов. В случае отрицательного результата проверки все изменения данных, осуществленные в ходе транзакции, должны быть отменены, и репозиторий должен принять то состояние, которое он имел на момент открытия транзакции.

Для того, чтобы репозиторий своевременно выдавал ошибки при вводе неправильных элементов схемы, необходимо сделать размер транзакции как можно меньше. С другой стороны, для поддержания непротиворечивости хранимых в репозитории данных требуется, чтобы работа с одним экземпляром структурного понятия ERM-модели не разбивалась на несколько транзакций. В частности, это важно для сложных типов, создание экземпляра которых порождает создание более одного элементного или ассоциативного объектов. В соответствии с этим была принята модель транзакции, согласно которой каждый экземпляр структурного понятия ERM-модели добавляется, изменяется или удаляется в рамках одной транзакции.

Одним из важных вопросов является расположение механизма проверки в системе. Проверка должна производиться при работе во всех инструментах, осуществляющих изменения хранимых в репозитории данных. Как видно на рис. 3, работа внешних приложений (показано одно из них – графический редактор ERM-схем) осуществляется путем обращения к функциям пакета доступа ERM_API, работа же инструмента Repository Object Navigator (RON), разработанного до появления ERM_API и недоступного для изменения, осуществляется путем обращения непосредственно к OD API. Следовательно, расположение механизма проверки схем на непротиворечивость должно быть не выше уровня OD API.

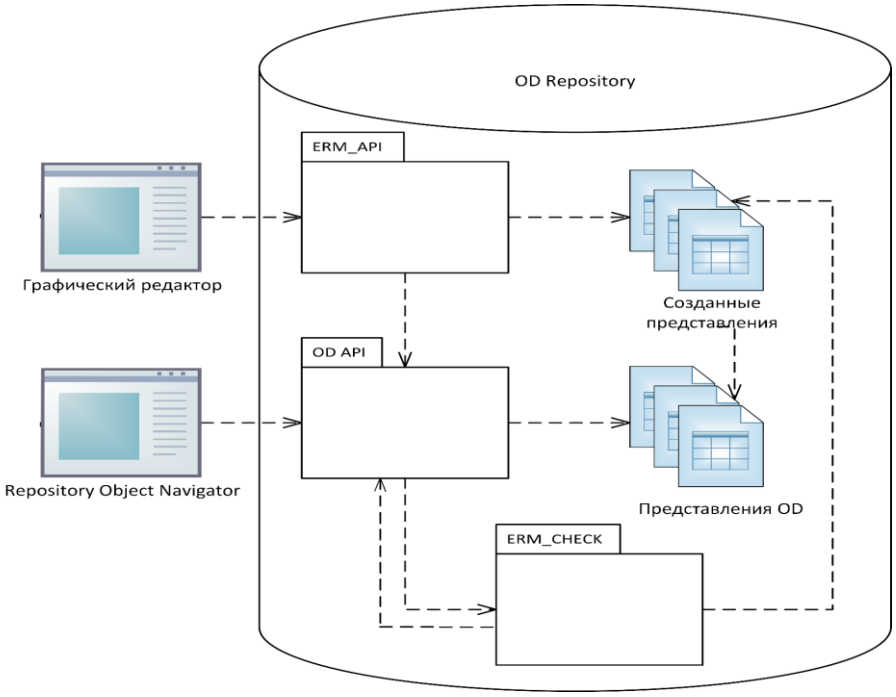


Рис. 3. Архитектура ERM-репозитория

Вызов процедур пакета проверки схем на непротиворечивость (ERM_CHECK) осуществляется в функциях API инструмента Oracle Designer. Для каждого создаваемого пользовательского типа автоматически генерируется пакет для работы с ним. Каждая из функций этих пакетов осуществляет вызов аналогичной функции (добавления, изменения, удаления или выборки) базового пакета API. Для элементных типов это пакет CIO_EXTENDED_ELEMENT, а для ассоциативных – CIO_EXTENDED_STRUCTURE_ELEMENT. Поскольку вызов функций этих пакетов осуществляется при любой операции с репозиторием посредством API, было решено расположить вызов функций проверки ERM-схем в функциях этих пакетов.

Для каждого элементного и ассоциативного типа ERM-объектов имеется собственная процедура, реализующая его проверку. В каждой функции можно выделить 3 блока.

Первым из них является блок обязательных проверок. Как уже говорилось ранее, работа по созданию, изменению или удалению сложного объекта ERM-схемы может включать в себя совокупность нескольких действий с точки зрения репозитория. Так, например, при создании отображения следует также создать связи с ролями, составляющими его область определения (ООО) и область значений (ОЗО). Для обеспечения целостности изменяемой схемы такая совокупность действий должна быть реализована в рамках одной транзакции. Однако модель инструмента RON использует только атомарные транзакции, т.е. в данном случае каждое действие с элементом репозитория будет проведено в рамках отдельной транзакции.

Решено было смоделировать свои, более крупные транзакции. Для этого каждому элементному типу было добавлено еще одно свойство – поле Candidate, обозначающее факт окончательного завершения работы над объектом. В рамках первого блока производится проверка локальных ограничений, которые относятся к одному элементу репозитория и должны соблюдаться вне зависимости от значения поля Candidate. Например, тип отображения должен иметь корректное значение вне зависимости от того, завершена ли работа с данным объектом или нет.

Далее следует блок проверок для объектов-кандидатов. В рамках данного блока реализованы проверки, характерные для сложных объектов ERM-схемы, работа над которыми уже завершена (Candidate = Yes). Так, например, в рамках данного блока производится проверка наличия в ООО и ОЗО отображения хотя бы по одной роли.

Завершающим является блок проверок внешних объектов. Зачастую при совершении какой-либо операции с объектом приходится осуществлять проверку других связанных с ним объектов (глобальную проверку). Так, например, при удалении подкласса специализации следует проверить саму специализацию на предмет наличия у нее хотя бы одного подкласса. Данный блок реализует проверку тех объектов, которые потенциально могут стать ошибочными после проведения операции.

Благодаря этим многочисленным разноплановым проверкам ERM-репозиторий гарантирует непротиворечивость схем данных. Причем изменения репозитория могут осуществляться как во вновь разрабатываемых диалоговых инструментах, использующих специализированный ERM_API, так и в ранее разработанных средствах, пользующихся OD API.

Заключение

В статье описаны основные принципы, положенные в основу реализации механизма проверки ERM-схем на непротиворечивость. Прототип ERM-репозитория создан на базе CASE-системы Oracle Designer в виде ее расширения. Открытость расширения обеспечила возможность внедрения инструментов верификации в ядро OD. Это позволило осуществлять проверки элементов репозитория в предопределенных диалоговых средствах системы, позволяющих создавать ERM-схемы без программирования специализированных клиентских мест.

Перспективы развития механизма проверки ERM-схем на непротиворечивость заключаются в последовательном использовании принципов разработки, управляемой моделями [7, 11]. В соответствии с ними необходимо декларативно представить в ERM-метасхеме все условия непротиворечивости схем и реализовать программно универсальный верификатор, осуществляющий необходимые проверки на основании только этой информации. Семантическая полнота ERM-модели в состоянии обеспечить такие описания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабанов А.М., Петров А.В. Реализация репозитория ERM-модели в CASE-системе Oracle Designer // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 4 (41). С. 47–54.

2. Бабанов А.М. Семантическая модель «Сущность–Связь–Отображение» // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2007. № 1. С. 77–91.
3. Welke R. The case repository: more than another database application // Proceedings of 1988 INTEC Symposium Systems Analysis and Design: a Research Strategy, Atlanta, Georgia, 1988 / W.W. Cotterman, J.A. Senn (eds.); Georgia State University. Meta Systems, Ltd., 1988.
4. Welke R. The case repository: more than another database application // Challenges and strategies for research in systems development. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1992. P. 181–218.
5. Dahanayake A. Computer-Aided Method Engineering: Designing CASE Repositories for the 21st Century. Idea Group Publishing, 2001. 550 p.
6. Agarwal B.B., Tayal S.P., Gupta M. Software Engineering and Testing. Jones & Bartlett Publishers, 2010. 516 p.
7. Hamid B. A model-driven approach for developing a model repository: Methodology and tool support // Future Generation Computer Systems. 2017. V. 68, March. P. 473–490.
8. Chen P. The entity-relationship model – towards a unified view of data // ACM Transactions on Database Systems. 1976. No. 1 (1). P. 9–36.
9. Barker R. CASE Method: Entity Relationship Modelling. Addison-Wesley. 1990. 240 p.
10. Бабанов А.М. Перспективы проектирования БД, открывающиеся с применением современных семантических моделей данных // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 2 (31). С. 73–80.
11. Brambilla M., Cabot J., Wimmer M. Model-Driven Software Engineering in Practice, 2nd ed. Morgan & Claypool Publishers, 2017. 280 p.

Поступила в редакцию 19 декабря 2017 г.

Babanov A.M., Petrov A.V. (2018) PROBLEM OF DATA SCHEME CONSISTENCY AND ITS SOLUTION IN THE ERM REPOSITORY**.** *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 43. pp. 72–80

DOI: 10.17223/19988605/43/9

The task of implementing a mechanism for verifying consistency of schemes is one of the main tasks in the development of a data scheme repository. It is important that at any time the data stored in the repository are complete and consistent. To prevent erroneous artifacts created in CASE system, it provides for appropriate checks of the analytical and design documents formed in the repository.

In attempts to increase the degree of automation of design and the widening of the spectrum of generated, executable artifacts, the creators of the ERM model significantly expanded the descriptive possibilities allowing, with a limited set of concepts, to determine in the scheme all the structural elements and practically all the business rules of the application domain (AD).

In order to simplify the work of designers, along with a basic set of concepts (object and mapping) that provide the entire semantic power of the model, derivative concepts are introduced that allow us to operate with the traditional terms - entity, relationship, attribute. When simple concepts are enough to describe the semantics of AD, they are used, when their descriptive abilities are not enough, the designer uses the basic concepts for a more accurate transfer of semantics. In this case, it becomes possible to have simultaneously in the same scheme different forms of representing the phenomena of AD, in the language of basic and derived terms. The desire to provide storage in the repository of all schemes of AD (external, conceptual, internal), as well as interrelations between the elements of these schemes representing the same and related concepts, has led to an additional source of contradictions.

In accordance with the principle of unity of the basis of notion division, the following main characteristics can be distinguished for classification of inspections:

– property of verification to be formally represented in the model's metascheme;
– characteristic of the time of verification;
– characteristic of the place of verification;
– characteristic of the coverage of scheme elements.

Each check, depending on its properties and characteristics, falls into one or another class for each of the criteria, and accordingly, appropriate means are applied for its implementation. As a result of the analysis of possible contradictions in the ERM scheme, a document containing 179 various checks was received.

In order to be able to cancel complex modifications, in the storage systems, as a rule, transactions are applied. Generated by Oracle Designer (OD) API provides the ability to manage the start and end points of a transaction, which was used when creating the verification mechanism.

The scheme changes that are accumulated during the transaction are checked as soon as possible in the presence of elements necessary for this. In the case of a negative result of the check, all data changes made during the transaction must be rollbacked, and the repository must accept the state it had at the time the transaction was opened. So, transaction model was adopted according to which each instance of the structural concept of the ERM model is added, modified or deleted within a single transaction.

One of the important issues is the location of the verification mechanism in the system. The check should be performed when working in all tools that change the data stored in the repository.

For each element and association type of ERM-objects there is its own procedure that realizes its verification. There are 3 blocks in each function: a block of mandatory checks, a block of checks for candidate objects and a block of checks of external objects.

Thanks to these numerous versatile checks, the ERM repository ensures data scheme consistency.

Prospects for the development of a mechanism of verifying ERM schemes for consistency are in the consistent use of principles of Model Driven Development. In accordance with them, it is necessary to declaratively present in the ERM metascheme all the conditions of consistency of schemes and implement universal program verifier that performs the necessary checks based only on this information. The semantic completeness of the ERM model is able to provide such descriptions.

Keywords: ERM-model; consistency; data scheme; repository; Oracle Designer.

BABANOV Alexey Mihailovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation**).**
E-mail: babanov2000@mail.ru

PETROV Alexander Viktorovich (National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: flamingcode@mail.ru

REFERENCES

1. Babanov, A.M. & Petrov, A.V. (2017) Implementation of the ERM-model repository in CASE-system Oracle Designer. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(41). pp. 47–54. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/41/6
2. Babanov, A.M. (2007) Semantic model "Entity – Relationship – Mapping". *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1. pp. 77–91. (In Russian).
3. Welke, R. (1988) *The case repository: more than another database application*. Meta Systems, Ltd.
4. Welke, R. (1992) *Challenges and strategies for research in systems development*. New York: John Wiley & Sons, Inc. pp. 181–218.
5. Dahanayake, A. (2001) *Computer-Aided Method Engineering: Designing CASE Repositories for the 21st Century*. Idea Group Publishing.
6. Agarwal, B.B., Tayal, S.P. & Gupta, M. (2010) *Software Engineering and Testing*. Jones & Bartlett Publishers.
7. Hamid, B. (2017) A model-driven approach for developing a model repository: Methodology and tool support. *Future Generation Computer Systems*. 68. pp.473–490. DOI: 10.1016/j.future.2016.04.018〉
8. Chen, P. (1976) The entity-relationship model – towards a unified view of data. *ACM Transactions on Database Systems.* 1(1). pp. 9–36. DOI: 10.1145/362384.362685
9. Barker, R. (1990). *CASE Method: Entity Relationship Modelling*. Addison-Wesley.
10. Babanov, A.M. (2015) Database design prospects opening with application of modern semantic data models. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2(31). pp. 73–80. (In Russian).
11. Brambilla, M., Cabot, J. & Wimmer, M. (2017) *Model-Driven Software Engineering in Practice*. 2nd ed. Morgan & Claypool Publishers.

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 43

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 681.518.5:004.052.32
DOI: 10.17223/19988605/43/10

Д.В. Ефанов

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОДОВ С СУММИРОВАНИЕМ ЕДИНИЧНЫХ И ОДНОГО ВЗВЕШЕННОГО РАЗРЯДОВ В СИСТЕМАХ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО КОНТРОЛЯ

Статья посвящена изложению результатов экспериментальных исследований кодов с суммированием единичных и одного взвешенного разрядов в системах функционального контроля с набором контрольных комбинационных схем *LGSynth*`89. Проводится анализ особенностей данного класса кодов по обнаружению ошибок на выходах контролируемых устройств, а также оценивается влияние положения взвешенного разряда и значения весового коэффициента на показатели структурной избыточности системы функционального контроля. Уточнены известные свойства взвешенных кодов с суммированием на случай формирования неравномерного количества информационных векторов на выходах реальных логических схем. Предложен алгоритм выбора кода с суммированием с учетом максимального обнаружения ошибок на выходах контролируемого устройства и возможностей уменьшения структурной избыточности системы функционального контроля для конкретного взвешенного разряда.

Ключевые слова: система функционального контроля; код с суммированием; код Бергера; код с суммированием единичных и одного взвешенного разрядов; контрольная комбинационная схема; обнаружение ошибок; структурная избыточность.

В системе функционального контроля (рис. 1) контролируемая логическая схема $F(x)$, имеющая m выходов, снабжается специальной схемой контроля, позволяющей косвенно по результатам анализа значений вычисляемых ею функций определять возникающие в ее структуре неисправности [1, 2]. В составе схемы контроля выделяются блок контрольной логики $G(x)$ и тестер (TSC). Блок $G(x)$ вычисляет значения k контрольных функций, а тестер в процессе эксплуатации системы функционального контроля проверяет соответствие между значениями рабочих и контрольных функций.

Как правило, в основе системы функционального контроля лежит заранее выбранный код с небольшой избыточностью, ориентированный на обнаружение ошибок в информационных векторах. Наиболее часто используются коды с суммированием, или (m, k)-коды (m и k – длины информационного и контрольного векторов кода) [3–7]. В этом случае выходам контролируемой схемы $f_1, f_2, \ldots, f_m$ в соответствие ставится информационный вектор, а выходам блока контрольной логики $g_1, g_2, \ldots, g_k$ – контрольный вектор. Тестер в системе функционального контроля представляет собой устройство, осуществляющее контроль принадлежности поступающих на его входы кодовых слов заданному (m, k)-коду [8, 9].

Наиболее простым среди всех кодов с суммированием является классический код Бергера, или $S(m, k)$-код [10]. При его построении подсчитывается количество единичных информационных разрядов (определяется вес информационного вектора), полученная сумма, представленная в двоичном виде, записывается в разряды контрольного вектора. Такие правила построения $S(m, k)$-кодов определяют невозможность обнаружения ими любых симметричных ошибок (при таких ошибках одновременно искажается одинаковое количество нулевых и единичных разрядов [11]). К необнаруживаемым

$S(m, k)$-кодами ошибкам относятся $N_d = 2^{m-d} C_{\frac{d}{2}}^{d} C_m^d$ ошибок четной кратностью d, что составляет, например, 50% двукратных и 37,5% четырехкратных ошибок в информационных векторах [12]. Любые другие виды ошибок (монотонные и асимметричные) любых кратностей кодами Бергера обнаруживаются.

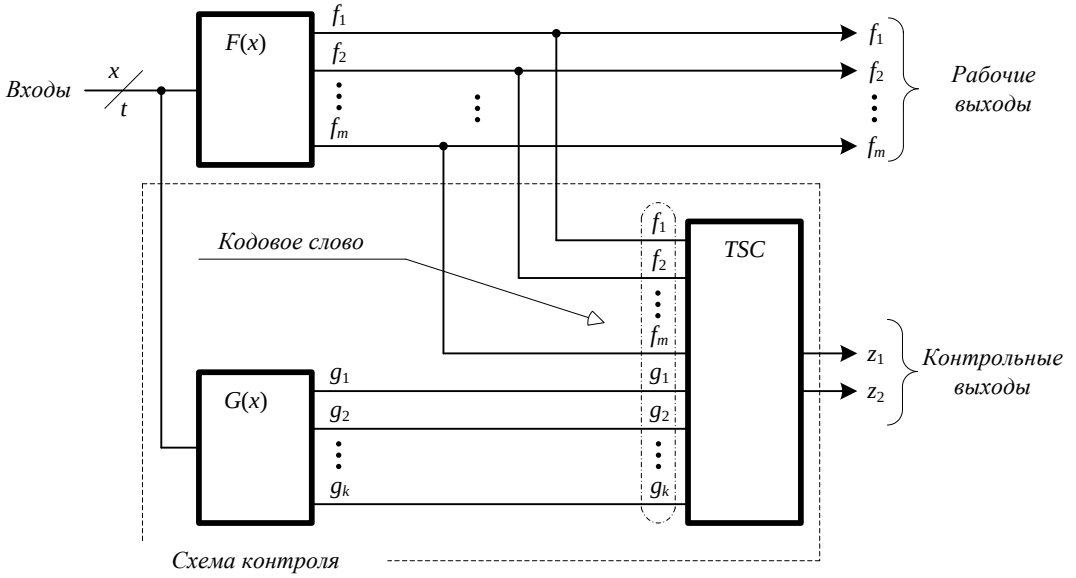


Рис. 1. Структурная схема системы функционального контроля

Недостатком кода Бергера, проявляющимся при организации систем функционального контроля, является то, что с его использованием для данного логического устройства может быть построена только единственная структура системы контроля. Для возможности реализации нескольких вариантов структур систем функционального контроля с возможностью выбора наилучших показателей обнаружения ошибок и структурной избыточности системы правила построения кода модифицируются [13–15]. Одной из перспективных модификаций является построение взвешенного кода с суммированием, в котором $m-1$ разряду информационного вектора приписаны единичные весовые коэффициенты, а одному – весовой коэффициент $w_i \neq 1$ [16, 17]. Данная работа освещает результаты использования таких кодов в системах функционального контроля контрольных комбинационных логических схем.

1. Коды с суммированием единичных и одного взвешенного разрядов

Значения разрядов контрольных векторов $WS(m, k, w_i)$-кодов (w_i – значение веса i-го разряда информационного вектора) определяются по следующим правилам.

Алгоритм 1. Вычисление значений разрядов $WS(m, k, w_i)$-кодов:

1. Среди разрядов информационного вектора выбирается разряд, которому приписывается весовой коэффициент $w_i \neq 1$; остальным разрядам приписываются единичные весовые коэффициенты.

2. Для каждого информационного вектора определяется суммарный вес единичных информационных разрядов – число W.

3. Вес W представляется в бинарной форме и записывается в разряды контрольного вектора.

Алгоритм 1 иллюстрируется примером построения $WS(4, 3, 2)$-кода (табл. 1). Данный код с суммированием не обнаруживает 36 ошибок в информационных векторах (24 двукратных симметричных ошибки и 12 трехкратных асимметричных ошибок). Для сравнения, классический $S(4, 3)$-код не обнаруживает 54 ошибки в информационных векторах (48 двукратных и 6 четырехкратных симметричных ошибок). Таким образом, при взвешивании одного информационного разряда эффективность обнаружения ошибок кодом с суммированием существенно возрастает, в том числе в области малой кратности,

что немаловажно для систем функционального контроля. Например, *WS*(4, 3, 2)-код обнаруживает в два раза большее количество двукратных ошибок, чем *S*(4, 3)-код.

Таблица 1

Кодовые слова *WS*(4, 3, 2)-кода

№	Информационный вектор				*W*	Контрольный вектор		
	f_4	f_3	f_2	f_1		g_3	g_2	g_1
	Весовые коэффициенты							
	$w_4 = 1$	$w_3 = 1$	$w_2 = 1$	$w_1 = 2$				
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	2	0	1	0
2	0	0	1	0	1	0	0	1
3	0	0	1	1	3	0	1	1
4	0	1	0	0	2	0	1	0
5	0	1	0	1	4	1	0	0
6	0	1	1	0	3	0	1	1
7	0	1	1	1	5	1	0	1
8	1	0	0	0	1	0	0	1
9	1	0	0	1	3	0	1	1
10	1	0	1	0	2	0	1	0
11	1	0	1	1	4	1	0	0
12	1	1	0	0	3	0	1	1
13	1	1	0	1	5	1	0	1
14	1	1	1	0	4	1	0	0
15	1	1	1	1	6	1	1	0

Свойства *WS*(*m, k, w*$_i$)-кодов по обнаружению ошибок в информационных векторах достаточно хорошо исследованы с учетом формирования всех возможных информационных векторов для данной их длины. В [18] установлены особенности *WS*(*m, k,* 3)-кодов по обнаружению ошибок в информационных векторах, показано, что данный код обладает всеми ключевыми особенностями классических кодов Бергера. Работы [19–21] посвящены изложению результатов исследований *WS*(*m, k, w*$_i$)-кодов с произвольными значениями весового коэффициента. Описываются результаты исследований распределений необнаруживаемых ошибок по кратностям. В [19, 21] детально изучены особенности *WS*(*m, k, w*$_i$)-кодов по обнаружению ошибок различных видов (монотонных, симметричных и асимметричных), что может быть эффективно использовано при синтезе систем функционального контроля.

С практической точки зрения для реальных логических устройств особенности применения *WS*(*m, k, w*$_i$)-кодов при организации систем функционального контроля могут быть уточнены. Например, в теоретических исследованиях полагается формирование всех информационных векторов кода и равное количество появлений единичных и нулевых значений для каждого разряда. На практике же все информационные векторы могут не формироваться и, тем более, равномерность появления единичных и нулевых разрядов может быть нарушена. Это, несомненно, влияет на свойства кода по обнаружению ошибок в реальном объекте диагностирования.

2. Экспериментальные исследования взвешенных кодов с суммированием в системах функционального контроля комбинационных логических схем

Приведем пример использования *WS*(*m, k, w*$_i$)-кодов при организации контроля контрольной комбинационной схемы «*alu*2» из набора контрольных примеров *LGSynth*`89 *Benchmarks*, разработанных в Университете Калифорнии для оценки эффективности вновь разрабатываемых методов технической диагностики [22].

Схема «*alu*2» имеет 10 входов и 6 выходов. В наборе контрольных примеров *LGSynth*`89 *Benchmarks* схемы представлены в том числе в формате *.netblif, который фактически описывает структуру

схемы в списочной форме. Каждая строка файла-описания схемы в данном формате содержит информацию о внутреннем логическом элементе: количество аргументов и саму функцию, реализуемую элементом, элементы, с выходами и входами которых связан данный элемент (или же с конкретными входами и выходами самой схемы). Рассматриваемая схема «*alu*2» содержит 360 внутренних логических элементов. Моделирование одиночных константных неисправностей на выходах внутренних элементов показало, что одиночные константные неисправности на всех входных наборах вызывают на выходах схемы 62 838 искажений с различными кратностями, в том числе 46 424 одиночные ошибки. В табл. 2 представлены характеристики ошибок на выходах схемы «*alu*2»: количество ошибок данного вида с данной кратностью и общее количество ошибок данной кратностью, а также доли ошибок от общего количества ошибок за вычетом одиночных (такие ошибки идентифицируются (m, k)-кодами). Одиночные неисправности на выходах внутренних логических элементов схемы «*alu*2» вызывают 16 414 ошибок с кратностями $d = 2 \div 5$. При этом 97,8% данных ошибок составляют двукратные и трехкратные ошибки различных видов.

Классическими кодами Бергера не будут обнаружены только 100% симметричных ошибок на выходах контролируемой схемы: для «*alu*2», например, это составит 7 691 двукратную симметричную ошибку (46,86% возможных ошибок). Этот показатель может быть существенно уменьшен за счет использования $WS(m, k, w_i)$-кода с установленным для взвешивания разрядом и конкретным значением веса. Для реальных схем взвешенным может быть любой из разрядов w_i, $i \in [1; m]$, что даст возможность построения большого количества систем функционального контроля с различными характеристиками как обнаружения ошибок в контролируемой схеме, так и с различными показателями структурной избыточности.

Таблица 2

Характеристики ошибок на выходах контрольной схемы

Кратность ошибки			
2	3	4	5
Общее количество ошибок данной кратностью			
12347 75,22%	3707 22,58%	316 1,93%	44 0,27%
Монотонные ошибки			
4656 28,37%	1236 7,53%	142 0,87%	2 0,01%
Симметричные ошибки			
7691 46,86%	–	31 0,19%	–
Асимметричные ошибки			
–	2471 15,05%	143 0,87%	42 0,26%

С точки зрения показателей обнаружения ошибок на выходах контролируемых схем значение весового коэффициента w_i может быть выбрано из множества $w_i \in [2; 3; ...; m]$ (характеристики кодов со значением $w_i > m$ неизменны). Таким образом, один разряд может быть взвешен $m - 1$ количеством способов, что при взвешивании поочередно каждого из разрядов даст следующее количество кодов:

$$N_{WS(m,k,w)} = (m-1)m = m^2 - m. \quad (1)$$

Таким образом, с учетом кода Бергера получаем, что схему с m выходами можно контролировать с использованием следующего количества кодов с суммированием с различными характеристиками обнаружения ошибок:

$$N_{(m,k)} = m^2 - m + 1. \quad (2)$$

В табл. 3 приводится количество способов выбора кода для контроля схем с различным количеством выходов. Для схемы «*alu2*», имеющей m = 6 выходов получаем: $N_{(m,k)} = 6^2 - 6 + 1 = 31$ способ построения системы функционального контроля.

Таблица 3

Числа $N_{(m,k)}$ в зависимости от значения m

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	20	…	50	…	100
$N_{(m,k)}$	3	7	13	21	31	43	57	73	91	…	381	…	2451	…	9901

Для реальных схем, однако, множество кодов, использование которых дает разнообразные характеристики обнаружения ошибок в системах функционального контроля, имеет меньшую мощность, чем рассчитываемое по формуле (2). Это связано с тем, что случай, когда на выходах реальных схем формируются все возможные 2^m информационных векторов, является крайне редким. Поэтому при определенных значениях w_i для различных разрядов информационного вектора наблюдаются одинаковые распределения необнаруживаемых ошибок по видам и кратностям (табл. 4).

Следует отметить, что эксперименты с контрольными комбинационными схемами подтверждают ряд важных свойств *WS*(m, k, w_i)-кодов по обнаружению ошибок, установленных теоретически. Кроме того, в силу невозможности формирования всех возможных информационных векторов на выходах реальных схем, многие важные свойства *WS*(m, k, w_i)-кодов обеспечиваются при меньших значениях весового коэффициента, чем установленное «пороговое» значение [21].

Таблица 4

Показатели обнаружения ошибок на выходах контрольной схемы

(m, k)-код	Количество необнаруживаемых ошибок					Доли необнаруживаемых ошибок от общего количества ошибок кратностями d = 2 ÷ 5, %				
	Симметричные		Асимметричные			Симметричные		Асимметричные		
	2	4	3	4	5	2	4	3	4	5
$S(m, k)$	7 691	31	0	0	0	46,856	0,189	0	0	0
$WS(m, k, w_1 = 2)$	7 621	8	0	0	0	46,43	0,049	0	0	0
$WS(m, k, w_1 = 3)$	7 621	8	0	7	0	46,43	0,049	0	0,043	0
$WS(m, k, w_1 \geq 4)$	7 621	8	0	0	0	46,43	0,049	0	0	0
$WS(m, k, w_2 = 2)$	2 601	0	2121	0	4	15,846	0	12,922	0	0,024
$WS(m, k, w_2 = 3)$	2 601	0	0	73	0	15,846	0	0	0,445	0
$WS(m, k, w_2 = 4)$	2 601	0	0	0	16	15,846	0	0	0	0,097
$WS(m, k, w_2 \geq 5)$	2 601	0	0	0	0	15,846	0	0	0	0
$WS(m, k, w_3 \geq 2)$	7 691	23	0	0	0	46,856	0,14	0	0	0
$WS(m, k, w_4 = 2)$	7 643	20	6	0	0	46,564	0,122	0,037	0	0
$WS(m, k, w_4 \geq 3)$	7 643	20	0	0	0	46,564	0,122	0	0	0
$WS(m, k, w_5 = 2)$	1 040	0	238	0	4	6,336	0	1,45	0	0,024
$WS(m, k, w_5 = 3)$	1 040	0	0	63	0	6,336	0	0	0,384	0
$WS(m, k, w_5 = 4)$	1 040	0	0	0	22	6,336	0	0	0	0,134
$WS(m, k, w_5 \geq 5)$	1 040	0	0	0	0	6,336	0	0	0	0
$WS(m, k, w_6 = 2)$	4 168	11	106	0	0	25,393	0,067	0,646	0	0
$WS(m, k, w_6 \geq 3)$	4 168	11	0	0	0	25,393	0,067	0	0	0

Ключевыми среди свойств WS(m, k, w_i)-кодов, учет которых целесообразен при синтезе систем функционального контроля реальных комбинационных схем, являются следующие положения:

1. *WS*(m, k, w_i)-коды вне зависимости от взвешиваемого разряда в информационном векторе и значения весового коэффициента обнаруживают любые монотонные ошибки в информационных векторах.

2. При определенном значении весового коэффициента вне зависимости от взвешиваемого разряда в информационном векторе $WS(m, k, w_i)$-коды обнаруживают все асимметричные ошибки в информационных векторах (гарантированно данное свойство обеспечивается при значении $w_i \geq m$, что объясняется, например, в [19], однако для реальных схем исключение асимметричных ошибок из класса необнаруживаемых может достигаться и при меньших значениях w_i).

3. При значении весового коэффициента $w \geq 2$ достигается минимум количества необнаруживаемых симметричных ошибок для установленного взвешиваемого разряда информационного вектора, причем для различных взвешиваемых разрядов этот минимум свой.

Из табл. 4 следует, что при контроле схемы «*alu*2» с помощью кода Бергера не будет обнаружено 47,045% ошибок (это 7 691 двукратная симметричная ошибка и 31 четырехкратная симметричная ошибка). С использованием кода с суммированием единичных и одного взвешенного информационного разряда удается уменьшить данный показатель, причем наилучший результат в 6,336% ошибок (1 040 двукратных симметричных ошибок) достигается при выборе любого из $WS(m, k, w_5 \geq 5)$-кодов. Таким образом, путем взвешивания одного информационного разряда удалось повысить количество обнаруживаемых ошибок в 7,425 раза по сравнению с кодом Бергера.

Свойства $WS(m, k, w_i)$-кодов подтверждаются экспериментами со всеми контрольными комбинационными схемами. Например, в табл. 5 дается сравнение $WS(m, k, w_i)$-кодов с классическими кодами Бергера по обнаружению ошибок на выходах контрольных комбинационных схем. Для сравнения выбирались коды Бергера и взвешенные коды, обладающие наилучшими характеристиками обнаружения ошибок. Так как минимум общего количества необнаруживаемых ошибок достигается уже при определенном значении веса взвешенного разряда $w_i \leq m$, в таблице указано, для каких выходов и при каких значениях весового коэффициента получаются лучшие результаты (столбцы «i» и «w_i»). Следует отметить, что более чем для половины контрольных комбинационных схем достаточно взвесить один из разрядов значением $w = 2$ для достижения наилучших характеристик обнаружения ошибок.

Таблица 5

Характеристики обнаружения ошибок кодами с суммированием на выходах контрольных комбинационных схем

Контрольная схема	Количество выходов	Количество необнаруживаемых ошибок		i	w_i	Общее количество немонотонных ошибок	η, %	
		При использовании $S(m, k)$-кода	При использовании лучшего $WS(m, k, w_i)$-кода				$S(m, k)$	$WS(m, k, w_i)$
*cm*151*a*	2	14 592	0	1, 2	≥ 2	14 592	100	0
*c*17	2	2	0	1, 2	≥ 2	2	100	0
*cm*85*a*	3	176	48	2	≥ 2	176	100	27,273
*cm*82*a*	3	68	0	2	≥ 2	68	100	0
*z*4*ml*	4	128	16	3	≥ 2	160	80	10
cmb	4	6	0	2	≥ 2	6	100	0
*b*1	4	2	0	2, 3	≥ 2	2	100	0
*cm*162*a*	5	1 920	0	4	≥ 2	3 264	58,824	0
*cm*163*a*	5	10 368	256	4	≥ 3	17 664	58,696	1,449
*alu*2	6	7 722	1 040	5	≥ 5	10 378	74,407	10,021
*x*7	7	104	0	6	≥ 4	224	46,429	0
*alu*4	8	187 274	97 368	7	≥ 5	328 263	57,05	29,662
*f*51*m*	8	123	63	5	≥ 3	209	58,852	30,144
pcle	9	188 416	113 664	8	≥ 6	327 168	57,59	34,742
*cm*42*a*	10	8	6	3, 4, …, 8	≥ 2	270	2,963	2,222
cu	11	34 048	0	10, 11	≥ 4	34 048	100	0
*pm*1	13	27 392	14 176	6	≥ 4	47 616	57,527	29,772
Средние значения							73,667	10,311

Так как рассматриваемые коды обнаруживают любые монотонные ошибки, целесообразно сравнить их по способности идентификации немонотонных искажений. В последних двух столбцах табл. 5 приводятся значения долей необнаруживаемых ошибок от общего количества немонотонных ошибок на выходах контрольных схем для каждого кода (величины η, %). $S(m, k)$-кодами не обнаруживается существенная доля немонотонных ошибок: для 7 комбинационных схем данная величина равна 100%, а в среднем для представленной выборки – 73,667%. $WS(m, k, w_i)$-коды обладают улучшенными характеристиками обнаружения ошибок: для 8 комбинационных схем получено обнаружение любых немонотонных ошибок, а в среднем – снижение доли необнаруживаемых ошибок по сравнению с кодами Бергера до величины 10,311%. На рис. 2 отображаются статистические данные, характеризующие улучшение свойств обнаружения ошибок кодами при взвешивании одного из разрядов по сравнению с кодами Бергера (в %). Практически для всех комбинационных схем получено обнаружение вдвое большего количества ошибок на выходах, чем при использовании кодов Бергера; средний же показатель составил 20,353% (увеличение количества идентифицируемых искажений в пять раз). Полученные результаты говорят о хороших перспективах приложения $WS(m, k, w_i)$-кодов в задачах технической диагностики и, прежде всего, в организации систем функционального контроля.

При взвешивании одного из разрядов информационного вектора меняются не только характеристики обнаружения ошибок на выходах контролируемой схемы, но и показатели структурной избыточности синтезируемых систем функционального контроля.

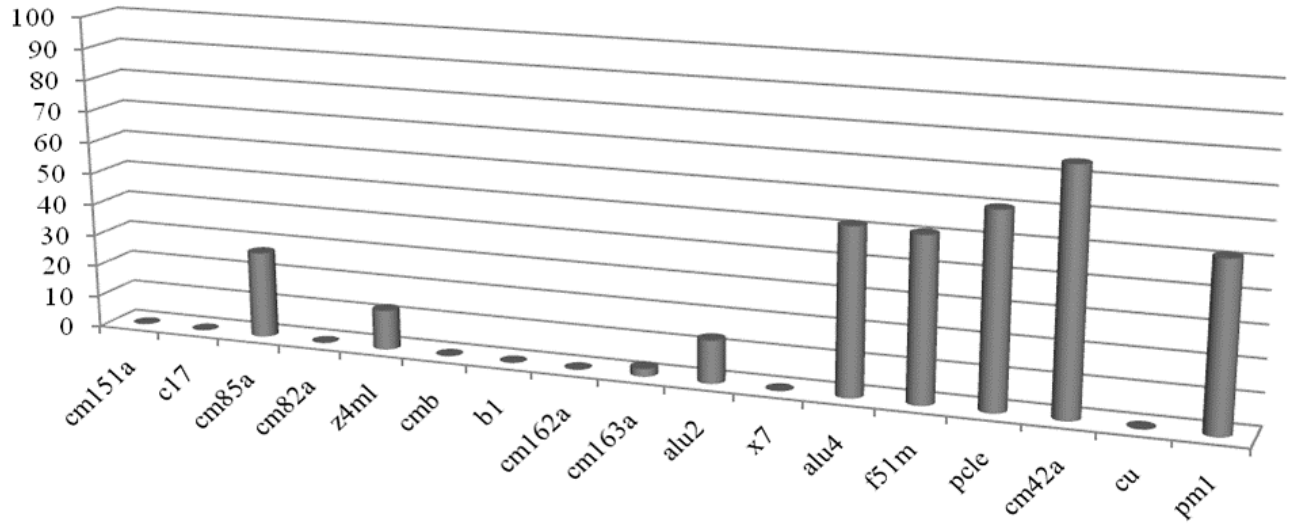


Рис. 2. Доля необнаруживаемых ошибок на выходах контрольных комбинационных схем лучшими по своим свойствам взвешенными кодами с суммированием от аналогичного показателя для кодов Бергера

С использованием специально разработанного комплекса программ по анализу свойств кодов с суммированием в системах функционального контроля были получены файлы-описания блоков основной и контрольной логики, генератора и тестера (см. рис. 1). Данные файлы получаются путем применения правил построения $WS(m, k, w_i)$-кодов ко всем информационным векторам, формируемым для рассматриваемой схемы и последующем сохранении соответствующих представлений в *.pla формате. Данный формат фактически содержит таблицы истинности логических устройств и в дальнейшем с целью определения показателей сложности технической реализации обрабатывается с использованием известного интерпретатора SIS [23, 24]. Сложность технической реализации логического устройства в SIS оценивается по показателю площади (в условных единицах) на основании выбранной библиотеки функциональных элементов. В ходе экспериментов была выбрана стандартная библиотека *stdcell*2_2.*genlib*. Результаты расчетов сведены в табл. 6.

Таблица 6

Показатели структурной избыточности систем функционального контроля

(m, k)-код	L_{CED}	$\delta_{F(x)}$, %	$\delta_{S(m,k)}$, %	L^{C}_{CED}	$\delta^{C}_{F(x)}$, %	$\delta^{C}_{S(m,k)}$, %
$S(m, k)$	17 920	246,696	100	15 000	206,498	83,705
$WS(m, k, w_1 = 2)$	18 408	253,414	102,723	14 088	193,943	78,616
$WS(m, k, w_1 = 3)$	19 600	269,824	109,375	15 440	212,555	86,161
$WS(m, k, w_1 = 4)$	19 792	272,467	110,446	14 064	193,612	78,482
$WS(m, k, w_1 = 5)$	20 064	276,211	111,964	15 864	218,392	88,527
$WS(m, k, w_1 = 6)$	18 928	260,573	105,625	14 656	201,762	81,786
$WS(m, k, w_1 = 7)$	19 680	270,925	109,821	15 944	219,493	88,973
$WS(m, k, w_1 = 8)$	16 878	232,351	94,185	13 736	189,097	76,652
$WS(m, k, w_2 = 2)$	16 712	230,066	93,259	16 032	220,705	89,464
$WS(m, k, w_2 = 3)$	21 216	292,07	118,393	17 424	239,868	97,232
$WS(m, k, w_2 = 4)$	20 392	280,727	113,795	16 736	230,396	93,393
$WS(m, k, w_2 = 5)$	21 376	294,273	119,286	17 288	237,996	96,473
$WS(m, k, w_2 = 6)$	20 728	285,352	115,67	18 168	250,11	101,384
$WS(m, k, w_2 = 7)$	22 288	306,828	124,375	18 960	261,013	105,804
$WS(m, k, w_2 = 8)$	21 448	295,264	119,688	16 224	223,348	90,536
$WS(m, k, w_3 = 2)$	17 752	244,383	99,063	14 176	195,154	79,107
$WS(m, k, w_3 = 3)$	19 760	272,026	110,268	15 128	208,26	84,42
$WS(m, k, w_3 = 4)$	19 104	262,996	106,607	15 136	208,37	84,464
$WS(m, k, w_3 = 5)$	19 480	268,172	108,705	15 880	218,612	88,616
$WS(m, k, w_3 = 6)$	17 896	246,366	99,866	14 208	195,595	79,286
$WS(m, k, w_3 = 7)$	18 488	254,515	103,17	14 728	202,753	82,188
$WS(m, k, w_3 = 8)$	19 424	267,401	108,393	14 424	198,568	80,491
$WS(m, k, w_4 = 2)$	18 456	254,075	102,991	14 864	204,626	82,946
$WS(m, k, w_4 = 3)$	18 904	260,242	105,491	15 200	209,251	84,821
$WS(m, k, w_4 = 4)$	18 272	251,542	101,964	15 384	211,784	85,848
$WS(m, k, w_4 = 5)$	18 272	251,542	101,964	16 304	224,449	90,982
$WS(m, k, w_4 = 6)$	18 632	256,498	103,973	15 712	216,3	87,679
$WS(m, k, w_4 = 7)$	20 120	276,982	112,277	14 768	203,304	82,411
$WS(m, k, w_4 = 8)$	19 760	272,026	110,268	14 184	195,264	79,152
$WS(m, k, w_5 = 2)$	19 576	269,493	109,241	15 952	219,604	89,018
$WS(m, k, w_5 = 3)$	22 488	309,581	125,491	17 944	247,026	100,134
$WS(m, k, w_5 = 4)$	22 632	311,564	126,295	17 008	234,141	94,911
$WS(m, k, w_5 = 5)$	22 872	314,868	127,634	18 848	259,471	105,179
$WS(m, k, w_5 = 6)$	23 336	321,256	130,223	18 744	258,04	104,598
$WS(m, k, w_5 = 7)$	21 944	302,093	122,455	17 856	245,815	99,643
$WS(m, k, w_5 = 8)$	20 640	284,141	115,179	15 472	212,996	86,339
$WS(m, k, w_6 = 2)$	18 168	250,11	101,384	14 456	199,009	80,67
$WS(m, k, w_6 = 3)$	21 720	299,009	121,205	15 872	218,502	88,571
$WS(m, k, w_6 = 4)$	17 888	246,256	99,821	14 544	200,22	81,161
$WS(m, k, w_6 = 5)$	20 904	287,775	116,652	15 896	218,833	88,705
$WS(m, k, w_6 = 6)$	20 480	281,938	114,286	15 496	213,326	86,473
$WS(m, k, w_6 = 7)$	19 384	266,85	108,17	15 072	207,489	84,107
$WS(m, k, w_6 = 8)$	18 640	256,608	104,018	12 816	176,432	71,518

Для схемы «*alu*2» были определены площади систем функционального контроля по коду Бергера и различным *WS*(*m*, *k*, w_i)-кодам для двух вариантов технической реализации:

1) с раздельной реализацией блоков основной и контрольной логики (величина L_{CED});

2) с совместной реализацией блоков основной и контрольной логики (величина L^C_{CED}).

Кроме этого, были установлены значения показателей структурной избыточности для каждой из указанных реализаций:

$$\delta_{F(x)} = \frac{L_{CED}}{L_{F(x)}} \cdot 100\%, \tag{3}$$

$$\delta_{S(m,k)} = \frac{L_{CED}}{L_{S(m,k)}} \cdot 100\%, \tag{4}$$

$$\delta^C_{F(x)} = \frac{L^C_{CED}}{L_{F(x)}} \cdot 100\%, \tag{5}$$

$$\delta^C_{S(m,k)} = \frac{L^C_{CED}}{L_{S(m,k)}} \cdot 100\%. \tag{6}$$

При этом на показатели сложности технической реализации системы функционального контроля, так же как и на характеристики обнаружения ошибок, существенно влияет то, каким будет значение весового коэффициента w_i и какой именно разряд информационного вектора будет взвешен. При этом значение w_i уже не ограничивается числом $w_i = m$.

В [17] показано, что сложность технической реализации генератора *WS*(*m*, *k*, w_i)-кода будет наименьшей, если значение весового коэффициента удовлетворяет следующему выражению:

$$w_i = 2^{\lceil \log_2 m \rceil}. \tag{7}$$

Это справедливо, поскольку при суммировании значений $m - 1$ информационного разряда будут заполнены $\lceil \log_2 (m-1) \rceil$ младших разрядов двоичного числа, соответствующего контрольному вектору *WS*(*m*, *k*, w_i)-кода, а значение старшего разряда будет определяться значением разряда с приписанным весом согласно формуле (7). Тем не менее в указанном случае количество разрядов в контрольном векторе будет увеличено по сравнению с классическим кодом Бергера, что повлияет на сложность блока *G*(*x*) системы функционального контроля и компаратора в составе тестера. Наименьшие значения площадей систем функционального контроля для контрольной схемы «*alu*2», как следует из табл. 6, получаются при взвешивании разряда весом $w_i = 2$. Взвешенные коды с таким значением веса имеют три контрольных разряда, а остальные коды из представленных в таблице – четыре контрольных разряда. Данное обстоятельство и повлияло на суммарные показатели площадей систем функционального контроля. Тем не менее, как следует из табл. 4, любые *WS*(*m*, *k*, 2)-коды имеют в классе необнаруживаемых большее количество ошибок, чем *WS*(*m*, *k*, $w_i > 2$)-коды (за исключением случая взвешивания разряда w_3). Для уменьшения количества необнаруживаемых ошибок потребуется увеличить значение весового коэффициента, что приведет к появлению еще одного контрольного разряда в кодовом слове *WS*(*m*, *k*, w_i)-кода. С учетом характеристик обнаружения ошибок взвешенным кодом с суммированием в каждом из семейств кодов с установленным взвешиваемым разрядом должно выбираться и наименьшее значение площади технической реализации. Например, поскольку минимумом общего количества необнаруживаемых ошибок в семействе кодов с взвешенным пятым разрядом информационного вектора обладают все *WS*(*m*, *k*, $w_5 \geq 5$)-коды, целесообразно выбрать значение весового коэффициента из значений $w_5 \geq 5$. Минимум площади среди указанных кодов дает использование *WS*(*m*, *k*, $w_5 = 8$)-кода. Построенная система функционального контроля будет иметь площадь, составляющую 115,179% от площади системы контроля по классическому коду Бергера. Другими словами, «новая» система контроля характеризуется усложнением по сравнению со «старой». Но в системе контроля по взвешенному коду с суммированием идентифицируется гораздо большее количество ошибок

на выходах контролируемых устройств. Увеличение значения площади следует считать ценной за улучшение характеристик обнаружения ошибок на выходах контролируемых устройств.

Следует отметить также возможность дополнительного уменьшения площади при совместной реализации блоков $F(x)$ и $G(x)$ в системе функционального контроля. В этом случае происходит «сжатие» структур за счет использования части подсхем для реализации как основных, так и контрольных функций. При использовании $WS(m, k, w_5 = 8)$-кода со сжатием блоков основной и контрольной логики удается достичь уменьшения площади системы функционального контроля до значения 86,339% от площади системы контроля по коду Бергера. Однако в этом случае расчеты относительно количества обнаруживаемых ошибок становятся некорректными, а количество необнаруживаемых ошибок возрастает. Это следует считать ценой за уменьшение площади системы функционального контроля.

3. Алгоритм выбора наилучшего взвешенного кода с суммированием для установленной комбинационной схемы

Анализ свойств $WS(m, k, w_i)$-кодов позволяет указать такую последовательность действий по определению характеристик систем функционального контроля, при которой количество операций разработчика будет минимальной.

Алгоритм 2. Правила выбора $WS(m, k, w_i)$-кода с учетом характеристик получаемых систем функционального контроля:

1. Выходы контрольной схемы объединяются в информационный вектор длиной m.
2. Устанавливаются номер разряда и значение весового коэффициента – числа i и j: $i = 1$, $j = m$.
3. Проводится процедура моделирования всех одиночных константных неисправностей в рассматриваемой логической схеме и фиксируются виды и кратности возникающих необнаруживаемых ошибок.
4. Значение j уменьшается на единицу: $j = j - 1$.
5. Повторяются действия п. 3 данного алгоритма.
6. Проверяется следующее условие: есть ли в классе необнаруживаемых асимметричные ошибки?
7. Если условие удовлетворяется, то процесс анализа для данного разряда останавливается и фиксируется число $j + 1$ (оно характеризует значение веса данного разряда, при котором число необнаруживаемых ошибок становится наименьшим для всего семейства кодов со взвешиванием данного разряда). В противном случае осуществляется переход к п. 4 данного алгоритма.
8. Выбирается следующий разряд: $i = i + 1$.
9. Проверяется условие $i = m$?
10. Среди полученных $WS(m, k, w_i)$-кодов с различными взвешенными разрядами и значениями весовых коэффициентов выбираются те коды, которые имеют минимальное количество необнаруживаемых ошибок малой кратности. Фиксируются числа $w_{i,\min}$ – значения весовых коэффициентов, при которых достигнуты наилучшие характеристики обнаружения ошибок в схеме.
11. Определяются значения площадей систем функционального контроля для всех $WS(m, k, w_i)$-кодов со значениями весового коэффициента

$$w_i \in \left\{ w_{i,\min}; w_{i,\min} + 1; \ldots; 2^{\lceil \log_2 m \rceil} \right\}. \quad (8)$$

12. Определяются значения w_i, при которых достигается минимум значения площади.

Использование алгоритма 2, например, применительно к выбору $WS(m, k, w_i)$-кода для организации контроля рассмотренной выше схемы «*alu*2» привело бы к следующему результату. Анализировать характеристики обнаружения ошибок $S(m, k)$, $WS(m, k, w_1 = 2)$, $WS(m, k, w_2 = 2)$, $WS(m, k, w_2 = 3)$, $WS(m, k, w_5 = 2)$ и $WS(m, k, w_5 = 3)$ кодов не потребовалось бы. Среди оставшихся кодов с суммированием наилучшими характеристиками обнаружения ошибок будут обладать все $WS(m, k, w_5 \geq 5)$-коды.

Для данных кодов при значениях $w_5 = 5 \div 8$ потребовалось бы определить площади систем функционального контроля и выбрать код, дающий минимальную по площади систему функционального контроля. В качестве наилучшего был бы установлен $WS(m, k, w_5 = 8)$-код.

Алгоритм 2 ориентирован на получение системы функционального контроля с наилучшими характеристиками обнаружения ошибок в контролируемой логической схеме. При удовлетворении данного критерия осуществляется поиск наилучшего решения по структурной избыточности системы.

Заключение

Установленные в ходе экспериментов с набором контрольных комбинационных схем новые свойства $WS(m, k, w_i)$-кодов позволяют эффективно использовать их при построении систем функционального контроля. В статье впервые показано, что для реальных логических схем позиция взвешенного разряда в информационном векторе $WS(m, k, w_i)$-кода имеет существенное значение. Минимальное же количество необнаруживаемых ошибок достигается во многих случаях при меньшем значении весового коэффициента для конкретного разряда кода, чем установленное «пороговое» значение $w_i = m$. Остальные же особенности обнаружения различных видов ошибок на выходах контролируемых схем сохраняются. Предложенный алгоритм выбора $WS(m, k, w_i)$-кода для выбранной логической схемы позволяет минимизировать действия разработчика системы функционального контроля.

Использование $WS(m, k, w_i)$-кодов при синтезе систем функционального контроля позволяет увеличить количество способов их технической реализации и подобрать ее структуру так, чтобы она удовлетворяла заранее поставленным требованиям по обнаружению ошибок и по структурной избыточности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nicolaidis M., Zorian Y. On-Line Testing for VLSI – a Compendium of Approaches // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1998. №12. P. 7–20.
2. Mitra S., McCluskey E.J. Which Concurrent Error Detection Scheme to Choose? // Proceedings of International Test Conference. 03–05 October 2000. Atlantic City, NJ, 2000. P. 985–994.
3. McCluskey E.J. Logic Design Principles: With Emphasis on Testable Semicustom Circuits. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall PTR, 1986. 549 p.
4. Согомонян Е.С., Слабаков Е.В. Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы. М. : Радио и связь, 1989. 208 с.
5. Das D., Touba N.A. Weight-Based Codes and Their Application to Concurrent Error Detection of Multilevel Circuits // Proceedings of the 17th IEEE VLSI Test Symposium. USA. CA. Dana Point. April 25–29. 1999. P. 370–376.
6. Matrosova A., Levin I., Ostanin S.A. Self-Checking Synchronous FSM Network Design with Low Overhead // VLSI Design. 2000. V. 11, is. 1. P. 47–58.
7. Fujiwara E. Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications. John Wiley & Sons, 2006. 720 p.
8. Piestrak S.J. Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes. Wrocław : Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1995. 111 p.
9. Lala P.K. Self-Checking and Fault-Tolerant Digital Design. San Francisco : Morgan Kaufmann Publishers, 2001. 216 p.
10. Berger J.M. A Note on Error Detection Codes for Asymmetric Channels // Information and Control. 1961. Vol. 4, is. 1. P. 68–73.
11. Jha N.K., Vora M.B. A t-Unidirectional Errors-Detecting Systematic Code // Computers & Mathematics with Applications. 1988. Vol. 16, No. 9. P. 705–714.
12. Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. О свойствах кода с суммированием в схемах функционального контроля // Автоматика и телемеханика. 2010. № 6. С. 155–162.
13. Das D., Touba N.A. Synthesis of Circuits with Low-Cost Concurrent Error Detection Based on Bose-Lin Codes // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1999. V. 15, is. 1-2. P. 145–155.
14. Das D., Touba N.A., Seuring M., Gossel M. Low Cost Concurrent Error Detection Based on Modulo Weight-Based Codes // Proceedings of IEEE 6th International On-Line Testing Workshop (IOLTW), Spain, Palma de Mallorca, July 3–5, 2000. P. 171–176.
15. Блюдов А.А., Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. О кодах с суммированием единичных разрядов в системах функционального контроля // Автоматика и телемеханика. 2014. № 8. С. 131–145.
16. Sapozhnikov V., Sapozhnikov Vl., Efanov D., Nikitin D. Combinational Circuits Checking on the Base of Sum Codes with One Weighted Data Bit // Proceedings of 12th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS`2014), Kyev, Ukraine, September 26–29, 2014. P. 126–136.

17. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Никитин Д.А. Исследование свойств кодов с суммированием с одним взвешенным информационным разрядом в системах функционального контроля // Электронное моделирование. 2015. Т. 37, №1. С. 25–48.
18. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Никитин Д.А. Метод построения кода Бергера с повышенной эффективностью обнаружения ошибок в информационных разрядах // Электронное моделирование. 2013. Т. 35, № 4. С. 21–34.
19. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Построение кодов с суммированием с наименьшим количеством необнаруживаемых симметричных ошибок в информационных векторах // Радиоэлектроника и информатика. 2014. № 4. С. 46–55.
20. Ефанов Д.В. Анализ способов построения кодов с суммированием с улучшенными характеристиками обнаружения симметричных ошибок в информационных векторах // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 4. С. 69–81.
21. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Контроль комбинационных схем на основе кодов с суммированием с одним взвешенным информационным разрядом // Автоматика на транспорте. 2016. Т. 2, № 4. С. 564–597.
22. Collection of Digital Design Benchmarks. URL: http://ddd.fit.cvut.cz/prj/Benchmarks/
23. Yang S. Logic Synthesis and Optimization Benchmarks: User Guide: Version 3.0. Microelectronics Center of North Carolina (MCNC), 1991. 88 p.
24. SIS: A System for Sequential Circuit Synthesis / E.M. Sentovich, K.J. Singh, L. Lavagno, C. Moon, R. Murgai, A. Saldanha, H. Savoj, P.R. Stephan, R.K. Brayton, A. Sangiovanni-Vincentelli // Electronics Research Laboratory, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, 4 May 1992. 45 p.

Поступила в редакцию 27 сентября 2017 г.

Efanov D.V. (2018) EXPERIMENTAL STUDIES OF ONE-BIT AND ONE WEIGHTED BIT SUM CODES WITHIN CONCURRENT ERROR DETECTION SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 43. pp. 81–94.

DOI: 10.17223/19988605/43/10

In concurrent error detection (CED) system tested logic circuit $F(x)$ with m outputs are equipped with special check circuit, that allows indirectly to determine its structure faults by the results of analysis of calculated function values. There are reference logic block $G(x)$ and totally self-checking checker within the structure of check circuit. Block $G(x)$ calculates k values of reference functions, and checker registers the conformance of operational and reference functions values during the CED system operation. In general, CED system bases on pre-selected code with small redundancy, focused on error detection in data vectors. Typically the sum codes, or (m,k)-codes (with m and k – lengths of data and check vectors of the code) are used.

One of the promising modifications is building the (m,k)-code, where single weight factors are assigned to m–1 bit of data vector, and to one of them – the weight factor $w_i \geq 2$. The author refers to them as $WS(m,k,w_i)$-code. This paper highlights the results of using these codes within CED systems of reference combinational logic circuits.

This article provides the results of experimental studies of $WS(m,k,w_i)$-code within CED systems with the set of reference combinational circuits LGSynth`89. It demonstrates the analysis of features of this class of codes by error detection at the outputs of tested units, as well as the assessment of weighted bit position weight factor value influences on the performances of CED system equipment redundancy.

From the error detection performance perspective at the outputs of tested circuits the value of weight factor w_i can be selected from the set $w_i \in [2;3;...;m]$ (characteristics of codes with $w_i > m$ are unchanged). Thus, one bit can be weighted $m-1$ number of ways, that during the weighting one by one each of the bits will give the following number of codes:

$$N_{WS(m,k,w)} = (m-1)m = m^2 - m.$$

Therefore, taking into account the famous Berger code, we get that the circuit with m outputs is possible to control by using this number of sum codes with the different error detection performances:

$$N_{(m,k)} = m^2 - m + 1.$$

The article also refines the well-known characteristics of weight-based sum codes in the case of forming the nonregular number of data vectors at the outputs of real logic circuits. The key characteristics among others of $WS(m,k,w_i)$-codes, registration of which is reasonable during the synthesis of CED systems of real combinational circuits, are the following:

1. $WS(m,k,w_i)$-codes, regardless of weighted bit in data vector and the weight factor value, detect any unidirectional errors in data vectors.

2. With the certain value of weight factor, regardless of weighted bit in data vector, $WS(m,k,w_i)$-codes detect all asymmetrical errors in data vectors (this characteristic provided for sure when $w_i \geq m$, however for real circuits the exclusion of asymmetrical errors from the undetectable ones can be achieved also under the lower values of w_i).

3. When weight factor $w_i \geq 2$ the minimum number of undetectable symmetrical errors are achieved for the given weighted bit of data vector, and for the different weighted bits this minimum number is different.

The author obtained the following basic experimental results. Since codes under consideration detect any unidirectional errors, it is reasonable to make its comparison based on its ability to detect non-unidirectional distortions. Berger codes do not detect the significant part of non-unidirectional errors: for 7 combinational circuits this value is 100%, and the average value for the sample – 73.667%. $WS(m,k,w_i)$-codes have improved characteristics for error detection: for 8 combinational circuits any non-unidirectional errors were detected, and at average – the fraction of undetectable errors was decreased in comparison with Berger codes to 10.311%. For about all combinational circuits the doubled number of errors at the outputs was obtained, in comparison with Berger codes; the average is 20.353% (5 times increasing the number of detectable distortions). The results obtained provide good prospects for implementation of $WS(m,k,w_i)$-codes within technical diagnostics problem solving, and, first of all, for CED systems organization.

The article offers an algorithm of sum code selection considering the maximum error detection at the outputs of tested unit and the possibility of decreasing the equipment redundancy of CED system for the specific weighted bit.

Using of $WS(m,k,w_i)$-codes for CED systems synthesis allows to increase the number of ways for its technical implementation and to provide the systems structure, that will meet pre-determined requirements for error detection and equipment redundancy.

Keywords: concurrent error-detection system; combinational circuit; Berger code; weight-based code; one weighted bit.

EFANOV Dmitry Viktorovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, St. Petersburg, Russian Federation).
E-mail: TrES-4b@yandex.ru

REFERENCES

1. Nicolaidis, M. & Zorian, Y. (1998) On-Line Testing for VLSI – A Compendium of Approaches. *Journal of Electronic Testing: Theory and Application*. 12(1-2). pp. 7–20. DOI: 10.1023/A:1008244815697
2. Mitra, S. & McCluskey, E.J. (2000) Which Concurrent Error Detection Scheme to Choose? *Proceedings of International Test Conference*. USA. Atlantic City. NJ. October 3–5, 2000. pp. 985–994. DOI: 10.1109/TEST.2000.894311
3. McCluskey, E.J. (1986) *Logic Design Principles: With Emphasis on Testable Semicustom Circuits.* New Jersey: Prentice Hall PTR.
4. Sogomonyan, E.S. & Slabakov, E.V. (1989) *Samoproveryayemyye ustroystva i otkazoustoychivyye sistemy* [Self-Checking Devices and Fault-Tolerant Systems]. Moscow: Radio & Communication.
5. Das, D. & Touba, N.A. (1999) Weight-Based Codes and Their Application to Concurrent Error Detection of Multilevel Circuits. *Proceedings of 17th IEEE Test Symposium*, California. USA. pp. 370–376. DOI: 10.1109/VTEST.1999.766691
6. Matrosova, A.Yu., Levin, I. & Ostanin, S.A. (2000) Self-Checking Synchronous FSM Network Design with Low Overhead. *VLSI Design*. 11(1). pp. 47–58. DOI:10.1155/2000/46578
7. Fujiwara, E. (2006) *Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications*. John Wiley & Sons.
8. Piestrak, S.J. (1995) *Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes*. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.
9. Lala, P.K. (2001) *Self-Checking and Fault-Tolerant Digital Design.* San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers.
10. Berger, J.M. (1961) A Note on Error Detecting Codes for Asymmetric Channels. *Information and Control*. 4(1). pp. 68–73. DOI: 10.1016/S0019-9958(61)80037-5
11. Jha, N.K. & Vora, M.B. (1988) A t-Unidirectional Errors-Detecting Systematic Code. *Computers & Mathematics with Applications*. 16(9). pp. 705–714. DOI: 10.1016/0898-1221(88)90006-5
12. Efanov, D.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, Vl.V. (2010) On Summation Code Properties in Functional Control Circuits. *Automation and Remote Control*. 71(6). pp. 1117–1123. DOI: 10.1134/S0005117910060123
13. Das, D. & Touba, N. A. (1999) Synthesis of Circuits with Low-Cost Concurrent Error Detection Based on Bose-Lin Codes. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 15(1-2). pp. 145–155. DOI: 10.1023/A:1008344603814
14. Das, D., Touba, N.A., Seuring, M. & Gossel, M. (2000) Low Cost Concurrent Error Detection Based on Modulo Weight-Based Codes. *Proceedings of the IEEE 6th International On-Line Testing Workshop (IOLTW)*. Spain, Palma de Mallorca. July 3–5. pp. 171–176. DOI: 10.1109/OLT.2000.856633
15. Blyudov, A.A., Efanov, D.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, Vl.V. (2014) On Summation Code of Unit Bits in Concurrent Error Detection Systems. *Automation and Remote Control*. 75(8). pp. 1460–1470. DOI: 10.1134/S0005117914080098
16. Sapozhnikov, V., Sapozhnikov, Vl., Efanov, D. & Nikitin, D. (2014) Combinational Circuits Checking on the Base of Sum Codes with One Weighted Data Bit. *Proceedings of 12th IEEE East-West Design & Test Symposium* (EWDTS`2014). Kyev. Ukraine. September 26–29. pp. 126–136. DOI: 10.1109/EWDTS.2014.7027064
17. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, Vl.V., Efanov, D.V. & Nikitin, D.A. (2015) Research of Properties of Codes With Summation With One Weighted Data Bit in Concurrent Error Detection Systems. *Elektronnoye modelirovaniye – Electronic Modeling*. 37(1). pp. 25–48. (In Russian).
18. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, Vl.V., Efanov, D.V. & Nikitin, D.A. (2013) Method of Berger Code Generation With Improved Efficiency of Error-Detection in Data Bits. *Elektronnoye modelirovaniye – Electronic Modeling*. 35(4). pp. 21–34. (In Russian).
19. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, Vl.V. & Efanov, D.V. (2014) Formation of Codes with Summation with the Smallest Number of Undetectable Errors of Data Bits. *Radioelektronika i informatika – Radioelectronics & Informatics*. 4. pp. 46–55. (In Russian).

20. Efanov, D.V. (2015) Analysis of Formation Methods of Sum Codes with Improved Characteristics of Detection of Symmetrical Errors in Data Vectors. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(33). pp. 69–81. DOI: 10.17223/19988605/32/9. (In Russian).
21. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, Vl.V. & Efanov, D.V. (2016) Checking of Combinational Circuits, Based on Sum Codes with One Weighted Data Bit. *Avtomatika na transporte – Automation on Transport*. 2(4). pp. 564–597. (In Russian).
22. Yang, S. (1991) *Logic Synthesis and Optimization Benchmarks: User Guide: Version 3.0.* Microelectronics Center of North Carolina (MCNC).
23. Sentovich, E.M., Singh, K.J., Lavagno, L., Moon, C., Murgai, R., Saldanha, A., Savoj, H., Stephan, P.R., Brayton, R.K.& Sangiovanni-Vincentelli, A. (1992) *SIS: A System for Sequential Circuit Synthesis.* Electronics Research Laboratory, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California. Berkeley.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛИКБЕРОВ Айдын Абдулла оглы – аспирант Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку). E-mail: kmansimov@mail.ru

БАБАНОВ Алексей Михайлович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: babanov2000@mail.ru

ВАСИЛЬЕВ Вячеслав Артурович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: vas@mail.tsu.ru

ГУМЕНЮК Александр Степанович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники факультета информационных технологий и компьютерных систем Омского государственного технического университета. E-mail: gumas45@mail.ru

ДМИТРЕНКО Анатолий Григорьевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры исследования операций Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail : dmitr@fpmk.tsu.ru

ДОГАДОВА Татьяна Валерьевна – аспирант кафедры высшей математики и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: aurora1900@mail.ru

ЗАВГОРОДНЯЯ Мария Евгеньевна – доцент кафедры исследования операций Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: mari.zavgor@mail.ru

ЕФАНОВ Дмитрий Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматики и телемеханики на железных дорогах Петербургского государственного университета путей сообщения (г. Санкт Петербург). E-mail: TrES-4b@yandex.ru

ЗЕМЦОВ Андрей Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры ЭВМ и систем Волгоградского государственного технического университета. E-mail: ecmsys@yandex.ru

МАНСИМОВ Камиль Байрамали оглы – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической кибернетики Бакинского государственного университета, руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

ОСИПОВ Олег Александрович – ассистент кафедры системного анализа и автоматического управления факультета компьютерных наук и информационных технологий Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. E-mail: oleg.alex.osipov@gmail.com

ПЕТРОВ Александр Викторович – магистрант кафедры программной инженерии Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: flamingcode@mail.ru

ПОЗДНИЧЕНКО Николай Николаевич – ассистент кафедры информатики и вычислительной техники факультета информационных технологий и компьютерных систем Омского государственного технического университета. E-mail: nick670@yandex.ru

ЦИЦИАШВИЛИ Гурами Шалвович – профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ИПМ ДВО РАН, профессор Дальневосточного федерального университета (г. Владивосток). E-mail: guram@iam.dvo.ru

ШПЫНОВ Станислав Николаевич – доктор медицинских наук, заведующий лабораторией экологии риккетсий Федерального научно-исследовательского центра эпидемиологии и микробиологии имени почетного академика Н.Ф. Гамалеи Министерства здравоохранения Российской Федерации (г. Москва). E-mail: stan63@inbox.ru

Научный журнал

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

2018. № 43

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 31.05.2018 г. Формат 60x84 1/8.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 11,2.
Тираж 250 экз. Заказ № 3209. Цена свободная.

Дата выхода в свет 15.06.2018 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: http://publish.tsu.ru; E-mail: rio.tsu@mail.ru