

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2013

№ 3(23)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Гулько С.П., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Лазарева Е.Г., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь по разделу математики); Александров И.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Биматов В.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бубенчиков А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Васенин И.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Гришин А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Ищенко А.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Крайнов А.Ю., д-р физ.-мат. наук; Крылов П.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Панько С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Пергаменщиков С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Сипачёва О.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Скрипняк В.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Старченко А.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Г.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Щербаков Н.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Хайруллина В.Ю. (отв. секретарь по разделу механики); Cauty R., prof.

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-30658 от 20 декабря 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8621). Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, его подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России».

«Вестник ТГУ. Математика и механика» входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе <http://elibrary.ru>, а также в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Кроме того, все номера журнала присутствуют и обрабатываются на общероссийском математическом портале <http://Math-Net.ru>.

Адрес редакции:

634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Александров И.А. Об оценке кривизны линий уровня при конформных отображениях	5
Бухтяк М.С. О гиперповерхности в пространстве приложенных ковекторов	8
Гриншпон С.Я., Гриншпон И.Э. Абелевы группы без кручения, нормально определяющиеся своими голоморфами	23
Копанев С.А. Заметка о кривизне линии уровня относительно конформного отображения	34
Рахмелевич И.В. О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных	37
Седых А.Г. О приближенно интегрируемых $SO(3)$ -структурах на 5-мерных многообразиях	45
Султонова Ш.Х., Меркулова Н.Н. Исследование математической модели усиления иммунного ответа с применением одношаговых и многошаговых методов	51
Чехлов А.Р. О прямых суммах циклических групп с инвариантными мономорфизмами	60

МЕХАНИКА

Василевский М.В., Романдин В.И., Зыков Е.Г., Полюшко В.А., Разва А.С. Характеристика потока с дисперсной фазой в вихревой камере	66
Ершов И.В. Устойчивость течения Куэтта колебательно-неравновесного молекулярного газа. Энергетический подход	76
Колмакова Т.В. Исследование напряженно-деформированного состояния объема кости при осевом сжатии	89
Манахов П.В., Федосеев О.Б. Оптимизация вычислений пластических деформаций в нелинейных задачах механики деформируемого твердого тела	96
Севастьянов Н.Н. Построение режимов ориентации без датчиков угловой скорости на СС «Ямал-200»	104
Сергеева А.М., Ткачева А.В., Одинокоев В.И. Численное исследование процесса деформирования ледяного покрова ледокольным судном	111
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	121

CONTENTS

MATHEMATICS

Aleksandrov I.A. About estimation of the curvature of level lines under conformal mappings.....	5
Bukhtyak M.S. On a hypersurface in the space of applied covectors.....	8
Grinshpon S.Ya., Grinshpon I.E. Torsion free abelian groups normally determined by their holomorphs.....	23
Copanev S.A. A note on the curvature of the level line under the conformal mapping.....	34
Rakhmelevich I.V. On application of the variable separation method to mathematical physics equations containing homogeneous functions of derivatives.....	37
Sedykh A.G. On approximately integrable $SO(3)$ structures on 5-dimensional manifolds.....	45
Sultonova Sh.Kh., Merkulova N.N. The research of a mathematical model of immune response reinforcement with application of one-step and multistep methods.....	51
Chekhlov A.R. On direct sums of cyclic groups with invariant monomorphisms.....	60

MECHANICS

Vasilevskii M.V., Romandin V.I., Zykov E.G., Polyushko V.A., Razva A.S. Characteristics of a flow with the dispersed phase in the vortex chamber.....	66
Ershov I.V. Stability of the Couette flow of a vibrationally nonequilibrium of molecular gas. Energy approach.....	76
Kolmakova T.V. Studying the stress-strain state of the bone volume under axial compression.....	89
Manahov P.V., Fedoseev O.B. Optimization of calculations of plastic deformations in nonlinear problems of deformable solid mechanics.....	96
Sevast'yanov N.N. Building of orientation modes on Yamal-200 communication satellite without angular speed sensors.....	104
Sergeeva A.M., Tkacheva A.V., Odinokov V.I. Numerical study of the deformation process of the ice cover under the action of an icebreaking ship.....	111

BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.....	121
--	-----

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

И.А. Александров

ОБ ОЦЕНКЕ КРИВИЗНЫ ЛИНИЙ УРОВНЯ
ПРИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

На классе S устанавливается нижняя оценка кривизны линий уровня.

Ключевые слова: конформное отображение, функционал, линия уровня.

Линией уровня голоморфного однолистного отображения

$$f: U \rightarrow \mathbb{C}, U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

нормированного условиями $f(0) = 0, f'(0) = 1$ (множество всех таких отображений образует известный класс S), называют образ $L(f, r)$ окружности

$$l_r = \{z \in U : |z| = r\}, 0 < r < 1,$$

при отображении f , то есть $L(f, r) = f(l_r)$.

Пусть $z_0 \in l_r$. Кривизна замкнутой жордановой аналитической кривой $L(f, r)$ в точке $f(z_0)$, $|z_0| = r$, вычисляется по формуле

$$K(f, z_0) = \frac{\operatorname{Re} \left(1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} \right)}{|z_0 f'(z_0)|}.$$

Имеется ряд работ, посвященных нахождению точных оценок кривизны линий уровня на классе S . Известно, что в силу компактности класса S в смысле равномерной сходимости последовательностей на замкнутых ограниченных множествах точные оценки сверху и снизу достигаются на функциях класса S . Вариационным методом доказано, что такие функции отображают круг U на области, полученные из $\mathbb{C}$ исключением кривых, составленных из конечного числа аналитических дуг. Так как если $f(z) \in S$, то $g_\alpha(z) = e^{i\alpha} f(e^{-i\alpha} z) \in S, 0 \leq \alpha < 2\pi$, и поэтому

$$\bar{K}(f, r) = \max_{f \in S} K(f, z_0) = \max_{g_\alpha \in S} K(g_\alpha, r),$$

$$\underline{K}(f, r) = \min_{f \in S} K(f, z_0) = \min_{g_\alpha \in S} K(g_\alpha, r)$$

при $\alpha = \arg z_0$.

Приведенная далее оценка снизу кривизны линий уровня известна [1, 2]. Новым является способ её получения, не требующий сложных вычислений, и поэтому, может быть, он заслуживает быть отмеченным

Теорема. Для кривизны линий уровня $L(f, r)$, $2 - \sqrt{3} < r < 1$, на классе S имеет место точная оценка

$$\underline{K}(f, r) = \frac{(r^2 - 4r + 1)(1 + r)^2}{r(1 - r)^2};$$

она реализуется при $z = r$ на функции

$$w = f(z) = \frac{z}{(1 + z)^2},$$

отображающей круг U на плоскость C с исключенным лучом от точки $1/4$ до бесконечности, лежащим на положительной части действительной оси.

Доказательство. Множество $D(z) = \{w \in C : w = I(f, z)\}$ значений функционала

$$I(f, z) = \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) + i|zf'(z)|, \quad f \in S,$$

при фиксированном $z \in U$ ограничено и замкнуто. Из точных оценок Бибербаха [3, с. 48], для $f \in S$

$$a_1(r) \leq \operatorname{Re} I(f, r) \leq a_2(r), \quad b_1(r) \leq \operatorname{Im} I(f, r) \leq b_2(r),$$

где

$$a_1(r) = \frac{r^2 - 4r + 1}{1 - r^2}, \quad b_1(r) = \frac{r(1 - r)}{(1 + r)^3}, \quad a_2(r) = a_1(-r), \quad b_2(r) = -b_1(-r),$$

следует, что $D(r)$ лежит в замкнутом прямоугольнике $\Delta(r)$ с вершинами $w_{11} = a_1 + ib_1$, $w_{12} = a_1 + ib_2$, $w_{21} = a_2 + ib_1$, $w_{22} = a_2 + ib_2$, то есть $D(r) \subset \Delta(r)$.

В трехмерном пространстве R^3 с декартовой прямоугольной системой координат $O\xi\eta\zeta$ отождествим плоскость $\zeta = 0$ с комплексной плоскостью C , полагая $w = \xi + i\eta$. На плоскости $\zeta = 0$ прямоугольник $\Delta(r)$ лежит в полуплоскости $\eta > 0$. Если $0 < r < 2 - \sqrt{3}$, то $\Delta(r)$ лежит в первом квадранте плоскости $O\xi\eta$. При $2 - \sqrt{3} < r < 1$ часть прямоугольника $\Delta(r)$ лежит в первом квадранте плоскости $O\xi\eta$, а остальная часть – во втором квадранте: $\xi < 0, \eta > 0$. Функция $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$ в

$\Delta(r)$, $2 - \sqrt{3} < r < 1$, однозначна и имеет минимальное значение в точке w_{11} . Оно

равно $A(r) = \frac{(r^2 - 4r + 1)(1 + r)^2}{r(1 - r)^2}$ и достигается на функции $f(z) = \frac{z}{(1 + z)^2} \in S$.

Значит, точка $w_{11} \in D(r)$ и в нестрогом неравенстве

$$A(r) = \min_{\Delta(r)} \frac{\xi}{\eta} \leq \min_{D(r)} \frac{\xi}{\eta} = \underline{K}(f, r)$$

реализуется равенство.

Теорема доказана.

Заметим, что как показано в [2], от ограничения $2 - \sqrt{3} < r < 1$ можно освободиться, сохраняя утверждение теоремы. Область $D(r)$ пока не найдена. Остается открытым вопрос о значении $\bar{K}(f, r)$, $f \in S$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирошниченко Я.С. Об одной задаче теории однолистных функций // Учен.записки До-нецкого пед. ин-та. 1951. С. 63–75.
2. Корицкий Г.В. О кривизне линий уровня и ортогональных траекторий при конформных отображениях // Матем. сб. 1955. № 37. С. 103–116.
3. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001.

Статья поступила 21.02.2013 г.

Aleksandrov I.A. ABOUT ESTIMATION OF THE CURVATURE OF LEVEL LINES UNDER CONFORMAL MAPPINGS. A lower bound is established on the class S for the curvature of level lines under conformal mappings.

Keywords: conformal mapping, functional, level lines.

ALEKSANDROV Igor' Alexandrovich (Tomsk State University).

E-mail: ma@math.tsu.ru

УДК 514.754.7

М.С. Бухтяк

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРИЛОЖЕННЫХ КОВЕКТОРОВ

Данная работа продолжает серию публикаций автора, посвященных погружениям различных многообразий в точечно-векторные пространства (см., например, [2,3,7]). Для исходного трехмерного аффинного пространства строится шестимерное точечно-векторное пространство D_6 , точка которого – приложенный ковектор, а вектор – упорядоченная пара, составленная из вектора и ковектора. Гиперповерхность полученного пространства снабжена псевдоримановой метрикой, индуцированной естественной метрикой пространства D_6 . Построена связность гиперповерхности, названная «естественной», и связность Леви-Чивита. Исследованы геодезические линии обеих связностей (для первой из них – до полной характеристики).

Ключевые слова: ковектор, псевдориманово пространство, связность Леви-Чивита, геодезические.

1. Операции над векторами и ковекторами

Пусть V – линейное 3-пространство над R и V^* – сопряженное ему пространство ковекторов.

Множество реперов пространства V обозначим E . Символ $\langle, \rangle$ обозначает свёртку вектора и ковектора. Пусть $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ – базис пространства V , $e^* = (\underline{e}^1, \underline{e}^2, \underline{e}^3)^T$ – базис сопряженного пространства V^* . Сопряжённость базисов означает, что

$$\langle \bar{e}_i, \underline{e}^j \rangle = \langle \underline{e}^j, \bar{e}_i \rangle = \delta_i^j \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Примем интерпретацию ковекторов, описанную в [5]. Тогда ковектор $\underline{b} = b_1 \underline{e}^1 + b_2 \underline{e}^2 + b_3 \underline{e}^3$ интерпретируется упорядоченной парой параллельных плоскостей. Если первая из них $\Pi_{(1)}$ проходит через начало координат O , то она и вторая ($\Pi_{(2)}$) задаются соответственно уравнениями

$$\Pi_{(1)} : b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 = 0,$$

$$\Pi_{(2)} : b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 = 1.$$

Пусть из точки O отложен и вектор $\overline{OA} = \bar{a}$. Если B – точка пересечения прямой (OA) и плоскости $\Pi_{(2)}$, то

$$\overline{OA} = \langle \bar{a} \underline{b} \rangle \overline{OB},$$

что и придает наглядный смысл инварианту $\langle \bar{a} \underline{b} \rangle$. Ковектор (как и вектор) может быть отложен из любой точки, это не повлияет на истолкование геометрического смысла инварианта $\langle \bar{a} \underline{b} \rangle$.

Таким образом, если базисы $\mathbf{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, $\mathbf{e}^* = (\underline{e}^1, \underline{e}^2, \underline{e}^3)^T$ сопряжены (мы откладываем векторы первого базиса и первые плоскости пары параллельных плоскостей, изображающих ковектор второго базиса, из начала координат O), то ковектор $\underline{e}^1$ изобразится упорядоченной парой параллельных плоскостей $(\Pi_{(1)}^1, \Pi_{(2)}^1)$, каждая из которых параллельна векторам $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$, причём первая проходит через $O(0,0,0)$, а вторая – через точку $(1,0,0)$. Проделав то же для остальных ковекторов, получим изображение репера $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и корепера $(O, \underline{e}^1, \underline{e}^2, \underline{e}^3)$, где обозначены только вторые плоскости $(\Pi_{(2)}^1, \Pi_{(2)}^2, \Pi_{(2)}^3)$, изображающие базисные ковекторы (рис. 1).

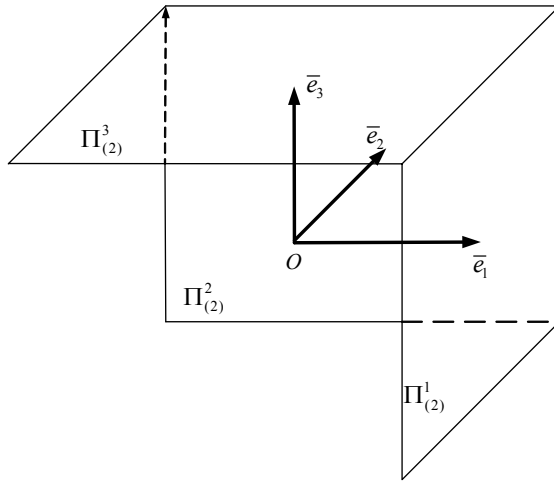


Рис. 1. Репер и корепер (условное изображение)

Определим отображения

$$f: V \times V \times V \times E \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^*: V^* \times V^* \times V^* \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

следующим образом. Если

$$\bar{a}_i = a_i^j \bar{e}_j, \quad \underline{b}^i = b_j^i \underline{e}^j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

то

$$f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \mathbf{e}) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}, \quad f^*(\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3, \mathbf{e}) = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \end{vmatrix}.$$

Для введённых нами функций f и f^* примем (на наш взгляд, более удобные) обозначения $[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]_{\mathbf{e}}$ и $[\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3]_{\mathbf{e}}$. Таким образом,

$$[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]_{\mathbf{e}} = \det \|a_i^j\|. \quad [\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3]_{\mathbf{e}} = \det \|b_i^j\|.$$

Определение. Величина $[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]_{\mathbf{e}}$ называется косым произведением векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ в базисе $\mathbf{e}$, а величина $[\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3]_{\mathbf{e}}$ – косым произведением ковекторов $\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3$ в том же базисе.

Запишем закон преобразования базисов, а также координат вектора (x^i) и ковектора (y_i) с невырожденной матрицей $A = \|A_i^j\|$ и обратной к ней матрицей $A^{-1} = \|A_i'^j\|$.

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}A, \quad \mathbf{e}'^* = A^{-1*} \mathbf{e}^*,$$

или, в подробной записи,

$$\bar{e}_i' = \bar{e}_i A_i^j, \quad \underline{e}^i = A_i'^j \underline{e}^j, \quad x^{i'} = A_i'^j x^j, \quad y_{i'} = y_i A_i^j. \quad (*)$$

Эти объекты преобразуются по правилу

$$\begin{aligned} [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]_{\mathbf{e}'} &= A_i^j A_j^k A_k^l [\bar{a}_i, \bar{a}_j, \bar{a}_k]_{\mathbf{e}} = \det(A) \cdot [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]_{\mathbf{e}}; \\ [\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3]_{\mathbf{e}'} &= A_i'^j A_j'^k A_k'^l [\underline{b}^i, \underline{b}^j, \underline{b}^k]_{\mathbf{e}} = \det(A^{-1}) \cdot [\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3]_{\mathbf{e}}. \end{aligned}$$

Определим операцию **векторного умножения** над ковекторами $\underline{x} = x_i \underline{e}^i$, $\underline{y} = y_i \underline{e}^i$ в базисе $\mathbf{e}$ следующим образом:

$$[\underline{x}, \underline{y}]_{\mathbf{e}} \triangleq \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \in V. \quad (1.1)$$

Из (*) следует, что при преобразовании базиса $\bar{e}_i' = \bar{e}_i A_i^j$

$$[\underline{x}, \underline{y}]_{\mathbf{e}'} = [\underline{x}, \underline{y}]_{\mathbf{e}} \det \|A_i'^j\| = [\underline{x}, \underline{y}]_{\mathbf{e}} \det(A). \quad (1.2)$$

Таким образом, результат векторного умножения ковекторов есть вектор, свертка которого с каждым из ковекторов-сомножителей равна нулю. В интерпретации ковекторов, предложенной в [5], вектор $[\underline{x}, \underline{y}]$ параллелен плоскостям, изображающим первый ковектор, и плоскостям, изображающим второй ковектор. Операция векторного умножения ковекторов относительно инвариантна, если в V действует полная линейная группа, и инвариантна относительно специальной линейной группы. Для характеристики нормировки вектора $[\underline{x}, \underline{y}]$ в этом последнем случае рассмотрим отображение

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}, \mathbf{e}, t) = t [\underline{x}, \underline{y}]_{\mathbf{e}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для тройки векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ тогда получаем равенство

$$[\varphi(\bar{a}_2, \bar{a}_3, \mathbf{e}, t), \varphi(\bar{a}_3, \bar{a}_1, \mathbf{e}, t), \varphi(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \mathbf{e}, t)]_{\mathbf{e}} - [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]_{\mathbf{e}}^2 = (t^3 - 1) [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]_{\mathbf{e}}^2.$$

Ноль в правой части равенства мы и получаем только при $t = 1$.

Определим операцию **ковекторного умножения** над векторами $\bar{x} = x^i \bar{e}_i$, $\bar{y} = y^j \bar{e}_j$ в базисе $\mathbf{e}$:

$$[\bar{x}, \bar{y}]_{\mathbf{e}} \triangleq \begin{vmatrix} \bar{e}^1 & \bar{e}^2 & \bar{e}^3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} \in V^*.$$

При тех же условиях, что справедливы для (3), мы констатируем, что

$$[\bar{x}, \bar{y}]_{\mathbf{e}'} = [\bar{x}, \bar{y}]_{\mathbf{e}} \det \|A_i'\| = [\bar{x}, \bar{y}]_{\mathbf{e}} \det (A^{-1}).$$

Пусть имеем аффинное пространство A_3 с репером

$$\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}.$$

Для ковектора $\underline{b} = b_1 \underline{e}^1 + b_2 \underline{e}^2 + b_3 \underline{e}^3$ в A_3 примем геометрическую интерпретацию [5] посредством класса аффинной эквивалентности пар параллельных плоскостей с представителем в виде пары

$$\begin{aligned} \Pi_1 : b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 &= 0, \\ \Pi_2 : b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 &= 1. \end{aligned}$$

В этом случае скажем, что ковектор $\underline{b}$ отложен из точки O или что мы рассматриваем приложенный ковектор $(O, \underline{b})$. Пусть из точки O отложен и вектор $\overline{OA} = \bar{a}$. Если B – точка пересечения прямой (OA) и плоскости Π_2 , то

$$\overline{OA} = \langle \bar{a} \underline{b} \rangle \overline{OB},$$

что и придает наглядный смысл инварианту $\langle \bar{a} \underline{b} \rangle$. Ковектор может быть отложен из любой точки.

2. Пространство D_6

Составим шестимерное линейное пространство $(V \times V^*, \mathbb{R}, +, \cdot)$ следующим образом: вектор в $V \times V^*$ есть упорядоченная пара $\bar{\alpha} = (\bar{a}, \underline{b})$, сложение и умножение на скаляр – покомпонентные. С каждым вектором $\bar{\alpha} = (\bar{a}, \underline{b})$ связывается число

$$\bar{\alpha}^2 = \langle \bar{a} \underline{b} \rangle,$$

которое мы называем (псевдо) скалярным квадратом вектора $\bar{\alpha}$. Пространство $V \times V^*$ с указанным скалярным квадратом имеет структуру пространства R_6^3 . Если в некотором базисе $(\bar{e}_i)$ и взаимном базисе $(\underline{e}^i)$ имеем $\bar{a} = a^i \bar{e}_i$, $\underline{b} = b_i \underline{e}^i$, то

$$\bar{\alpha}^2 = a^i b_i.$$

Для квадратичной формы (1) полярной билинейной формой является

$$\bar{\alpha} \bar{\beta} = \frac{1}{2} (\langle \bar{a} \underline{p} \rangle + \langle \bar{c} \underline{b} \rangle),$$

где $\bar{\alpha} = (\bar{a}, \underline{b})$, $\bar{\beta} = (\bar{c}, \underline{p})$.

Если базис-строка $e = (\bar{e}_i)$ подвергается линейному преобразованию

$$e' = eA,$$

то вектор $\bar{\alpha} = (\bar{a}, \underline{b})$ переходит в вектор

$$\bar{\alpha}' = (A^{-1}\bar{a}, \underline{b}A).$$

Таким образом, в линейном пространстве $V \times V^*$ действует 9-членная группа преобразований, изоморфная группе матриц

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & (C^{-1})^T \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь структуру $(U \times V_3^*, V_3 \times V_3^*, \Phi)$, где U – точечное множество аффинного пространства A_3 , V_3 – его векторное пространство. Элементы множества $U \times V_3^*$ называем точками и обозначаем $x, y, z, \dots$. Отображение Φ упорядоченной паре (x, y) , где $x = (A, \underline{a})$, $y = (B, \underline{b})$, сопоставляет вектор $\overline{xy} \in V_3 \times V_3^*$ по правилу

$$\overline{xy} = (\overline{AB}, \underline{b} - \underline{a}).$$

Нетрудно проверить, что для построенной структуры выполнены аксиомы точечно-векторного пространства [1]. Построенное здесь шестимерное пространство будем обозначать D_6 .

Как отмечено выше, приложенный ковектор аффинного пространства A_3 интерпретируется парой $(M, \underline{a})$, состоящей из точки M и не проходящей через нее плоскости Π – второй плоскости, изображающей ковектор $\underline{a}$ [5] (первая плоскость, изображающая ковектор, проходит через M). Пусть из точки O отложены вектор $\overline{OA} = \bar{a}$ и ковектор $(O, \underline{b})$. Прямая линия пространства D_6 интерпретируется как прямолинейный ряд точек в пространстве A_3 и пучок плоскостей этого же пространства, находящихся в аффинном соответствии.

2-плоскость пространства D_6 задается параметрическим уравнением

$$(\overline{M}, \underline{Y}) = (\overline{M}, \underline{Y}^0) + u(\bar{a}, \underline{p}) + v(\bar{b}, \underline{q}). \quad (2.1)$$

Необходимое и достаточное ограничение на направляющие векторы:

$$\text{Rang} \{(\bar{a}, \underline{p}), (\bar{b}, \underline{q})\} = 2.$$

Будем говорить, что плоскость (2.1) есть плоскость $L(n, m)$, если

$$\text{Rang} \{\bar{a}, \bar{b}\} = n, \quad \text{Rang} \{\underline{p}, \underline{q}\} = m.$$

Ясно, что $(n, m) \in \{(2, 2), (2, 1), (2, 0), (1, 2), (1, 1), (0, 2)\}$. Ясно также, что плоскость $L(2, 2)$ интерпретируется как плоскость в A_3 , натянутая на $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и 2-семейство ковекторов $\underline{y} = \underline{Y}^0 + u\underline{p} + v\underline{q}$, находящихся в аффинном соответствии. Остальные

плоскости $L(n, m)$ отличаются лишь понижением размерности либо одного из семейств (точек либо ковекторов), либо обоих сразу (для $L(1, 1)$). Однако больший интерес представляет другая интерпретация.

Именно, пусть точка M совмещена с вершиной O репера. Пусть к этой же точке приложен и ковектор $\underline{y}$. Тогда (2.1) есть параметрическое уравнение 2-семейства, образующий элемент которого состоит из точки

$$\overline{M} = \overline{M}_0 + u\overline{a} + v\overline{b} \quad (2.2)$$

и плоскости

$$\langle \underline{Y}^0 + u\underline{p} + v\underline{q}, \overline{x} \rangle = 1. \quad (2.3)$$

Плоскости (2.3) образуют связку с центром, который определяется системой уравнений

$$\langle \underline{Y}^0 \overline{x} \rangle - 1 = \langle \underline{p} \overline{x} \rangle = \langle \underline{q} \overline{x} \rangle = 0,$$

и с неоднородными координатами u, v в связке. В то же время u, v есть не что иное, как неоднородные координаты несобственной прямой, по которой плоскость (2.3) пересекает несобственную плоскость. Таким образом, (2.2) и (2.3) задают аффинное отображение точек плоскости $(\overline{M} - \overline{M}_0, \overline{a}, \overline{b}) = 0$ в тангенциальную несобственную плоскость пространства A_3 . Не составляет особого труда построить интерпретацию остальных плоскостей $L(n, m)$.

3. Подвижной репер в пространстве D_6

В пространстве A_3 подвижной репер $\{M, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ имеет деривационные формулы

$$d\overline{M} = \omega^i \overline{e}_i, \quad d\overline{e}_i = \omega_i^j \overline{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.1)$$

где ω_j^i – формы Пфаффа [4], подчиненные уравнениям структуры

$$d\omega^i = \omega^i \wedge \omega_j^i, \quad d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

В пространстве D_6 рассматриваем репер

$$\{\underline{x}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}, \quad (3.3)$$

где

$$\underline{x} = (\overline{M}, \underline{e}^3), \quad \varepsilon_i = (\overline{e}_i, \underline{0}), \quad \varepsilon^i = (\underline{0}, \underline{e}^i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.4)$$

Поскольку для векторов пространства D_6 операции определены покомпонентно, то деривационные формулы подвижного репера (3.3) имеют (в силу (3.1) и (3.4)) вид

$$\begin{aligned} d\underline{x} &= \omega^i \varepsilon_i - \omega_i^3 \varepsilon^i, \\ d\varepsilon_i &= \omega_i^j \varepsilon_j, \quad d\varepsilon^i = -\omega_j^i \varepsilon^j. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Формулам (3.5) соответствуют следующие матрицы коэффициентов:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & -\omega_3^3 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^1 & -\omega_2^1 & -\omega_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & -\omega_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & -\omega_3^3 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Поскольку пространство D_6 – точечно-векторное, то базовая форма θ и слоевая форма Ω определяют на нашем пространстве локально-плоскую аффинную связность, что, впрочем, подтверждается и непосредственным вычислением с использованием (3.2), (3.6) и (3.7):

$$d\theta - \theta \wedge \Theta = 0, \quad d\Theta - \Theta \wedge \Theta = 0.$$

Инфинитезимальная (псевдоевклидова) метрика определена квадратичной дифференциальной формой

$$ds^2 = -(\omega_1^1 \omega_1^3 + \omega_2^2 \omega_2^3 + \omega_3^3 \omega_3^3). \quad (3.8)$$

Матрица указанной квадратичной формы имеет вид

$$g = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Без труда проверяется, что обнаруженная нами связность ∇ пространства D_6 является связностью Леви-Чивита для инфинитезимальной метрики (3.8). В самом деле, из (3.7) и (3.9) видно, что

$$\nabla g = dg - \theta g - (\theta g)^T = 0.$$

4. Гиперповерхность в пространстве D_6

Рассмотрим в пространстве D_6 гиперповерхность Σ , для которой вершина репера – текущая точка. Тогда 6 пфаффовых форм ω^i , ω_3^i окажутся связанными одним линейным уравнением вида

$$\lambda_1 \omega^1 + \lambda_2 \omega^2 + \lambda_3 \omega^3 + \lambda^1 \omega_1^3 + \lambda^2 \omega_2^3 + \lambda^3 \omega_3^3 = 0,$$

постоянного ранга равного единице. Мы предполагаем, что элемент, состоящий из точки и направляющего ковектора $\underline{e}^3$ (то есть ковектора, определённого с точностью до произвольного ненулевого множителя), зависит от 5 параметров, то есть

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \neq 0. \quad (4.1)$$

Тогда последнее уравнение переписывается в виде

$$\omega_3^3 = a_i \omega^i + a^1 \omega_1^3 + a^2 \omega_2^3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

Требуем полной интегрируемости уравнения (4.2), для чего присоединяем к нему результат внешнего дифференцирования:

$$\left(da_i - a_j \omega_i^j \right) \wedge \omega^i + \left(da^\alpha + a^\beta \omega_\beta^\alpha - a^\alpha \omega_3^\alpha - \omega_3^\alpha \right) \wedge \omega_\alpha^3 = 0, \quad (4.3)$$

$$i = 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2.$$

Разрешая последнее уравнение по лемме Картана и полагая $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = \omega_1^3 = \omega_2^3 = 0$, получим в обозначениях [4] соотношения

$$\delta a_i = a_\alpha \pi_i^\alpha, \quad \delta a^\alpha = \pi_3^\alpha - a^\beta \pi_\beta^\alpha, \quad i = 1, 2, 3; \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (4.4)$$

Эти соотношения позволяют провести частичную специализацию репера

$$a^1 = a^2 = 0, \quad \pi_3^1 = \pi_3^2 = 0. \quad (4.5)$$

Смысл проведённой частичной специализации, как видно из (4.2) и (3.1), в том, что вследствие её имеем

$$(d\bar{M} = \bar{0}) \Rightarrow (\langle d\bar{e}_3, \underline{e}^3 \rangle = 0).$$

Уравнение (4.3) теперь принимает вид

$$\left(da_i - a_j \omega_i^j \right) \wedge \omega^i - \omega_3^\alpha \wedge \omega_\alpha^3 = 0,$$

$$i, j = 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2.$$

Вследствие выбора базисных форм и частичной специализации репера можно записать, что

$$dx = (d\bar{M}, d\underline{e}^3) = \omega^i (\bar{e}_i, -a_i \underline{e}^3) - \omega_\alpha^3 (\bar{0}, \underline{e}^\alpha), \quad i = 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.6)$$

Нетрудно заметить, что базис касательной плоскости составляют векторы

$$\underline{e}_i = (\bar{e}_i, -a_i \underline{e}^3), \quad i = 1, 2, 3, \quad \underline{e}_4 \equiv \underline{e}^1 = (\bar{0}, \underline{e}^1), \quad \underline{e}_5 \equiv \underline{e}^2 = (\bar{0}, \underline{e}^2).$$

Теперь в исходном аффинном пространстве A_3 деривационные формулы репера имеют вид

$$d\bar{M} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_3 = \omega_3^\alpha \bar{e}_\alpha + a_i \omega^i \bar{e}_3,$$

$$d\underline{e}^\alpha = -\omega_i^\alpha \underline{e}^i, \quad d\underline{e}^3 = -\omega_\alpha^3 \underline{e}^\alpha - a_i \omega^i \underline{e}^3,$$

$$i = 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2.$$

Построим геометрическую интерпретацию касательной гиперплоскости, основываясь на (4.8). Зафиксировав параметры – как базовые так и слоевые – получим неподвижный репер в пространстве D_6 . Именно,

$$\underline{x}_0 = (\bar{M}_0, \underline{e}_0^3), \quad \underline{\varepsilon}_i = (\bar{e}_i^0, \underline{0}), \quad \underline{\varepsilon}^i = (\bar{0}, \underline{e}_i^1), \quad i = 1, 2, 3.$$

Параметрические уравнения касательной гиперплоскости (при помещении нового начала координат O в точку M_0) имеют вид

$$(\bar{R}, \underline{y}) = (\bar{O}, \underline{e}_0^3) + u^i (\bar{e}_i^0, -a_i^0 \underline{e}_0^3) + v_\alpha (\bar{0}, \underline{e}_0^\alpha),$$

$$i = 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2.$$

Здесь a_i^0 – значения коэффициентов a_i при фиксации всех параметров. Соответственно в пространстве A_3 получим параметрические уравнения

$$\bar{R} = u^i \bar{e}_i^0, \quad \underline{y} = -v_1 \underline{e}_0^1 - v_2 \underline{e}_0^2 + (1 - a_i^0 u^i) \underline{e}_0^3, \quad i = 1, 2, 3.$$

Эти уравнения задают отображение: каждой точке $\bar{R} = u^i \bar{e}_i^0$ сопоставляется 2-семейство ковекторов (параметры – v_1, v_2), чьи вторые плоскости имеют уравнения

$$v_1 x^1 + v_2 x^2 + (a_i^0 u^i - 1) x^3 + 1 = 0.$$

Данные плоскости образуют связку с центром

$$C \left(0, 0, \frac{1}{1 - a_i^0 u^i} \right).$$

При этом точкам $\bar{R} = x^i \bar{e}_i^0$, принадлежащим плоскости $\pi(\lambda)$, заданной уравнением

$$a_1^0 x^1 + a_2^0 x^2 + a_3^0 x^3 = \lambda = \text{const},$$

отвечает одна и та же точка $C(\lambda) = \left(0, 0, \frac{1}{1 - \lambda} \right)$. Указанное соответствие и даёт описание касательной гиперплоскости.

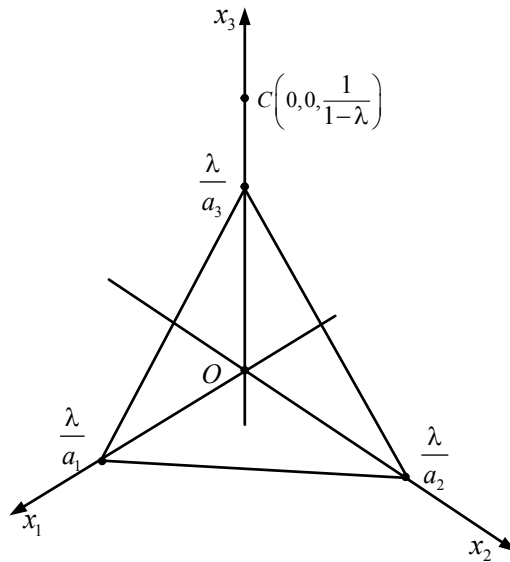


Рис. 2. Вторая плоскость из интерпретации касательной гиперплоскости

Соотношения (4.4) после частичной специализации репера принимают вид

$$\delta a_\beta = a_\alpha \pi_\beta^\alpha, \quad \delta a_3 = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Величина a_3 есть инвариант. Для его характеристики рассмотрим распределение

$$\omega^1 = \omega^2 = 0,$$

в общем случае неинтегрируемое. Вдоль этого подмногообразия имеем соотношения

$$\langle d\bar{e}_3, \underline{e}^3 \rangle = a_3 \langle d\bar{M}, \underline{e}^3 \rangle.$$

Матрица Грама для базиса касательной плоскости имеет вид

$$\Gamma = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -2a_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$

Заметим, что ранг матрицы Γ равен 5 при $a_3 \neq 0$ и 4 при $a_3 = 0$, других же значений он не принимает.

Квадратичная метрика пространства D_6 индуцирует нормаль гиперповерхности, натянутую на вектор

$$\mathbf{n} = (\bar{e}_3, a_i \underline{e}^i). \quad (4.8)$$

Мы, однако, нормализуем нашу поверхность вектором

$$\mathbf{e}_6 \equiv \mathbf{e}^3 = (\bar{0}, \underline{e}^3).$$

В репере (3.4) имеем соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -a_1), \\ \mathbf{e}_2 &= (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -a_2), \\ \mathbf{e}_3 &= (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -a_3), \\ \mathbf{e}_4 &= (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0), \\ \mathbf{e}_5 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0), \\ \mathbf{e}_6 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1). \end{aligned}$$

Теперь (4.8) вместе с результатом дифференцирования векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6$ приводят к деривационным формулам

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3 - \omega_1^3 \mathbf{e}^1 - \omega_2^3 \mathbf{e}^2, \\ d\mathbf{e}_i &= \omega_i^j \mathbf{e}_j + a_i \omega_\alpha^3 \mathbf{e}^\alpha - \Delta a_i \mathbf{e}^3, \\ d\mathbf{e}^i &= -\omega_i^j \mathbf{e}^j, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$\Delta a_i = da_i - a_j \omega_i^j - a_i \omega_3^3. \quad (4.10)$$

Для дальнейшего полезна формула

$$\begin{aligned} d(\Delta a_i) &= -da_j \wedge \omega_i^j - a_k \omega_i^j \wedge \omega_j^k - da_i \wedge \omega_3^3 - a_i \omega_3^j \wedge \omega_j^3 = \\ &= \omega_i^j \wedge \Delta a_j + \omega_3^3 \wedge \Delta a_i + a_i \omega_\alpha^3 \wedge \omega_3^\alpha, \\ &\quad i, j = 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Введём в рассмотрение вектор-строку из пфаффовых форм

$$\theta = (\omega^1 \ \omega^2 \ \omega^3 \ -\omega_1^3 \ -\omega_2^3). \quad (4.12)$$

Матрица коэффициентов деривационных формул (4.9) имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & a_1\omega_1^3 & a_1\omega_2^3 & -\Delta a_1 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 & a_2\omega_1^3 & a_2\omega_2^3 & -\Delta a_2 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 & a_3\omega_1^3 & a_3\omega_2^3 & -\Delta a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^1 & -\omega_2^1 & -\omega_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & -\omega_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & -\omega_3^3 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Как видно из (4.12) и (4.13), вторая квадратичная форма гиперповерхности есть форма

$$II = -\omega^1 \Delta a_1 - \omega^2 \Delta a_2 - \omega^3 \Delta a_3 + \omega_3^1 \omega_1^3 + \omega_3^2 \omega_2^3. \quad (4.14)$$

Форму-строку (4.12) рассматриваем как базовую. Тогда слоевая форма есть матричнозначная форма

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & a_1\omega_1^3 & a_1\omega_2^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 & a_2\omega_1^3 & a_2\omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 & a_3\omega_1^3 & a_3\omega_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^1 & -\omega_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & -\omega_2^2 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Предложение. Матричнозначные формы (4.12) и (4.15) определяют на нашей гиперповерхности аффинную связность.

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что

$$d\theta - \theta \wedge \Omega = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0),$$

$$d\Omega - \Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (da_1 - a_i\omega_1^i - a_1\omega_3^3) \wedge \omega_1^3 & (da_1 - a_i\omega_1^i - a_1\omega_3^3) \wedge \omega_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & (da_2 - a_i\omega_2^i - a_2\omega_3^3) \wedge \omega_1^3 & (da_2 - a_i\omega_2^i - a_2\omega_3^3) \wedge \omega_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & (da_3 - a_i\omega_3^i - a_3\omega_3^3) \wedge \omega_1^3 & (da_3 - a_i\omega_3^i - a_3\omega_3^3) \wedge \omega_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_3^1 \wedge \omega_1^3 & \omega_3^1 \wedge \omega_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_3^2 \wedge \omega_1^3 & \omega_3^2 \wedge \omega_2^3 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Если форма кривизны связности (4.16) нулевая, то

$$\begin{aligned} da_i - a_j\omega_i^j - a_i\omega_3^3 &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \omega_3^1 &= \omega_3^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Внешнее дифференцирование этих соотношений приводит к тождествам. Матричнозначная форма (4.13) при выполнении условий (4.17) принимает вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & a_1\omega_1^3 & a_1\omega_2^3 & 0 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 & a_2\omega_1^3 & a_2\omega_2^3 & 0 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 & a_3\omega_1^3 & a_3\omega_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^1 & -\omega_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & -\omega_3^3 \end{pmatrix}.$$

Наша гиперповерхность в этом случае есть гиперплоскость.

Определение. Связность ∇ , определяемая формами θ и Ω , называем *естественной связностью*.

Решим вопрос о геодезических линиях естественной связности, следуя [8]. Линия $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ называется геодезической, если параллельно переносится вектор

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\theta^I \mathbf{e}_I}{dt} = \left(\frac{\theta^I}{dt} \right) \mathbf{e}_I, \quad I = 1, \dots, 5.$$

Условие параллельного переноса имеет вид $\nabla \left(\frac{\theta^I}{dt} \right) = \varphi \frac{\theta^I}{dt}$, или, иначе, $\Delta \theta^I = \varphi \theta^I$.

Окончательно уравнения геодезических запишем в виде

$$d\theta^I + \theta^J \Omega_J^I = \varphi \theta^I, \quad I, J = 1, \dots, 5, \quad (4.18)$$

где φ – некоторая форма Пфаффа. Дифференцирование в (4.18) обыкновенное.

Учитывая (4.12) и (4.15), приводим уравнения геодезических к виду

$$\begin{aligned} d\omega^i + \omega^j \omega_j^i &= \varphi \omega^i, \\ -d\omega_\alpha^3 + \omega_\alpha^i \omega_i^3 &= -\varphi \omega_\alpha^3, \\ i, j &= 1, 2, 3; \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Для прояснения геометрического смысла полученных уравнений заметим, что

$$\begin{aligned} d^2 \overline{M} &= (d\omega^i + \omega^j \omega_j^i) \overline{e}_i, \\ d^2 \underline{e}^3 &= (-d\omega_i^3 + \omega_j^3 \omega_i^j) \underline{e}^i, \\ i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Если выполнено (4.19), и только в этом случае, (4.20) принимает вид

$$\begin{aligned} d^2 \overline{M} &= \varphi d\overline{M}, \\ d^2 \underline{e}^3 &= -\varphi d\underline{e}^3 + (-d\omega_3^3 + \omega_i^3 \omega_3^i + \varphi \omega_3^3) \underline{e}^3, \\ i &= 1, 2, 3; \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Предложение 1. Линия на гиперповерхности пространства D_6 является ∇ -геодезической тогда и только тогда, когда вдоль неё выполнены следующие условия:

- 1) точка M пробегает прямую;
- 2) вектор $[d\underline{e}^3, \underline{e}^3]$ сохраняет постоянное направление;
- 3) $d < d\overline{M}, d\underline{e}^3 > \equiv 0 \pmod{< d\overline{M}, \underline{e}^3 >}$.

Доказательство. Перепишем (4.21) следующим образом:

$$\begin{aligned} d^2 \overline{M} &= \varphi d\overline{M}, \quad d^2 \underline{e}^3 = -\lambda d\underline{e}^3 + L \underline{e}^3, \\ \varphi &= \lambda. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь $L = -d\omega_3^3 + \omega_i^3 \omega_3^i + \varphi \omega_3^3$.

Пункт 1) сомнений не вызывает, как и пункт 2). Для доказательства пункта 3) заметим, что согласно (4.22)

$$d < d\overline{M}, d\overline{e}^3 > = (\varphi - \lambda) < d\overline{M}, d\overline{e} > + L < d\overline{M}, \overline{e}^3 > ,$$

откуда и следует справедливость утверждения.

5. Связность Леви-Чивита для гиперповерхности общего вида ($a_3 \neq 0$)

Ковариантное дифференцирование метрического тензора приводит к равенству

$$\nabla g = dg - \Omega g - (\Omega g)^T = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \Delta a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta a_2 & 0 & 0 \\ \Delta a_1 & \Delta a_2 & 2\Delta a_3 & -\omega_3^1 & -\omega_3^2 \\ 0 & 0 & -\omega_3^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_3^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Обозначим $\overline{\Omega}$ – слоевую форму, которая определит для метрического тензора g связность Леви-Чивита. Тогда разность форм $\overline{\Omega}$ и Ω , как показывает непосредственный подсчёт, есть форма аффинной деформации

$$B = \frac{1}{2a_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \Delta a_1 & a_1 \Delta a_1 & a_2 \Delta a_1 \\ 0 & 0 & \Delta a_2 & a_1 \Delta a_2 & a_2 \Delta a_2 \\ 0 & 0 & \Delta a_3 & a_1 \Delta a_3 & a_2 \Delta a_3 \\ 0 & 0 & \omega_3^1 & a_1 \omega_3^1 & a_2 \omega_3^1 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & a_1 \omega_3^2 & a_2 \omega_3^2 \end{vmatrix}.$$

Соответственно искомая слоевая форма имеет вид

$$\overline{\Omega} = \begin{vmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 + \frac{\Delta a_1}{2a_3} & a_1 \omega_1^3 + \frac{a_1 \Delta a_1}{2a_3} & a_1 \omega_2^3 + \frac{a_2 \Delta a_1}{2a_3} \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 + \frac{\Delta a_2}{2a_3} & a_2 \omega_1^3 + \frac{a_1 \Delta a_2}{2a_3} & a_2 \omega_2^3 + \frac{a_2 \Delta a_2}{2a_3} \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 + \frac{\Delta a_3}{2a_3} & a_3 \omega_1^3 + \frac{a_1 \Delta a_3}{2a_3} & a_3 \omega_2^3 + \frac{a_2 \Delta a_3}{2a_3} \\ 0 & 0 & \frac{\omega_3^1}{2a_3} & \frac{a_1 \omega_3^1}{2a_3} - \omega_1^1 & \frac{a_2 \omega_3^1}{2a_3} - \omega_2^1 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_3^2}{2a_3} & \frac{a_1 \omega_3^2}{2a_3} - \omega_1^2 & \frac{a_2 \omega_3^2}{2a_3} - \omega_2^2 \end{vmatrix}. \quad (5.1)$$

Обозначим $\overline{\nabla}$ – оператор ковариантного дифференцирования для связности Леви-Чивита. Тогда, используя (5.1) и (4.14) и действуя так же, как и для естественной связности, можем записать уравнение геодезических в виде

$$\begin{aligned} d\omega^1 + \omega^i \omega_i^1 &= \zeta \omega^1, & d\omega^2 + \omega^i \omega_i^2 &= \zeta \omega^2, & d\omega^3 + \omega^i \omega_i^3 &= \zeta \omega^3 + \frac{\mathbf{II}}{2a_3}, \\ -d\omega_1^3 + \omega_1^\alpha \omega_\alpha^3 &= -\zeta \omega_1^3 + \frac{a_1}{2a_3} \mathbf{II}, & -d\omega_2^3 + \omega_2^\alpha \omega_\alpha^3 &= -\zeta \omega_2^3 + \frac{a_2}{2a_3} \mathbf{II}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где ζ – некоторая пфаффова форма. Дифференцирование в этих формулах и всех последующих – обычное.

Для прояснения геометрического смысла полученных уравнений заметим, что из (4.9) следует

$$\begin{aligned} d^2 \mathbf{x} = d^2 (\overline{M}, \underline{e}^3) = & (d\omega^1 + \omega^i \omega_i^1) (\overline{e}_1, -a_1 \underline{e}^3) + (d\omega^2 + \omega^i \omega_i^2) (\overline{e}_2, -a_2 \underline{e}^3) + \\ & + (d\omega^3 + \omega^i \omega_i^3) (\overline{e}_3, -a_3 \underline{e}^3) + (-d\omega_1^3 + \omega_1^i \omega_i^3) (\overline{0}, \underline{e}^1) + \\ & + (-d\omega_2^3 + \omega_2^i \omega_i^3) (\overline{0}, \underline{e}^2) + \Pi (\overline{0}, \underline{e}^3). \end{aligned}$$

При выполнении условий (5.2) получим соотношение

$$d^2 \mathbf{x} = \varsigma d\mathbf{x} + \frac{\Pi}{2a_3} \mathbf{n}.$$

Развернутая запись последнего соотношения

$$d^2 (\overline{M}, \underline{e}^3) = \varsigma d (\overline{M}, \underline{e}^3) + \frac{\Pi}{2a_3} (\overline{e}_3, a_i \underline{e}^i).$$

Покомпонентная запись последнего уравнения равносильна следующим уравнениям в пространстве A_3 :

$$\begin{aligned} d^2 \overline{M} &= \varsigma d\overline{M} + \frac{\Pi}{2a_3} \overline{e}_3, \\ d^2 \underline{e}^3 &= \varsigma d\underline{e}^3 + \frac{\Pi}{2a_3} (a_1 \underline{e}^1 + a_2 \underline{e}^2 + a_3 \underline{e}^3). \end{aligned}$$

Исключение пфаффовой формы ς приводит к соотношениям, необходимо выполняющимся вдоль геодезических:

$$\begin{aligned} (d\overline{M}, d\overline{e}_3, \overline{e}_3) \left(d^2 \overline{M} - \frac{\Pi}{2a_3} \overline{e}_3 \right) &= (d^2 \overline{M}, d\overline{e}_3, \overline{e}_3) d\overline{M}, \\ (d\overline{M}, d\overline{e}_3, \overline{e}_3) \left(d^2 \underline{e}^3 - \frac{\Pi}{2a_3} a_i \underline{e}^i \right) &= (d^2 \overline{M}, d\overline{e}_3, \overline{e}_3) d\underline{e}^3. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Для завершения дополнения характеристики геодезических линий отметим, что ковектор $a_i \underline{e}^i$ есть ковекторная компонента вектора нормали $\mathbf{n} = (\overline{e}_3, a_i \underline{e}^i)$ гиперповерхности (введена в (4.8)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970. 528 с.
2. Бухтяк М.С. Естественная связность на гиперповерхности пространства B_6 // Геом. сб. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. Вып. 31. С. 51–57.
3. Бухтяк М.С. Об одном шестимерном пространстве // Геом. сб. Томск, 1982. Вып. 22. С. 51–61.
4. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 432 с.
5. Схоутен И.А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.-Л.: ГОНТИ, 1939. 181 с.
6. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2005. 303 с.

7. Бухтяк М.С. Интерпретация нуль-пар трехмерного центроаффинного пространства // Исследования по математическому анализу и алгебре. Вып. 3. Томск: ТГУ, 2001. С. 39–45.
8. Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин: Калининский гос-университет, 1977. 83 с.

Статья поступила 24.09.2012 г.

Bukhtyak M. S. ON A HYPERSURFACE IN THE SPACE OF APPLIED COVECTORS

The present paper continues a series of the author's publications devoted to immersions of various manifolds into point-vector spaces (see examples in the list of references [2,3,7]). A six-dimensional point-vector space D_6 is constructed for the original three-dimensional affine space. A point of the space is an applied covector and a vector is an ordered couple composed of a vector and a covector. A hypersurface of the obtained space contains pseudo-Riemannian metrics induced by the intrinsic metrics of space D_6 . A connection of the hypersurface called natural has been built, as well as the Levi-Civita connection. Geodesic lines of both connections are examined (for the first one, up to the full characterization).

Keywords: covector, pseudo-Riemannian space, Levi-Civita connection, geodesic lines.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Tomsk State University)

E-mail: bukhtyakm@mail.ru

УДК 512.541

С.Я. Гриншпон, И.Э. Гриншпон

**АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ, НОРМАЛЬНО
ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕСЯ СВОИМИ ГОЛОМОРФАМИ¹**

Исследуются абелевы группы без кручения, разложимые в прямые суммы однородных групп, которые нормально определяются своими голоморфами. Изучаются также свойства нормальных абелевых подгрупп голоморфов абелевых групп без кручения.

Ключевые слова: голоморф, почти голоморфно изоморфные группы, вполне разложимая группа, однородная группа, тип группы.

Пусть G – абелева группа, $\Gamma(G)$ – ее голоморф, то есть полупрямое расширение группы G с помощью группы ее автоморфизмов $\text{Aut}(G)$. Для групповой операции в группе $\text{Aut}(G)$ пользуемся мультипликативной записью, а для групповых операций в G и $\Gamma(G)$ – аддитивной записью. Группу $\Gamma(G)$ можно рассматривать как множество всех упорядоченных пар (g, φ) , где $g \in G$, $\varphi \in \text{Aut}(G)$. Групповая операция в $\Gamma(G)$ задается по правилу: $(g, \varphi) + (h, \psi) = (g + \varphi h, \varphi\psi)$ для любых $(g, \varphi), (h, \psi) \in \Gamma(G)$. Нейтральным элементом в $\Gamma(G)$ является элемент $(0, \varepsilon)$ (ε – тождественный автоморфизм), а элементом, противоположным элементу (g, φ) , – элемент $(-\varphi^{-1}g, \varphi^{-1})$. Элементы вида (g, ε) образуют в голоморфе $\Gamma(G)$ нормальную подгруппу, изоморфную группе G , а элементы вида $(0, \varphi)$ – подгруппу, изоморфную группе $\text{Aut}(G)$. Будем отождествлять эти подгруппы с группами G и $\text{Aut}(G)$ соответственно. Понятно, что $G \cap \text{Aut}(G) = \{(0, \varepsilon)\}$. Часто вместо записи элементов группы $\Gamma(G)$ в виде (g, ε) и $(0, \varphi)$ будем просто писать g и φ соответственно.

Заметим, что если G – абелева группа, то она является максимальной абелевой подгруппой своего голоморфа $\Gamma(G)$. Действительно, если допустить существование абелевой подгруппы G_1 голоморфа $\Gamma(G)$ такой, что $G \subset G_1$ и $G \neq G_1$, то в G_1 есть элемент (g, σ) , не принадлежащий G , а, значит, $\sigma \neq \varepsilon$. Тогда

$$(-g, \varepsilon) + (g, \sigma) = (0, \sigma) \in G_1.$$

В силу коммутативности G_1 имеем $(a, \varepsilon) + (0, \sigma) = (0, \sigma) + (a, \varepsilon)$ для любого элемента $a \in G$, то есть $\sigma a = a$ и, значит, $\sigma = \varepsilon$. Получили противоречие. Итак, G – максимальная абелева подгруппа своего голоморфа.

Отметим также, что если H – нормальная абелева подгруппа группы $\Gamma(G)$, H_1, Φ_1 – соответственно множества первых, вторых компонент элементов группы H , то H_1 – характеристическая подгруппа группы G (см. [1]), Φ_1 – нормальная подгруппа в $\text{Aut}(G)$.

В настоящей статье рассматриваются вопросы, связанные с нормальной определяемостью абелевых групп без кручения из некоторых классов своими голоморфами.

¹ Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями»; работа выполнена также в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

Две группы называются *голоморфно изоморфными*, если голоморфы этих групп изоморфны. Говорят, что группа A *определяется своим голоморфом* в некотором классе групп $\mathfrak{K}$, если любая группа B из этого класса, голоморфно изоморфная группе A , изоморфна группе A . Известны примеры неизоморфных конечных некоммутативных групп, голоморфы которых изоморфны [2]. В [1] В. Миллс показал, что всякая конечно порожденная абелева группа определяется своим голоморфом в классе всех конечно порожденных абелевых групп. Ряд интересных результатов о свойствах голоморфов абелевых групп и об определяемости абелевых групп своими голоморфами получен И. Х. Беккером [3–8]. Полезные результаты о голоморфах абелевых групп и голоморфах (аффинных группах) модулей содержатся в [14] и [15].

Обобщением понятия голоморфного изоморфизма является понятие почти голоморфного изоморфизма. Группы A и B называются *почти голоморфно изоморфными*, если каждая из них изоморфна нормальной подгруппе голоморфа другой группы. Понятно, что если две группы являются голоморфно изоморфными, то они почти голоморфно изоморфны. Обратное, вообще говоря, неверно. Почти голоморфно изоморфные конечно порожденные абелевы группы исследовались в работе В. Миллса [2]. Почти голоморфно изоморфные абелевы p -группы изучались в работах [8] и [9]. Отметим, что если в некотором классе групп $\mathfrak{K}$ из почти голоморфного изоморфизма двух групп следует их изоморфизм, то всякая группа из класса $\mathfrak{K}$ определяется своим голоморфом в этом классе.

Будем говорить, что группа G *нормально определяется в классе $\mathfrak{K}$ своим голоморфом*, если для любой группы H из этого класса из почти голоморфного изоморфизма групп G и H следует изоморфизм самих групп G и H .

Важную роль при изучении голоморфов абелевых групп играют нормальные абелевы подгруппы голоморфов. Справедливы следующие результаты.

Лемма 1 [10]. Если S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$, $(a, \sigma) \in S, g \in G$, то

$$\sigma a - a \in S, (2a, \varepsilon) \in S, (0, \sigma^2) \in S; \quad (1)$$

$$\sigma g - g \in S; \quad (2)$$

$$\sigma(\sigma g - g) = \sigma g - g; \quad (3)$$

$$\sigma^n g = g + n(\sigma g - g); \quad (4)$$

$$n(a, \sigma) = \left(na + \frac{n(n-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^n \right); \quad (5)$$

$$2(\sigma a - a) = 0. \quad (6)$$

Лемма 2. Пусть S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ абелевой группы без кручения G , S_1 – множество первых компонент элементов группы S . Справедливы следующие утверждения:

1) S – группа без кручения;

2) если $S \neq 0$, то $S_1 \neq 0$.

Доказательство. 1) Пусть $(a, \sigma) \in S$ и $n(a, \sigma) = (0, \varepsilon)$ для некоторого натурального числа n . Имеем (формула (5))

$$n(a, \sigma) = \left(na + \frac{n(n-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^n \right).$$

Так как G – группа без кручения, то из равенства (6) следует, что $\sigma a - a = 0$ и формула (5) принимает вид

$$n(a, \sigma) = (na, \sigma^n). \quad (7)$$

Итак, $(na, \sigma^n) = (0, \varepsilon)$. Отсюда следует, что $na = 0$ и $\sigma^n = \varepsilon$. Значит, $a = 0$, так как G – группа без кручения. Покажем, что $\sigma = \varepsilon$. По формуле (4) $\sigma^n g = g + n(\sigma g - g)$ для любого $g \in G$. Учитывая, что $\sigma^n = \varepsilon$, получаем $g = g + n(\sigma g - g)$, то есть $n(\sigma g - g) = 0$. Так как G – группа без кручения, то $\sigma g - g = 0$ и, следовательно, $\sigma = \varepsilon$.

2) Пусть $(a, \sigma) \in S$ и $(a, \sigma) \neq (0, \varepsilon)$. Если $\sigma \neq \varepsilon$, то существует элемент $g \in G$, такой, что $\sigma g - g \neq 0$. Применяя формулу (2), получим $\sigma g - g \in S$. Значит, $\sigma g - g \in S_1$ и $S_1 \neq \emptyset$. Если же $\sigma = \varepsilon$, то $a \neq 0$ и S_1 также отлична от нуля. ■

Рассмотрим связи между типами элементов почти голоморфно изоморфных абелевых групп без кручения.

Напомним некоторые обозначения и термины из теории абелевых групп без кручения.

Пусть A – абелева группа, $a \in A$. Наибольшее неотрицательное целое число k , для которого уравнение $p^k x = a$ имеет решение, называется p -высотой элемента a в группе A (обозначение: $h_p^{(A)}(a)$ или $h_p(a)$). Если уравнение $p^k x = a$ имеет решение при любом натуральном k , то a называется элементом бесконечной p -высоты, то есть $h_p(a) = \infty$.

Пусть X – множество всех последовательностей вида $\chi = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$, где k_n – целое неотрицательное число или символ ∞ ($i \in \mathbb{N}$). Такие последовательности будем называть характеристиками.

В множестве X естественным образом вводится частичный порядок, а именно, $(k_1, k_2, \dots, k_n, \dots) \leq (l_1, l_2, \dots, l_n, \dots)$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \mathbb{N}$ выполняется условие $k_i \leq l_i$. Относительно этого частичного порядка множество X является полной решеткой.

Пусть $P = (p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ – множество всех простых чисел, занумерованных в порядке возрастания. Если A – абелева группа без кручения и $a \in A$, то характеристика $\chi_A(a)$ (или $\chi(a)$) элемента a в группе A – это такая характеристика $\chi = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$, в которой каждое k_n есть p_n -высота $h_{p_n}^A(a)$ элемента a в группе A ([13, с. 129]). Заметим, что, согласно определению, характеристика нулевого элемента – это последовательность $(\infty, \dots, \infty, \dots)$.

Две характеристики $\chi_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$ и $\chi_2 = (l_1, l_2, \dots, l_n, \dots)$ считаются эквивалентными в том и только в том случае, когда множество $M = \{n \in \mathbb{N} \mid k_n \neq l_n\}$ конечно, причем, если $k_n \neq l_n$, то $k_n \neq \infty$ и $l_n \neq \infty$.

Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом*. Если характеристика элемента a абелевой группы без кручения A принадлежит типу t , то говорят, что элемент a имеет тип t (что записывается следующим образом: $t_A(a) = t$ или $t(a) = t$, если понятно, о какой группе A идет речь).

Тип t называется p_n -делимым ($p_n \in P$), если для всякой характеристики $\chi = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$, принадлежащей типу t , имеем $k_n = \infty$.

Множество типов будем рассматривать как частично упорядоченное множество относительно естественного отношения порядка (то есть $t_1 \leq t_2$ тогда и только

тогда, когда существуют характеристики χ_1 и χ_2 , принадлежащие типам t_1 и t_2 , соответственно такие, что $\chi_1 \leq \chi_2$). Частично упорядоченное множество всех типов является полной решеткой.

Абелева группа без кручения, все ненулевые элементы которой имеют один и тот же тип t , называется *однородной* ([13, с. 130, 131]). Чтобы подчеркнуть, что все ненулевые элементы однородной группы A имеют фиксированный тип t , будем говорить, что A — *однородная группа типа t* , и записывать это так: $t(A) = t$. Очевидно, что всякая группа без кручения ранга 1 является однородной.

Для абелевой группы без кручения A обозначим через $T(A)$ множество всех типов элементов группы A .

Лемма 3. Пусть S — нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ абелевой группы без кручения G . Тогда для любого типа $t \in T(S)$ существует тип $t' \in T(G)$, такой, что $t' \geq t$.

Доказательство. Пусть тип t принадлежит множеству типов группы S . Тогда существует ненулевой элемент $(a, \sigma) \in S$, такой, что его характеристика принадлежит типу t ($\chi((a, \sigma)) \in t$). Эта характеристика имеет вид

$$\chi((a, \sigma)) = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots).$$

Пусть $a \neq 0$. Обозначим его тип через t' . Если $k_n < \infty$, то существует элемент $(x_n, \eta_n) \in S$, такой, что $p_n^{k_n}(x_n, \eta_n) = (a, \sigma)$. Тогда, учитывая формулу (7), имеем $(p_n^{k_n}x_n, \eta_n^{p_n^{k_n}}) = (a, \sigma)$. Получили, что $p_n^{k_n}x_n = a$. Значит, уравнение $a = p_n^{k_n}x_n$ разрешимо в группе G . Поэтому $h_{p_n}^{(G)}(a) \geq k_n$. Если $k_n = \infty$, то для любого натурального числа m существует такой элемент $(y_m, \xi_m) \in S$, что уравнение $p_n^m(y_m, \xi_m) = (a, \sigma)$ разрешимо в S , а значит, уравнение $p_n^m y_m = a$ разрешимо в G . Поэтому $h_{p_n}^{(G)}(a) = \infty$.

Таким образом, $\chi_{(G)}(a) \geq \chi_{(S)}((a, \sigma))$ и, значит, $t(a) = t' \geq t$.

Пусть $a = 0$. Тогда $\sigma \neq \varepsilon$. Если $k_n < \infty$, то существует элемент $(0, \eta_n) \in S$, такой, что $p_n^{k_n}(0, \eta_n) = (0, \sigma)$ или $\eta_n^{p_n^{k_n}} = \sigma$. Так как $\sigma \neq \varepsilon$, то существует элемент $g \in G$, такой, что $\sigma g \neq g$. Согласно формуле (4), имеем $\sigma g = \eta_n^{p_n^{k_n}} g = g + p_n^{k_n}(\eta_n g - g)$. Отсюда следует, что $\sigma g - g = p_n^{k_n}(\eta_n g - g)$. Уравнение $\sigma g - g = p_n^{k_n} x$ разрешимо в G . Значит, $h_{p_n}^{(G)}(\sigma g - g) \geq k_n$.

Если $k_n = \infty$, то p_n -высота $h_{p_n}^{(G)}(\sigma g - g) = \infty$.

Таким образом, $\chi_{(G)}(\sigma g - g) \geq \chi_{(S)}((0, \sigma))$. Следовательно, $t(\sigma g - g) = t' \geq t$. ■

Пусть S_1 — множество всех первых компонент элементов подгруппы S из леммы 3. Имеем $\sigma g - g \in S_1$ для каждого элемента $g \in G$, если $(a, \sigma) \in S$. Тогда из доказательства леммы 3 получаем такое утверждение.

Предложение 4. Пусть S — нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ абелевой группы без кручения G и S_1 — множество первых компонент элементов группы S . Тогда для любого типа $t \in T(S)$ существует тип $t' \in T(S_1)$, такой, что $t' \geq t$.

Теорема 5. Пусть G и H – почти голоморфно изоморфные абелевы группы без кручения, G – однородная группа, а группа H обладает свойством: для любых двух ненулевых элементов $b_1, b_2 \in H$, таких, что $t(b_1)$ сравним с $t(b_2)$, имеем $t(b_1) = t(b_2)$. Тогда H – однородная группа и $t(G) = t(H)$.

Доказательство. Пусть тип однородной группы G равен t и пусть тип $t_1 \in T(H)$. Группы G и H – почти голоморфно изоморфны, значит, $H \cong G'$, где G' – нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ и $G \cong H'$, где H' – нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$. Из почти голоморфного изоморфизма групп G и H вытекает, что $t_1 \in T(G')$. Тогда из леммы 3 получаем, что тип t удовлетворяет условию $t \geq t_1$. Так как $G \cong H'$, то $t \in T(H')$. Согласно лемме 2, для типа t существует тип $t_2 \in T(H)$ такой, что $t_2 \geq t$. Получили, что $t_2 \geq t \geq t_1$. Так как $t_1, t_2 \in T(H)$, то существуют элементы $b_1, b_2 \in H$, такие, что $t(b_1) = t_1, t(b_2) = t_2$. Имеем $t(b_2) \geq t(b_1)$, то есть типы элементов b_1 и b_2 сравнимы. Учитывая условие теоремы на типы элементов группы H , получаем $t(b_1) = t(b_2)$, то есть $t_1 = t_2$ и, значит, $t_1 = t$. В силу произвольности выбора типа t_1 получаем, что H – однородная группа и ее тип равен t . ■

Следствие 6. Если G и H – однородные почти голоморфно изоморфные группы, то $t(G) = t(H)$.

Теорема 7. Пусть $G = \bigoplus_{t \in T_1} G_t, H = \bigoplus_{\bar{t} \in T_2} H_{\bar{t}}$, где G_t и $H_{\bar{t}}$ – однородные группы типов t и $\bar{t}$ соответственно, T_1 и T_2 – множества, состоящие из попарно несравнимых типов. Если G и H – почти голоморфно изоморфные группы, то $T_1 = T_2$.

Доказательство. Группы G и H почти голоморфно изоморфны, то есть $G \cong H', H \cong G'$, где G' и H' – нормальные абелевы подгруппы голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно.

Пусть $t_0 \in T_1$. Из почти голоморфного изоморфизма групп G и H следует, что $t_0 \in T(H')$. По лемме 3 существует тип $\bar{t}_0 \in T(H)$, такой, что $\bar{t}_0 \geq t_0$.

Предположим, что $\bar{t}_0 \in T(H) \setminus T_2$. Тогда $\bar{t}_0 = \inf\{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_k\}$, где $\bar{t}_i \in T_2$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Так как типы в T_2 попарно несравнимы, то $\bar{t}_0 \leq \bar{t}_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$.

Имеем $\bar{t}_1 > \bar{t}_0 \geq t_0$. Из почти голоморфного изоморфизма групп G и H вытекает, что $\bar{t}_1 \in T(G')$. По лемме 3 существует тип $t_1 \in T(G)$, такой, что $t_1 \geq \bar{t}_1$.

Возможны 2 случая:

1) Пусть $t_1 \in T_1$. Тогда $t_1 \geq \bar{t}_1 > \bar{t}_0 \geq t_0$, откуда $t_1 > t_0$. Получили, что типы t_0 и t_1 сравнимы. Это противоречит условию теоремы.

2) Пусть $t_1 \in T(G) \setminus T_1$. Тогда $t_1 = \inf\{t_2, t_3, \dots, t_m\}$, где $t_j \in T_1, j = 2, \dots, m$. Аналогично ранее доказанному получаем, что $t_j > t_1$ для всех $j = 2, \dots, m$. Имеем $t_2 > t_1 \geq \bar{t}_1 > \bar{t}_0 \geq t_0$. Типы t_0 и t_2 принадлежат T_1 и сравнимы между собой. Противоречие.

Значит, $\bar{t}_0 \in T_2, \bar{t}_0 \geq t_0$.

Аналогично доказывается, что для типа $\bar{t}_0 \in T_2$ существует тип $t' \in T_1$, такой, что $t' \geq \bar{t}_0$.

Итак, $t' \geq \bar{t}_0 \geq t_0$. Так как типы в T_1 попарно несравнимы, то $t' = t_0$. Значит, $\bar{t}_0 = t_0$ и справедливо включение $T_1 \subset T_2$.

Обратное включение $T_2 \subset T_1$ доказывается аналогично.

Следовательно, $T_1 = T_2$. ■

Рассмотрим теперь делимые части почти голоморфно изоморфных абелевых групп без кручения.

Теорема 8. *Если две абелевы группы почти голоморфно изоморфны и одна из них без кручения, то делимые части этих групп изоморфны.*

Доказательство. Пусть G – абелева группа без кручения, H – почти голоморфно изоморфная ей абелева группа. Тогда $G \cong H'$, $H \cong G'$, где G' и H' – нормальные подгруппы групп $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно. По лемме 2 группа H также группа без кручения.

Покажем, что если одна из групп G или H нередуцированная группа, то и другая группа также нередуцированная.

Обозначим через $D(G)$, $D(H)$, $D(G')$ и $D(H')$ – делимые части соответственно групп G , H , G' и H' , а через $\overline{G}_1$, $\overline{\Phi}$, $\overline{H}_1$ и $\overline{\Psi}$ – множества всех первых, вторых компонент соответственно групп $D(G')$ и $D(H')$.

Пусть G – нередуцированная группа, значит, H' также нередуцированная и $D(H') \neq 0$. Тогда существует $(h, \psi) \in D(H')$, $(h, \psi) \neq (0, \varepsilon)$. Из делимости группы $D(H')$ следует, что для любого натурального числа n существует такой элемент $(a_n, \xi_n) \in D(H')$, что $n(a_n, \xi_n) = (h, \psi)$. Так как H – группа без кручения, то по формуле (7) имеем $n(a_n, \xi_n) = (na_n, \xi_n^n)$, то есть $h = na_n$, $\psi = \xi_n^n$.

Если $h \neq 0$, то группа H – нередуцированная.

Пусть $h = 0$, тогда $\psi \neq \varepsilon$ и $\xi_n^n = \psi \neq \varepsilon$. По лемме 1 для любого элемента $a \in H$ имеем $\psi a - a \in H'$ и существует такой элемент $h_1 \in H$, что $\psi h_1 - h_1 \neq 0$. Из формулы (4) леммы 1 получаем $\xi_n^n h_1 = h_1 + n(\xi_n h_1 - h_1)$ или $\psi h_1 - h_1 = n(\xi_n h_1 - h_1)$. Для ненулевого элемента $\psi h_1 - h_1$ группы без кручения H мы получили, что уравнение $\psi h_1 - h_1 = nx$ разрешимо в этой группе для любого натурального числа n . Это означает, что группа H нередуцированная.

Пусть $(g, \sigma) \in D(G')$, $(g, \sigma) \neq (0, \varepsilon)$. Тогда для всякого натурального числа n существует такой элемент $(b_n, \omega_n) \in D(G')$, что $n(b_n, \omega_n) = (g, \sigma)$, и отсюда следует, что $nb_n = g$ и $\omega_n^n = \sigma$. Значит, $g \in D(G)$ и $\overline{G}_1$ – делимая подгруппа группы $D(G)$.

Аналогично доказывается, что $\overline{H}_1$ делимая подгруппа группы $D(H)$.

Покажем, что группа $D(G')$ разложима в прямую сумму своих подгрупп $\overline{G}_1$ и $\overline{\Phi}$.

Рассмотрим автоморфизм η группы G , действующий следующим образом: $\eta g = 2g$, если $g \in D(G)$, и $\eta g = g$, если $g \in R(G)$ ($G = D(G) \oplus R(G)$). Имеем $(0, \eta) + (2g, \varepsilon) + (0, \eta) = (g, \varepsilon)$, но $(2g, \varepsilon) \in D(G')$. Значит, и $(g, \varepsilon) \in D(G')$. Тогда $(0, \sigma) \in D(G')$. Получаем $D(G') = \overline{G}_1 \oplus \overline{\Phi}$.

Аналогично $D(H') = \overline{H}_1 \oplus \overline{\Psi}$.

$D(G')$ и $D(H')$ – ненулевые нормальные абелевы подгруппы групп $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно. Тогда $\overline{G}_1 \neq 0$, $\overline{H}_1 \neq 0$ (лемма 2). Так как $\overline{G}_1$ и $\overline{H}_1$ – характеристические подгруппы групп G и H , то $\overline{G}_1 = D(G)$ и $\overline{H}_1 = D(H)$.

Учитывая почти голоморфный изоморфизм групп G и H , имеем $D(G) \cong D(H') = \overline{H}_1 \oplus \overline{\Psi} = D(H) \oplus \overline{\Psi}$ и, значит, $r(D(G)) \geq r(D(H))$. С другой стороны, $D(H) \cong D(G') = \overline{G}_1 \oplus \overline{\Phi} = D(G) \oplus \overline{\Phi}$, и отсюда $r(D(H)) \geq r(D(G))$. Следовательно, $r(D(G)) = r(D(H))$, и поэтому $D(G) \cong D(H)$. ■

Теорема 9. Голоморф делимой абелевой группы G без кручения не содержит ненулевых нормальных абелевых подгрупп, отличных от G .

Доказательство. Пусть G' – ненулевая нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ делимой группы без кручения G . Обозначим через $D(G')$ – делимую часть группы G' .

Пусть $(a, \sigma) \in G'$ и $(a, \sigma) \neq (0, \varepsilon)$.

Если $\sigma \neq \varepsilon$, то существует такой элемент $g \in G$, что $\sigma g - g \neq 0$. Для всякого натурального числа n найдется такой элемент g_n , что $ng_n = g$, и, значит, $n(\sigma g_n - g_n) = \sigma g - g$. Так как $\sigma g_n - g_n \in G'$ и $\sigma g - g \in G'$, то $\sigma g - g \in D(G')$.

Если $\sigma = \varepsilon$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим автоморфизм η_n группы G , такой, что $\eta_n h = \frac{h}{n}$ для любого элемента $h \in G$. Тогда $-(0, \eta_n) + (a, \varepsilon) + (0, \eta_n) = (a_n, \varepsilon)$,

где a_n определяется из равенства $na_n = a$. Имеем $(a_n, \varepsilon) \in G'$, значит, $a \in D(G')$.

Получили, что подгруппа $D(G') \neq 0$.

В доказательстве теоремы 8 было установлено, что $D(G') = D(G) \oplus \overline{\Phi}$.

Так как G – делимая группа, то $D(G) = G$ и, значит, $D(G') = G \oplus \overline{\Phi}$. Следовательно, $G \subset G'$. Учитывая, что G – максимальная абелева нормальная подгруппа своего голоморфа, получаем $G = G'$. ■

Из теоремы 9 вытекает такой результат.

Теорема 10. Всякая делимая абелева группа без кручения нормально определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.

Учитывая полученные результаты, в дальнейшем при исследовании нормальной определяемости абелевых групп без кручения будем рассматривать только редуцированные группы.

Отметим, что для абелевых p -групп утверждение, аналогичное теореме 9, уже не имеет места. Голоморф делимой p -группы G может содержать ненулевые нормальные абелевы подгруппы, отличные от G . Такими подгруппами являются, например, подгруппы вида $G[p^k]$, где k – произвольное натуральное число.

Перейдем к рассмотрению почти голоморфно изоморфных вполне разложимых абелевых групп без кручения.

Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ – вполне разложимая абелева группа без кручения ($r(G_i) = 1$ для всякого $i \in I$), $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ – каноническое разложение группы G , где $G_t = \bigoplus_{i \in I(t)} G_i$, $I(t) = \{i \in I \mid t(G_i) = t\}$.

Лемма 11. Если S – характеристическая подгруппа группы G и $S \cap G_{t'} \neq 0$ для некоторого $t' \in T$, то $S \cap G_j \neq 0$ для каждого $j \in I(t')$.

Доказательство. Пусть $S \cap G_{t'} = A$ и a – некоторый ненулевой элемент группы A . Имеем $G = \langle a \rangle^* \oplus G'$ [13, с. 137], $G = G_j \oplus G''$, ($j \in I(t)$). Из теоремы об изоморфизме прямых разложений вполне разложимых групп [13, предложение 86.1] следует $G' \cong G''$. Пусть ω – автоморфизм группы G , отображающий $\langle a \rangle^*$ на G_j и G' на G'' . Получаем $\omega(a) \in G_j$. Следовательно, $S \cap G_j \neq 0$. ■

Сделаем одно замечание о нормальных подгруппах голоморфов абелевых групп без кручения, которое нам понадобится в дальнейшем.

Замечание. Если S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ группы без кручения G , S_1 и Φ_1 – множества первых, вторых компонент элементов групп

ны S соответственно, то $\langle 2S_1, \Phi_1^2 \rangle \subset S$ (лемма 1). Так как S_1 и Φ_1 – абелевы группы без кручения, то $2S_1 \cong S$, $\Phi_1^2 \cong \Phi_1$. Итак, $\langle 2S_1, \Phi_1^2 \rangle = 2S_1 \oplus \Phi_1^2 \cong S_1 \oplus \Phi_1$, то есть группа $S_1 \oplus \Phi_1$ изоморфно вкладывается в группу S .

Теорема 12. Вполне разложимая однородная группа нормально определяется своим голоморфом в классе вполне разложимых однородных групп.

Доказательство. Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ – вполне разложимая однородная группа,

H – почти голоморфно изоморфная ей вполне разложимая однородная группа. Покажем, что $G \cong H$. Имеем $G \cong H'$, $H \cong G'$, где G' и H' – нормальные абелевы подгруппы голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно. По следствию 6 $T(G) = T(H)$. Пусть G_1, H_1, Φ_1, Ψ_1 – множества первых, вторых компонент групп G' и H' соответственно. По лемме 11 $r(G_1) = r(G)$ и $r(H_1) = r(H)$. Так как $G_1 \oplus \Phi_1$ изоморфно вкладывается в группу G' и $G' \cong H$, то $r(H) = r(G') = r(G_1) + r(\Phi_1) \geq r(G_1) = r(G)$. Аналогично получаем, что $r(G) = r(H') = r(H_1) + r(\Psi_1) \geq r(H_1) = r(H)$. Значит, $r(G) = r(H)$, и поэтому $G \cong H$. Следовательно, группа G нормально определяется своим голоморфом в классе вполне разложимых однородных групп. ■

Лемма 13. Пусть $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$, где G_t – однородная абелева группа типа t , T –

некоторое множество попарно несравнимых типов. Тогда для всякого ненулевого элемента $g \in G$ и любого типа $t \in T$, $t(g) \not\asymp t$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $0 \neq g_0 \in G$, $t(g_0) > t_0$ для некоторого $t_0 \in T$. Запишем g_0 в виде $g_0 = g_{t_1} + g_{t_2} + \dots + g_{t_n}$, где $g_{t_i} \neq 0$ – элементы из различных компонент G_{t_i} , и пусть $\chi(g_{t_i}) = \chi_i \in t_i$, $i = \overline{1, n}$, $t_i \in T$. Тогда $\chi(g_0) = \inf_X \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$ и, значит, $t_0 < t(g_0) < t_1$. Итак, получили $t_1 > t_0$, где $t_0, t_1 \in T$, что невозможно. ■

Обозначим через $\mathfrak{R}$ класс вполне разложимых абелевых групп без кручения с попарно несравнимыми типами прямых слагаемых их канонических разложений.

Теорема 14. Всякая группа из класса $\mathfrak{R}$ нормально определяется своим голоморфом в этом классе.

Доказательство. Пусть $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ – некоторая группа из класса $\mathfrak{R}$,

$H = \bigoplus_{t' \in T'} H_{t'}$ – произвольная группа из этого класса почти голоморфно изоморфная группе G . Через G_t и $H_{t'}$ обозначены однородные вполне разложимые прямые слагаемые типов t и t' групп G и H соответственно. T и T' – некоторые множества, состоящие из попарно несравнимых типов. Следовательно, $T = T'$ согласно теореме 7.

Пусть $t_0 \in T$. Имеем $G \cong H'$, $H \cong G'$, где G' и H' – нормальные абелевы подгруппы голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно. Обозначим через H_1, Ψ_1 – множества первых, вторых компонент элементов группы H' . В группе H_1 найдется элемент $h_1 \neq 0$, такой, что $t_{H_1}(h_1) \geq t_0$ (предложение 4). Если бы $t_{H_1}(h_1) > t_0$, то $t_H(h_1) > t_0$, чего не может быть в силу леммы 13. Значит, $t_{H_1}(h_1) = t_0$, то есть $t_0 \in T(H_1)$.

Покажем, что если $h \in H_1$ и $t_{H_1}(h) = t_0$, то $h \in H_{t_0}$. Действительно, пусть $h \in H_1$ и $t_{H_1}(h) = t_0$. Тогда по лемме 13 $t_H(h) = t_0$. Если бы $h \notin H_{t_0}$, то существовал бы

тип $t_1 \in T$, $t_1 \neq t_0$, что $h = h_{t_1} + h'$, где $0 \neq h_{t_1} \in H_{t_1}$, $h' \in \bigoplus_{\substack{t' \in T \\ t' \neq t_1}} H_{t'}$. Поэтому

$t_0 = t_H(h) < t_H(h_{t_1}) = t_1$, чего быть не может, так как $t_1, t_0 \in T$.

Итак, установлено, что группа H_1 содержит элемент h_1 , такой, что $t_{H_1}(h_1) = t_0$ и $h_1 \in H_{t_0}$. Пусть $h_2 \in H_1 \cap H_{t_0}$, $h_2 \neq 0$. Имеем $H_{t_0} = \langle h_1 \rangle_* \oplus C$, $H_{t_0} = \langle h_2 \rangle_* \oplus C_1$. Существует автоморфизм η группы H , отображающий $\langle h_1 \rangle_*$ на $\langle h_2 \rangle_*$. Так как H_1 – характеристическая подгруппа группы H , то $t_{H_1}(h_1) = t_{H_1}(\eta h_1)$. Но $s(\eta h_1) = mh_2$ для некоторых целых чисел s и m , и поэтому $t_{H_1}(h_2) = t_{H_1}(\eta h_1) = t_{H_1}(h_1) = t_0$. Значит, $H_1 \cap H_{t_0}$ – однородная группа и $t(H_1 \cap H_{t_0}) = t_0$. В силу леммы 11 $r(H_1 \cap H_{t_0}) = r(H_{t_0})$.

Так как $G \cong H'$, то по лемме 13 в группе H' нет элементов, типы которых больше t_0 . Группа $H_1 \oplus \Psi_1$ изоморфно вкладывается в H' . При этом вложении образ всякого элемента из $H_1 \cap H_{t_0}$ имеет тип t_0 в группе H' . Таким образом, $r(G_{t_0}) \geq r(H_1 \cap H_{t_0}) = r(H_{t_0})$. Аналогично получаем, что $r(H_{t_0}) \geq r(G_{t_0})$. В силу произвольности типа t_0 из T имеем $G \cong H$. ■

В теореме 14 рассматривались вполне разложимые группы из класса $\mathfrak{R}$. Результат этой теоремы нельзя перенести на произвольные вполне разложимые группы.

Лемма 15. Пусть $G = A \oplus B$, где A – характеристическая подгруппа группы G , $S(A) = \{(a, \sigma) \in \Gamma(G) \mid a \in A, (\forall \bar{a} \in A) \sigma \bar{a} = \bar{a}, (\exists \eta \in \text{Hom}(B, A)) (\forall b \in B) \sigma b = b + \eta b\}$. Тогда $S(A)$ – нормальная абелева подгруппа голоморфа группы G и $S(A) = A \oplus C$, где $C \cong \text{Hom}(B, A)$.

Доказательство. Покажем, что $S(A)$ – подгруппа голоморфа группы $\Gamma(G)$. Пусть (a, σ) и $(a_1, \sigma_1) \in S(A)$. Тогда $(a, \sigma) - (a_1, \sigma_1) = (a - \sigma \sigma_1^{-1} a_1, \sigma \sigma_1^{-1}) = (a - a_1, \sigma \sigma_1^{-1})$. Для всякого элемента $g \in A$ имеем $\sigma \sigma_1^{-1} g = g$. Пусть $b \in B$ и $\sigma b = b + \eta b$, $\sigma_1 b = b + \eta_1 b$, где $\eta, \eta_1 \in \text{Hom}(B, A)$. Имеем $\sigma_1^{-1} b = b - \sigma_1^{-1} \eta_1 b = b - \eta_1 b$. Итак, $\sigma \sigma_1^{-1} b = \sigma(b - \eta_1 b) = b + \eta b - \eta_1 b = b + (\eta - \eta_1) b$. Значит, $(a, \sigma) - (a_1, \sigma_1) \in S(A)$ и $S(A)$ – подгруппа группы $\Gamma(G)$.

Если (a_1, σ_1) и (a_2, σ_2) – элементы группы $S(A)$, то $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1$. Имеем $(a_1, \sigma_1) + (a_2, \sigma_2) = (a_1 + a_2, \sigma_1 \sigma_2)$ и $(a_2, \sigma_2) + (a_1, \sigma_1) = (a_2 + a_1, \sigma_2 \sigma_1)$. Значит, $S(A)$ – абелева подгруппа группы $\Gamma(G)$.

Покажем, что $S(A)$ – нормальная подгруппа группы $\Gamma(G)$. Пусть (g, φ) – произвольный элемент из $\Gamma(G)$. Рассмотрим сумму $-(g, \varphi) + (a, \sigma) + (g, \varphi) = (-\varphi^{-1} g + \varphi^{-1} a + \varphi^{-1} \sigma g, \varphi^{-1} \sigma \varphi) = (\bar{a}, \bar{\sigma})$. Элемент g как элемент прямой суммы запишем в виде $a_0 + b_0$, где $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. Получаем $\varphi^{-1} \sigma g = \varphi^{-1} a_0 + \varphi^{-1} b_0 + \varphi^{-1} \eta b_0$, где $\sigma b_0 = b_0 + \eta b_0$, $\eta \in \text{Hom}(B, A)$. В силу характеристичности A в G $\varphi^{-1} \eta b_0 \in A$, $\varphi^{-1} a \in A$. Итак, $-\varphi^{-1} g + \varphi^{-1} a + \varphi^{-1} \sigma g = -\varphi^{-1} a_0 - \varphi^{-1} b_0 + \varphi^{-1} a + \varphi^{-1} a_0 + \varphi^{-1} b_0 + \varphi^{-1} \eta b_0 = \varphi^{-1}(a + \eta b_0) = \bar{a} \in A$. Пусть $\varphi b = b' + a'$, $b' \in B$, $a' \in A$. Тогда $\sigma \varphi b = \sigma b' + \sigma a' = b' + \lambda b' + a'$, где $\sigma b' = b' + \lambda b'$, $\lambda \in \text{Hom}(B, A)$. Имеем $\varphi^{-1} \sigma \varphi b = \varphi^{-1} b' + \varphi^{-1} \lambda b' + \varphi^{-1} a'$, но $\varphi^{-1} b' = b - \varphi^{-1} a'$, откуда $\varphi^{-1} \sigma \varphi b = b + \varphi^{-1} \lambda b' = b + \varphi^{-1} \lambda \varphi \varphi^{-1} b$,

где π – проекция G на B , $\varphi|_B$ – ограничение автоморфизма φ на B . Очевидно, что $\varphi^{-1}\lambda\pi\varphi|_B \in \text{Hom}(B, A)$. На элементах из A автоморфизм $\varphi^{-1}\sigma\varphi$ действует тождественно, так как $\sigma a = a$ для всех $a \in A$.

Следовательно, $\bar{\sigma}$ обладает всеми свойствами вторых компонент элементов из $S(A)$. Итак, $S(A)$ – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$. Всякому элементу $(a, \sigma) \in S(A)$ поставим в соответствие пару (a, η) , где η – гомоморфизм группы B в группу A , индуцированный автоморфизмом σ . Полученное соответствие и будет изоморфизмом $S(A) \cong A \oplus \text{Hom}(B, A)$. ■

Теорема 16. *Существует вполне разложимая абелева группа без кручения, которая нормально не определяется своим голоморфом в классе всех вполне разложимых групп без кручения.*

Доказательство. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Будем говорить, что тип $\mathbf{t}$ является π -делимым, если он p -делим для тех и только тех простых чисел p , которые принадлежат π .

Для любых двух типов $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$, где $\mathbf{t}_1 \geq \mathbf{t}_2$, определим их разность $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2$ как тип, содержащий характеристику $\chi_1 - \chi_2$ ($\chi_1 \in \mathbf{t}_1$, $\chi_2 \in \mathbf{t}_2$, $\chi_1 \geq \chi_2$).

Разность характеристик определяется покомпонентно, где, конечно, ∞ минус нечто равняется ∞ .

Пусть $G = \bigoplus_{i=1}^n G_{\mathbf{t}_i}$, где $G_{\mathbf{t}_i}$ – однородная вполне разложимая группа конечного ранга типа $\mathbf{t}_i$, все $\mathbf{t}_i$ – π -делимые типы (π – некоторое множество простых чисел), $\mathbf{t}_1 > \mathbf{t}_2 > \dots > \mathbf{t}_n$, $r(G_{\mathbf{t}_1}) = 1$ и для некоторого $k \in \{2, \dots, n\}$ $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_k \neq \mathbf{t}_i$ для всякого $i \in \{2, \dots, n\}$.

Рассмотрим группу $H = \bigoplus_{i=1}^n H_{\tau_i}$, где H_{τ_i} – однородная вполне разложимая группа типа τ_i , где $\tau_i = \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_i$ для всех $i = 2, \dots, n$, $\tau_1 = \mathbf{t}_1$ и $r(G_{\mathbf{t}_i}) = r(H_{\tau_i})$, $i = 1, 2, \dots, n$. $G_{\mathbf{t}_1}$ – характеристическая подгруппа группы G . Используем эту подгруппу для построения нормальной абелевой подгруппы $S(G_{\mathbf{t}_1})$ голоморфа $\Gamma(G)$

так, как это указано в лемме 15. Имеем $S(G_{\mathbf{t}_1}) \cong G_{\mathbf{t}_1} \oplus \bigoplus_{i=2}^n \text{Hom}(G_{\mathbf{t}_i}, G_{\mathbf{t}_1})$. Известно, что если C_1 и C_2 – группы без кручения ранга 1, то $\text{Hom}(C_1, C_2) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{t}(C_1) \leq \mathbf{t}(C_2)$, и в этом случае $\text{Hom}(C_1, C_2)$ есть группа без кручения ранга 1, причем $\mathbf{t}(\text{Hom}(C_1, C_2)) = \mathbf{t}(C_2) - \mathbf{t}(C_1)$ [13, с. 133].

Следовательно, $S(G_{\mathbf{t}_1}) \cong G_{\mathbf{t}_1} \oplus \bigoplus_{i=2}^n H_{\tau_i} \cong \bigoplus_{i=1}^n H_{\tau_i} \cong H$.

Аналогично, в голоморфе $\Gamma(H)$ рассмотрим нормальную абелеву подгруппу $S(H_{\tau_1})$. Имеем $S(H_{\tau_1}) \cong H_{\tau_1} \oplus \text{Hom}(\bigoplus_{i=2}^n H_{\tau_i}, H_{\tau_1}) \cong H_{\tau_1} \oplus \bigoplus_{i=2}^n G_{\mathbf{t}_i} \cong \bigoplus_{i=1}^n G_{\mathbf{t}_i} \cong G$. Итак, группы G и H почти голоморфно изоморфны, но $G \not\cong H$, так как $\tau_k \neq \mathbf{t}_i$ для всякого $i \in \{2, \dots, n\}$.

Следовательно, группа G нормально не определяется своим голоморфом в классе вполне разложимых групп. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Mills W.H. On the non-isomorphism of certain holomorphs. // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 74. No. 3. P. 428–443.
2. Miller G.A. On the multiple holomorph of a group // Math. Ann. 1908. V. 66. P. 133–142.
3. Беккер И.Х. О голоморфах абелевых групп // Сиб. матем. журнал. 1964. Т. 5. No. 6. С. 1228–1238.
4. Беккер И.Х. О голоморфах нередуцированных абелевых групп // Изв. вузов. Математика. 1968. № 8. С. 3–8.
5. Беккер И.Х. О голоморфах абелевых групп без кручения // Изв. вузов. Математика. 1974. No. 3. С. 3–13.
6. Беккер И.Х. Абелевы группы с изоморфными голоморфами // Изв. вузов. Математика. 1975. No. 3. С. 97–99.
7. Беккер И.Х. Абелевы голоморфные группы. // Междунар. конф. «Всесибирские чтения по матем. и мех». Избранные доклады. Т. 1. Математика. 1997. С. 43–47.
8. Беккер И.Х., Гриншпон С.Я. Почти голоморфно изоморфные примарные абелевы группы // Группы и модули: межвуз. тематич. сб. науч. трудов. 1976. С. 90–103.
9. Гриншпон С.Я. Почти голоморфно изоморфные абелевы группы // Труды ТГУ. 1975. Т. 220. Вопросы математики. Вып. 3. С. 78–84.
10. Mills W.H. Multiple holomorphs of finitely generated abelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 71. № 3. P. 379–392.
11. Гриншпон И.Э. Нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп и почти голоморфный изоморфизм // Фундамент. и приклад. матем. 2007. Т. 13. № 3. С. 9–16.
12. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974. 335 с.
13. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977. 416 с.
14. Крылов П.А. Аффинные группы модулей и их автоморфизмы // Алгебра и логика. 2001. Т. 40. № 1. С. 60–82.
15. Беккер И.Х., Крылов П.А., Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактным // Абелевы группы и модули. 1994. С. 3–52.

Статья поступила 13.03.2013 г.

Grinshpon S.Ya., Grinshpon I.E. TORSION FREE ABELIAN GROUPS NORMALLY DETERMINED BY THEIR HOLOMORPHS. In this paper, we study homogeneously decomposable into direct sums torsion free abelian groups that are normally determined by their holomorphs. Properties of normal abelian subgroups of holomorphs of torsion free abelian groups are also studied.

Keywords: holomorph, almost holomorphically isomorphic groups, completely decomposable group, homogeneous group, type of a group.

GRINSHPON Samuil Yakovlevich (Tomsk State University)

E-mail: grinshpon@math.tsu.ru

GRINSHPON Irina Eduardovna (Tomsk State University

of Control Systems and Radioelectronics)

E-mail: irina-grinshpon@yandex.ru

УДК 517.54

С.А. Копанев

ЗАМЕТКА О КРИВИЗНЕ ЛИНИИ УРОВНЯ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Новым способом получена известная точная оценка снизу кривизны линии уровня в классе голоморфных однолистных отображений.

Ключевые слова: голоморфное однолистное отображение, линия уровня, кривизна.

Пусть S – класс голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ отображений $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$. Образ окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$, относительно отображения f называется линией уровня. Кривизна K_r линии уровня в точке $f(z_0)$, $z_0 \in E$, $|z_0| = r$, $0 < r < 1$, как хорошо известно, равна

$$K_r = \frac{1}{r |f'(z_0)|} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)^2} \right).$$

Класс S обладает свойством: отображение $f \in S$ тогда и только тогда, когда отображение $g \in S$, где

$$g(z) = -\frac{e^{i\theta}}{(1-r^2)} f' \left(e^{-i\theta} \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z} \right) - f(r), \quad z_0 = r e^{i\theta}.$$

Это свойство автоморфизма класса S позволяет задачу об оценке кривизны линии уровня свести к задаче об оценке функционала

$$K_r = \frac{1-r^2}{r} |f'(r)| \operatorname{Re} (1 + r^2 - 2rc_2),$$

где $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$, в классе S .

Приведем в частном случае ($p = 1$) следствие 3 из работы [1].

На классе S справедлива точная оценка

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right|^2 \leq \frac{|f'(z)|^2}{1-r^2},$$

где $|z| = r$, $0 < r < 1$.

Отметим, что равенство имеет место только для семейства отображений

$$f_\lambda(z) = \frac{z}{1 - 2\lambda z + z^2}, \quad -1 \leq \lambda \leq 1.$$

Приведенная оценка позволяет записать для кривизны линии уровня следующую оценку:

$$K_r \geq \frac{(1-r^2)^2}{r^3} |f(r)|^2 \operatorname{Re}(1+r^2-2rc_2).$$

Минимальное значение сомножителя $\operatorname{Re}(1+r^2-2rc_2)$ равное $1-4r+r^2$ достигается на отображении $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ из семейства $f_\lambda(z)$, и, следовательно, на

этом же отображении достигается минимальное значение кривизны линии уровня

$$\min_{f \in S} K_r = \frac{1-4r+r^2}{r} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2.$$

Задача о кривизне линии уровня в классе S и в других классах однолистных отображений рассматривалась в работах [2–20]. Ранее точная нижняя оценка кривизны линии уровня в классе S разными способами, отличными от предлагаемого, была получена Г.В. Корицким, Я.С. Мирошниченко, В.В. Черниковым, И.А. Александровым. Наилучшая на сегодняшний день верхняя оценка кривизны линии уровня в классе S принадлежит В.В. Черникову [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А., Копанев С.А. О взаимном росте модуля однолистной функции и модуля ее производной // Сиб. матем. журнал. 1966. Т. 7. № 1. С. 23–30.
2. Александров И.А. Об оценке кривизны линий уровня при конформных отображениях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3 (23). С. 5–7.
3. Bieberbach L. Neuere Forschungen im Gebiete der konformen Abbildung. Glasnik hrt. Prirod. Drustva, 1921. Bd 33.
4. Александров И.А., Черников В.В. Об экстремальных свойствах однолистных звездообразных отображений // Сиб. матем. журнал. 1963. Т. 4. № 6. С. 1201–1207.
5. Александров И.А., Прохорова А.Е. Оценки кривизны линий уровня на классе // ДАН СССР. 1972. Т. 203. № 2. С. 267–269.
6. Зморевич В.А. О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций // Укр. матем. журнал. 1952. Т. 4. № 3. С. 276–298.
7. Копанев С.А., Сыркашев А.Н. Качественный анализ дифференциально-функционального уравнения для одного функционала // Исследования по матем. анализу и алгебре: сб. Вып. 3. Томск, 2001. С. 125–134.
8. Корицкий Г.В. О кривизне линий уровня и их ортогональных траекторий при конформных отображениях // Матем. сб. 1955. 37 (79): 1. С. 103–116.
9. Корицкий Г.В. О кривизне линий уровня при однолистных конформных отображениях // ДАН. 1957. Т. 115. № 4. С. 653–654.
10. Корицкий Г.В. К вопросу о кривизне линий уровня при однолистных конформных отображениях // Успехи матем. наук. 1960, сентябрь-октябрь. Т. XV. Вып. 5 (95). С. 179–182.
11. Корицкий Г.В. К оценке кривизны линий уровня при однолистных конформных отображениях // Труды Томского ун-та. Т. 210. Вопросы геометрической теории функций. 1969. Вып. 6. С. 34–36.
12. Мартынов Ю.А. О геометрических свойствах дуг линий уровня при однолистных конформных отображениях // Труды Томского ун-та. Т. 210. Вопросы геометрической теории функций. 1969. Вып. 6. С. 53–61.
13. Мирошниченко Я.С. Об одной задаче теории однолистных функций // Учен. зап. Сталлинск. пед. ин-та. 1951. Вып. 1. С. 63–75.

14. Мирошниченко Я.С. К вопросу о кривизне линий уровня // Труды Томского ун-та. Т. 210. Вопросы геометрической теории функций. 1969. Вып. 6. С. 62–65.
15. Черников В.В. Об оценке кривизны линий уровня в одном классе однолистных функций // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 3. С. 381–388.
16. Черников В.В. Оценка кривизны линий уровня в классах Σ , Σ^p // Экстремальные задачи теории функций: сб. Томск, 1980. С. 126–129.
17. Черников В.В. Об оценке кривизны линий уровня в классе всех регулярных однолистных в круге функций // Сиб. матем. журнал. 1985. Т. 26. № 2. С. 210–213.
18. Черников В.В., Арендарчук М.А. Об оценке кривизны линий уровня // Труды Томского ун-та. Т. 238. Вопросы геометрической теории функций. 1974. Вып. 7. С. 118–123.
19. Эзрохи Т.Г. О кривизне линий уровня и их ортогональных траекторий в классе функций с ограниченным вращением // Укр. матем. журнал. 1965. Т. 17. № 4. С. 91–99.
20. Югай С.М. Оценка кривизны образов окружностей при отображении их выпуклыми однолиственными в круге функциями // Матем. заметки. Т. 53. Вып. 1. 1993. С. 133–137.

Статья поступила 26.02.2013 г.

Copanev S.A. A NOTE ON THE CURVATURE OF THE LEVEL LINE UNDER THE CONFORMAL MAPPING. A lower bound is established by a new method on the class S for the curvature of level lines under conformal mapping.

Keywords: holomorphic univalent mapping, level line, curvature.

COPANEV Sergey Anatol'evich (Tomsk State University)

E-mail: Copanev_d@mail.ru

УДК 517.9

И.В. Рахмелевич

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ К УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, СОДЕРЖАЩИМ ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ ПРОИЗВОДНЫХ

С помощью метода разделения переменных получены решения некоторых уравнений математической физики, содержащих однородные функции от производных. Рассмотрены уравнения, содержащие одну или несколько однородных функций. Выполнен анализ решений для некоторых частных случаев.

Ключевые слова: уравнение, однородная функция, метод разделения переменных, частная производная.

Метод разделения переменных (РП) является одним из наиболее универсальных методов решения линейных и нелинейных уравнений в частных производных [1], который позволяет свести исходное уравнение к обыкновенным дифференциальным уравнениям, а во многих случаях – получить точные решения. В данной работе этот метод применяется к решению уравнений, содержащих однородные функции от производных.

1. Уравнение, содержащее однородную функцию

Рассмотрим уравнение относительно неизвестной функции $u(t, x_1, \dots, x_N)$

$$L_t u = F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right). \quad (1)$$

Здесь $L_t \equiv \sum_{m=1}^M a_m(t) \frac{\partial^m}{\partial t^m}$ – линейный дифференциальный оператор по переменной t ; F – некоторая однородная функция с показателем однородности r ($r > 0$), т.е. для любых $\alpha, p_1, \dots, p_N$ выполняется соотношение [2]

$$F(\alpha p_1, \dots, \alpha p_N) = \alpha^r F(p_1, \dots, p_N). \quad (2)$$

Применяя метод РП к уравнению (1), решение будем искать в виде

$$u(t, x_1, \dots, x_N) = T_0(t) + T_1(t)V(x_1, \dots, x_N). \quad (3)$$

Подставив выражение (3) в уравнение (1) и используя свойство однородности (2), преобразуем уравнение (1) к виду

$$L_t T_0(t) + V(x_1, \dots, x_N) L_t T_1(t) - [T_1(t)]^r F\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_N}\right) = 0. \quad (4)$$

Разделим обе части уравнения (4) на $[T_1(t)]^r$ и продифференцируем поочередно по переменным x_i ($i = 1, \dots, N$), тогда получаем

$$\frac{L_t T_1(t)}{[T_1(t)]^r} \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} F\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_N}\right) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) может быть удовлетворено в следующих частных случаях:
Случай 1:

$$\frac{L_t T_1(t)}{[T_1(t)]^r} = \lambda, \quad (6)$$

где $\lambda \neq 0$ – некоторая постоянная. Тогда из уравнения (4) следует

$$\frac{L_t T_0(t)}{[T_1(t)]^r} = F\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_N}\right) - \lambda V(x_1, \dots, x_N). \quad (7)$$

Согласно известной схеме метода РП [1], уравнение (7) может быть удовлетворено, если обе его части равны некоторой постоянной μ , откуда получаем уравнения для функций T_0, V

$$L_t T_0(t) - \mu [T_1(t)]^r = 0; \quad (8a)$$

$$F\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_N}\right) - \lambda V(x_1, \dots, x_N) - \mu = 0. \quad (8б)$$

Уравнение (8a) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) относительно функции $T_0(t)$. Уравнение (8б) путем линейной замены

неизвестной функции $\tilde{V} = V + \frac{\mu}{\lambda}$ преобразуем к виду

$$F\left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_N}\right) - \lambda \tilde{V}(x_1, \dots, x_N) = 0. \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) разделим его на $\tilde{V}$ и используем свойство однородности (2). В результате уравнение (9) преобразуем к виду

$$F\left(\tilde{V}^{-1/r} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_1}, \dots, \tilde{V}^{-1/r} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_N}\right) - \lambda = 0. \quad (10)$$

Предположим вначале, что $r \neq 1$ и выполним замену неизвестной функции $\tilde{V}$ по формуле

$$w = \tilde{V}^\beta / \beta, \quad (11)$$

где $\beta = (r-1)/r$. Тогда уравнение (10) запишется как

$$F\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_N}\right) - \lambda = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) будем искать в виде

$$w(x_1, \dots, x_N) = W(z), \quad z = \sum_{i=1}^N c_i x_i. \quad (13)$$

Подставляя функцию (13) в уравнение (12) и используя свойство однородности (2), нетрудно получить следующее решение:

$$W(z) = B(z + c_0), \quad B = \left(\frac{\lambda}{F(c_1, \dots, c_N)} \right)^{1/r}, \quad (14)$$

c_0 – произвольная постоянная. Возвращаясь к неизвестной функции $\tilde{V}$, решение уравнения (9) запишем как

$$\tilde{V}(x_1, \dots, x_N) = (\beta B)^{1/\beta} (z + c_0)^{1/\beta}. \quad (15)$$

Решение (15) имеет место при $\beta \neq 0$ ($r \neq 1$). В случае $\beta = 0$ ($r = 1$) нетрудно получить

$$\tilde{V}(x_1, \dots, x_N) = \exp \left(\frac{\lambda}{F(c_1, \dots, c_N)} (z + c_0) \right). \quad (16)$$

Учитывая выполненную выше замену функции $\tilde{V} = V + \frac{\mu}{\lambda}$, решение (3) можно представить в виде

$$u(t, x_1, \dots, x_N) = \tilde{T}_0(t) + T_1(t) \tilde{V}(x_1, \dots, x_N), \quad (17)$$

где функция $\tilde{T}_0(t) = T_0(t) - \frac{\mu}{\lambda} T_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$L_t \tilde{T}_0(t) = 0. \quad (17a)$$

$$\text{Случай 2:} \quad L_t T_1(t) = 0. \quad (18)$$

Тогда уравнение (4) преобразуется следующим образом:

$$\frac{L_t T_0(t)}{[T_1(t)]^r} = F \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_N} \right). \quad (19)$$

Из (19) получаем уравнения для функций T_0, V :

$$L_t T_0(t) = \lambda [T_1(t)]^r; \quad (20a)$$

$$F \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_N} \right) - \lambda = 0. \quad (20б)$$

При этом вначале необходимо определить функцию $T_1(t)$ из уравнения (18), а затем подставить ее в правую часть уравнения (20а). Уравнение (20б) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (12), поэтому его решение определяется формулой вида (14). Если $\lambda = 0$, то нетрудно убедиться, что решение уравнения (20б) $V = \Phi(z)$, где z определяется формулой (13), $\Phi(z)$ – произвольная дифференцируемая функция, а постоянные c_i удовлетворяют условию $F(c_1, \dots, c_N) = 0$.

Таким образом, в первом частном случае решение уравнения (1) с однородной функцией в правой части можно представить в виде (17), где $T_1(t)$ удовлетворяет ОДУ (6), $\tilde{T}_0(t)$ удовлетворяет ОДУ (17а), а $\tilde{V}(x_1, \dots, x_N)$ – уравнению (9), решение которого дается формулами (15) или (16). Во втором частном случае $T_1(t)$ определяется из уравнения (18), функции T_0, V определяются из уравнений (20а), (20б) соответственно, причем решение последнего при $\lambda \neq 0$ дается формулой

вида (14), а при $\lambda = 0$ – формулой $V = \Phi(z)$ с дополнительным условием $F(c_1, \dots, c_N) = 0$.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^N a_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^r.$$

С помощью метода РП, согласно изложенному выше, нетрудно получить решения:

$$1) u(t, x_1, \dots, x_N) = \frac{r-1}{r} \left(\frac{(z+c_0)^r}{r(t_0-t) \sum_{i=1}^N a_i c_i^r} \right)^{\frac{1}{r-1}} + A_0 \quad (\text{при } r \neq 1);$$

$$2) u(t, x_1, \dots, x_N) = \lambda t + \left(\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^N a_i c_i^r} \right)^{\frac{1}{r}} (z+c_0);$$

$$3) u(t, x_1, \dots, x_N) = \Phi(z),$$

причем $A_0, t_0, c_0, \lambda, c_i$ – произвольные постоянные, Φ – произвольная дифференцируемая функция, z определяется формулой (13). Решения 1), 2) применимы в случае, если постоянные c_i удовлетворяют соотношению $\sum_{i=1}^N a_i c_i^r \neq 0$; решение 3)

– в случае, если постоянные c_i удовлетворяют соотношению $\sum_{i=1}^N a_i c_i^r = 0$.

При $r = 1$ данное уравнение является линейным и имеет общее решение вида

$$[3] u(t, x_1, \dots, x_N) = \Phi \left(z + t \sum_{i=1}^N a_i c_i \right).$$

2. Уравнение, содержащее сумму однородных функций

Рассмотрим теперь случай, когда правая часть исходного уравнения представляет собой сумму K однородных функций с различными показателями однородности r_k . Пусть множество значений $I = \{1, \dots, N\}$ индекса i , нумерующего независимые пространственные переменные, разбито на K непересекающихся подмножеств I_k ($k = 1, \dots, K$). Тогда вектор переменных $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ можно разбить на K непересекающихся подвекторов $X_k = \{x_i\}_{i \in I_k}$. Введем также соответствующие векторы производных $\frac{\partial}{\partial X_k} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i \in I_k}$ и рассмотрим уравнение вида

$$L_t u = \sum_{k=1}^K F_k \left(\frac{\partial u}{\partial X_k} \right), \quad (21)$$

где функции F_k удовлетворяют соотношению однородности вида (2) с показателями однородности r_k ($r_k > 0$), причем вектор аргументов $\{p_1, \dots, p_N\}$ заменяется

на подвектор $\{p_i\}_{i \in I_k}$. Применяя метод РП к уравнению (21), ищем решение в виде

$$u(t, X) = T_0(t) + \sum_{k=1}^K T_k(t) V_k(X_k). \quad (22)$$

Аналогично преобразованиям, выполненным в п.1, подставим выражение (22) в уравнение (21) и с учетом однородности функций F_k приводим его к виду

$$L_t T_0(t) + \sum_{k=1}^K \Psi_k(t, X_k) = 0; \quad (23)$$

$$\Psi_k(t, X_k) = V_k(X_k) L_t T_k(t) - [T_k(t)]^{r_k} F_k \left(\frac{\partial V_k}{\partial X_k} \right). \quad (23a)$$

Продифференцируем (23) по X_k и учтем, что левая часть уравнения (23) зависит от X_k только через $\Psi_k(t, X_k)$. Тогда с учетом (23a), приходим к соотношению

$$\frac{L_t T_k(t)}{[T_k(t)]^{r_k}} \frac{\partial V_k}{\partial X_k} - \frac{\partial}{\partial X_k} F_k \left(\frac{\partial V_k}{\partial X_k} \right) = 0. \quad (24)$$

Аналогично п.1 рассмотрим частные случаи, в которых может быть удовлетворено это соотношение.

Случай 1:

$$\frac{L_t T_k(t)}{[T_k(t)]^{r_k}} = \lambda_k, \quad (25)$$

где $\lambda_k \neq 0$ – некоторая постоянная. Тогда соотношение (24) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial X_k} \left\{ F_k \left(\frac{\partial V_k}{\partial X_k} \right) - \lambda_k V_k \right\} = 0, \quad (26)$$

откуда следует уравнение для V_k :

$$F_k \left(\frac{\partial V_k}{\partial X_k} \right) - \lambda_k V_k = \mu_k, \quad (27)$$

где μ_k – некоторая постоянная. С помощью замены функции $\tilde{V}_k = V_k + \frac{\mu_k}{\lambda_k}$ получаем следующее уравнение:

$$F_k \left(\frac{\partial \tilde{V}_k}{\partial X_k} \right) - \lambda_k \tilde{V}_k(X_k) = 0. \quad (28)$$

Решая его аналогично уравнению (9) из п.1, можно получить следующие выражения для $\tilde{V}_k$:

В случае $\beta_k \neq 0$ ($r_k \neq 1$):

$$\tilde{V}_k(X_k) = (\beta_k B_k)^{1/\beta_k} (z_k + d_k)^{1/\beta_k}, \quad z_k = \sum_{x_i \in X_k} c_i x_i. \quad (29a)$$

В случае $\beta_k = 0$ ($r_k = 1$):

$$\tilde{V}_k(X_k) = \exp(B_k(z_k + d_k)). \quad (29б)$$

Здесь введены обозначения:

$$\beta_k = (r_k - 1)/r_k, \quad B_k = \left(\frac{\lambda_k}{F_k(C_k)} \right)^{1/r_k}, \quad (29в)$$

c_i, d_k – произвольные постоянные, $C_k = \{c_i\}_{i \in I_k}$.

Случай 2:

$$\frac{L_t T_k(t)}{[T_k(t)]^{r_k}} = 0. \quad (30)$$

Тогда из (24) получаем уравнение для V_k :

$$F_k \left(\frac{\partial V_k}{\partial X_k} \right) = \lambda_k. \quad (31)$$

Аналогично уравнению (12) решение уравнения (31) при $\lambda_k \neq 0$ определяется формулой

$$V_k(X_k) = B_k(z_k + d_k), \quad z_k = \sum_{x_i \in X_k} c_i x_i, \quad (32)$$

где B_k определяется формулой (29в), c_i, d_k – произвольные постоянные.

При $\lambda_k = 0$ аналогично п.1 решение уравнения (31) определяется формулой

$$V_k = \Phi_k(z_k), \quad (32а)$$

где Φ_k – произвольная дифференцируемая функция, а вектор постоянных $C_k = \{c_i\}_{i \in I_k}$ должен удовлетворять условию

$$F_k(C_k) = 0. \quad (32б)$$

Множество значений $\Xi = \{1, \dots, K\}$ индекса k разделим на два непересекающихся подмножества Ξ_1, Ξ_2 следующим образом: если $k \in \Xi_1$ ($k \in \Xi_2$), то для данного значения k реализуется случай 1 (случай 2) соответственно. Тогда выражение (22) можно записать в виде

$$u(t, X) = \tilde{T}_0(t) + \sum_{k \in \Xi_1} T_k(t) \tilde{V}_k(X_k) + \sum_{k \in \Xi_2} T_k(t) V_k(X_k); \quad (33)$$

$$\tilde{T}_0(t) = T_0(t) - \sum_{k \in \Xi_1} \frac{\mu_k}{\lambda_k} T_k(t). \quad (33а)$$

Для того чтобы получить уравнение для функции $\tilde{T}_0(t)$, подставим выражение (33) в уравнение (21). Тогда, с учетом соотношений (25), (28), (30), (31), получим

$$L_t \tilde{T}_0(t) = \sum_{k \in \Xi_2} \lambda_k [T_k(t)]^{r_k}. \quad (34)$$

Таким образом, решение уравнения (21), содержащего сумму однородных функций, дается формулой (33). Функции $T_k(t)$ при $k \in \Xi_1$ ($k \in \Xi_2$) являются ре-

шениями уравнений (25) и (30) соответственно, функция $\tilde{T}_0(t)$ – решением уравнения (34). Функции $\tilde{V}_k(X_k)$ при $k \in \Xi_1$ являются решениями уравнения (28) и определяются формулами (29а,б); функции $V_k(X_k)$ при $k \in \Xi_2$ являются решениями уравнения (31) и при $\lambda_k \neq 0$ определяются формулой (32), а при $\lambda_k = 0$ – формулой (32а) с дополнительным условием (32б).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + a_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \sqrt{a_3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 + a_4 \left(\frac{\partial u}{\partial x_4} \right)^2}.$$

Правая часть уравнения представляет собой сумму двух однородных функций с показателями однородности $r_1=2$ и $r_2=1$. Решая это уравнение методом РП, в соответствии с результатами данного раздела, получаем следующие решения:

- 1) $u(t, X) = A_0 + \frac{(z_1 + d_1)^2}{4(t_0 - t)(a_1 c_1^2 + a_2 c_2^2)} + \exp \left\{ \lambda_2 \left(t + \frac{z_2 + d_2}{\sqrt{a_3 c_3^2 + a_4 c_4^2}} \right) \right\};$
- 2) $u(t, X) = \lambda_2 t + \frac{(z_1 + d_1)^2}{4(t_0 - t)(a_1 c_1^2 + a_2 c_2^2)} + \frac{\lambda_2 (z_2 + d_2)}{\sqrt{a_3 c_3^2 + a_4 c_4^2}};$
- 3) $u(t, X) = \lambda_1 t + \sqrt{\frac{\lambda_1}{a_1 c_1^2 + a_2 c_2^2}} (z_1 + d_1) + \exp \left\{ \lambda_2 \left(t + \frac{z_2 + d_2}{\sqrt{a_3 c_3^2 + a_4 c_4^2}} \right) \right\};$
- 4) $u(t, X) = (\lambda_1 + \lambda_2) t + \sqrt{\frac{\lambda_1}{a_1 c_1^2 + a_2 c_2^2}} (z_1 + d_1) + \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_3 c_3^2 + a_4 c_4^2}} (z_2 + d_2);$
- 5) $u(t, X) = \frac{(z_1 + d_1)^2}{4(t_0 - t)(a_1 c_1^2 + a_2 c_2^2)} + \Phi(z_2);$
- 6) $u(t, X) = \lambda_1 t + \sqrt{\frac{\lambda_1}{a_1 c_1^2 + a_2 c_2^2}} (z_1 + d_1) + \Phi(z_2);$
- 7) $u(t, X) = \Phi(z_1) + \exp \left\{ \lambda_2 \left(t + \frac{z_2 + d_2}{\sqrt{a_3 c_3^2 + a_4 c_4^2}} \right) \right\};$
- 8) $u(t, X) = \lambda_2 t + \Phi(z_1) + \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_3 c_3^2 + a_4 c_4^2}} (z_2 + d_2);$
- 9) $u(t, X) = \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2).$

Здесь $z_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2$, $z_2 = c_3 x_3 + c_4 x_4$; $A_0, t_0, c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, \lambda_1, \lambda_2$ – произвольные постоянные; Φ, Φ_1, Φ_2 – произвольные дифференцируемые функции своих аргументов. Решения 1) – 4) применимы при выполнении условий $a_1 c_1^2 + a_2 c_2^2 \neq 0$, $a_3 c_3^2 + a_4 c_4^2 \neq 0$; решения 5), 6) – при выполнении условий $a_1 c_1^2 + a_2 c_2^2 \neq 0$, $a_3 c_3^2 + a_4 c_4^2 = 0$; решения 7), 8) – при выполнении условий $a_1 c_1^2 + a_2 c_2^2 = 0$, $a_3 c_3^2 + a_4 c_4^2 \neq 0$; решение 9) – при условии $a_1 c_1^2 + a_2 c_2^2 = 0$, $a_3 c_3^2 + a_4 c_4^2 = 0$.

Заключение

Таким образом, в данной работе методом разделения переменных получены решения уравнений в частных производных, содержащих одну или несколько однородных функций от производных первого порядка. Проанализирован вид решения для возможных частных случаев и приведены примеры применения полученных в работе соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.
3. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит, 2003.

Статья поступила 12.12.2012 г.

Rakhmelevich I.V. ON APPLICATION OF THE VARIABLE SEPARATION METHOD TO MATHEMATICAL PHYSICS EQUATIONS CONTAINING HOMOGENEOUS FUNCTIONS OF DERIVATIVES. The solutions of some evolutionary equations of mathematical physics containing homogeneous functions of derivatives were received using the variables separation method. The equations containing one or several homogeneous functions are considered. Solutions for some particular cases are analyzed.

Keywords: equation, homogeneous function, variable separation method, partial derivative.

RAKHMELEVICH Igor Vladimirovich (Nizhny Novgorod State Commercial Institute)

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

УДК 514.76

А.Г. Седых

О ПРИБЛИЖЕННО ИНТЕГРИРУЕМЫХ $SO(3)$ -СТРУКТУРАХ НА 5-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Рассматриваются неприводимые $SO(3)$ -структуры на пятимерном многообразии. Показано, что для приближенно интегрируемых неприводимых $SO(3)$ -структур ковариантная дивергенция структурного тензора равна нулю. Приведены примеры левоинвариантных неприводимых $SO(3)$ -структур на пятимерных группах Ли, которые имеют нулевую дивергенцию структурного тензора, но не являются приближенно интегрируемыми, а также неприводимых $SO(3)$ -структур с ненулевой дивергенцией структурного тензора.

Ключевые слова: специальная $SO(3)$ -структура, пятимерное многообразие, группа Ли.

Традиционно в геометрии большой интерес представляют римановы многообразия с некоторой дополнительно заданной структурой, согласованной с метрикой. Примером может служить почти комплексная структура, согласованная с метрикой. Соответствующая структурная группа действует неприводимо на касательных пространствах многообразия. Для нечетномерного аналога – контактной метрической структуры – структурная группа действует приводимо – она имеет два инвариантных подпространства: контактную плоскость и направление Рибба. Интересно, что в случае пятимерного риманова многообразия существует [1] структура, у которой структурной группой является $SO(3)$, и она действует неприводимо. Эта структура представляет интерес в контексте характеристических связностей и специальной неинтегрируемой геометрии [5]. В данной работе рассматривается такая неприводимая $SO(3)$ -структура на пятимерном многообразии и изучаются свойства ее структурного тензора.

Неприводимое представление группы $SO(3)$ в пространстве $\mathbf{R}^5$ основано на том, что векторное пространство $\mathbf{R}^5$ изоморфно множеству действительных симметричных бесследовых матриц порядка 3. Изоморфизм устанавливается следующим образом:

$$X = (x_1, \dots, x_5) \leftrightarrow \sigma(X) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{3}} - x_4 & x_2 & x_3 \\ x_2 & \frac{x_1}{\sqrt{3}} + x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & -\frac{2}{\sqrt{3}}x_1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Неприводимое представление ρ на $\mathbf{R}^5$ задается формулой

$$\rho(h)X = h\sigma(X)h^{-1}, h \in SO(3).$$

Для элемента X рассмотрим характеристический полином матрицы $\sigma(X)$ [1]:

$$P_X(\lambda) = \det(\sigma(X) - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda g(X, X) + \frac{2\sqrt{3}}{9} \Psi(X, X, X).$$

Этот полином инвариантен относительно $SO(3)$ действия, заданного представлением ρ . Поэтому его коэффициенты являются $SO(3)$ -инвариантными. Квадратичная часть $g(X, X)$ – это стандартное скалярное произведение на $\mathbf{R}^5$, $g(X, X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$, а свободный член Ψ имеет вид

$$\Psi(X, X, X) = \frac{1}{2}x_1(6x_2^2 + 6x_4^2 - 2x_1^2 - 3x_3^2 - 3x_5^2) + \frac{3\sqrt{3}}{2}x_4(x_5^2 - x_3^2) + 3\sqrt{3}x_2x_3x_5.$$

Он определяет симметричный 3-линейный ковариантный тензор

$$\Psi = \sum_{i,j,k=1}^5 \Psi_{ijk} e^i \otimes e^j \otimes e^k,$$

где $\{e^1, \dots, e^5\}$ – дуальный корепер к стандартному ортонормированному реперу $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ пространства $\mathbf{R}^5$.

Отметим основные свойства тензора Ψ , полученные в работе [1]. Свертка тензора Ψ по любым его двум индексам равна нулю. Чтобы сформулировать следующее свойство, нам потребуется тензор $\Psi_X = \iota_X \Psi$, полученный сверткой с вектором X : $\Psi_X(\cdot, \cdot) = \Psi(X, \cdot, \cdot)$. Поскольку мы считаем фиксированным ортонормированный репер, то симметричная 2-форма Ψ_X естественным образом отождествляется с эндоморфизмом пространства $\mathbf{R}^5$. Поэтому можно брать композиции таких эндоморфизмов Ψ_X , в частности можно рассматривать квадраты эндоморфизмов $(\Psi_X)^2$. Тогда для всех $X \in \mathbf{R}^5$ имеет место равенство $(\Psi_X)^2 X = g(X, X)X$.

При действии $SO(5)$ группа изотропии тензора Ψ совпадает с группой $SO(3)$, неприводимо вложенной в $SO(5)$, т.е. так, как описано выше. Это позволяет определить неприводимую $SO(3)$ -структуру на пятимерном ориентированном римановом многообразии (M, g) , задавая в каждой точке такой тензор Ψ .

Определение 1 [1]. *Неприводимой $SO(3)$ -структурой на 5-мерном римановом многообразии (M, g) называется тензорное поле Ψ типа $(0,3)$, для которого линейное отображение $X \rightarrow \Psi_X \in \text{End}(TM)$, $X \in TM$, имеет следующие свойства:*

- 1) *Симметричность:* $g(X, \Psi_Y Z) = g(Z, \Psi_Y X) = g(X, \Psi_Z Y)$.
- 2) *Нулевой след:* $\text{tr}(\Psi_X) = 0$.
- 3) *Для любого векторного поля $X \in TM$ имеет место равенство $\Psi_X^2 X = g(X, X)X$.*

В [1] показано, что в каждом касательном пространстве можно выбрать адаптированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, т.е. такой, в котором метрика g и тензор Ψ будут иметь канонический вид, а именно $g_{ij} = \delta_{ij}$ и

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{2}e^1(6(e^2)^2 + 6(e^4)^2 - 2(e^1)^2 - 3(e^2)^2 - 3(e^5)^2) + \\ & + \frac{3\sqrt{3}}{2}e^4((e^5)^2 - (e^3)^2) + 3\sqrt{3}e^2e^3e^5. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\{e^1, e^2, e^3, e^4, e^5\}$ – дуальный репер. Из (2) мы получаем ненулевые компоненты тензора Ψ в адаптированном репере (с точностью до симметрий):

$$\begin{aligned} \Psi_{111} = -1, \Psi_{122} = 1, \Psi_{144} = 1, \Psi_{133} = -\frac{1}{2}, \Psi_{155} = -\frac{1}{2}, \\ \Psi_{433} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \Psi_{455} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \Psi_{235} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, неприводимая $SO(3)$ -структура на многообразии – это риманова структура g и тензорное поле Ψ , обладающее указанными выше свойствами

1–3 определения 1. Представляют интерес так называемые приближенно интегрируемые $SO(3)$ -структуры [1, 2], как некоторые аналоги почти комплексной структуры J приближенно кэлерова многообразия, т.е. такого, что $(\nabla_X J)(X) = 0$.

Определение 2 [2]. *Неприводимая $SO(3)$ -структура на многообразии M называется приближенно интегрируемой, если $(\nabla_X \Psi)(X, X, X) = 0$ для любого векторного поля X на M .*

Теорема 1. *Если $SO(3)$ -структура Ψ приближенно интегрируемая, то дивергенция тензора Ψ равна нулю, $\delta\Psi = 0$.*

Доказательство. Пусть $SO(3)$ -структура Ψ приближенно интегрируема, тогда, по определению, $(\nabla_X \Psi)(X, X, X) = 0$. Перепишем это условие в координатах $\nabla_{(i} \Psi_{jkl)} X^i X^j X^k X^l = 0$, или $\nabla_{(i} \Psi_{jkl)} = 0$. Поскольку тензор Ψ полностью симметричен, то

$$\begin{aligned}\nabla_i \Psi_{jkl} + \nabla_j \Psi_{ikl} + \nabla_k \Psi_{jil} + \nabla_l \Psi_{jki} &= 0, \\ \nabla_i \Psi_{jkl} + \nabla_j \Psi_{ikl} &= -\nabla_k \Psi_{jil} - \nabla_l \Psi_{jki}.\end{aligned}$$

Вычислим дивергенцию $\delta\Psi$ тензорного поля Ψ с учетом последнего равенства:

$$\begin{aligned}\delta\Psi &= -\nabla^j \Psi_{jkl} = -g^{ij} \nabla_i \Psi_{jkl} = -\frac{1}{2} g^{ij} (\nabla_i \Psi_{jkl} + \nabla_j \Psi_{ikl}) = \\ &= \frac{1}{2} g^{ij} (\nabla_k \Psi_{jil} + \nabla_l \Psi_{jki}) = \frac{1}{2} (\nabla_k g^{ij} \Psi_{ijl} + \nabla_i g^{ij} \Psi_{ijk}) = 0,\end{aligned}$$

поскольку $g^{ij} \Psi_{ijl} = g^{ij} \Psi_{ijk} = 0$.

Замечание 1. Условие $\delta\Psi = 0$ является только необходимым. Существуют примеры, когда $\delta\Psi = 0$, но $SO(3)$ -структура Ψ не является приближенно интегрируемой.

Замечание 2. Дивергенция $\delta\Psi$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда тензор $\nabla_{(i} \Psi_{jkl)}$ имеет нулевой след по любым двум индексам.

Рассмотрим левоинвариантные приближенно интегрируемые $SO(3)$ на пятимерных группах Ли. В работе [2] получены необходимые и достаточные условия на левоинвариантный тензор Ψ для приближенной интегрируемости в терминах структурных констант группы. Получим аналогичные условия для равенства нулю дивергенции тензора Ψ . Пусть $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ – адаптированный базис алгебры Ли $L(G)$ группы G . Задав такой репер, получаем левоинвариантную риманову метрику g на группе G , для которой выбранный репер $\{e_1, \dots, e_5\}$ является ортонормированным. Кроме того, на группе G можно считать заданной левоинвариантную $SO(3)$ -структуру тензором Ψ на алгебре Ли $L(G)$, компоненты которого в выбранном адаптированном репере $\{e_1, \dots, e_5\}$ определены равенствами (3). Пусть C_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли $L(G)$ в адаптированном базисе.

Теорема 2. *Дивергенция $\delta\Psi$ тензора Ψ левоинвариантной $SO(3)$ -структуры на пятимерной группе Ли равна нулю тогда и только тогда, когда структурные константы соответствующей алгебры Ли удовлетворяют следующим линейным соотношениям:*

$$\begin{aligned}2C_{12}^2 &= \sqrt{3}(C_{23}^5 + C_{25}^3), \quad 2C_{14}^4 = \sqrt{3}(C_{34}^3 + C_{45}^5), \quad C_{13}^3 = \sqrt{3}(C_{23}^5 + C_{34}^3 - C_{35}^2), \\ C_{15}^5 + C_{13}^3 &= 2(C_{12}^2 + C_{14}^4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{35}^5 - C_{13}^1 - \sqrt{3}(C_{12}^5 - C_{14}^3 - C_{13}^4 + C_{15}^2) - 2(C_{34}^4 - C_{23}^2) &= 0, \\
C_{45}^5 - C_{24}^2 - \sqrt{3}(C_{13}^3 - C_{12}^2) + 2(C_{14}^1 - C_{34}^3) &= 0, \\
C_{12}^3 - 2C_{13}^2 - 3C_{23}^1 - \sqrt{3}(C_{23}^4 + C_{24}^3 - C_{25}^2 - C_{35}^3) &= 0, \\
C_{15}^1 + C_{35}^3 + \sqrt{3}(C_{12}^3 + C_{13}^2 + C_{14}^5 + C_{15}^4) - 2(C_{25}^2 + C_{45}^4) &= 0, \\
C_{14}^2 + C_{12}^4 - \frac{3}{2}(C_{13}^5 + C_{15}^3) = \sqrt{3}(2C_{12}^1 + C_{24}^4 - C_{23}^3 + \frac{1}{2}(C_{45}^3 - C_{34}^5)), \\
2C_{12}^5 + 5C_{15}^2 + 3(C_{25}^1 - C_{13}^4 - C_{14}^3) = \sqrt{3}(3C_{23}^2 - C_{13}^1 - 2C_{34}^4 + C_{25}^4), \\
5C_{14}^3 - C_{13}^4 + 6C_{34}^1 - 9(C_{15}^2 + C_{25}^1) = \sqrt{3}(C_{13}^1 - C_{24}^5 - 5C_{23}^2 - 3C_{25}^4 - 2C_{45}^2), \\
C_{15}^3 + C_{13}^5 - C_{45}^3 - \sqrt{3}(C_{35}^4 - C_{24}^4 - 2C_{12}^1 + \frac{1}{2}(C_{45}^3 + C_{34}^5)) &= 0, \\
2C_{15}^4 - C_{14}^5 + 3C_{45}^1 - \sqrt{3}(C_{45}^4 + C_{35}^3 - C_{24}^3 - C_{34}^2) &= 0, \\
C_{25}^5 + C_{23}^3 - \sqrt{3}(C_{13}^5 + C_{15}^3) - 4C_{12}^1 - 2C_{24}^4 &= 0.
\end{aligned}$$

Доказательство. Дивергенция $\delta\Psi$ тензорного поля $\Psi = \psi_{ijk}e^i \otimes e^j \otimes e^k$ находится по формуле $(\delta\Psi)_{jk} = -\nabla^i \psi_{ijk} = -g^{is} \nabla_s \psi_{ijk}$, где e^i – ковекторы дуального базиса к адаптированному базису $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ алгебры Ли и $\nabla_s = \nabla_{e_s}$ – ковариантная производная вдоль базисного векторного поля e_s . Пусть Γ_{ij}^k – компоненты связности Леви-Чивита левоинвариантной римановой метрики g , $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$. Тогда для ковекторов имеем: $\nabla_{e_k} e^i = -\Gamma_{kj}^i e^j$. Учитывая, что компоненты ψ_{ijk} левоинвариантного тензорного поля Ψ в левоинвариантном адаптированном репере постоянны на группе Ли, получаем

$$\nabla_s \psi_{ijk} e^i \otimes e^j \otimes e^k = (-\psi_{rjk} \Gamma_{si}^r - \psi_{ipk} \Gamma_{sj}^p - \psi_{ijp} \Gamma_{sk}^q)(e^i \otimes e^j \otimes e^k),$$

где

$$\Gamma_{ij}^p = C_{ij}^p + g_{js} C_{ki}^s g^{kp} + g_{is} C_{kj}^s g^{kp}.$$

Теперь используем систему Maple для вычислений $\delta\Psi$ (см. ниже листинг программы).

Приведем примеры левоинвариантных неприводимых $SO(3)$ -структур на двух пятимерных группах Ли из классификационного списка [3] контактных групп Ли. Первый пример – с ненулевой дивергенцией, а второй – имеет нулевую дивергенцию, но не является приближенно интегрируемым. В этих примерах считается, что выбранный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ алгебры Ли является адаптированным. Следовательно, на группе Ли имеется левоинвариантная риманова структура и левоинвариантный тензор Ψ .

Пример 1. Алгебра $\mathfrak{sl}(2) \times_p \mathbf{R}^2$. Это алгебра Ли группы аффинных преобразований $\mathbf{R}^2$, у которых линейная часть имеет определитель равный единице. Данная алгебра Ли имеет следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned}
[e_2, e_3] &= -e_1, [e_1, e_4] = -e_1, [e_1, e_5] = -e_2, [e_2, e_4] = e_2, [e_3, e_5] = e_4, \\
[e_3, e_4] &= -2e_3, [e_4, e_5] = -2e_5.
\end{aligned}$$

Вычислим дивергенцию Ψ (при помощи компьютерных программ, используя вышеприведенные формулы):

$$\delta\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 3 & 0 & 0 & -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Алгебра $\mathfrak{g}_{5,1}$ (обозначение взято из классификации [3]) задается следующими коммутационными соотношениями: $[e_2, e_4] = e_1$, $[e_3, e_5] = e_1$. Дивергенция тензора Ψ будет равна 0. Покажем, что данная $SO(3)$ -структура не является приближенно интегрируемой. Для этого вычислим тензор $(\nabla_X \Psi)(X, X, X) = 0$ или $\nabla_{(i} \Psi_{jkl)}$. Для доказательства достаточно привести одну ненулевую координату, например

$$\begin{aligned} \nabla_{(1} \Psi_{233)} &= -\Psi_{p33} \Gamma_{12}^p - \Psi_{2s3} \Gamma_{13}^s - \Psi_{23t} \Gamma_{13}^t - \Psi_{q33} \Gamma_{12}^q - \Psi_{2u3} \Gamma_{13}^u - \\ &- \Psi_{23v} \Gamma_{13}^v - \Psi_{x33} \Gamma_{12}^x - \Psi_{2y3} \Gamma_{13}^y - \Psi_{23z} \Gamma_{13}^z - \Psi_{a33} \Gamma_{12}^a - \Psi_{2b3} \Gamma_{13}^b - \Psi_{23c} \Gamma_{13}^c, \end{aligned}$$

оставляя только ненулевые компоненты тензора T , получаем

$$4\Psi_{133} \Gamma_{12}^1 - 4\Psi_{433} \Gamma_{12}^4 - 8\Psi_{235} \Gamma_{13}^5 = \sqrt{3} \neq 0.$$

Приведем программу вычисления дивергенции в программе Maple. Здесь $C[i, j, k] = C_{ij}^k$, $\text{Gamma}[i, j, p] = \Gamma_{ij}^p$, $\text{nabla_}\Psi$ – ковариантная производная тензора Ψ и $\text{delta_}\Psi$ – дивергенция тензора Ψ .

Вычисление компонент связности

```
> for i to 5 do for j to 5 do for p to 5 do
> Gamma[i, j, p] := simplify((C[i, j, p] + sum(sum(g[j, s] * C[k, i, s] * g[k, p],
'k'=1..5), 's'=1..5) + sum(sum(g[i, s1] * C[k1, j, s1] * g[k1, p], 's1'=1..5)
, 'k1'=1..5)) / 2);
> od; od; od;
```

Вычисление ковариантной производной тензора Ψ

```
> nabla_Psi := array(1..5, 1..5, 1..5, 1..5):
> for i2 to 5 do for j2 to 5 do for k2 to 5 do for s2 to 5 do
> nabla_Psi[s2, i2, j2, k2] := simplify
(-sum(Psi[r2, j2, k2] * Gamma[s2, i2, r2], r2=1..5) -
sum(Psi[i2, p2, k2] * Gamma[s2, j2, p2], p2=1..5) -
sum(Psi[i2, j2, q2] * Gamma[s2, k2, q2], q2=1..5));
> od; od; od; od;
```

Свертка с метрикой, для нахождения
дивергенции тензора Ψ

```
> delta_Psi:=array(1..5,1..5):
> for j to 5 do for k to 5 do
> delta_Psi[j,k]:=simplify(sum(sum(g[i,s]*nabla_Psi [s,i,j,k],
'i'=1..5),'s'=1..5));
> od; od;
```

ЛИТЕРАТУРА

1. Bobiński M.M., Nurowski P. Irreducible $SO(3)$ geometry in dimension five. arXiv:math/0507152v3 [math.DG], 2005.
2. Fino A.A., Chiossi S.G. Nearly integrable $SO(3)$ structures on 5-dimensional lie groups // J. Lie Theory. 2007. V. 17. No. 3. P. 539–562. (arXiv:math/0607392v1 [math.DG]).
3. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups // arXiv:math/0403555v2 [math.DG], 2004.
4. Кобаяси Ш., Намидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981.
5. Agricola I. The Srni lectures on non-integrable geometries with torsion // arXiv:math/0606705v1

Статья поступила 28.06.2012 г.

Sedykh A.G. ON APPROXIMATELY INTEGRABLE $SO(3)$ STRUCTURES ON 5-DIMENSIONAL MANIFOLDS. In this work, irreducible $SO(3)$ structures on a 5-dimensional manifold are considered. The covariant divergence of the structure tensor is shown to be zero for approximately integrable irreducible $SO(3)$ structures. Examples of left invariant irreducible $SO(3)$ structures on 5-dimensional Lie groups that have a zero covariant divergence of the structure tensor but are not approximately integrable, as well as of irreducible $SO(3)$ structures with nonzero covariant divergence of the structure tensor are presented.

Keywords: special $SO(3)$ structure, 5-dimensional manifold, Lie group.

SEDYKH Anna Gennad'evna (Kemerovo State University)

E-mail: Nuska2522@mail.ru

УДК 519.6

Ш.Х. Султонова, Н.Н. Меркулова

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УСИЛЕНИЯ ИММУННОГО ОТВЕТА С ПРИМЕНЕНИЕМ ОДНОШАГОВЫХ И МНОГОШАГОВЫХ МЕТОДОВ

Изучаются математические модели усиления иммунного ответа, представляющие собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены стационарные решения в безразмерном виде и показана их устойчивость. Результаты численных расчетов демонстрируют механизм действия стимулятора антителопродукции.

Ключевые слова: математическая модель, стационарные решения, устойчивость, численные методы.

Иммунология – это наука об иммунитете живых организмов, а главная задача иммунитета – уничтожение клеток (антигенов), которые генетически отличаются от собственных клеток организма. Вопросами защиты организма от вирусов занимается практическая медицина. Одним из способов борьбы с чужеродными вирусами является стимуляция антителопродукции. К настоящему времени в этом направлении накоплен огромный опыт, позволяющий применять в медицине математическое моделирование и численные методы [1–6].

Физико-математическая постановка задачи

В настоящей работе исследуется механизм действия САП с применением простейшей математической модели иммунного ответа Г.И. Марчука.

Считается, что в организм проникают антигены $I(t)$ (бактерии, вирусы). В процессе выработки антител $F(t)$ участвуют макрофаги M , В-лимфоциты и Т-лимфоциты. При попадании в организм антигены поглощаются макрофагами и распознаются Т- и В-лимфоцитами. Под действием Т-лимфоцитов происходит преобразование В-лимфоцитов в антителопродукторы и формируется популяция антител. Роль антител заключается в связывании антигенов и образовании иммунных комплексов.

В данной работе изучаются две возможные гипотезы о механизме действия стимулятора антителопродукции (САП), предложенные в [5]. В рассматриваемом иммунном ответе участвуют антигены $I(t)$, антитела $F(t)$, плазмоклетки $C(t)$ и «молчащие» плазмоклетки $B(t)$. По первой гипотезе, САП вовлекает в антителопродукцию «молчащие» клетки. Согласно второй гипотезе, после введения САП увеличивается время жизни плазмоклеток.

В работе рассматривается математическая модель усиления иммунного ответа [5], которая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с запаздывающим аргументом (задача Коши), в трех вариантах: M_0 – контрольная модель (без действия САП), M_1 – модель первой гипотезы, M_2 – модель второй гипотезы.

Уравнения модели M_0 с начальными условиями имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= -\gamma FV, \\
\frac{dF}{dt} &= \rho C - \eta \gamma FV - \mu_f F, \\
\frac{dC}{dt} &= \alpha F(t - \tau^*)V(t - \tau^*) - \mu_c(C - C^*), \quad t \in (0, T), \\
V(0) &= V_0, \quad C(0) = C^*, \quad F(0) = F^* = \frac{\rho C^*}{\mu_f},
\end{aligned} \tag{1}$$

где $V(t)$ – количество неразмножающегося антигена в организме, $F(t)$ – количество антител, $C(t)$ – количество плазмоклеток, производящих антитела. Первое уравнение описывает уменьшение числа антигенов в организме, коэффициент γ отражает вероятность нейтрализации антигена антителами. Второе уравнение – производство антител плазмоклетками со скоростью ρ , уменьшение количества антител после взаимодействия с антигенами с коэффициентом η и их естественную гибель со скоростью μ_f . Третье уравнение характеризует изменение количества плазмоклеток в организме за счет взаимодействия антигенов с антителами с коэффициентом α и старения клеток с константой μ_c , τ^* является промежутком времени от момента стимуляции лимфоцитов до формирования клона плазматических клеток. Константа C^* характеризует нормальный уровень плазмоклеток в организме. Обычно начальные условия для уравнений с запаздыванием задаются на интервале $[-\tau^*, 0]$. Однако по биологическому смыслу $V(t) = 0$ при $t < 0$, и поэтому начальные условия задаются при $t = 0$.

Предполагается, что все параметры в (1) и V_0 , C^* , F^* неотрицательны. Тогда, согласно [6], решение задачи (1) существует и единственно при всех $t \geq 0$.

Параметры модели после приведения уравнений к безразмерному виду подбираются из условия устойчивости стационарного решения, о чем речь пойдет ниже. Значение T в безразмерном виде в дальнейшем полагается равным 14.

Пусть в соответствии с моделью M_1 в организме имеется определенное количество плазмоклеток («молчащие» клетки), которые не могут производить антитела. Для их описания в модель M_1 добавляется четвертое уравнение, описывающее изменение количества «молчащих» клеток $B(t)$. Тогда уравнения второй модели с начальными условиями будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= -\gamma FV, \\
\frac{dF}{dt} &= \rho C - \eta \gamma FV - \mu_f F, \\
\frac{dC}{dt} &= \alpha_1 F(t - \tau^*)V(t - \tau^*) - \mu_c(C - C^*) + \delta_B B, \\
\frac{dB}{dt} &= \alpha_2 F(t - \tau^*)V(t - \tau^*) - \mu_B B - \delta_B B, \quad t \in (0, T), \\
V(0) &= V_0, \quad C(0) = C^*, \quad F(0) = F^* = \frac{\rho C^*}{\mu_f}, \quad B(0) = B_0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Параметры γ , ρ , η , μ_f , α_1 , μ_c в модели M_1 взяты такими же, как и в модели M_0 . В третьем и четвертом уравнениях добавлены члены $+\delta_B B$ и $-\delta_B B$, описывающие переход «молчащих» клеток в зрелые плазматические клетки. Параметр μ_B соответствует обратной величине времени жизни B -клеток, $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

В модели M_2 до введения САП иммунный ответ развивается в соответствии с моделью M_0 , поэтому уравнения модели M_2 не приводятся. Отличие M_2 от M_0 состоит в параметре μ_c – обратной величине среднего времени жизни плазмоклеток, значение которого уменьшается после стимуляции, так как увеличивается время жизни клеток.

В моделях M_0 , M_1 , M_2 все рассматриваемые величины размерные. На примере модели M_0 показывается переход к безразмерному виду.

Вводятся обозначения

$$\begin{aligned} \tau &= \mu_f t, \quad \Delta\tau = \mu_f \tau^*, \quad v = \frac{V}{V_m}, \quad c = \frac{C}{C_m}, \quad f = \frac{F}{F_m}; \\ t &= \frac{\tau}{\mu_f}, \quad V = vV_m, \quad C = cC_m, \quad F = fF_m, \\ C_m &= C^*, \quad F_m = \frac{\rho C^*}{\mu_f}, \quad V_m = \frac{\mu_f}{\eta\gamma} - \text{масштабные множители.} \end{aligned} \quad (3)$$

После подстановки (3) в (1) получается система ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= -h_1 f v, \\ \frac{df}{d\tau} &= c - f - f v, \\ \frac{dc}{d\tau} &= h_2 v (\tau - \Delta\tau) f (\tau - \Delta\tau) - h_3 (c - 1), \\ v(0) &= v_0, \quad f(0) = f_0, \quad c(0) = c_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $h_1 = \frac{\rho\gamma C^*}{\mu_f^2}$, $h_2 = \frac{\alpha\rho}{\mu_f\eta\gamma}$, $h_3 = \frac{\mu_c}{\mu_f}$ – безразмерные коэффициенты, $\Delta\tau$ – безразмерное время запаздывания, которое в дальнейшем полагается равным шагу сетки.

Аналогичным способом приводятся к безразмерному виду уравнения остальных моделей. В случае модели M_1 имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= -h_1 f v, \\ \frac{df}{d\tau} &= c - f - f v, \\ \frac{dc}{d\tau} &= h_2 v (\tau - \Delta\tau) f (\tau - \Delta\tau) - h_3 (c - 1) + h_4 b, \\ \frac{db}{d\tau} &= h_5 v (\tau - \Delta\tau) f (\tau - \Delta\tau) - h_6 b - h_7 b, \\ v(0) &= v_0, \quad f(0) = f_0, \quad c(0) = c_0, \quad b(0) = b_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $h_2 = \frac{\alpha_1\rho}{\mu_f\eta\gamma}$, $h_4 = \frac{\delta_B}{\mu_f}$, $h_5 = \frac{\alpha_2\rho}{\mu_f\eta\gamma}$, $h_6 = \frac{\mu_B}{\mu_f}$, $h_7 = \frac{\delta_B}{\mu_f}$, $B_m = C_m$.

Безразмерный вид модели M_2 не приводится, так как она отличается от (4) только параметром h_3 .

Для определения параметров моделей в работе находятся стационарные решения, которые затем исследуются на устойчивость.

Стационарные решения выводятся приравниванием правых частей к нулю. Без подробного рассмотрения приводятся стационарные решения изучаемых моделей, полученные в данной работе:

$$v_{ст} = 0, f_{ст} = 1, c_{ст} = 1 \text{ — для модели } M_0;$$

$$v_{ст} = 0, f_{ст} = 1, c_{ст} = 1, b_{ст} = 0 \text{ — для модели } M_1;$$

$$v_{ст} = 0, f_{ст} = 1, c_{ст} = 1 \text{ — для модели } M_2.$$

Исследование устойчивости стационарного решения показывается на примере модели M_0 . Рассматриваются решения, мало отклоняющиеся от стационарного:

$$\xi_v = v - v_{ст}, \xi_f = f - f_{ст}, \xi_c = c - c_{ст}. \quad (6)$$

После подстановки (6) в (4) и необходимых преобразований с учетом малости величин второго порядка получается следующая система ОДУ:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_v}{d\tau} &= -h_1 \xi_v f_{ст} - h_1 \xi_f v_{ст}, \\ \frac{d\xi_f}{d\tau} &= \xi_c - (1 + v_{ст}) \xi_f - \xi_v f_{ст}, \\ \frac{d\xi_c}{d\tau} &= h_2 v_{ст} \xi_f + h_2 \xi_v f_{ст} - h_3 \xi_c. \end{aligned} \quad (7)$$

Матрица Якоби системы (7) представима в виде

$$A = \begin{pmatrix} -h_1 f_{ст} & -h_1 v_{ст} & 0 \\ -f_{ст} & -v_{ст} - 1 & 1 \\ h_2 f_{ст} & h_2 v_{ст} & -h_3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A на стационарном решении имеют вид

$$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -h_1; \lambda_3 = -h_3.$$

Все $\lambda_i < 0, i = \overline{1,3}$, что означает асимптотическую устойчивость по Ляпунову [8] при $h_1, h_3 > 0$.

Исследование на устойчивость стационарных решений моделей M_1, M_2 проводится аналогично вышеизложенному. Устойчивость доказана при всех $h_i > 0, i = \overline{1,7}$. При этом показано, что особые точки моделей есть устойчивые узлы.

Результаты расчетов

Для получения численного решения был проведен вычислительный эксперимент на компьютере. Результаты расчетов оформлены в виде графиков и приводятся по тексту работы. Все рассмотрения проводились для промежутка времени $\tau \in [0, 14]$ при начальных данных: $v_0 = 0,04, f_0 = 0,065, c_0 = 1, h_1 = 0,5, h_2 = 0,45, h_3 = 0,2$ — для модели M_0 ; $v_0 = 0,04, f_0 = 0,065, c_0 = 1, b_0 = 0,5, h_1 = 0,5, h_2 = 0,45, h_3 = 0,2, h_4 = 0,01, h_5 = 0,1, h_6 = 0,7, h_7 = 0,01$ — для модели M_1 ; $v_0 = 0,04, f_0 = 0,065, c_0 = 1, h_1 = 0,5, h_2 = 0,45, h_3 = 0,1$ — для модели M_2 . Расчеты проводились с применением одношаговых методов (методы Рунге-Кутты четвертого порядка точности), многошаговых методов (методы Адамса) [7] и чисто неявного А-устойчивого метода (метод типа Гира) [7] при $n \geq 40$ (расчетный шаг $\Delta\tau = 14/n$). Досто-

верность программ, по которым велись расчеты, проверялась решением системы ОДУ, имеющей аналитическое решение.

Одношаговые методы Рунге-Кутты являются условно устойчивыми, и неустойчивость методов наблюдается при количестве узлов сетки $n < 10$. Расчеты проводились для различного количества узлов сетки, и было установлено, что при $n \geq 40$ наблюдается сходимость методов. На рис. 1 – 3 представлено поведение антигенов, антител, плазмоклеток и «молчащих» клеток с течением времени в моделях M_0 , M_1 , M_2 при $n = 40$.

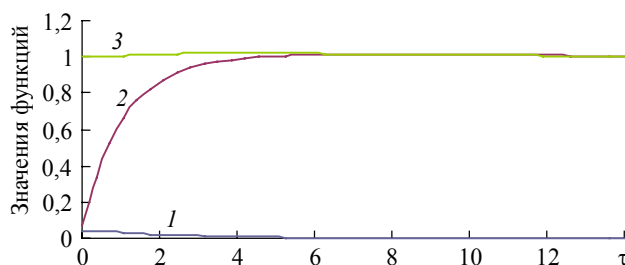


Рис. 1. Поведение $v(\tau)$, $f(\tau)$, $c(\tau)$ с течением времени в модели M_0 :
1 – $v(\tau)$; 2 – $f(\tau)$; 3 – $c(\tau)$

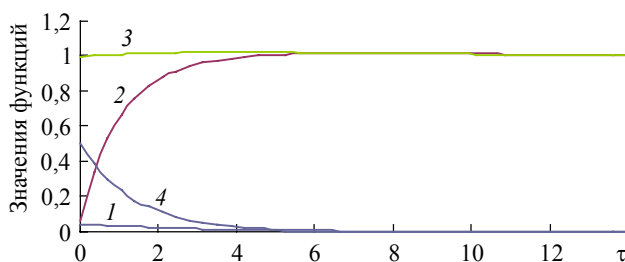


Рис. 2. Поведение $v(\tau)$, $f(\tau)$, $c(\tau)$, $b(\tau)$ с течением времени в модели M_1 :
1 – $v(\tau)$; 2 – $f(\tau)$; 3 – $c(\tau)$; 4 – $b(\tau)$

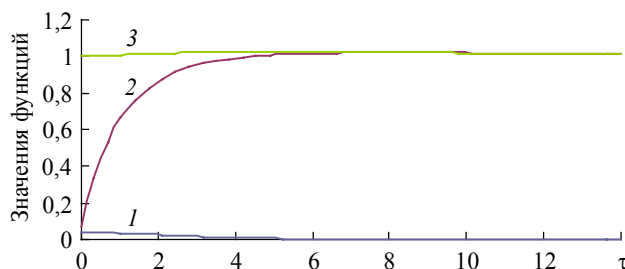


Рис. 3. Поведение $v(\tau)$, $f(\tau)$, $c(\tau)$ с течением времени в модели M_2 :
1 – $v(\tau)$; 2 – $f(\tau)$; 3 – $c(\tau)$

Анализ полученных результатов показывает, что в модели M_0 при незначительном изменении количества плазматических клеток количество антител постепенно растет от 0,065 до 1,00509, а количество антигенов убывает (рис. 1). В соответствии с моделью M_1 под действием САП «молчащие» клетки созревают в плазматические клетки, вследствие чего количество плазмоклеток увеличивается

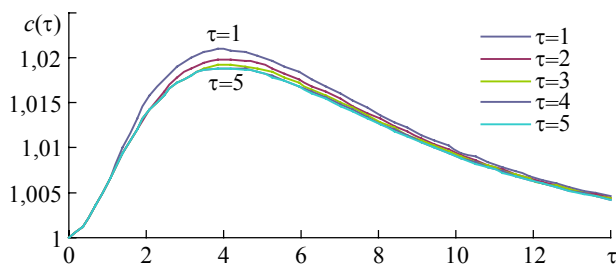
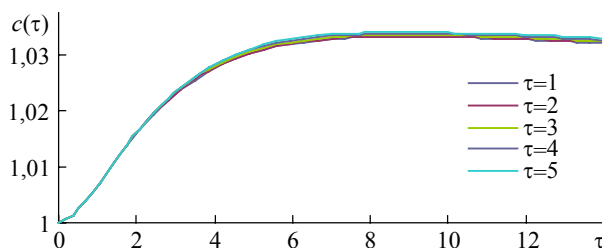
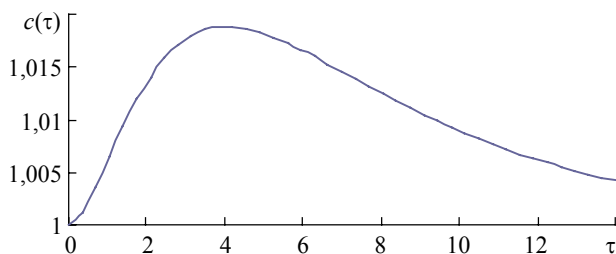
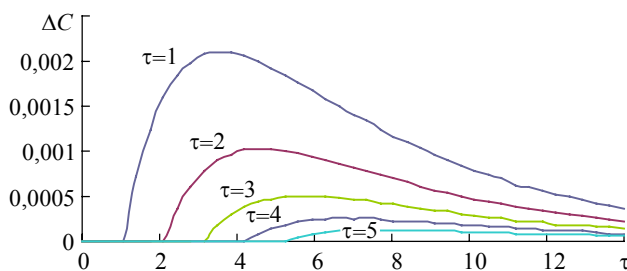
от 1 до 1,02248 и быстрее растет количество антител от 0,065 до 1,01443 (рис. 2). Согласно второй гипотезе, в модели M_2 введение САП приводит к увеличению времени жизни C -клеток. Следовательно, их количество меняется медленнее, чем в модели M_0 , что способствует соответственно увеличению количества антител (рис. 3). Как следует из графиков, во всех моделях идет вывод антигенов из организма, т.е. выздоровление организма. Однако по сравнению с моделью M_0 в моделях M_1 и M_2 процесс выздоровления организма идет быстрее.

Метод Адамса согласно классической теории устойчивости [7] является абсолютно устойчивым методом и не дает ограничений на шаг интегрирования. Процесс вычислений организуется как «предиктор-корректор»: начальные значения предсказываются по методу Рунге-Кутты четвертого порядка точности; затем таблица значений для $v(\tau)$, $f(\tau)$, $c(\tau)$ (модель M_0) продолжается по явной и неявной формулам метода Адамса. По явной формуле значения предсказываются, по неявной – уточняются до достижения заданной точности. Использование абсолютно устойчивых методов усложняет процесс вычислений по сравнению с методами Рунге-Кутты, но не требует ограничений на шаг сетки. Численные значения, полученные по методам Адамса и Рунге-Кутты четвертого порядка, мало отличаются между собой и совпадают с точностью до четвертого знака после запятой. Результаты численных расчетов по методу Гира сравнивались с методом Адамса в одноименных точках сетки. Поведение погрешности во всех случаях носит характер «затухающей» волны и максимальное отличие между значениями не превосходит 0,0003.

В работе исследовалось действие САП в зависимости от времени его введения. При этом моделировалось введение САП путем изменения параметров h_4 , h_7 в модели M_1 и h_3 в модели M_2 для $\tau = 1, 2, 3, 4, 5$. Для удобства дальнейших обсуждений принимается следующий счет безразмерного времени: $\tau = 1$ – один день, $\tau = 2$ – два дня и т.д. Результаты, представленные на рис. 4 и 5, показывают характер изменения количества плазмоклеток $c(\tau)$ в зависимости от времени введения САП. Как следует из рисунков, в этом случае модели M_1 и M_2 предсказывают в рассматриваемом промежутке времени качественно различные динамики течения процесса.

В самом деле, в случае модели M_1 (рис. 4) в динамике количества зрелых плазмоклеток наблюдается понижение высоты пика в зависимости от времени введения САП: чем позже вводим САП, тем ниже опускается пик. При этом результаты в модели M_1 отличаются от результатов, полученных в модели M_0 (рис. 6), ростом количества плазмоклеток. В модели M_0 максимальное значение $c(\tau)$ равно 1,020, а в модели M_1 оно достигается при введении САП через день ($\tau=1$) и равно 1,021. Это пиковое значение появляется на пятый день после иммунизации. Модель M_2 дает иную картину динамики C -клеток, и ярко выраженного пика при этом не наблюдается. Однако максимальное значение $c(\tau)$ равное 1,034 появляется на десятый день и держится два дня, а затем незначительно убывает до 1,033. Результаты качественно похожи между собой и мало отличаются вне зависимости от времени введения фактора (рис. 5).

Одной из характеристик роста количества плазмоклеток является величина ΔC , равная разности между количеством плазмоклеток в модели M_1 (модели M_2) и их количеством в модели M_0 (в контроле). Изучалось поведение величины ΔC в моделях M_1 и M_2 в зависимости от времени введения САП. Изменение данной величины показано на рис. 7, 8. В модели M_1 ΔC достигает максимального значения равного 0,0021 на четвертый день при введении САП через день, затем плавно убывает. Аналогичная картина наблюдается и в остальных случаях.

Рис. 4. Динамика $c(\tau)$ в зависимости от времени введения САП (модель M_1)Рис. 5. Динамика $c(\tau)$ в зависимости от времени введения САП (модель M_2)Рис. 6. Динамика $c(\tau)$ в модели M_0 Рис. 7. Величина ΔC для модели M_1

Из рис. 7 видно, что более позднее введение фактора приводит к понижению высоты пика величины ΔC : при введении САП через день она равна 0,0021, через два дня – 0,001 и т.д.

Другая картина наблюдается при исследовании величины ΔC в модели M_2 (рис. 8). В данном случае поведение ΔC не зависит от времени введения фактора и возрастает от 0 до 0,029.

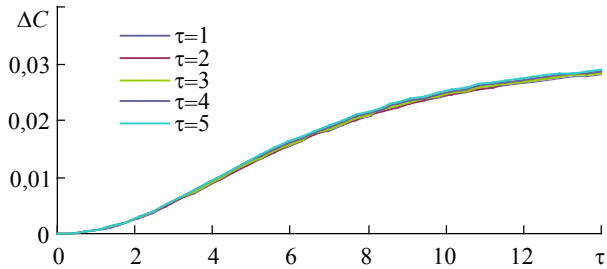


Рис. 8. Величина ΔC для модели M_2

В работе исследовалась динамика коэффициента усиления иммунного ответа $R(\tau)$, равного отношению количества плазмоклеток в соответствии с моделью M_1 (моделью M_2) к их количеству в модели M_0 . Характер динамики коэффициента усиления иммунного ответа $R(\tau)$ с течением времени для модели M_1 показан на рис. 9. Из полученных результатов видно, что во всех случаях наблюдается рост значений $R(\tau)$ от 0 до пикового, затем их плавное убывание. При этом происходит

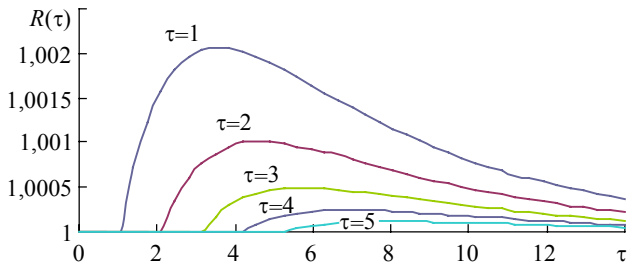


Рис. 9. Динамика коэффициента усиления иммунного ответа $R(\tau)$ для модели M_1

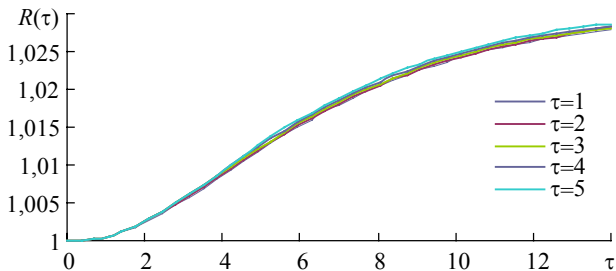


Рис. 10. Динамика коэффициента усиления иммунного ответа $R(\tau)$ для модели M_2

сдвиг пикового значения вправо в зависимости от времени введения САП и наблюдается его понижение: при введении САП через день максимальное значение равно 1,002 и достигается примерно на четвертый день, при введении САП через два дня оно равно 1,001 и достигается на пятый день и т.д. При введении САП на пятый день значения $R(\tau)$ приближаются к единице. На рис. 10 изображено поведение коэффициента усиления иммунного ответа $R(\tau)$ для модели M_2 . Как видно из рисунка, кривые мало отличаются между собой вне зависимости от времени

введения фактора. Значения $R(\tau)$ меняются от 1 до 1,028, т.е. незначительно отклоняются от единицы.

Заключение

Таким образом, в работе изучены три математические модели иммунологии с применением численных методов. Из проведенного вычислительного эксперимента на компьютере можно сделать следующие выводы:

1) более раннее введение САП в заболевший организм ускоряет процесс выздоровления;

2) гипотезы, высказанные в работе [5], подтверждены проведенными исследованиями. Из анализа расчетов следует, что введение САП в случае модели M_1 дает ярко выраженные результаты на примере поведения ΔC и $R(\tau)$. САП в модели M_2 почти не зависит от времени ее введения;

3) имеет смысл увеличить интервал наблюдения за характеристиками иммунного ответа, позволяющий увидеть динамику поведения плазмоклеток в случае модели M_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты* / ред. Г.И. Марчук. М.: Наука, 1991. 299 с.
2. *Математические модели в иммунологии и медицине* / ред. Г.И. Марчук. М.: Мир, 1986. 150 с.
3. *Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии* / Г.И. Марчук. М.: Наука, 1985. 240 с.
4. *Луговская Ю.П. Математическое моделирование оптимальных процессов лечения инфекционных заболеваний: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Самара, 2009.*
5. *Математические модели в иммунологии и медицине: сб. статей / пер. с англ. под ред. Г.И. Марчука, Л.Н. Белых. М.: Мир, 1986. 310 с.*
6. *Белых Л.Н., Марчук Г.И. Качественный анализ простейшей математической модели инфекционного заболевания // Математическое моделирование в иммунологии и медицине. Новосибирск: Наука, 1982. С. 5–26.*
7. *Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений: учеб. пособие. Томск: ТМЛ-Пресс, 2007. Ч. 2. 288 с.*
8. *Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.*

Статья поступила 20.03.2013 г.

Sultonova Sh.Kh., Merkulova N.N. THE RESEARCH OF A MATHEMATICAL MODEL OF IMMUNE RESPONSE REINFORCEMENT WITH APPLICATION OF ONE-STEP AND MULTISTEP METHODS. Mathematical models of immune response reinforcement as systems of ordinary differential equations are studied. Stationary solutions are obtained in a dimensionless form and their stability is shown. The results of numerical calculations demonstrate the mechanism of the antibody stimulator action.

Keywords: mathematical model, stationary solutions, stability, numerical methods.

SULTONOVA Shahnoza Haidarovna (Tomsk State University)

E-mail: sultonova_sh@sibmail.com

MERKULOVA Nina Nikolaevna (Tomsk State University)

УДК 512.541

А.Р. Чехлов

**О ПРЯМЫХ СУММАХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП
С ИНВАРИАНТНЫМИ МОНОМОРФИЗМАМИ¹**

Описаны прямые суммы циклических групп с инвариантными слева или справа мономорфизмами.

Ключевые слова: инвариантные слева или справа мономорфизмы, кольцо эндоморфизмов, прямая сумма циклических групп, периодически полная группа.

Все группы в статье предполагаются абелевыми. Через $E(A)$ обозначается кольцо эндоморфизмов группы A , через $o(a)$ – порядок элемента a , 1_A – тождественный автоморфизм группы A , $h(a)$ – высота элемента a p -группы. Если $f: A \rightarrow B$ – гомоморфизм, то $f|_H$ – ограничение f на $H \subseteq A$.

Будем говорить, что A – группа с *инвариантными слева* (соответственно *справа*) *мономорфизмами*, если для любых мономорфизмов α, β группы A найдется ее мономорфизм γ со свойством $\alpha\beta = \gamma\alpha$ (соответственно $\alpha\beta = \beta\gamma$). Рядом авторов изучались группы с инвариантными слева или справа эндоморфизмами [1, § 19, 34].

Отметим, что автоморфизмы любой группы инвариантны как слева, так и справа. Следовательно, у конечной группы все мономорфизмы инвариантны слева и справа. Для сравнения отметим, что периодические группы с инвариантными слева или справа эндоморфизмами имеют коммутативное кольцо эндоморфизмов [1, следствие 19.3]. В [2] изучались группы с нормальными кольцами эндоморфизмов, т.е. группы, все идемпотентные эндоморфизмы которых центральны. В [3] исследовались такие периодические группы A , что любые два элемента группы A одинакового порядка переводятся один в другой некоторым ее автоморфизмом. Близкие вопросы рассматривались в [4–24] и др.

Автором получены следующие результаты:

Теорема 1. Для делимой группы D эквивалентны следующие условия:

- а) ее мономорфизмы инвариантны справа;
- б) любой ее мономорфизм является автоморфизмом;
- в) часть без кручения группы D , а также каждая ее p -компонента имеют конечный ранг.

Теорема 2. 1) Мономорфизмы каждой делимой группы инвариантны слева.

2) Если делимая часть группы A является группой, рассматриваемой в теореме 1, то мономорфизмы группы A инвариантны слева тогда и только тогда, когда этим свойством обладает ее редуцированная часть.

3) У нередуцированной группы мономорфизмы инвариантны справа тогда и только тогда, когда этим свойством обладают ее редуцированная и делимая части.

¹ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, № 14. В 37.21.0354 и частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

Автором изучались также группы без кручения с инвариантными мономорфизмами. Так, доказано, что у редуцированной группы без кручения с инвариантными слева или справа мономорфизмами кольцо эндоморфизмов является нормальным.

Ясно, что при изучении периодических групп с инвариантными мономорфизмами можно ограничиться примарным случаем. Ввиду отмеченного выше свойства конечных групп следующая теорема требует доказательства только необходимости.

Теорема 3. Пусть A – p -группа, являющаяся прямой суммой циклических групп. Мономорфизмы группы A инвариантны справа тогда и только тогда, когда она является конечной группой.

Доказательство. Если A – бесконечная прямая сумма циклических групп, то можно так подобрать ее мономорфизмы α и β , что $\text{im } \alpha \cap \text{im } \beta = 0$, но тогда равенство $\alpha\beta = \beta\gamma$ невозможно.

Всякую чистую подгруппу, являющуюся прямой суммой циклических групп, можно вложить в некоторую базисную подгруппу p -группы. Однако не всякий мономорфизм базисной подгруппы, даже если он продолжается до эндоморфизма самой группы, является ее мономорфизмом.

Предложение 4. Пусть A – неограниченная редуцированная периодически полная p -группа. Тогда для каждой ее базисной подгруппы B существует такой эндоморфизм $\varphi \in E(A)$, что $\ker(\varphi|B) = 0$, $\varphi|B \in E(B)$ и $\ker \varphi \neq 0$.

Доказательство. Поскольку группа A неограничена, то ее базисная подгруппа $B \neq A$. Запишем B в виде $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_{k_n}$, где B_{k_n} – прямая сумма циклических групп порядка p^{k_n} , $B_{k_n} \neq 0$ и $k_1 < k_2 < \dots$. Выберем в каждой B_{k_n} по циклическому прямому слагаемому $\langle b_{k_n} \rangle$ и построим отображение:

$$b_{k_1} \mapsto p^{k_2-k_1}b_{k_2} \text{ и } b_{k_n} \mapsto -b_{k_n} + p^{k_{n+1}-k_n}b_{k_{n+1}} \text{ при } n > 1;$$

ясно, что его можно продолжить до мономорфизма f группы B (в общем случае не однозначно).

Подгруппа $B_1 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \langle b_{k_n} \rangle$ является прямым слагаемым в B ,

$B = B_1 \oplus B_2$. Имеем $A = \overline{B_1} \oplus \overline{B_2}$, где черта обозначает периодическое p -адическое пополнение (т.е. всякая ограниченная последовательность Коши этой группы в p -адической топологии имеет предел). Поэтому без ограничения общности можно считать, что $A = \overline{B_1}$. В силу периодической полноты группы A f продолжается (единственным образом) до эндоморфизма φ группы A . Каждый элемент группы A можно представить в виде $(b'_{k_1}, b'_{k_2}, \dots)$, где $b'_{k_i} \in B_{k_i}$. Если теперь

$$a = (p^{k_1-1}b_{k_1}, p^{k_2-1}b_{k_2}, \dots, p^{k_n-1}b_{k_n}, \dots), \text{ то } \varphi a = 0.$$

Действительно,

$$a = p^{k_1-1}b_{k_1} + p^{k_2-1}b_{k_2} + \dots + p^{k_n-1}b_{k_n} + p^{k_{n+1}-1}a_n,$$

где

$$a_n = (0, \dots, 0, b_{k_{n+1}}, p^{k_{n+2}-k_{n+1}}b_{k_{n+2}}, \dots).$$

Откуда $\varphi a = p^{k_{n+1}-1}(b_{k_{n+1}} + \varphi a_n) \in p^{k_{n+1}-1}A$ и, значит, $\varphi a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} p^{k_n}A = 0$.

Заметим, что всякий эпиморфизм f базисной подгруппы B периодически полной p -группы A продолжается до эпиморфизма группы A . Действительно, f продолжается до эндоморфизма φ группы A , а так как $A = \overline{B}$ и $\varphi B = B$, то $\varphi A = \varphi \overline{B} = \overline{\varphi B} = \overline{B} = A$. Аналогичное утверждение справедливо для p -адической алгебраически компактной группы.

Пусть p -группа A имеет подгруппу вида $H = \langle b \rangle \oplus \langle g \rangle \oplus C$, где $o(b) \leq o(g)$, а C – бесконечная прямая сумма циклических групп, каждый образующий которой имеет порядок $> o(g)$; причем мономорфизмы подгруппы H продолжаются до мономорфизмов группы A . Тогда A не обладает свойством левой инвариантности мономорфизмов.

Действительно, так как группа C бесконечна, то можно построить такие мономорфизмы α, β группы H , что $\alpha b = b$, $\alpha g = p^k x$, где $x \in C$, $k \geq 1$ и $\beta g = b + g$. Тогда $\alpha\beta(g) = \alpha(b + g) = b + p^k x \neq \gamma\alpha(g) = \gamma(p^k x)$ для любого $\gamma \in E(A)$.

В частности, пусть A – редуцированная p -группа, являющаяся прямой суммой циклических групп и ее мономорфизмы инвариантны слева. Тогда, как это вытекает из предыдущего абзаца, либо A – конечная группа, либо имеет вид $(*)$ $A = B \oplus G \oplus F$, где $B = \langle b \rangle$ – циклическая группа, G – бесконечная прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p' и, если $B \neq 0$, то $p' > o(b)$, а $F = 0$ или $F = \bigoplus_{i=1}^n \langle x_i \rangle$ – такая конечная группа, что $p' < o(x_i)$ для каждого $i = 1, \dots, n$.

Теорема 5. *У всякой p -группы A , имеющей вид $(*)$, мономорфизмы инвариантны слева.*

Доказательство. Пусть α – мономорфизм группы A . Так как высоты элементов из цоколя $F[p] = \{x \in F \mid px = 0\}$ группы F больше высот элементов из $B \oplus G$, то $(\alpha(F[p])) \cap (B \oplus G) = 0$ и, значит, $(\alpha F) \cap (B \oplus G) = 0$. Следовательно, если θ – проекция группы A на F , то $(\theta\alpha)|_F$ – мономорфизм конечной группы F , поэтому $(\theta\alpha)F = F$. Таким образом, $(B \oplus G) \oplus \alpha F = A$. Далее $\alpha B \cap \alpha G = 0$ и $\alpha(B \oplus G) \cap \alpha F = 0$. А поскольку прямое слагаемое αF является абсолютным в A [25, § 9, упр. 8], то существует такое разложение $A = C \oplus \alpha F$, что $\alpha(B \oplus G) \subseteq C$. Здесь $C \cong B \oplus G$, поэтому αG является ограниченной чистой подгруппой в C , значит, αG – прямое слагаемое в C , $C = \alpha G \oplus E$ [25, предложение 27.1]. Имеем $C = K \oplus (\alpha G \oplus Z)$, где $K \cong B$, а $\alpha G \oplus Z \cong G$. Аналогичным образом, для всякого мономорфизма β группы A получаем

$$A = V \oplus (\alpha\beta G \oplus U) \oplus \alpha\beta F, \text{ где } V \cong B, \alpha\beta G \oplus U \cong G, \text{ а } \alpha\beta F \cong F.$$

Поэтому существует мономорфизм $\gamma: \alpha G \oplus \alpha F \rightarrow \alpha\beta G \oplus \alpha\beta F$, такой, что $\gamma\alpha = \alpha\beta$ на подгруппе $G \oplus F$ (достаточно задать γ на образующих этих подгрупп). Осталось показать, что мономорфизм γ можно распространить на $K \oplus Z$ так, чтобы равенство $\gamma\alpha = \alpha\beta$ осталось верным. Заметим, что так как $\alpha\beta A \subseteq \alpha A$, то несложно показать, что ранг группы U не меньше ранга группы Z . Поэтому, если $B = 0$, то можно продолжить γ на Z как произвольный мономорфизм $Z \rightarrow U$, и в этом случае утверждение доказано.

Допустим, что $B \neq 0$ и $o(b) = p^k$. Имеем

$$\alpha b = x + y + z, \text{ где } x \in K, y \in \alpha G, z \in Z,$$

$$\alpha\beta b = v + w + u + h, \text{ где } v \in V, w \in \alpha\beta G, u \in U, h \in \alpha\beta F.$$

Элемент u можно вложить в циклическое прямое слагаемое $\langle u_0 \rangle$ группы U , $U = \langle u_0 \rangle \oplus U'$.

Предположим, что высота $h(ab)$ элемента ab равна 0. Так как $h(y), h(z) > 0$, то $h(x) = 0$ и поэтому $K = \langle x \rangle$. Кроме того, $C = \langle x + y + z \rangle \oplus \alpha G \oplus Z$. Значит, можно считать, что $y = z = 0$, т.е. $ab = x$ и $K = \langle ab \rangle$. Если $h(ab) = 0$, то и $h(\alpha\beta b) = 0$. Поэтому можно считать, что $V = \langle \alpha\beta b \rangle$. Положим $\gamma(ab) = \alpha\beta b$ и зададим γ на Z как произвольный мономорфизм $Z \rightarrow U$. Построенный γ будет искомым мономорфизмом; γ можно построить и в том случае, если $h(\beta b) > 0$, а Z имеет бесконечный ранг.

Пусть ранг группы Z конечен и $h(\beta b) > 0$. Покажем, что ранг группы U больше ранга группы Z . Так как $h(ab) = 0$, то $K = \langle ab \rangle = \alpha B$ и, значит, $K \oplus \alpha G \oplus \alpha F = \alpha A$. Ранги групп Z и U совпадают с соответствующими рангами их цоклей $Z[p]$ и $U[p]$. Поскольку $h(\alpha\beta b) > 0$, то $h(v) > 0$ и, значит, $p^{k-1}v = 0$. Поэтому

$$p^{k-1}\alpha\beta b \in (p^{r-1}A)[p] = (\alpha\beta G \oplus U \oplus \alpha\beta F)[p],$$

а так как $Z[p] \subseteq (p^{r-1}A)[p]$, то, если ранги подгрупп $Z[p]$ и $U[p]$ совпадают, найдется такой элемент $z \in Z[p]$, что

$$p^{k-1}\alpha\beta b - z \in (\alpha\beta G \oplus \alpha\beta F)[p].$$

Отсюда $z \in \alpha A$. Противоречие. Итак, ранг Z не больше ранга группы U' . Поэтому если $\gamma(ab) = \alpha\beta b$ и γ действует на Z как произвольный мономорфизм $Z \rightarrow U'$, то он является искомым.

Допустим теперь, что $h(ab) > 0$. Так как $o(ab) = o(b)$, а $o(x) < o(b)$ (ввиду того, что $h(ab) > 0$), то $o(z) = o(b)$ и, значит, $h(z) = r - k$. Элемент z можно вложить в циклическое прямое слагаемое $\langle z_0 \rangle$ группы Z , $Z = \langle z_0 \rangle \oplus Z'$.

Предположим, что $h(x) \geq r - k$. Тогда $h(v) \geq r - k$. Пусть γ действует на K и Z' как произвольные мономорфизмы $K \rightarrow V$, $Z' \rightarrow U'$. Так как $h(y) \geq r - k$, то отображение $z \rightarrow c$, где $c = v + w + u + h - \gamma u - \gamma x$ ($y \in \alpha G$, поэтому элемент γu определен), продолжается до мономорфизма $\langle z_0 \rangle \rightarrow \langle c_0 \rangle$, где $p^{r-k}c_0 = c$. Поскольку $o(b) = o(u)$, то каждая из подгрупп γK , $\gamma \alpha G$, $\gamma \langle z_0 \rangle$, $\gamma Z'$, $\gamma \alpha F$ не пересекается с суммой других. Откуда следует, что γ — мономорфизм; он является искомым.

Пусть, наконец, $h(x) < r - k$ и $h(x) = s > 0$. Так как $h(v) \geq h(x)$, то существует гомоморфизм $K \rightarrow V$, переводящий элемент x в v . Выберем элемент $u' \in \langle u_0 \rangle$ со свойством $o(u') = o(x)$ и положим $\gamma x = v + u'$. Тогда ограничение γ на K является мономорфизмом $K \rightarrow V \oplus \langle u_0 \rangle$. Поскольку $h(u') > h(u)$ (и, значит, $o(u') < o(u)$), то отображение $z \mapsto w + u + h - \gamma u - u'$ продолжается до мономорфизма $\langle z_0 \rangle \rightarrow A$. Здесь также $o(b) = o(u)$. Продолжая действие γ на Z' как произвольный мономорфизм $Z' \rightarrow U'$, получаем искомым мономорфизм γ .

Для доказательств теоремы 6 потребуются следующие свойства:

Если группа обладает свойством левой инвариантности мономорфизмов, то каждое ее вполне инвариантное прямое слагаемое также обладает этим свойством.

Если группа обладает свойством правой инвариантности мономорфизмов, то каждое ее прямое слагаемое также обладает этим свойством.

Действительно, пусть $A = B \oplus C$ и α, β — мономорфизмы группы B . Продолжим их до мономорфизмов $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ группы A , полагая $\bar{\alpha}|_C = 1_C$, $\bar{\beta}|_C = 1_C$. Тогда если $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{\beta}\gamma$, то из задания $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ следует, что $\gamma|_B$ — мономорфизм группы B и $\alpha\beta = \beta(\gamma|_B)$.

Теорема 6. Пусть $A = T \oplus R$ — редуцированная расщепляющаяся группа, где T — периодическая ее часть, а R — часть без кручения. Тогда:

1) группа A обладает свойством левой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладают группы T и R , причем подгруппа R вполне инвариантна в A ;

2) если T – конечная группа, то группа A обладает свойством правой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает группа R .

Доказательство. Ввиду отмеченных перед теоремой двух свойств для доказательства необходимости осталось показать вполне инвариантность подгруппы R в случае левой инвариантности. Пусть $fx \neq 0$ для некоторого $x \in R$, где $f \in \text{Hom}(R, T)$. В силу редуцированности $fx \notin nT$ для некоторого n . Зададим мономорфизмы α, β группы A следующим образом: $\alpha|_T = 1_T$, $\alpha|_R = n \cdot 1_R$, $\beta|_T$ – произвольный мономорфизм группы T , а $\beta y = fy + y$ для каждого $y \in R$. Имеем $\alpha\beta(x) = \alpha(fx + x) = fx + nx$. Допустим, что $\alpha\beta(x) = \gamma\alpha(x)$. Тогда если $\pi: A \rightarrow T$ – проекция, то $\pi\gamma\alpha(x) = \pi\gamma(x) = fx$. Полученное противоречие показывает, что $\text{Hom}(R, T) = 0$, т.е. $pR = R$ для каждого простого p с условием $T_p \neq 0$.

Доказательство достаточности требуется для правой инвариантности. Ввиду вполне инвариантности подгруппы T эндоморфизмы f, g группы A можно представить в виде матриц $f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$, где $\alpha, \delta \in E(T)$, $\beta, \varepsilon \in \text{Hom}(R, T)$, а $\gamma, \zeta \in E(R)$. Имеем $\alpha\delta = \delta\eta$, $\gamma\zeta = \zeta\lambda$ для некоторых мономорфизмов $\eta \in E(T)$ и $\lambda \in E(R)$. Мономорфизм δ является автоморфизмом группы T . Поэтому определен гомоморфизм

$$\mu = \delta^{-1}(\alpha\varepsilon + \beta\zeta - \varepsilon\lambda) \in \text{Hom}(R, T).$$

Если теперь $h = \begin{pmatrix} \eta & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, то $fg = gh$.

В следующем результате через $\mathbf{Z}$ обозначается аддитивная группа целых чисел.

Следствие 7. Пусть A – прямая сумма циклических групп. Группа A обладает свойством:

1) левой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда, либо A – периодическая группа, каждая p -компонента которой конечна или имеет вид (*) из теоремы 5, либо $A \cong \mathbf{Z}$;

2) правой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда $A = B \oplus R$, где B – периодическая группа, каждая p -компонента которой является конечной, а $R = 0$ или $R \cong \mathbf{Z}$.

В [26] некоторые понятия и результаты теории абелевых групп перенесены на близкие классы алгебр, а в [27] рассматривались вопросы продолжения автоморфизмов подмодулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2007.
2. Чехлов А.Р. Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48. № 4. С. 520–539.
3. Гриншпон С.Я. Почти гомоморфно изоморфные абелевы группы // Труды Томск. ун-та. 1975. Т. 220. С. 78–84.
4. Hausen J., Johnson J.A. Abelian groups with many automorphisms // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1976 (1977). V. 55. P. 1–5.
5. Reid J.D. On subcommutative rings // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1965. V. 16. P. 23–26.
6. Lanver D.A. Abelian groups in which endomorphic images are fully invariant // J. Algebra. 1974. V. 29. P. 232–245.

7. Фомин А.А. Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов // Матем. заметки. 1984. Т. 36. № 2. С. 179–187.
8. Куликов Л.Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Матем. сб. 1945. Т. 16. № 2. С. 129–162.
9. Крылов П.А. Продолжение изоморфизмов в абелевых p -группах // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 4. С. 543–548.
10. Царев А.В. Некоторые морфизмы модулей над кольцом псевдорациональных чисел // Сиб. матем. журн. 2008. Т. 49. № 4. С. 945–953.
11. Себельдин А.М., Чистяков Д.Н. Определяемость абелевых групп центром их кольца эндоморфизмов // Матем. заметки. 2008. Т. 84. № 6. С. 952–954.
12. Благоевещенская Е.А. Определяемость абелевых групп без кручения счетного ранга некоторого класса их кольцами эндоморфизмов // Фунд. и прикл. матем. 2007. Т. 13. № 1. С. 31–43.
13. Мишина А.П. Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп. II // Вестн. Моск. ун-та. Матем. и механ. 1972. № 1. С. 62–66.
14. Абызов А.Н., Туганбаев А.А. Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения // Фунд. и прикл. матем. 2010. Т. 16. № 7. С. 3–38.
15. Чехлов А.Р. Об абелевых cs -группах без кручения // Изв. вузов. Математика. 1990. № 3. С. 84–87.
16. Чехлов А.Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 944–949.
17. Чехлов А.Р. Свойства подгрупп абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. № 1(2). С. 76–82.
18. Чехлов А.Р. О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 31–36.
19. Чехлов А.Р. О некоторых классах нильгрупп // Матем. заметки. 2012. Т. 91. № 2. С. 297–304.
20. Чехлов А.Р. О проективном коммутанте абелевых групп // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 2. С. 451–464.
21. Чехлов А.Р. Об абелевых группах с нильпотентными коммутаторами эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 60–73.
22. Чехлов А.Р. О проективно разрешимых абелевых группах // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 5. С. 1157–1165.
23. Кожухов С.Ф. Регулярно полные абелевы группы // Изв. вузов. Математика. 1980. № 12. С. 14–19.
24. Danchev P.V. Quasi-complete Q-groups are bounded // Владикавк. матем. журн. 2008. Т. 10. № 1. С. 24–26.
25. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
26. Мартынов Л.М. О примарных и редуцированных многообразиях моноассоциативных алгебр // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 1. С. 103–112.
27. Туганбаев А.А. Автоморфизмы подмодулей и их продолжения // Дискрет. матем. 2013. Т. 25. № 1. С. 144–151.

Статья принята в печать 2013 г.

Chekhlov A.R. ON DIRECT SUMS OF CYCLIC GROUPS WITH INVARIANT MONOMORPHISMS. Direct sums of cyclic groups with left or right invariant monomorphisms are described.

Keywords: left or right invariant monomorphisms, endomorphism ring, direct sum of cyclic groups, torsion complete group.

CHEKHLOV Andrey Rostislavovich (Tomsk State University)
E-mail: chekhlov@math.tsu.ru

МЕХАНИКА

УДК 532.529.5

М.В. Василевский, В.И. Романдин, Е.Г. Зыков,
В.А. Полюшко, А.С. Разва

ХАРАКТЕРИСТИКА ПОТОКА С ДИСПЕРСНОЙ ФАЗОЙ
В ВИХРЕВОЙ КАМЕРЕ¹

Рассмотрены вопросы структурирования дисперсной фазы в вихревых аппаратах применительно к процессам сепарации частиц. Даны оценки параметров движения дисперсной среды вблизи ограничивающей поток криволинейной поверхности в зависимости от крупности частиц и их концентрации во входном потоке. Представлены расчетные соотношения для вращательной компоненты газовой фазы. Проведен анализ факторов, влияющих на сепарационные характеристики аппарата для извлечения примеси из гранулированных полимерных материалов с устойчивым процессом сепарации при транспортных концентрациях частиц.

Ключевые слова: вихревая камера, дисперсная фаза, перепад давлений, жгут, пыль, гранулированный материал, поток момента импульса.

Вихревые камеры с твердыми частицами нашли широкое применение в различных областях техники и технологий для интенсификации физико-химических процессов. Основным параметром, определяющим интенсивность тепломассообменных процессов и сепарационных эффектов в вихревой камере является уровень вращательной компоненты скорости газа и скорости частиц. Вращательная компонента определяется из соотношения

$$V^2 = \frac{R}{\rho} \frac{dp}{dR},$$

где ρ – плотность газа, R – текущий радиус, V – окружная скорость газа. Одним из параметров, определяющих крутку потока, является интенсивность вращательного движения

$$\Delta p_0 = p(R_2) - p(0) = \rho \int_0^1 (V^2 / \bar{r}) d\bar{r},$$

где $\bar{r} = R/R_2$, R_2 – радиус камеры [1].

При введении дисперсного материала в камеру уровень окружных скоростей и перепад статического давления уменьшаются. В [2] приведены результаты исследования влияния стационарного вращающегося слоя частиц песка на аэродинамику осесимметричной вихревой камеры с гиперболическими торцевыми крышками. В [3] исследовалось время пребывания сыпучего материала в аппарате циклонного типа. Время пребывания частиц материала в аппарате складывается из

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ – проект №11-08-00059а.

времени сепарации и времени их движения по стенке камеры аппарата или в пристенной области до выхода из него. Как показали экспериментальные данные, время движения сыпучего материала в пристеночной области в десятки и сотни раз больше времени сепарации [3]. В [4] показано, что критическая концентрация частиц во входящем в циклон потоке, при которой происходит образование жгута, определяется выражением

$$\mu_{\text{кр}} = 12,7 \text{Re}^{-0,33} \text{Fr}^{0,6},$$

где $\text{Re} = V_{\text{вх}} D_{\text{вх}} / \nu$ – критерий Рейнольдса, $\text{Fr} = v^2 / g R_{\text{ср}}$ – критерий Фруда, $D_{\text{вх}}$ – эквивалентный диаметр входа, $R_{\text{ср}}$ – средний радиус циклона, ν – скорость материала в циклоне вблизи стенки. При $\mu > \mu_{\text{кр}}$ преобладает трение скольжения, при $\mu < \mu_{\text{кр}}$ преобладает трение качения.

В [5] полагается, что механизм образования жгутов связан с особенностями течения неоднородных по плотности смесей вблизи вогнутой криволинейной стенки. Здесь течение ламинаризируется, усиливается интенсивность вихрей Тейлора – Гёртлера, а устойчивость распределения по плотности определяется числом Ричардсона. В работе приведены данные по визуальным наблюдениям за движением жгутов, определены окружные скорости газа в разных сечениях, приведены расчеты потерь момента импульса потока. Оказалось, что величины циркуляций газовой фазы по высоте циклона различаются во много раз, особенно это относится к пылевыводному отверстию конической части циклона.

В [6] представлены сведения и исследования в области двухфазного пограничного слоя. В отличие от классических представлений о структуре погранслоя, механизме генерирования турбулентности, распределения пульсационных характеристик, пограничный слой не делится на области вязкого подслоя и область развитой турбулентности, а определяется по времени периодами медленного вязкого развития и быстрого невязкого разрушения. При этом зависимость между частотой разрушения и динамической скоростью определяется соотношением $\omega \nu / v_*^2 = 0,056$ и, кроме того, выделяются первичная турбулентность, связанная с выбросами, и вторичная – за счет неустойчивости и распада струй. Такие процессы обуславливают возникновение вторичных течений. Присутствие частиц приводит к перераспределению касательных напряжений, а переток молей газа в поперечном направлении обусловлен градиентом касательных напряжений в этом же направлении [7]. Это приводит к тому, что в местах с большими касательными напряжениями продольные скорости уменьшаются, а касательные напряжения выравниваются. По данным исследований характера формирования отложений частиц из суспензий в гидравлических лотках, на дне образуются структуры с неравномерным слоем частиц в поперечном направлении [7].

Процессы течения двухфазной среды в циклонном аппарате сложны и до сих пор нет физически обоснованной модели превращения дисперсной среды из аэрозольного состояния в насыпное в пылеприемнике. При отсутствии образования отложений пыли в области пылевыводного отверстия противоточного конического циклона концентрация частиц пыли увеличивается в сотни раз, вследствие чего возникают торможения потока из-за повышенного значения касательного напряжения на стенке.

В [8] приведены данные распределения давлений на двухфазном потоке с малой концентрацией частиц в вихревой камере, по которым можно рассчитать распределение окружных скоростей воздуха.

Для определения времени прохода материала через циклон и сопоставления его со временем пребывания газа были проведены измерения скорости воздуха на входе в аппарат при отводе всего воздуха через пылевыводное отверстие и расход сыпучего материала. Проводилось мгновенное отсоединение циклона от коллектора разрежения, определялось количество пыли, выпавшей в циклоне. Визуально было видно (рис. 1), что пыль в конусе движется в виде полосовых жгутов.

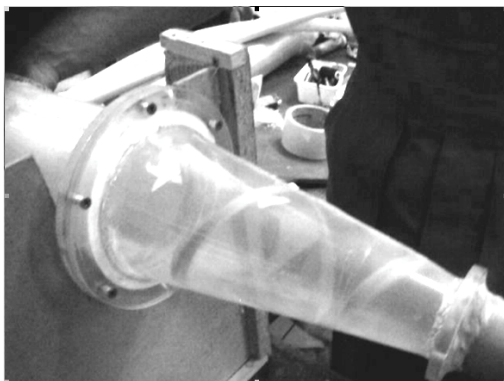


Рис. 1. Конфигурация дисперсной фазы в конусе циклона

Количество витков, их длина определялись визуально, а также рассчитывались. Скорость воздуха в витках бралась с учетом ускорения потока в конусе и усреднялась по длине витка. Время прохода воздуха через конус циклона определялось как объем конуса, деленный на расход, а также как длина витка, деленная на скорость жгута. Рассчитывалось время пребывания материала как масса, выпавшая в циклоне при отсечке потока, деленная на весовой расход. Опыты проводились на порошке М40 (корунд). Расход материала составлял 1,1 г/с, расход воздуха 9–17 г/с, скорость воздуха во входном сечении 7–13 м/с. Отношение времени прохождения материала ко времени прохода воздуха в зависимости от концентрации и скорости воздуха находилось в диапазоне $2 \div 30$ [9].

Для того чтобы определить параметры сгусткообразований (распределение пыли М40 в окружном направлении) в противоточном циклоне, с помощью поворотной секции были отобраны пробы воздуха с различной концентрацией частиц (или количеством отведенной пыли по отношению к количеству введенной пыли) по окружности циклона на фиксированной высоте равной 1,5 диаметра от ввода. Оказалось, что распределение концентраций по окружности неравномерно (имеются всплеск и провалы концентраций) (рис. 2).

Относительный выход цементной пыли представлен на рис.3.

Введем коэффициент неравномерности распределения частиц в окружном направлении $K_n = q_{\max}/q_{\min}$. При концентрации пыли 2–4 г/м³ K_n монофракционной пыли ≈ 3 , при концентрации этой же пыли 70–95 г/м³ во входном потоке $K_n \approx 5$. Для полифракционной пыли с концентрацией 11–19 г/м³ $K_n \approx 7$. При концентрациях пыли более 200 г/м³ неравномерность распределения частиц по окружности проявляется в виде жгутов, которые движутся с малой скоростью в окружном направлении и обнаруживаются визуально. Расчетная модель концентрирования частиц в противоточном цилиндрическом циклонном аппарате представлена в [10].

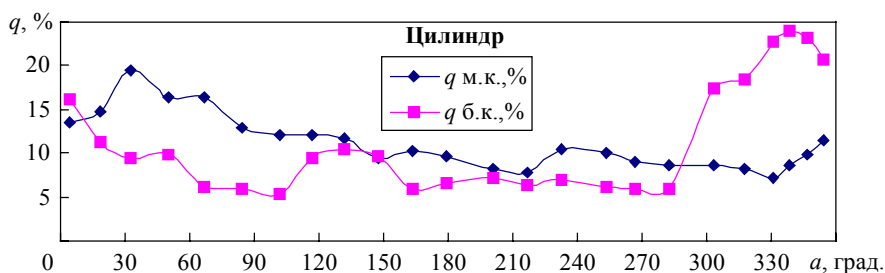


Рис. 2. Относительное количество монофракционной пыли, выводимое с периферии цилиндрической части циклона 15 %-м количеством воздуха в зависимости от угловой координаты (направление отсчета по направлению вращения потока, начало отсчета – сопряжение ввода с цилиндром камеры): $\blacklozenge$ – концентрация 2–4 г/м³, $\blacksquare$ – концентрация 70–95 г/м³

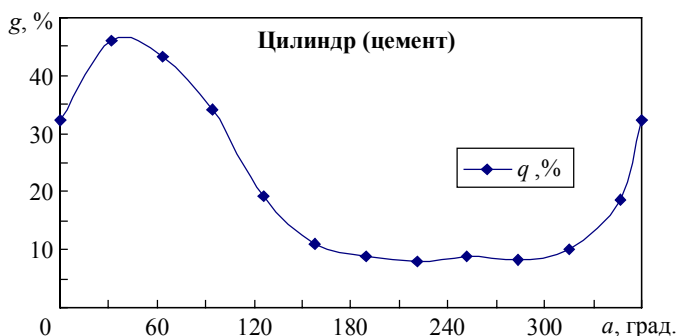


Рис. 3. Относительное количество полифракционной пыли, выводимое с периферии цилиндрической части циклона 15 %-м количеством воздуха в зависимости от угловой координаты (направление отсчета по направлению вращения потока, начало отсчета – сопряжение ввода с цилиндром камеры): $\blacklozenge$ – концентрация 11–19 г/м³

Образование жгутов играет положительную роль в процессах обеспыливания газов [11], но препятствует проведению процессов классификации [12], распределению пыли с сушильным агентом из вихревого концентратора по горелкам [13].

Рассмотрим движение гранулированных материалов в вихревой камере с целью оценки возможности проведения классификационных процессов по излечению примеси из материала.

Частицы гранулированных и зерновых материалов в вихревой камере стремятся распределиться равномерно в окружном направлении. Визуальные наблюдения за распределением частиц показали, что при транспортных концентрациях (более 2000 г/м³) гранулы имеют малые окружные скорости и их траектории отклоняются от вертикального направления на 25–35° [14].

В [14] приведены результаты исследования аппаратов для очистки гранулированных материалов от пыли, волокон, стружки. На рис. 4 представлена схема аппарата вихревого типа.

Транспортируемый материал с примесью через патрубок 1 улиточного ввода поступает в корпус 2, гранулы за счет сил инерции концентрируются на периферии и проходят в щель между корпусом и диском 3. Примесь в виде стружки пы-

ли волокон, сгустковых переплетений попадает в область интенсивных радиальных токов на поверхности с радиусом патрубка для вывода примеси 4 и выносятся из аппарата. Интенсивность радиальных токов за счет формирования вынужденного вихря у поверхности отражательного диска наибольшая. Газ распространяется в области между поверхностями наружного цилиндра и цилиндра с радиусом $R_я$ и вытекает через поверхность с радиусом $R_я$ во внутреннюю область. При этом момент крутки газа уменьшается от взаимодействия газа и частиц с наружной криволинейной поверхностью. Поверхность радиуса $R_я$ разграничивает области струйного течения в пристенной зоне и квазипотенциального течения (ядро течения). На этой поверхности аксиальные скорости газа равны нулю [15].

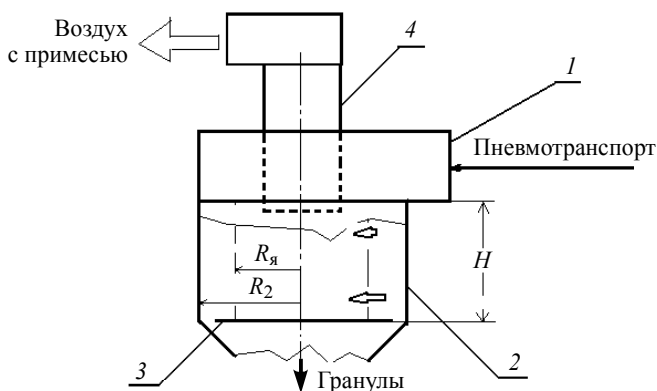


Рис. 4. Схема переноса момента количества движения в радиальном направлении

Окружная скорость гранул на порядок меньше окружной скорости воздуха, поэтому сила тяжести, действующая на слой гранул, оказывается больше центробежной, прижимающей гранулы к поверхности. Силы, действующие на элемент слоя, представлены на рис. 5. На элемент слоя действует сила тяжести δF_g , увлекающая сила потока в окружном направлении δF_s и δR_{fr} – сила трения гранул об ограждающую поток криволинейную поверхность. Слой образуется за счет сепарации частиц к ограждающей поверхности. Частицы имеют форму коротких цилиндров. Коэффициент взаимодействия слоя с поверхностью аналогичен коэффициенту кулоновского трения, однако механизм взаимодействия частиц слоя с поверхностью отличается от сухого трения: гранулы рикошетируют, вращаются, сталкиваются между собой. В системах трубопроводного транспорта полимерных гранулированных материалов взвесью при взаимодействии гранул с поверхностью образуются пыль, стружка, ленты, что свидетельствует о сильных адгезионных связях при контактах. Чем больше коэффициент внешнего трения, тем больше адгезионное взаимодействие.

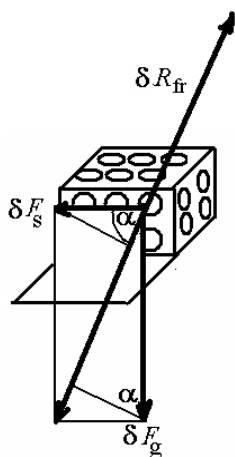


Рис. 5. Схема сил, действующих на элемент слоя

Газ обтекает слой из гранул в окружном направлении со скоростью, равной разнице скоростей потока и слоя гранул. Увлекающая сила потока определяется силой трения потока о поверхность слоя гранул

$$\frac{\tau_t}{\rho u_k^2} = \left(\frac{v_*}{u_k} \right)^2 = f \left(\frac{ku_k}{v} \right),$$

где k – величина обтекаемых бугорков, u_k – скорость обтекания бугорков, v_* – динамическая скорость трения газа о бугорки [16].

Обозначим: Ω – масса материала в слое, u_t – окружная скорость слоя, u_z – вертикальная скорость слоя, V_Δ – окружная скорость воздуха у поверхности слоя гранул, $[(\pi/2) - \alpha]$ – угол отклонения от вертикали вектора скорости частиц. Увлекающая материал сила потока в окружном направлении равна [16]

$$F_{st} = S\tau_t = \rho S[v_*\Phi(kv_*/v)]^2 = S\rho(V_\Delta - u_t)^2/8,5,$$

где $S = 2\pi R_2 H$. Сила трения материала о поверхность $F_{st} = (\Omega u_t^2 / R_2) \phi_s$, Сила тяжести равна $F_{gt} = g\Omega$, $\Omega = S \cdot \Delta \cdot \rho_\delta (1 - \varepsilon) = G_m H / u_z$, где Δ – толщина слоя, ρ_δ – плотность гранулы, ε – порозность слоя, ϕ_s – коэффициент взаимодействия слоя гранул с поверхностью, $G_m = \rho Q \gamma$ – подача материала, ρ – плотность воздуха, Q – расход воздуха, γ – массовая расходная концентрация гранул в потоке на входе в аппарат. Запишем очевидные соотношения

$$u_z = u_t \operatorname{ctg} \alpha, \quad F_{st} = F_{gt} \operatorname{ctg} \alpha, \quad F_{st} = \Omega g \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$u_t = \sqrt{\frac{g R_2 \operatorname{ctg} \alpha}{\phi_s}} = V_{bx} \sqrt{\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\phi_s F_{rk}}}, \quad F_{rk} = \frac{V_{bx}^2}{g R_2}, \quad \Omega = G_m H / u_z, \quad \Omega = \frac{G_m H \operatorname{ctg} \alpha}{u_t}.$$

Введем безразмерные параметры по соотношениям: $F_{bx} = \bar{F}_{bx} \pi R_2^2$ – входное сечение ввода потока в камеру, $V_\Delta = \bar{V}_\Delta V_{bx}$, $H = \bar{H} R_2$, $u_t = \bar{u}_t V_{bx}$.

Запишем баланс потоков моментов импульса в радиальном направлении для транспортного потока в центробежном концентраторе (концентрация примеси на два-три порядка меньше концентрации гранул и ее не учитываем).

$$M_{bx} = M_t + M_\Gamma + M_\gamma, \quad (1)$$

где $M_{bx} = G_m u_{bx} R_2 + \rho Q V_{bx} R_2 = \rho R_2 Q V_{bx} (\gamma \bar{u}_{bx} + 1)$ – поток момента количества движения входного потока; $M_t = F_{st} R_2 = G_m H \operatorname{ctg} \alpha \phi_s u_t = \gamma \rho Q R_2 V_{bx} \bar{H} \operatorname{ctg} \alpha \phi_s \bar{u}_t$ – момент сил трения твердого компонента; $M_\Gamma = \tau_t S R_2 = R_2 S \rho V_{bx}^2 (\bar{V}_\Delta - \bar{u}_t)^2 / 8,5 = = 2 \bar{H} R_2 \rho Q V_{bx} (\bar{V}_\Delta - \bar{u}_t)^2 / 8,5 \bar{F}_{bx}$ – момент сил трения воздуха о поверхность движущегося слоя гранул u_{bx} , V_{bx} – скорости входа частиц и воздуха; V_γ , V_r – окружная и радиальная скорости воздуха на радиусе ядра R_γ , $\bar{V}_\Delta = \frac{V_\Delta}{V_{bx}}$. $M_\gamma = \rho \int_0^H 2\pi R_\gamma^2 V_r V_\gamma dz$ – поток момента количества движения через поверхность $2\pi R_\gamma H$, z – осевая координата. Положим, что $V_\gamma R_\gamma \approx V_\Delta R_2$ – изменение окружной и радиальной компонент скорости по высоте малое, $\int_0^H 2\pi R_\gamma V_r V_\gamma dz \approx Q V_\gamma$, $M_\gamma \approx \rho Q R_2 \bar{V}_\Delta$; Величина M_{bx} зависит от значения скорости гранул во входном сечении.

В [17] приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований пневмотранспорта крупнозернистых материалов в горизонтальных трубах. Транспортировка частиц осуществляется за счет ударных их взаимодействий с ограничивающими поток поверхностями вовлечением во вращательное движение с возникновением подъемных сил. Отношение осевой скорости гранул к скорости потока воздуха уменьшается с уменьшением числа Fr_T и увеличением массовой концентрации материала γ . $Fr_T = \frac{V_T^2}{D_T g}$ – параметр Фруда для подводящей трубы,

где V_T – скорость потока в подводящей трубе, D_T – диаметр подводящей трубы. При $\gamma = 5$ отношение u_{bx}/V_{bx} находится в интервале 0,07 – 0,12 при значениях $\sqrt{Fr_T} = 27 - 40$.

Подставляя приведенные соотношения в уравнения балансов моментов сил, действующих на слой, (1) и проводя необходимые сокращения, получим

$$\gamma \bar{u}_{bx} + 1 = \bar{V}_\Delta + \gamma \bar{H} \operatorname{ctg} \alpha \bar{u}_t \varphi_s + \frac{(\bar{V}_\Delta - \bar{u}_t)^2}{8,5} 2 \frac{\bar{H}}{\bar{F}_{bx}}. \quad (2)$$

Расчетное уравнение имеет вид

$$\bar{V}_\Delta = \frac{\sqrt{1 + 4ab} - 1}{2a} + \bar{u}_t, \quad (3)$$

где $a = \frac{2\bar{H}}{8,5\bar{F}_{bx}}$; $b = \gamma(\bar{u}_{bx} - \bar{H} \operatorname{ctg} \alpha \varphi_s \bar{u}_t) - \bar{u}_t + 1$.

Простой эксперимент позволяет получить представление о коэффициенте взаимодействия φ_s (рис. 6). Гранулы подаются на наклонный лоток шириной H_Δ в таком количестве, чтобы на горизонтальной подложке сформировался монослой

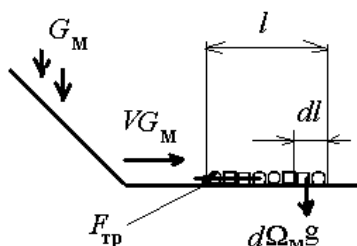


Рис. 6. Взаимодействие частиц с поверхностью

частиц с толщиной этого слоя, равной эквивалентному размеру частицы с диаметром δ . Входной импульс потока равен $G_M V$, первые частицы, взаимодействуя со стенками канала, останавливаются, последующие частицы взаимодействуют со стенками и с неподвижными частицами, которые удерживаются силами трения. Изменение импульса потока частиц обуславливается силой трения в результате формирования слоя частиц:

$$-G_M dV - d\Omega_M g \varphi_s = 0; \quad G_M V = \Omega_M g \varphi_s;$$

$$V = [G_M / (1 - \varepsilon) \rho_\delta] / \delta H, \quad d\Omega_M = (1 - \varepsilon) \rho_\delta H_\Delta \delta dl, \quad (1 - \varepsilon) = \Omega_M / \rho_\delta H_\Delta \delta l, \quad \Omega_M / t = G_M.$$

Используя приведенные соотношения, получим из первого уравнения $\varphi_s = l/gt^2$. Первые оценки показывают, что для гранулированного полиэтилена значения φ_s находятся в диапазоне 0,05–0,15. Коэффициент внешнего трения для гранулированного полиэтилена по алюминию находится в диапазоне 0,28–0,36 [18].

Пусть $R_2 = 0,5$ м; $\varphi_s = 0,2$; $\alpha = 60^\circ$, $\text{ctg } \alpha = 0,577$; $V_{\text{вх}} = 20$ м/с; $u_{\text{вх}} = 2$ м/с; $\bar{F}_{\text{вх}} = 0,15$; $\bar{H} = 1,5$; $\gamma = 5$. Получим $\text{Fr}_k = 82$; $u_t = 3,78$ м/с; $\bar{u}_t = 0,189$. Из уравнения (3) получим $\bar{V}_\Delta = 0,71$. Крутка потока оказывается достаточной для отщепления примеси.

Расчеты и эксперименты показывают, что основными параметрами, определяющими процесс отщепления примеси из гранул, являются величины γ , $\bar{H}$, $\bar{F}_{\text{вх}}$ [14]. На рис. 7 представлен первый вариант аппарата для извлечения примеси – центробежный разделитель [14]. На рис. 8 сплошными линиями представлена эффективность отщепления примеси η_c , пунктиром обозначен процент уноса гранул $(1-\eta_r)100\%$ в зависимости от производительности аппарата и концентрации гранул. Было установлено влияние электризации гранул на эффективность отщепления примеси и уноса гранул.

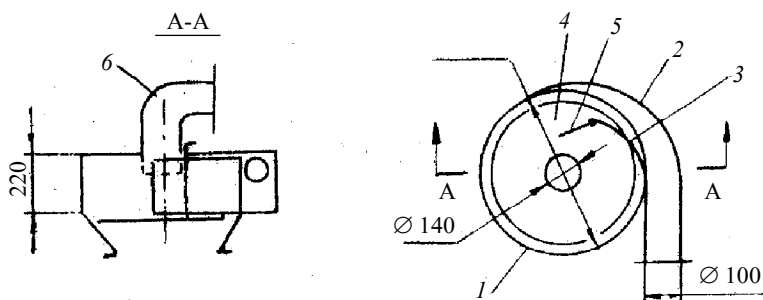


Рис. 7. Центробежный разделитель: 1 – корпус, 2 – пневмотранспортный ввод гранулята, 3 – направляющая пластина, 4 – диск формирования вынужденного вихря, 5 – регулирующая шторка, 6 – патрубок вывода воздуха с примесью

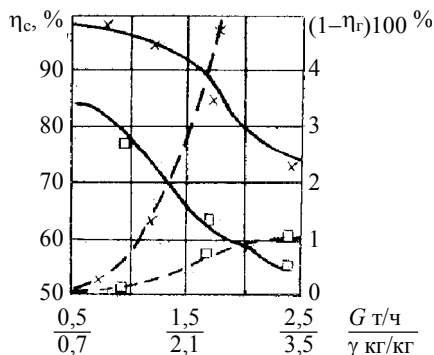


Рис. 8. Эффективность отщепления и вынос гранулята в зависимости от производительности аппарата и концентрации: $\times$ – диаметр отражательного диска 320 мм, $\square$ – 280 мм

Были проведены исследования влияния различных факторов на эффективность работы аппарата [18–20].

Менялись параметры γ , $\bar{H}$, $\bar{F}_{\text{вх}}$. Для промышленного аппарата был введен дополнительный фактор – поддув воздуха в зоне вывода гранул из сепарационного пространства [18–20].

Выводы

Дисперсный материал в вихревой камере концентрируется у ограничивающей поток криволинейной поверхности, образует структуры в зависимости от крупности частиц и их концентрации. При концентрациях пылевидных материалов менее 10 г/м^3 распределение частиц по окружности при улиточном вводе в вихревую камеру равномерно. При концентрациях частиц более 200 г/м^3 происходит жгутообразование. Частицы зерновых и гранулированных материалов распределяются в окружном направлении равномерно. При транспортных концентрациях крупнозернистых частиц крутка потока в вихревой камере значительно уменьшается, но оказывается достаточной для проведения процесса извлечения примеси из материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смутьский И.И. Аэродинамика и процессы в вихревых камерах. Новосибирск: Наука, 1992. 301 с.
2. Волчков Э.П., Кардаш А.П., Терехов В.И. Гидродинамика вихревой гиперболической камеры при наличии твердой фазы // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1984. № 10. Вып. 2. С. 90–98.
3. Миклин Ю.А., Романков П.Г., Фролов В.Ф. Время пребывания сыпучего материала в аппарате циклонного типа // Журн. прикл. химии. 1969. Т. 42. Вып. 5. С. 1081–1084.
4. Систер В.С., Муштаев В.И., Тимонин А.С. Экология и техника сушки дисперсных материалов. Калуга: Изд-во Н. Бочаровой, 1999. 670 с.
5. Василевский М.В., Танков Н.К., Богданов Л.Н., Романдин В.И. Гидродинамические параметры вихревой камеры при повышенной концентрации частиц // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: доклады Всерос. науч. конф. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2000. С. 219–220.
6. Борцевский Ю.Т. Теория одно и двухфазного потока турбулентного пограничного слоя. Киев: Вища школа, 1975. 192 с.
7. Офицеров А.С. Вторичные течения. М.: Госсройиздат, 1959. 163 с.
8. Разва А.С., Некрасова К.В., Зыков Е.Г., Василевский М.В. Распределение давлений в циклонном двухфазном потоке // Материалы четырнадцатой Всерос. науч.-технич. конф. «Энергетика: экология, надежность, безопасность». Томск: Изд-во ТПУ, 2008. С. 146–150.
9. Разва А.С., Некрасова К.В., Зыков Е.Г., Василевский М.В. О трансформации дисперсной фазы в циклонном пылеуловителе // Материалы тринадцатой Всерос. науч.-технич. конф. «Энергетика: экология, надежность, безопасность». Томск: Изд-во ТПУ, 2007. С. 241–244.
10. Василевский М.В., Зыков Е.Г., Разва А.С. Расчетная модель концентрирования частиц в противоточном цилиндрическом циклонном аппарате // Теоретич. основы хим. технологии. 2011. Т. 45. № 3. С. 321–328.
11. Страус В. Промышленная очистка газов: пер с англ. М.: Химия, 1981. 616 с.
12. Росляк А.Т., Зятиков П.Н., Муштаев И.В. и др. Применение метода воздушно-центробежной сепарации частиц в производстве поливинилхлорида. М.: Химическая промышленность. 1989. № 3. С. 209–212.

13. Лебедев В.Д., Маслов В.Е., Ключин А.В., Лейкин В.З. Отработка и исследование конструкции делителя-концентратора пыли для блоков 500 МВт Экибастузской ГРЭС-2 // Теплоэнергетика. 1985. № 2. С. 35–37.
14. Анисимов Ж.А., Василевский М.В., Свищев Б.Г. Сравнительные характеристики аппаратов для очистки зерновых и гранулированных материалов от примесей // Вопросы аэрогидромеханики тепломассообмена. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. С. 24–29.
15. Штым А.Н. Аэродинамика циклонно-вихревых камер. Владивосток: Дальневосточный ун-т, 1985. 200 с.
16. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
17. Шваб В.А. Аэромеханические методы в технологии производства порошковой продукции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1984. 161 с.
18. Руководящие технические материалы. Пневмотранспорт сыпучих материалов (гранулированных и порошкообразных) взвесью, с поршневой структурой и сплошным потоком материала / МХП СССР. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. 188 с.
19. Василевский М.В., Анисимов Ж.А., Свищев Б.Г. Характеристики центробежного аппарата для очистки гранулированного материала от волокнистой примеси и пыли // Вопросы прикладной аэрогидромеханики и тепломассообмена. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. С. 194–203.
20. Василевский М.В., Анисимов Ж.А., Свищев Б.Г. Результаты исследования опытно-промышленного сепаратора очистки гранулированного полиэтилена высокого давления // Вопросы прикладной аэрогидромеханики и тепломассообмена. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. С. 84–91.

Статья поступила 23.08.2012 г.

Vasilevskii M.V., Romandin V.I., Zykov E.G., Polyushko V.A., Razva A.S. CHARACTERISTICS OF A FLOW WITH THE DISPERSED PHASE IN THE VORTEX CHAMBER. The paper deals with the structuring of the dispersed phase in vortex devices as applied to particle separation processes. Parameters of motion of the dispersed medium near the curved surface bounding the flow are estimated depending on the particle size and concentration in the input stream. The calculated relations for the rotational component of the gas phase are presented. Factors having an effect on separation characteristics are analyzed for the device extracting impurities from granular polymers with a stable separation process at transport concentrations of particles.

Keywords: vortex chamber, dispersed phase, pressure drop, burn, dust, granular material, angular momentum flow.

Vasilevsky Michail Victorovich (Tomsk Polytechnic University)
E-mail: vasmix40@mail.ru

Romandin Vladimir Ivanovich (Tomsk State University)
E-mail: romandin@niipmm.tsu.ru

Zikov Evgeniy Gennadievich (Tomsk OOO Tomskgazoochistka)
E-mail: zikoveg@mail.ru

Polyushko Vladimir Anatolyevich (Tomsk State University)
E-mail: polyushko@niipmm.tsu.ru

Razva Aleksandr Sergeevich (Tomsk Polytechnic University)
E-mail: razva@mail.ru

УДК 532.5:532.517.4

И.В. Ершов

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА КОЛЕБАТЕЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОГО МОЛЕКУЛЯРНОГО ГАЗА. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД*

В рамках энергетической теории гидродинамической устойчивости с помощью метода коллокаций численно решена вариационная задача определения критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода для течения Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа. Течение газа описывалось системой уравнений двухтемпературной аэродинамики, в которых учитывалась зависимость коэффициентов переноса от температуры потока. Показано, что в реальном для двухатомных газов диапазоне параметров режима течения минимальные критические значения числа Рейнольдса достигаются на модах продольных возмущений и с ростом числа Маха, объемной вязкости и времени колебательной релаксации увеличиваются в пределе приблизительно в два с половиной раза.

Ключевые слова: энергетическая теория, гидродинамическая устойчивость, колебательная релаксация, уравнения двухтемпературной аэродинамики, критическое число Рейнольдса.

В работе [1] выведено уравнение энергетического баланса для плоскопараллельных течений колебательно-возбужденного молекулярного газа. На основе этого уравнения получено асимптотическое решение вариационной задачи определения критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода Re_c в течении Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа. В пределе малых волновых чисел возмущений найдена зависимость главного члена асимптотики от числа Маха M , коэффициента объемной вязкости η_b , степени неравновесности колебательной энергии γ_{vib} и времени колебательной релаксации τ_{VT} в виде

$$Re_c \sim \sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}} \left[1 - \frac{(\gamma - 1) M^2 Pr}{2 \pi^2} \left(1 - \frac{20 \gamma_{vib} Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10 \gamma \tau_{VT} + 33 Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right) \right],$$

где $\alpha_1 = \eta_b/\eta$, η – коэффициент сдвиговой вязкости, Pr – число Прандтля, γ – показатель адиабаты.

В данной работе вариационная задача, сформулированная в [1], решается численно во всем диапазоне волновых чисел продольных и поперечных возмущений. Течение Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа описывается системой уравнений двухтемпературной аэродинамики, в которых учитывается зависимость коэффициентов переноса от температуры потока. В качестве температурной зависимости коэффициентов переноса выбран степенной закон T^n с показателем $n \leq 1$. Выбранная зависимость соответствует условиям относительно холодного несущего потока (мягким потенциалам межмолекулярного взаимодей-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00064).

ствия [2–4]). Предполагается, что удельные теплоемкости не зависят от статической и колебательной температур потока и постоянны. В соответствии с физическими представлениями [3, 4] модель двухтемпературной аэродинамики является общепринятой физико-математической моделью течений колебательно-возбужденного молекулярного газа, когда диссоциацией молекул, возбуждением верхних колебательных уровней и поправками на ангармонизм колебаний можно пренебречь.

Основные уравнения и энергетический функционал

Задача устойчивости течения Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа рассматривается в расчетной области Ω , представляющей собой прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям декартовой системы (x_1, x_2, x_3) , а центр совпадает с началом координат. Непроницаемые бесконечные пластины, вдоль которых направлено основное течение, перпендикулярны оси x_2 .

В качестве характерных величин для обезразмеривания использованы полуширина канала L по оси x_2 , модуль скорости потока U_0 на непроницаемых стенках канала, постоянные плотность ρ_0 и температура T_0 основного течения и образованные из них время $\rho_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$. Коэффициенты переноса обезразмеривались на их значения при температуре T_0 : сдвиговая и объемная вязкости на η_0 и $\eta_{b,0}$, а коэффициенты теплопроводности, обусловленные упругими энергообменами между поступательными степенями свободы молекул и неупругими обменами энергией вращательных и колебательных степеней свободы молекул с поступательными модами молекул, соответственно на $\lambda_{tr,0}$, $\lambda_{rot,0}$, $\lambda_{vib,0}$. В безразмерных переменных система уравнений двухтемпературной аэродинамики с учетом зависимости коэффициентов переноса от температуры потока записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta(T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta(T) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right], \\ \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + (\gamma - 1) \rho T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \left[\eta(T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] + \frac{\gamma_{vib} \rho (T_{vib} - T)}{\tau_{VT} (1 - \gamma_{vib})}, \\ \frac{\gamma_{vib} \rho}{(1 - \gamma_{vib})} \left(\frac{\partial T_{vib}}{\partial t} + u_i \frac{\partial T_{vib}}{\partial x_i} \right) &= \frac{\gamma \alpha_2}{\text{Re Pr}} \left[\eta(T) \frac{\partial T_{vib}}{\partial x_i} \right] - \frac{\gamma_{vib} \rho (T_{vib} - T)}{\tau_{VT} (1 - \gamma_{vib})}, \\ \gamma M^2 p &= \rho T, \quad \eta(T) = T^n, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ , u_i , p , T , T_{vib} , τ_{VT} – плотность, компоненты вектора скорости, давление, статическая и колебательные температуры газа и время колебательной релаксации соответственно, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. В уравнении энергии системы (1) опущена группа нелинейных слагаемых, составляющих диссипативную функцию. Такое приближение является распространенным в задачах устойчивости сжимаемых течений [5].

Параметры, входящие в уравнения системы (1), определяются следующим образом: $\alpha_1 = \eta_{b,0} / \eta_0$ – отношение объемной и сдвиговой вязкостей; $\alpha_2 = \lambda_{vib,0} / (\lambda_{tr,0} + \lambda_{rot,0})$; параметр $\gamma_{vib} = c_{vib} / (c_{tr} + c_{rot} + c_{vib})$ определяет долю внутренней энергии газа, приходящуюся на колебательные моды молекул, и в каком-то смысле характеризует степень неравновесности последних [6–8]; безразмерные критерии $Re = U_0 L \rho_0 / \eta_0$, $M = U_0 / \sqrt{\gamma R T_0}$ и $Pr = \eta_0 (c_{tr} + c_{rot}) / (\lambda_{tr,0} + \lambda_{rot,0})$ есть соответственно числа Рейнольдса, Маха и Прандтля несущего потока, где $\gamma = (c_{tr} + c_{rot} + R) / (c_{tr} + c_{rot})$ – показатель адиабаты, R – газовая постоянная и c_{tr} , c_{rot} , c_{vib} – соответственно удельные теплоемкости при постоянном объеме, определяющие энергоемкость поступательных, вращательных и колебательной мод молекул газа.

Система (1) описывает распространенную в аэродинамике ситуацию, когда характерные времена микроскопических процессов энергообмена между различными степенями свободы молекул газа оцениваются системой неравенств [3, 4]: $\tau_{TT} \sim \tau_{RT} \ll \tau_{VV} \ll \tau_{VT} \sim \tau_0$. Причем в этом случае поступательные и вращательные степени свободы молекул с малыми соизмеримыми временами релаксации $\tau_{TT} \sim \tau_{RT}$ на временах порядка характерного времени течения τ_0 образуют квазиравновесный термостат с температурой потока T . В подсистеме же колебательных уровней энергии по истечению времени τ_{VT} устанавливается квазиравновесное распределение с колебательной температурой T_{vib} . Обмен энергией между колебательной модой и квазиравновесными степенями свободы молекул газа описывается релаксационным уравнением Ландау – Теллера с характерным временем τ_{VT} . Такое представление позволяет уменьшить число независимых параметров в системе (1) следующим образом.

Используя соотношения Эйкена [2–4], связывающие парциальные коэффициенты теплопроводности с коэффициентом сдвиговой вязкости, запишем параметр α_2 в виде

$$\alpha_2 = \lambda_{vib,0} / (\lambda_{tr,0} + \lambda_{rot,0}) = 12\gamma_v (c_{tr} + c_{rot}) / (25c_{tr} + 12c_{rot}).$$

Так как поступательные и вращательные степени свободы молекул находятся в состоянии квазиравновесия, для их внутренней энергии справедливо равномерное распределение по степеням свободы. Отсюда значения соответствующих теплоемкостей выражаются как $c_{tr} = 3R/2$, $c_{rot} = R$. В результате имеем, что $\alpha_2 = 20\gamma_{vib} / [33(1 - \gamma_{vib})]$.

Нижний предел $\gamma_{vib} = 0$ соответствует случаю невозбуждения колебательной моды молекул. С другой стороны, равномерное распределение энергии по степеням свободы молекул не является здесь верхним пределом для параметра γ_{vib} , поскольку закон равномерного распределения энергии неприменим в неравновесной ситуации, описываемой системой уравнений (1), когда разрыв между статической температурой потока T и колебательной температурой T_{vib} может быть достаточно велик. В монографии [4] показано, что при $T = 300$ К неравновесная теплоемкость $c_{vib} \approx 1,8R$. Используя равномерное распределение энергии в состоянии термодинамического квазиравновесия по поступательным и вращательным модам молекул, получаем, что параметр $\gamma_{vib} \approx 0,42$. С ростом разрыва между температурами T_{vib} и T значение γ_{vib} увеличивается, приближаясь в пределе к единице, когда энергия колебательной моды молекул существенно превышает температуру квазиравновесного термостата, определяемого поступательными и вращательными степенями свободы молекул.

кул. В расчетах максимальное значение параметра γ_{vib} было выбрано $\gamma_{\text{vib}} = 0,4$ для того, чтобы остаться в рамках используемой модели, избежав возбуждения высоких колебательных уровней энергии.

В качестве основного (несущего) потока выбрано плоское течение Куэтта с линейным профилем скорости и однородным распределением плотности и температур:

$$U_S(x_2) = (x_2, 0, 0), T_S = T_{\text{vib},S} = \rho_S = 1, p_S = 1/(\gamma M^2). \quad (2)$$

Представляя мгновенные значения гидродинамических переменных в виде

$$u_i = U_{S,i} + u'_i, \rho = 1 + \rho', T = 1 + T', T_{\text{vib}} = 1 + T'_{\text{vib}}, p = 1/(\gamma M^2) + p',$$

получим систему уравнений для возмущений $\rho', u'_i, T', T'_{\text{vib}}$, основного течения с точностью до членов первого порядка малости по возмущениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + U_{S,i} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_{S,j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_j} + \\ &+ \frac{n}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[T' \left(\frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{S,j}}{\partial x_i} \right) \right], \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + U_{S,j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} + (\gamma - 1) \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} &= \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2} + \frac{\gamma_{\text{vib}} (T'_{\text{vib}} - T')}{\tau_{\text{VT}} (1 - \gamma_{\text{vib}})}, \\ \frac{\gamma_{\text{vib}}}{(1 - \gamma_{\text{vib}})} \left(\frac{\partial T'_{\text{vib}}}{\partial t} + U_{S,j} \frac{\partial T'_{\text{vib}}}{\partial x_j} \right) &= \frac{20 \gamma \gamma_{\text{vib}}}{33 \text{Re Pr} (1 - \gamma_{\text{vib}})} \frac{\partial^2 T'_{\text{vib}}}{\partial x_j^2} - \frac{\gamma_{\text{vib}} (T'_{\text{vib}} - T')}{\tau_{\text{VT}} (1 - \gamma_{\text{vib}})}, \\ \gamma M^2 p' &= \rho' + T', \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3)$$

Предполагается, что при $x_1 = \pm \pi / \alpha$ и $x_3 = \pm \pi / \delta$ возмущения гидродинамических переменных удовлетворяют периодическим граничным условиям, а на непроницаемых границах $x_2 = \pm 1$ принимают нулевые значения. Здесь α, δ – модули проекций волнового вектора возмущения $\mathbf{k}$ на оси координат (x_1, x_3) .

Полная энергия возмущений в сжимаемом колебательно-неравновесном молекулярном газе помимо кинетической составляющей должна учитывать энергию внутренних степеней свободы молекул газа и степень сжимаемости течения. В работах [1, 8] для задачи (3) рассматривался положительно определенный для любых возмущений функционал полной пульсационной энергии возмущений

$$E_{\Sigma}(t) = \frac{1}{2} \left\langle u_i'^2 + \frac{1}{\gamma M^2} \left[\rho'^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \left(T'^2 + \frac{\gamma_{\text{vib}} T_{\text{vib}}'^2}{1 - \gamma_{\text{vib}}} \right) \right] \right\rangle,$$

где угловые скобки обозначают усреднение по пространству расчетной области Ω в виде

$$\langle \dots \rangle = \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} dx_1 \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} dx_2 \int_{-1}^1 dx_3 (\dots).$$

Для данного функционала уравнение энергетического баланса записывается в форме

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\Sigma}}{dt} \equiv \Phi = & - \left\langle u'_i u'_j \frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{\gamma_{\text{vib}}}{\gamma(\gamma-1)(1-\gamma_{\text{vib}})\tau_{\text{VT}} M^2} \langle (T'_{\text{vib}} - T')^2 \rangle - \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \left\langle \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \right)^2 + n T' \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{s,j}}{\partial x_i} \right) \right\rangle - \\ & - \frac{1}{(\gamma-1)\text{RePr} M^2} \left\langle \left(\frac{\partial T'}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{20\gamma_{\text{vib}}}{33(1-\gamma_{\text{vib}})} \left(\frac{\partial T'_{\text{vib}}}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Из уравнения (4) следует, что для фиксированных значений параметров M , α_1 , τ_{VT} и γ_{vib} уменьшение числа Рейнольдса, начиная с некоторого критического значения Re_c , сделает правую часть уравнения (4) отрицательной. При этом $dE_{\Sigma}/dt < 0$ и любые возмущения будут затухать. Критическое число Рейнольдса Re_c соответствует нейтральным возмущениям, когда $dE_{\Sigma}/dt = 0$, и вычисляется как минимум функционала Φ в правой части энергетического уравнения (4).

Спектральная задача и ее качественные свойства

Из условия экстремума функционала Φ (4) на множестве допустимых функций следуют уравнения Эйлера – Лагранжа, определяющие обобщенную дифференциальную задачу на собственные значения со спектральным параметром Re . С учетом профилей гидродинамических величин основного потока (2) эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta u'_1 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial D}{\partial x_1} + \frac{n}{2} \frac{\partial T'}{\partial x_2} &= \frac{\text{Re}}{2} u'_2, \\ \Delta u'_2 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial D}{\partial x_2} + \frac{n}{2} \frac{\partial T'}{\partial x_1} &= \frac{\text{Re}}{2} u'_1, \quad \Delta u'_3 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial D}{\partial x_3} = 0, \\ \Delta T' - \varepsilon_1 \left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} \right) &= -\frac{20\varepsilon_2\gamma_v}{33} \text{Re} (T'_{\text{vib}} - T'), \quad \Delta T'_{\text{vib}} = \varepsilon_2 \text{Re} (T'_{\text{vib}} - T'), \\ \Delta &= \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3^2}, \quad D = \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (5)$$

где параметры ε_1 , ε_2 и γ_v записываются следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} n (\gamma - 1) M^2 \text{Pr}, \quad \varepsilon_2 = \frac{33 \text{Pr}}{20 \gamma \tau_{\text{VT}}}, \quad \gamma_v = \frac{\gamma_{\text{vib}}}{1 - \gamma_{\text{vib}}}.$$

Граничные условия, которым удовлетворяют амплитудные функции u'_i , T' и T'_{vib} в уравнениях системы (5), аналогичны условиям, поставленным для системы уравнений (3).

После подстановки в уравнения (5) вектора возмущений

$$\mathbf{q}'(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{q}(x_2) \exp[-i(\alpha x_1 + \delta x_3)]$$

(где $\mathbf{q}' = (u'_1, u'_2, u'_3, T', T'_{\text{vib}})$, $\mathbf{q}(x_2) = (u, v, w, \theta, \theta_v)$, а i – мнимая единица) спектральная задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для

амплитуд пульсаций u , v , w , θ и θ_v :

$$\begin{aligned} u'' - \left[\alpha^2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) + \delta^2 \right] u + i\alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) v' - \alpha \delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) w + \frac{n}{2} \theta' &= \frac{\text{Re} v}{2}, \\ \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) v'' - (\alpha^2 + \delta^2) v + i\alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) u' + i\delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) w' - \frac{i\alpha n}{2} \theta &= \frac{\text{Re} u}{2}, \\ w'' - \left[\alpha^2 + \delta^2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \right] w - \alpha \delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) u + i\delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) v' &= 0, \\ \theta'' - (\alpha^2 + \delta^2) \theta - \varepsilon_1 (v' - i\alpha u) &= \frac{20\varepsilon_2 \gamma_v}{33} \text{Re}(\theta - \theta_v), \quad \theta_v'' - (\alpha^2 + \delta^2) \theta_v = \varepsilon_2 \text{Re}(\theta_v - \theta); \\ u|_{x_2=\pm 1} = v|_{x_2=\pm 1} = w|_{x_2=\pm 1} = \theta|_{x_2=\pm 1} = \theta_v|_{x_2=\pm 1} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где штрихи у неизвестных функций обозначают производные соответствующего порядка по переменной x_2 .

Спектральная задача (6), (7) имеет следующие свойства.

1. Спектр собственных значений Re задачи (6), (7) вещественен. Это свойство следует из энергетического тождества для системы (6), (7), которое получается умножением уравнений (6) на комплексно-сопряженные функции u^* , v^* , w^* , θ^* , θ_v^* , суммированием их и интегрированием по интервалу $x_2 \in [-1, 1]$. С учетом одно-родных граничных условий (7) имеет место следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Re}}{2} \int_{-1}^1 \left[(u^* v + u v^*) + \frac{2\gamma_v |\theta - \theta_v|^2}{\gamma(\gamma-1)M^2 \tau_{VT}} \right] dx_2 + \\ & + \int_{-1}^1 \left[|u'|^2 + \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) |v'|^2 + |w'|^2 + \left(\delta^2 + \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) \alpha^2 \right) |u|^2 + (\alpha^2 + \delta^2) |v|^2 + \right. \\ & + \left. \left(\alpha^2 + \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) \delta^2 \right) |w|^2 + \frac{|\theta'|^2 + (\alpha^2 + \delta^2) |\theta|^2}{(\gamma-1)M^2 \text{Pr}} + \frac{20\gamma_v (|\theta_v'|^2 + (\alpha^2 + \delta^2) |\theta_v|^2)}{33(\gamma-1)\text{Pr}M^2} \right] dx_2 + \\ & + \alpha \delta \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) \int_{-1}^1 (u^* w + u w^*) dx_2 - n \int_{-1}^1 (u_r \theta_r' - u_i' \theta_i) dx_2 + 2\alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \int_{-1}^1 (u_r v_r' + u_i' v_r) dx_2 + \\ & + 2\delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \int_{-1}^1 (v_r w_r' + v_i' w_r) dx_2 + \alpha n \int_{-1}^1 (v_r \theta_r - v_i \theta_r') dx_2 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где индексы r и i обозначают вещественную и мнимую части соответствующих комплекснозначных функций.

Вещественность спектрального параметра Re определяется вещественностью всех слагаемых равенства (8). Вместе с тем квадратичная форма, которую определяет энергетическое тождество (8), не является положительно определенной. Это означает, что собственные значения могут быть также отрицательными, поэтому в расчетах следует искать минимальное по модулю собственное значение $\min |\text{Re}|$.

2. Спектр собственных значений $\text{Re}(\alpha, \delta)$ задачи (6), (7) симметричен относительно осей $\alpha = 0$, $\delta = 0$ на плоскости волновых чисел (α, δ) . Действительно, из уравнений системы (6) следует, что каждому собственному значению $\text{Re}(\alpha, \delta)$ с собственными функциями u , v , w , θ , θ_v соответствует равное ему собственное значение $\text{Re}(-\alpha, -\delta)$ с собственными функциями u^* , v^* , w^* , θ^* , θ_v^* . Также то же собст-

венное значение $\text{Re}(\alpha, \delta)$ соответствует паре волновых чисел $(\alpha, -\delta)$ с набором собственных функций $u, v, -w, \theta, \theta_v$ и паре волновых чисел $(-\alpha, \delta)$ с набором собственных функций $u^*, v^*, -w^*, \theta^*, \theta_v^*$.

В [1] показано, что если в качестве молекул несущего газа рассматриваются «максвелловские» молекулы [2, 3], то для задачи (6), (7) в случае длинноволновых продольных $(\alpha \ll 1, \delta = 0)$ и поперечных $(\alpha = 0, \delta \ll 1)$ возмущений имеют место асимптотические оценки критических чисел Рейнольдса в виде

$$\begin{aligned} \text{Re}_c^{(\alpha)} &= \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}} \left[1 - \frac{(\gamma - 1) M^2 \text{Pr}}{2\pi^2} \left(1 - \frac{20\gamma_{\text{vib}} \text{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10\gamma \tau_{\text{VT}} + 33 \text{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right) \right] - \pi \alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right), \\ \text{Re}_c^{(\delta)} &= \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}} \left[1 - \frac{(\gamma - 1) M^2 \text{Pr}}{2\pi^2} \left(1 - \frac{20\gamma_{\text{vib}} \text{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10\gamma \tau_{\text{VT}} + 33 \text{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Численное решение спектральной задачи

Для произвольных значений волновых чисел α, δ спектральная задача (6), (7) решалась численно в среде пакета Matlab. Использовался метод коллокаций, основанный на полиномиальной интерполяции собственных функций полиномами Чебышева [9, 10]. В качестве узлов коллокации (интерполяции) выбирались точки Гаусса – Лобатто $x_{2,k} = \cos(\pi k/N)$, $k = 0, 1, \dots, N$, в которых полином Чебышева N -й степени имеет экстремумы на отрезке $x_2 \in [-1, 1]$. Дифференциальные операторы первого порядка, входящие в спектральную задачу, аппроксимируются на данном шаблоне матрицей коллокационных производных D_N^1 [9, 10] размером $(N+1) \times (N+1)$, элементы которой определяются по формулам

$$D_{N,ij}^1 = \begin{cases} \frac{(-1)^{\ell+j} s_\ell}{s_j(x_{2,\ell} - x_{2,j})}, & \ell \neq j, \\ -\frac{x_{2,j}}{2(1-x_{2,j}^2)}, & 1 \leq \ell = j \leq N-1, \\ \frac{2N^2+1}{6}, & \ell = j = 0, \\ -\frac{2N^2+1}{6}, & \ell = j = N, \end{cases} \quad s_j = \begin{cases} 2, & j = 0, N, \\ 1, & j = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

При этом элементы ℓ -й строки матрицы D_N^1 являются коэффициентами разностной аппроксимации первой производной в ℓ -м узле коллокации на шаблоне $\{x_{2,k}\}$, $k = 0, 1, \dots, N$. Дифференциальные операторы второго порядка аппроксимируются суперпозицией $D_N^2 = D_N^1 D_N^1$.

В терминах введенных аппроксимаций задача (6), (7) сводится к обобщенной задаче на собственные значения (линейному матричному пучку) относительно спектрального параметра $\lambda = \text{Re}/2$:

$$\sum_{j=0}^{5N+4} (G_{kj} - \lambda F_{kj}) r_j = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 5N+4. \quad (10)$$

Вектор неизвестных $\mathbf{r}$ размером $5(N+1)$ в (10) состоит из значений собственных функций в узлах коллокации:

$$\mathbf{r}(x_2) = (u_0, u_1, \dots, u_N, v_0, v_1, \dots, v_N, w_0, w_1, \dots, w_N, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N, \theta_{v,0}, \theta_{v,1}, \dots, \theta_{v,N}),$$

а матрицы G , F размером $5(N+1) \times 5(N+1)$ вычисляются с использованием специальной процедуры Matlab по формулам

$$G = A \otimes D_N^2 + B \otimes D_N^1 + C \otimes I_N, \quad F = K \otimes I_N,$$

где знак $\otimes$ обозначает прямое (тензорное) произведение матриц [11]; I_N – единичная матрица размером $(N+1) \times (N+1)$; A , B , C – матрицы размером 5×5 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 + \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{20\gamma_{\text{vib}}}{33(1-\gamma_{\text{vib}})} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) & 0 & \frac{n}{2} & 0 \\ i\alpha\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) & 0 & i\delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & i\delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n}{2}(\gamma-1)M^2 \text{Pr} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\left(\delta^2 + \left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right)\alpha^2\right) & 0 & -\alpha\delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha^2 + \delta^2) & 0 & \frac{i\alpha n}{2} & 0 \\ -\alpha\delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) & 0 & -\left(\alpha^2 + \left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right)\delta^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i\alpha n}{2}(\gamma-1)M^2 \text{Pr} & 0 & -(\alpha^2 + \delta^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{20\gamma_{\text{vib}}(\alpha^2 + \delta^2)}{33(1-\gamma_{\text{vib}})} \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_{\text{vib}} \text{Pr}}{\gamma(1-\gamma_{\text{vib}})\tau_{\text{VT}}} & -\frac{\gamma_{\text{vib}} \text{Pr}}{\gamma(1-\gamma_{\text{vib}})\tau_{\text{VT}}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_{\text{vib}} \text{Pr}}{\gamma(1-\gamma_{\text{vib}})\tau_{\text{VT}}} & \frac{\gamma_{\text{vib}} \text{Pr}}{\gamma(1-\gamma_{\text{vib}})\tau_{\text{VT}}} \end{pmatrix}.$$

Однородные граничные условия (7) для уравнения (10) учитываются неявно через оператор D_N^1 и на дискретном уровне реализуются заменой матриц D_N^k ($k = 1, 2$) на окаймленные матрицы размером $(N-1) \times (N-1)$ [9, 10]. Последние получаются при выполнении условий

$$D_{0,j}^\ell = D_{N,j}^\ell = 0, \quad D_{i,0}^\ell = D_{i,N}^\ell = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad \ell = 1, 2.$$

Для нахождения всех собственных значений и функций обобщенной спектральной задачи (10) использовалась процедура Matlab, реализующая QZ-алго-

ритм [12], который позволяет одновременным ортогональным преобразованием привести пару матриц G, F к обобщенной верхней треугольной форме.

В результате применения данной процедуры для фиксированных значений числа Маха M , объемной вязкости α_1 , степени неравновесности колебательной энергии γ_{vib} , времени колебательной релаксации τ_{VT} и каждой пары волновых чисел (α, δ) получался набор $N+1$ собственных значений, среди которых находилось минимальное по модулю число Рейнольдса $\text{Re}(\alpha, \delta) = 2 |\lambda_{\min}(\alpha, \delta)|$. Значение критического числа Рейнольдса Re_c для данных $M, \alpha_1, \tau_{\text{VT}}$ и γ_{vib} принималось равным минимальному значению Re во всем диапазоне волновых чисел $\text{Re}(\alpha, \delta)$: $\text{Re}_c = \min_{(\alpha, \delta)} \text{Re}(\alpha, \delta)$. Затем вычислялись соответствующие Re_c собственные функции $u, v, w, \theta, \theta_v$.

Вычисления спектров собственных значений $\lambda(\alpha, \delta, M, \alpha_1, \tau_{\text{VT}}, \gamma_{\text{vib}})$ выполнялись для случая, когда в качестве молекул несущего газа рассматриваются «максвелловские» молекулы, тогда $n = 1$ [2, 3]. Все расчеты велись в диапазоне волновых чисел $\alpha = -5 \div 5, \delta = -5 \div 5$ при следующих значениях параметров: $\gamma_{\text{vib}} = 0, 1 \div 0, 4$; $\tau_{\text{VT}} = 1 \div 4$; $\alpha_1 = 0 \div 2$; $M = 0, 1 \div 1$; $\text{Pr} = 3/4$; $\gamma = 7/5$. Шаги изменения волновых чисел были выбраны равными $h_\alpha = h_\delta = 0, 1$. Число узлов коллокации в интервале $x_2 \in [-1, 1]$ принималось равным $N+1 = 50$. Для проверки точности расчетов проводилось варьирование числа узлов коллокации в диапазоне $N+1 = 32 \div 100$.

Результаты расчетов и их обсуждение

Расчеты показали, что при всех рассматриваемых значениях степени неравновесности колебательной энергии γ_{vib} , времени колебательной релаксации τ_{VT} , объемной вязкости α_1 и числа Маха M минимальные по модулю собственные значения $\text{Re}(\alpha, \delta) = 2 |\lambda_{\min}(\alpha, \delta)|$ достигаются на оси $\alpha \neq 0$ (при $\delta = 0$) в плоскости волновых чисел (α, δ) . Изолинии $\text{Re}(\alpha, \delta)$ приведены на рис. 1.

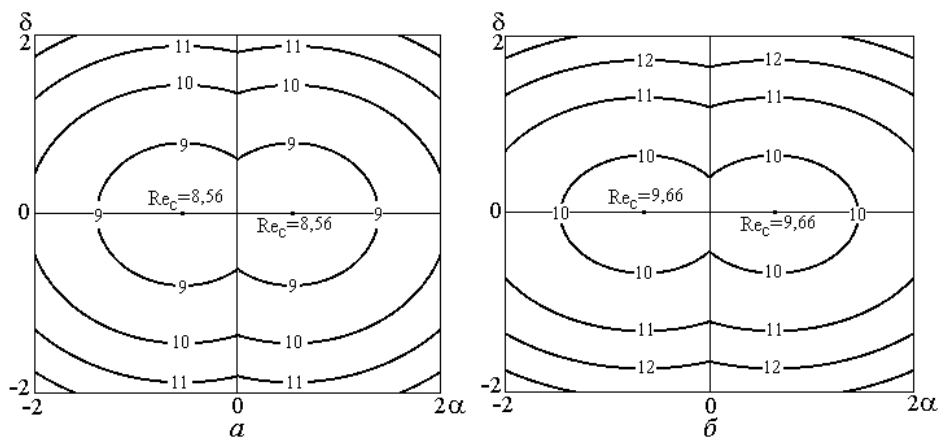


Рис. 1. Линии уровня поверхностей $\text{Re}(\alpha, \delta)$ для $M=0,5, \alpha_1=0, \tau_{\text{VT}}=1$
($a - \gamma_{\text{vib}}=0,2$; $b - \gamma_{\text{vib}}=0,4$)

Как и в случае умеренного возбуждения, рассмотренном в [13], наиболее «опасными» являются возмущения продольной моды. С учетом периодичности полученного решения по продольной координате x_1 эти возмущения представля-

ют собой пары двумерных вихрей, вращающихся в противоположных направлениях, с осями, перпендикулярными несущему потоку. Распределение завихренности в этих вихрях вычисляется по формуле

$$\omega(x_1, x_2) = - \left(\alpha v_i + \frac{d u_r}{d x_2} \right) \cos(\alpha x_1) - \left(\alpha v_r - \frac{d u_i}{d x_2} \right) \sin(\alpha x_1).$$

Здесь $u_r(x_2)$, $u_i(x_2)$, $v_r(x_2)$, $v_i(x_2)$ – вещественные и мнимые части собственных функций u , v . На рис. 2 представлены изолинии завихренности $\omega(x_1, x_2)$, при различных критических числах Рейнольдса $Re_c(\alpha, M, \alpha_1, \tau_{VT}, \gamma_{vib})$ и значениях амплитуд возмущений скорости, составляющих 10 % значения модуля скорости несущего потока на непроницаемых границах.

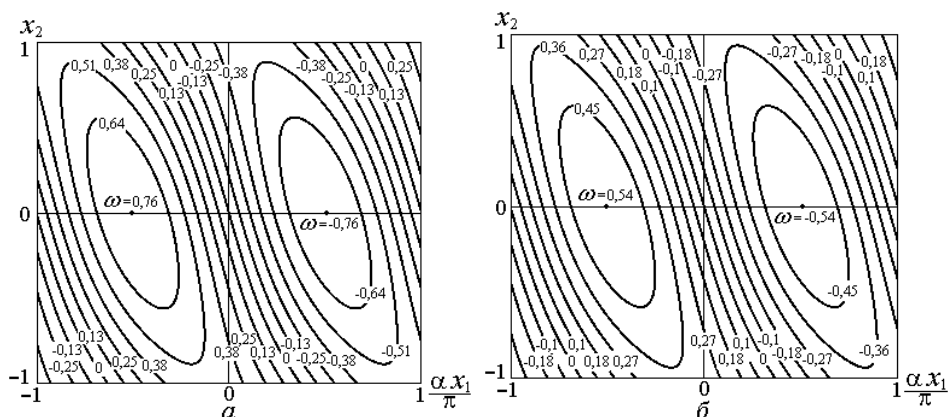


Рис. 2. Изолинии завихренности $\omega(x_1, x_2)$ для $M=0,5$, $\alpha_1=0$, $\tau_{VT}=1$
($a - \gamma_{vib}=0,2$, $Re_c=8,56$; $b - \gamma_{vib}=0,4$, $Re_c=9,66$)

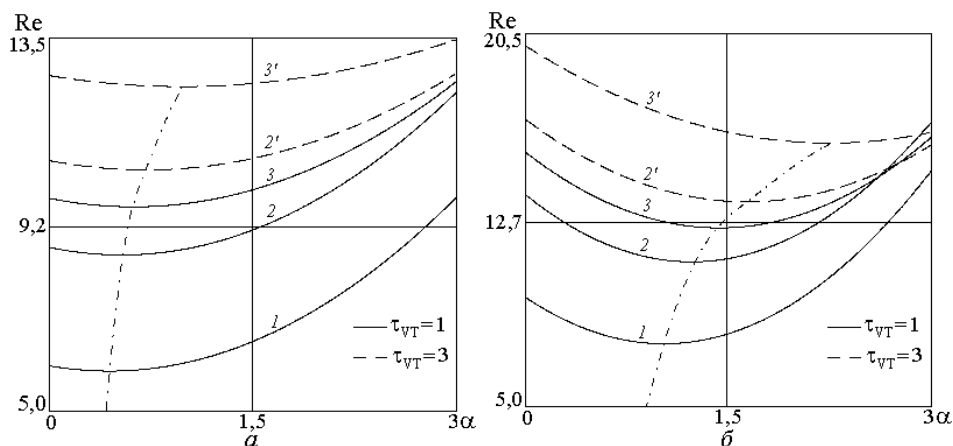


Рис. 3. Зависимости числа Рейнольдса $Re(\alpha)$ для продольных мод возмущений при $M = 0,5$ ($a - \alpha_1=0$; $b - \alpha_1=2$; 1, 1' – $\gamma_{vib}=0,2$; 2, 2' – $\gamma_{vib}=0,3$; 3, 3' – $\gamma_{vib}=0,4$; штрихпунктирная линия – зависимость критического числа Рейнольдса Re_c от волнового числа α)

Зависимость числа Рейнольдса для продольных мод возмущений от волнового числа α представлена на рис. 3, где штрихпунктирные линии соединяют значения

абсолютных минимумов на параметризованных по γ_{vib} и τ_{VT} кривых $Re(\alpha)$, что позволяет проследить эволюцию Re_c . На рис. 4 приведена зависимость Re_c от степени неравновесности γ_{vib} . На рис. 1, 3, 4 видно, что с увеличением значений параметров M , α_1 , τ_{VT} , γ_{vib} критические числа Рейнольдса Re_c и соответствующие им значения волнового числа α возрастают. Таким образом, результаты расчетов показывают, что представленные выше асимптотические выражения (9) качественно описывают зависимость Re_c от параметров течения.

Критические значения числа Рейнольдса $Re_c(\alpha_1, \tau_{VT}, \gamma_{vib}, M)$ приведены в табл. 1, а соответствующие им значения волнового числа α в табл. 2. В рассмотренном диапазоне значений параметров задачи число Рейнольдса Re_c в пределе увеличивается примерно в два с половиной раза. При этом влияние каждого параметра на Re_c при фиксированных значениях остальных параметров существенно различается. Следует отметить, что наиболее значительное влияние на Re_c оказывает степень неравновесности колебательной моды γ_{vib} . Оценки, выполненные в [6], показывают, что возбуждение колебательной моды γ_{vib} в рассмотренном диапазоне достаточно легко достигается с помощью лазера. Поэтому лазерная накачка колебательных мод может стать эффективным способом управления течениями молекулярных газов.

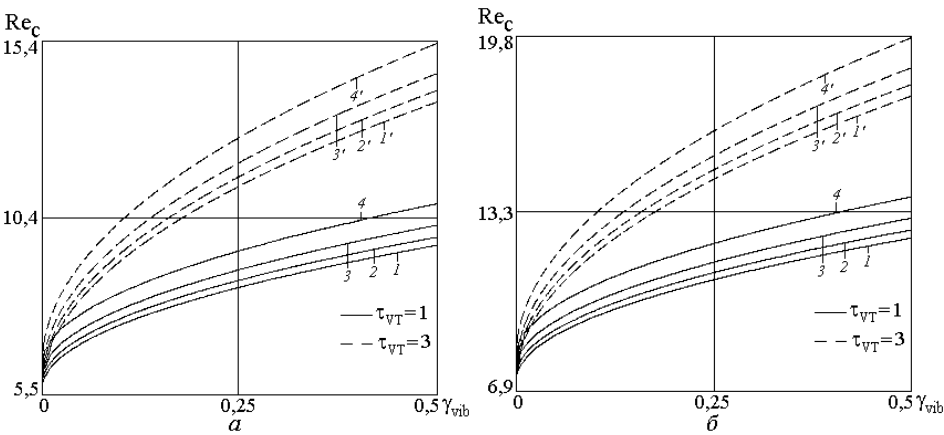


Рис. 4. Зависимости критических чисел Рейнольдса Re_c от степени неравновесности колебательной моды γ_{vib} (а – $\alpha_1=0$; б – $\alpha_1=2$; 1, 1' – $M=0,2$; 2, 2' – $M=0,4$; 3, 3' – $M=0,6$; 4, 4' – $M=0,8$)

Таблица 1

Критические значения числа Рейнольдса $Re_c(M, \alpha_1, \tau_{VT}, \gamma_{vib})$

M	$\tau_{VT}=1$			$\tau_{VT}=4$		
	$\gamma_{vib}=0,1$	$\gamma_{vib}=0,2$	$\gamma_{vib}=0,4$	$\gamma_{vib}=0,1$	$\gamma_{vib}=0,2$	$\gamma_{vib}=0,4$
$\alpha_1=0$						
0,2	$Re_c=7,469$	8,213	9,264	9,264	10,75	12,85
0,5	$Re_c=7,785$	8,560	9,656	9,656	11,21	13,40
0,8	$Re_c=8,366$	9,199	10,38	10,38	12,04	14,40
$\alpha_1=2$						
0,2	$Re_c=9,614$	10,57	11,92	11,92	13,84	16,54
0,5	$Re_c=10,02$	11,02	12,43	12,43	14,42	17,24
0,8	$Re_c=10,77$	11,84	13,36	13,36	15,50	18,53

Таблица 2

Значения волновых чисел α , соответствующие критическим значениям числа Рейнольдса $Re_c(M, \alpha_1, \tau_{VT}, \gamma_{vib})$

M	$\tau_{VT}=1$			$\tau_{VT}=4$		
	$\gamma_{vib}=0,1$	$\gamma_{vib}=0,2$	$\gamma_{vib}=0,4$	$\gamma_{vib}=0,1$	$\gamma_{vib}=0,2$	$\gamma_{vib}=0,4$
$\alpha_1=0$						
0,2	$\alpha=0,482$	0,526	0,613	0,613	0,788	1,139
0,5	$\alpha=0,488$	0,533	0,621	0,621	0,799	1,154
0,8	$\alpha=0,554$	0,604	0,705	0,705	0,906	1,309
$\alpha_1=2$						
0,2	$\alpha=1,111$	1,211	1,413	1,413	1,817	2,625
0,5	$\alpha=1,125$	1,228	1,432	1,432	1,842	2,660
0,8	$\alpha=1,277$	1,393	1,625	1,625	2,089	3,017

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов И.В.* Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в течении Куэтта колебательно-неравновесного молекулярного газа // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2. С. 99–112.
2. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
3. *Жданов В. М., Алиевский М.Е.* Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 336 с.
4. *Нагнибеда Е. А., Кустова Е.В.* Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. 272 с.
5. *Гапонов С.А, Маслов А.А.* Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980. 145 с.
6. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В., Еришова Е.Е.* Влияние колебательной релаксации на пульсационную активность в течениях возбужденного двухатомного газа // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 3. С. 15–23.
7. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Линейная устойчивость невязкого сдвигового течения колебательно возбужденного двухатомного газа // ПММ. 2011. Т. 45. Вып. 4. С. 581–593.
8. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Устойчивость течений колебательно возбужденных газов. Энергетический подход // Вестн. Нижегородского гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского. МЖГ. 2011. № 4 (3). С. 735–737.
9. *Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., and Zang T.A.* Spectral methods in fluid dynamics: Springer series in Computational Physics. Berlin: Springer Verlag, 1988. 564 p.
10. *Trefethen L.N.* Spectral Methods in Matlab. Philadelphia: Soc. for Industr. and Appl. Math., 2000. 160 p.
11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1970. 720 с.
12. *Moler C.B., Stewart G.W.* An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10, № 2. P. 241–256.
13. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в сжимаемом течении Куэтта. Влияние объемной вязкости // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 5. С. 59–67.

Статья поступила 25.09.2012 г.

Ershov I.V. STABILITY OF THE COUETTE FLOW OF A VIBRATIONALLY NONEQUILIBRIUM OF MOLECULAR GAS. ENERGY APPROACH. A variational problem of determining the critical Reynolds number of the laminar–turbulent transition is numerically solved in the context of the energy theory of hydrodynamic stability. Stability of various modes in the Couette flow of a vibrationally excited molecular gas is estimated by the method of collocations. The

flow is described by a system of the equations of two-temperature aerodynamics. The transport coefficients depend on flow temperature. The calculations have shown that the critical Reynolds numbers depend on the Mach number, bulk viscosity, and vibrational relaxation time. In the realistic range of flow parameters for a diatomic gas, the minimum critical Reynolds numbers are reached on modes of streamwise disturbances and increase approximately by a factor of 2,5 as the flow parameters increase.

Keywords: energy theory, hydrodynamic stability, vibrational relaxation, equations of two-temperature aerodynamics, critical Reynolds number.

Ershov Igor Valer'evich (Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering)

E-mail: i_ershov@ngs.ru

УДК 539.3

Т.В. Колмакова

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБЪЕМА КОСТИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Представлены результаты компьютерного моделирования напряженно-деформированного состояния объема кости при осевом сжатии, содержащего компактный и губчатый слои разной плотности. Исследуется влияние изменения плотностей структурных слоев на изменение границ диапазона распределения напряжений и деформаций в объеме кости и в его структурных составляющих.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, компактная костная ткань, губчатая костная ткань, напряженно-деформированное состояние.

Одним из основных требований, предъявляемых к имплантатам, используемым для реконструкции и замещения костных дефектов, является подобие их в механическом поведении костной ткани [1, 2], поэтому актуальным является исследование напряженно-деформированного состояния кости под нагрузкой.

Кости сформированы двумя типами костной ткани: компактной (кортикальной) и губчатой (трабекулярной), отличающимися пространственным расположением структурных элементов, плотностью, минеральным содержанием [3]. Плотность компактной костной ткани может варьироваться от 1,6 до 2,0 г/см³ [4], а плотность губчатой ρ_g – от 0,1 до 1,0 г/см³ [5] в зависимости от их анатомического расположения и состояния здоровья индивидуума.

Поведение отдельно кортикальной и отдельно губчатой костной ткани под нагрузкой изучается достаточно давно. Однако за пределами исследований остались представления о распределении нагрузки в объемах костной ткани, содержащей и компактную и губчатую составляющие. В настоящей работе представлены результаты компьютерного моделирования напряженно-деформированного состояния объемов кости, отличающегося плотностью компактной и губчатой костных тканей при осевом сжатии.

Рассматривается объем костной ткани – модельный образец, содержащий губчатую, компактную составляющие в соотношении 1:1 и промежуточный слой (рис. 1).

Моделировалось нагружение образца напряжением сжатия σ_0 вдоль оси Z (оси кости). Плоскость нагружения YX на рис. 1 представлена на переднем плане, плоскость закрепления – на заднем.

Задача решалась в рамках линейной теории упругости:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0, \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}), \\ \sigma_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} \right), \end{cases}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций,

U_i – компоненты вектора перемещений, θ – объемная деформация, ν – коэффициент Пуассона, μ – модуль сдвига ($\mu = E/(2(1+\nu))$, E – модуль упругости), δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij}=1$ при $i=j$, $\delta_{ij}=0$ при $i \neq j$).

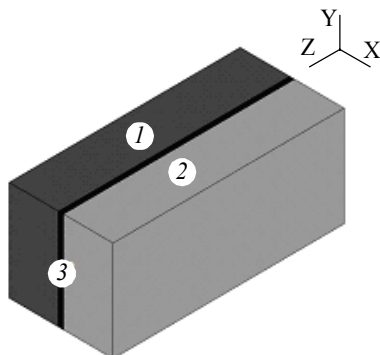


Рис. 1. Геометрическая модель костного образца (1 – компактная составляющая, 2 – губчатая составляющая, 3 – промежуточный слой)

Модули упругости E (ГПа) на сжатие компактной (к) и губчатой (г) составляющих образца задавались в зависимости от их плотности ρ (г/см³) и минерального содержания согласно модели Эрнандеса [6]. Модуль упругости промежуточного слоя определяется как среднеарифметическое значение модулей упругости компактного и губчатого слоев. Выражения для определения модулей упругости при сжатии компактной и губчатой составляющих от их плотности с учетом массовой доли минералов 60 и 53 % соответственно представлены ниже:

$$E_k = 2,78\rho_k^{2,58}, \quad E_g = 2,21\rho_g^{2,58}.$$

Расчеты напряженно-деформированного состояния модельных образцов костной ткани проводились в программном комплексе ANSYS с использованием метода конечных элементов.

На рис. 2 представлены распределения напряжений σ_z (МПа) (рис. 2, а) и деформаций ε_z (рис. 2, б) в модельных образцах с плотностью компактной ткани 1,8 г/см³, плотностью губчатой 0,2, 0,5 и 0,8 г/см³ при напряжении сжатия $\sigma_0 = 1,2$ МПа в одном диапазоне изменения значений.

Из представленных результатов видно, что в образцах наибольшее напряжение сжатия сконцентрировано в компактной составляющей вблизи промежуточного слоя, а наибольшее растягивающее напряжение там же со стороны свободного края. Наибольшие сжимающие деформации для образца с плотностью губчатой составляющей 0,2 г/см³ локализуются в губчатой составляющей образца вблизи плоскости нагружения. Для образцов с плотностью губчатой составляющей 0,5 и 0,8 г/см³ наблюдается равномерное распределение деформаций по всему образцу. Образец с плотностью губчатого слоя 0,8 г/см³ характеризуется наиболее равномерным распределением напряжений. Подобное распределение напряжений и деформаций в модельных образцах объясняется влиянием трех видов деформаций, реализующихся в разных направлениях при осевом сжатии: деформации сжатия, реализующейся в направлении оси Z (оси нагружения), деформации изгиба, реализующейся в направлении оси X и деформации растяжения в направлении оси Y [7].

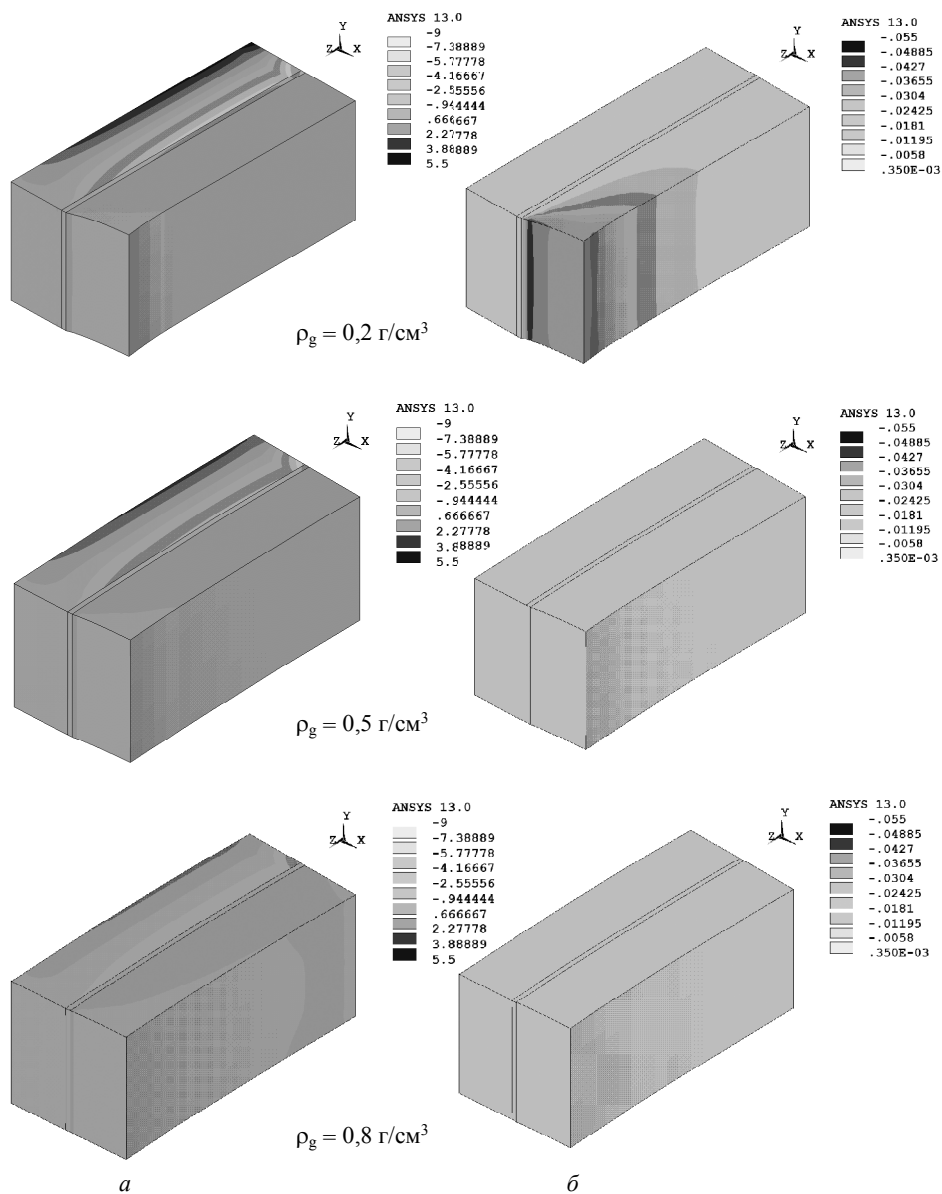


Рис. 2. Распределение напряжений σ_z (МПа) (*a*) и деформаций ε_z (*б*) в модельных образцах кости с плотностью компактной костной ткани $\rho_k = 1,8 \text{ г/см}^3$ при напряжении сжатия $\sigma_0 = 1,2 \text{ МПа}$

На рис. 3 представлено изменение границ диапазона напряжений и деформаций в модельном образце и в его структурных составляющих с ростом плотности губчатой ткани при напряжении сжатия 1,2 МПа. Повышение плотности губчатой составляющей приводит к сужению диапазона изменения напряжений и деформаций в объеме кости.

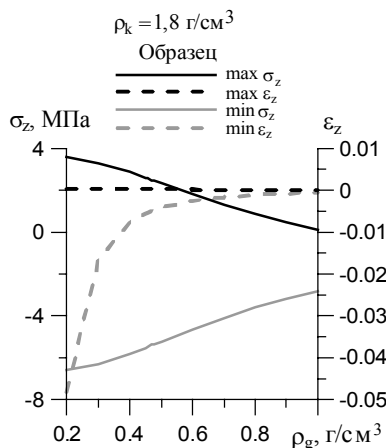


Рис. 3. Изменение границ диапазона напряжений ($\max \sigma_z$, $\min \sigma_z$) и деформаций ($\max \varepsilon_z$, $\min \varepsilon_z$) в модельном образце с ростом плотности губчатой ткани ρ_g при напряжении сжатия 1,2 МПа

Изменение максимальной деформации образца в зависимости от изменения плотности его структурных составляющих (рис. 5, а) определяется распределением максимальной деформации в компактном слое (рис. 5, б). Максимальные напряжения и деформации принимают нулевые значения в образцах с плотностями компактного слоя 1,6 и 1,7 г/см³ и плотностями губчатого слоя 0,94 и 1,0 г/см³ соответственно ($\rho_k/\rho_g=1,7$) (рис. 4, 5, а, б, отмечено горизонтальной линией). Можно предположить, что в образцах с отношением $\rho_k/\rho_g < 1,7$ будут реализовываться уже не растягивающие, а сжимающие максимальные напряжения и деформации, как например для образца с плотностью компактного слоя 1,6 г/см³ и плотностью губчатого слоя 1,0 г/см³ ($\rho_k/\rho_g = 1,6$) (рис. 4, 5, а, б).

Максимальная деформация компактного слоя с ростом плотности губчатой составляющей уменьшается. С увеличением плотности компактного слоя уменьшается угол наклона кривой $\max \varepsilon_z(\rho_g)$. Для образцов с разной плотностью компактного слоя и плотностью губчатого слоя 0,66 г/см³ максимальная деформация имеет одинаковое значение: $\max \varepsilon_z = 0,00012$ (рис. 5, а, б).

Изменение минимальной деформации, реализующейся в образце в зависимости от изменения плотности его структурных составляющих (рис. 5, а), определяется распределением минимальной деформации в губчатом слое (рис. 5, в), которая не зависит от плотности компактного слоя образца и стремится к нулю с ростом плотности губчатого слоя.

Влияние изменения плотности компактного слоя на изменение максимальных и минимальных деформаций в структурных составляющих меньше по сравнению с влиянием изменения плотности губчатого слоя и снижается с ростом плотности губчатого слоя (рис. 5, а–в).

Таким образом, в результате проведенных исследований выявлено, что для объема кости, содержащего компактный и губчатый слои в соотношении 1:1 с массовой долей минералов 60 и 53 % соответственно, повышение плотности

На рис. 4, 5 представлены распределения границ диапазона напряжений и деформаций в модельных образцах и в их структурных составляющих, компактной и губчатой, отличающихся плотностью. Видно, что влияние изменения плотности компактной составляющей на изменение границ диапазона распределения напряжений меньше по сравнению с влиянием изменения плотности губчатого слоя образца, усиливается с ростом плотности губчатого слоя (рис. 4, а–в) и практически не сказывается на минимальном напряжении губчатого слоя (рис. 4, в).

Диапазон изменения напряжений в образце (рис. 4, а) и в его структурных составляющих (рис. 4, б, в) становится все уже с уменьшением плотности компактного слоя.

Изменения значений максимальных и минимальных напряжений в образце с изменением плотности его структурных составляющих (рис. 4, а) определяются изменением напряжений в компактном слое (рис. 4, б).

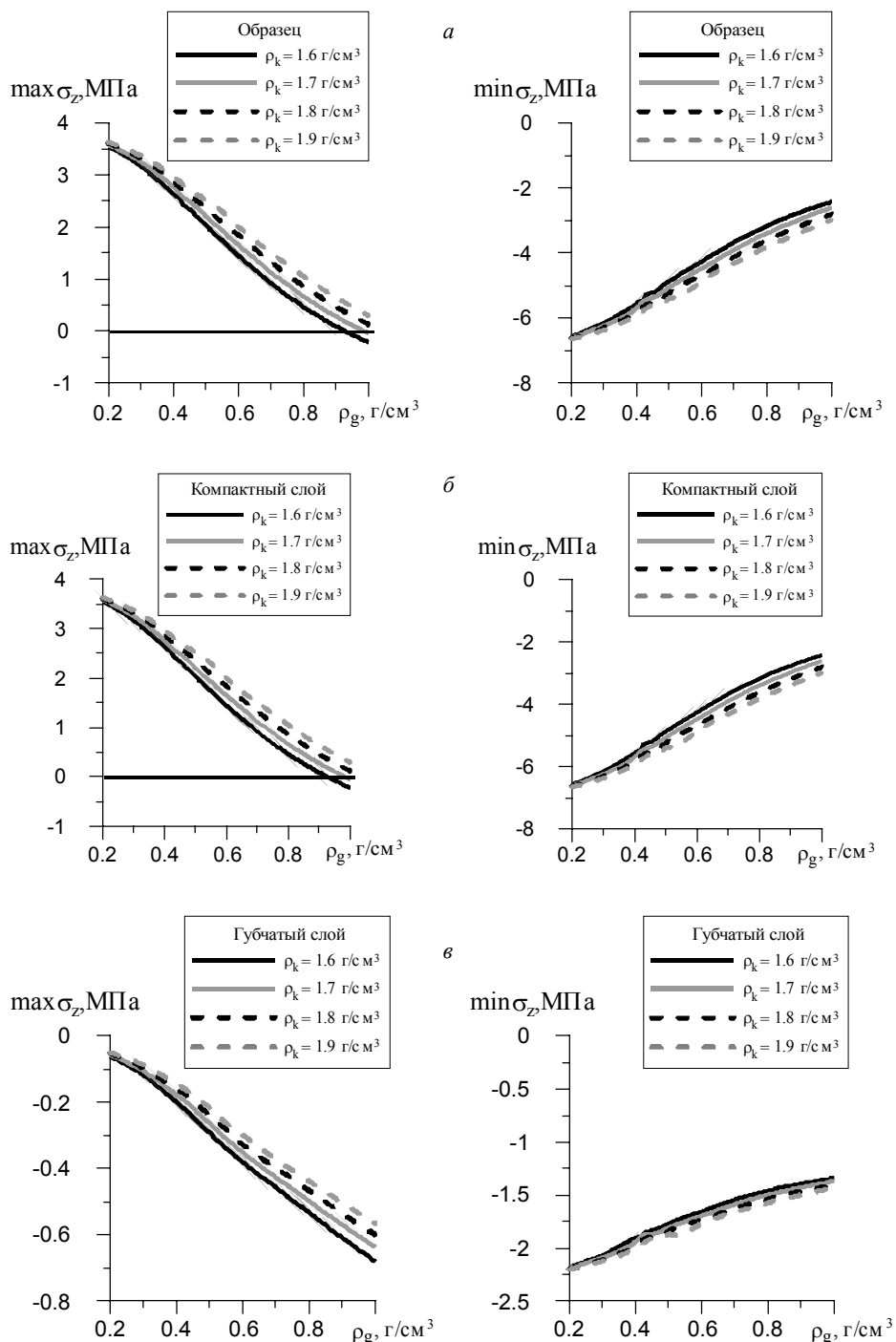


Рис. 4. Изменение границ диапазона напряжений ($\max \sigma_z$, $\min \sigma_z$) в модельных образцах (*a*) и в их структурных составляющих (*б*, *в*) с изменением плотности компактного слоя ρ_k и губчатого слоя ρ_g при напряжении сжатия 1,2 МПа

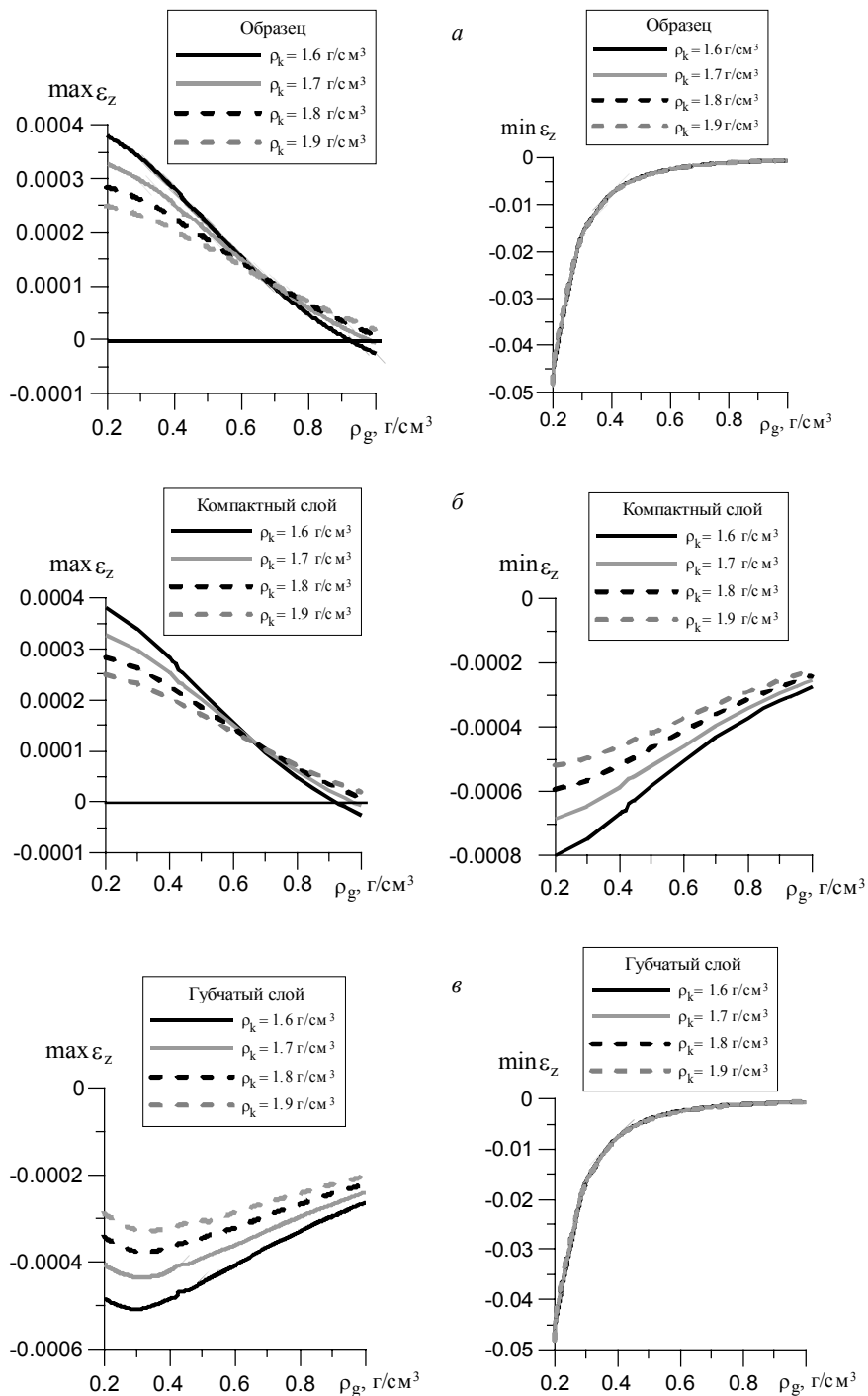


Рис. 5. Изменение границ диапазона деформаций ($\max \varepsilon_z$, $\min \varepsilon_z$) в модельных образцах (а) и в их структурных составляющих (б, в), отличающихся плотностью компактного слоя ρ_k и губчатого слоя ρ_g при напряжении сжатия 1,2 МПа

губчатой составляющей или снижение плотности компактной составляющей приводит к сужению диапазона распределения напряжений и деформаций.

Изменение плотности компактной составляющей в меньшей степени влияет на изменение границ диапазона распределения напряжений и деформаций по сравнению с изменением плотности губчатой составляющей образца. Влияние изменения плотности компактной составляющей на изменение границ диапазона распределения напряжений в образце и в компактном слое и на изменение максимального напряжения в губчатом слое усиливается с ростом плотности губчатой составляющей и практически не сказывается на минимальном напряжении и деформации губчатого слоя. Влияние изменения плотности компактной составляющей на изменение диапазона распределения деформаций в компактном слое и на изменение максимальной деформации в губчатом слое уменьшается с ростом плотности губчатого слоя.

Изменение максимального и минимального значений напряжений в образце при осевом сжатии определяется изменением соответствующих значений напряжений в компактном слое. Изменение максимальной деформации образца определяется изменением максимальной деформации в компактном слое, а изменение минимальной деформации образца – изменением минимальной деформации губчатого слоя.

Для образцов с $\rho_k/\rho_g > 1,7$ реализуются максимальные растягивающие напряжения и деформации, принадлежащие компактному слою, а для образцов с $\rho_k/\rho_g < 1,7$ – сжимающие.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баринов С. М.* Керамические композиционные материалы на основе фосфатов кальция для медицины // *Успехи химии*. 2010. Т. 79. № 1. С. 15–32.
2. *Путляев В.И.* Современные биокерамические материалы // *Соросовский образовательный журнал*. 2004. Т. 8. № 1. С. 44–50.
3. *Архилов-Балтийский С.В.* Рассуждение о морфомеханике. Норма: в 2 томах. Калининград, 2004. 820 с.
4. *Zioupou P., Cook R.B., and Hutchinson J.R.* Some basic relationships between density values in cancellous and cortical bone // *J. Biomechanics*. 2008. V. 41. P. 1961–1968.
5. *Liebschner M.A.K.* Biomechanical considerations of animal models used in tissue engineering of bone // *Biomaterials*. 2004. No. 25. P. 1697–1714.
6. *Hernandez C.J.* Simulation of Bone Remodeling During the Development and Treatment of Osteoporosis / C.J. Hernandez – PhD Thesis, Stanford University, 2001. 356 p.
7. *Колмакова Т.В.* Деформационное поведение костной ткани при осевом сжатии // *Изв. вузов. Физика*. 2012. Т. 55. № 9/3. С. 57–59.

Статья поступила 13.03.2013 г.

Kolmakova T.V. STUDYING THE STRESS-STRAIN STATE OF THE BONE VOLUME UNDER AXIAL COMPRESSION. The results of computer simulation of the stress-strain state of a bone volume comprising a compact and spongy layers of different densities and undergoing axial compression are presented. Influence of changes in structural layers' densities on the change in range limits of stress and strain distributions in the bone volume and in its structural components is investigated.

Keywords: Computer simulation, compact bone tissue, spongy bone tissue, stress and strain state.

Kolmakova Tatyana Vitalievna (Tomsk State University)
E-mail: kolmakova@ftf.tsu.ru

УДК 539.214

П.В. Манахов, О.Б. Федосеев

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Приведен численный метод решения задач пластичности по теории течения с использованием метода конечных элементов. Основной особенностью метода является непосредственное решение системы нелинейных определяющих уравнений программными средствами, реализующими алгоритм минимизации невязки функции. Представлена работа программы по определению напряженно-деформированного состояния для упругопластической осесимметричной задачи. Указаны преимущества данного метода по сравнению с известными методами расчета пластических течений.

Ключевые слова: метод конечных элементов, теория пластического течения, аппроксимация, кривые упрочнения, итерационный процесс, условие пластичности, предел текучести.

Введение

В основе теории пластического течения лежит соотношение, связывающее компоненты приращения пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$ с поверхностью текущей F :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}},$$

где λ – скалярный множитель; σ_{ij} – составляющие тензора напряжения. Соотношение (1) не интегрируется, то есть не сводится к конечному соотношению между компонентами напряжения и деформации, так как содержит неизвестный скалярный множитель λ , для определения которого нужно располагать дополнительным соотношением.

Современная методика расчета пластических течений [1] предполагает построение упругопластической матрицы D_{ep} , связывающей приращения напряжений и деформаций:

$$d\sigma = D_{ep}d\varepsilon, \quad (1)$$

где D_{ep} – упругопластическая матрица, вычисление которой проводят, используя диаграмму одноосного растяжения материала [1, 2].

Процедура установления зависимости (1) характеризуется трудоемкостью, которая связана с необходимостью нахождения упругопластической матрицы по экспериментальным данным на каждом шаге вычислений.

К настоящему времени для определения накопленных пластических деформаций, напряжений и перемещений достаточно хорошо разработаны различные итерационные методы. Основные из них: метод переменной и касательной жесткости, метод начальных напряжений и начальных деформаций.

Суть каждого из этих методов сводится к построению системы линейных уравнений вида

$$M\Delta u = \Delta P + M_p\Delta u$$

и решения полученной системы итерационным способом [1]:

$$M\Delta u_n = \Delta P + M_p \Delta u_{n-1},$$

$$\Delta u_0 = 0, n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $M = \int_V B^T D B dV$ – упругая матрица жёсткости; $M_p = \int_V B^T D_p B dV$ – пластическая

матрица жёсткости; ΔP – приращение нагрузки; Δu – приращение перемещения; n – номер итерации; B – так называемая матрица градиентов, содержащая производные от перемещений. Методом начальных деформаций и напряжений вносят изменения в ΔP на каждой итерации:

$$\Delta P = \int_V B^T \Delta \sigma dV, \Delta \sigma = D \Delta \epsilon + \Delta \sigma_0 \quad \text{— для начальных напряжений,}$$

$$\Delta P = \int_V B^T D \Delta \epsilon dV, \Delta \epsilon = \Delta \epsilon_0 + \frac{\Delta \sigma}{D} \quad \text{— для начальных деформаций,}$$

где $\Delta \sigma_0$ – приращение начальных напряжений; $\Delta \epsilon_0$ – приращение начальных деформаций.

Методом переменной и касательной жёсткости вносят изменения в матрицу упругой жёсткости M ; в последнем случае расчёт ведут методом Ньютона – Рафсона. Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока отличие искомых приращений на соседних итерациях не станет меньшим наперед заданного малого числа.

Можно выделить следующие трудности, с которыми сталкиваются исследователи при решении задач по теории пластического течения:

- соотношение, связывающее компоненты приращения пластических деформаций с поверхностью текучести не интегрируется, то есть не сводится к конечному соотношению, так как содержит неизвестный скалярный множитель.

- другая проблема в расчёте пластичности по теории течения состоит в том, что связь между напряжениями и деформациями присутствует лишь с момента достижения напряжениями поверхности текучести; следовательно, на каждом шаге расчёта необходимо изменять напряжения так, чтобы выполнялось условие текучести.

- процедура установления зависимости между напряжениями и деформациями характеризуется трудоёмкостью, которая связана с необходимостью нахождения упругопластической матрицы по экспериментальным данным на каждом шаге вычислений.

Методика проведения расчетов

В работе [3] изложен альтернативный алгоритм вычисления пластических деформаций на основе решения системы нелинейных определяющих уравнений, состоящей из соотношений Прандтля – Рейса и условия пластичности Мизеса:

$$\begin{cases} d\epsilon_{ij}^p = \lambda s_{ij}, \\ \sigma_i - \sigma_t = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где s_{ij} – компоненты девиатора напряжения; σ_i – интенсивность напряжений; σ_t – предел текучести материала.

Для решения системы нелинейных уравнений (2) обращаются к целевой функции, алгоритм работы которой использует начальные значения искомых величин

и базируется на минимизации суммы квадратов входящих в систему функций методами Гаусса – Ньютона и Левенберга – Марквардта. Соответствующим обращением к данной функции можно управлять процессом поиска решений, в частности устанавливать максимальное количество обращений к функциям системы уравнений, устанавливать максимальное количество итераций, прекращать итерации при достижении требуемой точности значений функций.

Предел текучести может быть рассчитан при обращении к экспериментально полученным кривым упрочнения для заданного уровня пластических деформаций, температуре и скорости деформации.

В [4] описан способ аппроксимации кривых упрочнения параболической функцией

$$\sigma_T = A\varepsilon_p^2 + B\varepsilon_p + C, \quad (3)$$

где σ и ε_p – напряжения и интенсивность пластических деформаций соответственно; A, B, C – определяемые коэффициенты, зависящие от скорости деформации и температуры.

Последовательность решения задачи пластичности при заданных температурно-скоростных условиях деформации следующая:

1) проверка условия пластичности Мизеса:

$$\sigma_i - \sigma_t = 0; \quad (4)$$

2) вычисление коэффициентов A, B, C аппроксимирующей функции (3). Для сталей 20 и 08Х22Н6Т расчет может быть проведен по формулам, указанным в [4];

3) решение системы определяющих уравнений (2) относительно пластических деформаций. Переходя к конечно-разностной форме соотношений Прандтля – Рейса и учитывая формулу (4), система (3) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\Delta \varepsilon_{ij}^p}{\Delta t} - \lambda s_{ij} = 0, \\ \sigma_i - (A\varepsilon_p^2 + B\varepsilon_p + C) = 0, \end{cases}$$

где Δt – временной интервал, который исключается при переходе к безразмерным параметрам;

4) расчет предела текучести σ_t как функции, аппроксимирующей кривые упрочнения для исследуемого материала, по формуле (4). Данное значение предела текучести используется для проверки условия пластичности для следующего шага расчета;

5) модификация глобального вектора нагрузки F с учетом наличия пластических деформаций и закрепления модели;

6) расчет глобальной матрицы жесткости M с учетом деформаций;

7) вычисление приращений узловых перемещений U путем решения (например, методом исключения Гаусса) системы линейных уравнений метода конечных элементов;

8) вычисление накопленных узловых перемещений U_Σ ;

9) расчет компонент вектора полных деформаций для конечных элементов:

$$\varepsilon = BU_\Sigma,$$

где B – матрица градиентов, содержащая производные от перемещений;

10) расчет упругих деформаций ε_e :

$$\varepsilon_e = \varepsilon - \varepsilon_p;$$

11) определение компонент вектора напряжений σ :

$$\sigma = D \varepsilon_e,$$

где D – матрица упругих констант;

12) вычисление для конечных элементов компонент девиатора напряжений s_{ij} и интенсивности напряжений σ_i ;

13) переход к следующему шагу вычислений.

Получение результатов

В работе [5] дан детальный обзор последовательности вычислений напряжений и деформаций при сжатии тела прямоугольного сечения в условиях плоской деформации для линейно упрочняющегося тела (рис. 1).

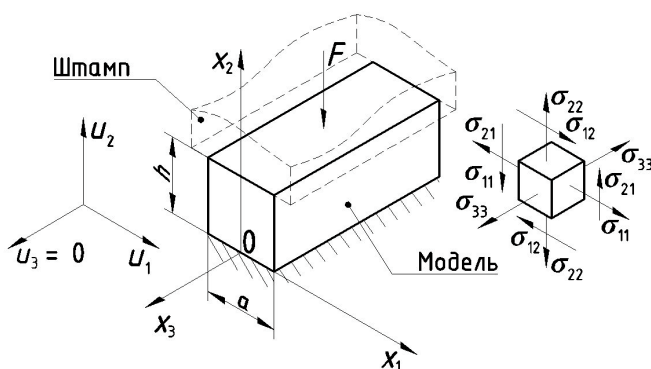


Рис. 1. Расчетная схема для анализа плоской деформации при сжатии тела прямоугольного сечения

На рис. 2 и 3 показаны решения, полученные по разработанному алгоритму. (На графиках σ_{22} – нормальное напряжение, действующее в направлении сжимающей силы.) Результаты показали, что для задачи с граничными условиями в перемещениях (рис. 2) при возрастании коэффициента упрочнения или скорости деформации напряжения приближаются к решению для идеально упругого тела. При решении задачи с силовыми граничными условиями (рис. 3) наблюдается аналогичный характер уменьшения осадки при увеличении коэффициента упрочнения или скорости деформации.

Для сравнения на графиках показаны также решения, полученные методом начальных деформаций. Итерационный процесс по предлагаемому алгоритму обладает более быстрой сходимостью. Так, например, для коэффициента упрочнения 10⁵ МПа сходимость достигается при 4–6 циклах, тогда как по методу начальных деформаций – за 20–30 циклов. В среднем пластическая задача с использованием разработанного алгоритма решается в 3 раза быстрее по сравнению с использованием метода начальных деформаций.

В [6] разработанный алгоритм решения задач теории пластичности применен для решения осесимметричной задачи.

В системе компьютерной математики MATLAB® создана программа «INDENTOR» для решения упругопластической задачи о вдавливании шарика в тело прямоугольного сечения в условиях плоской деформации.

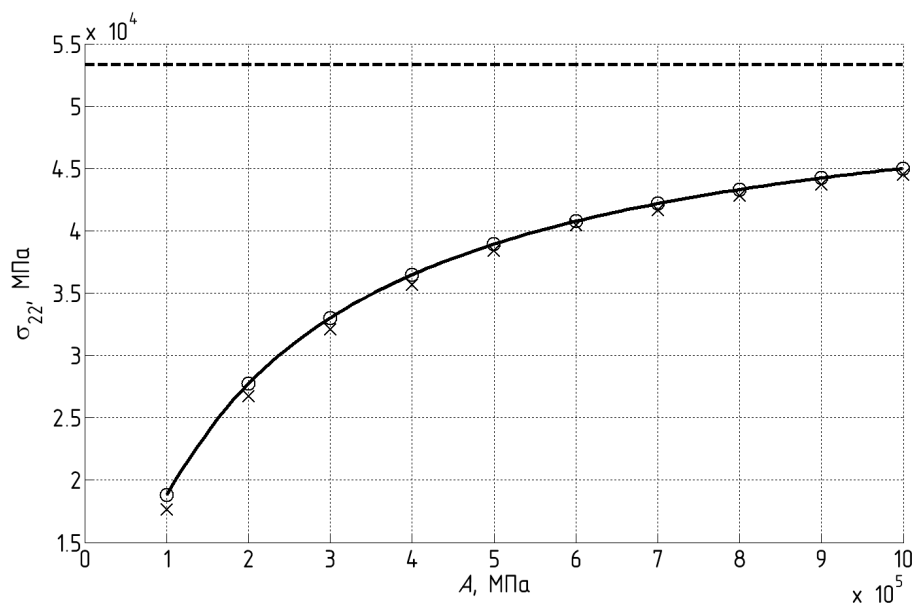


Рис. 2. График зависимости напряжения σ_{22} от коэффициента упрочнения A при перемещении штампа $\Delta = 5$ мм. $\circ$ – решение, полученное по разработанному алгоритму; $\times$ – решение, полученное методом начальных деформаций

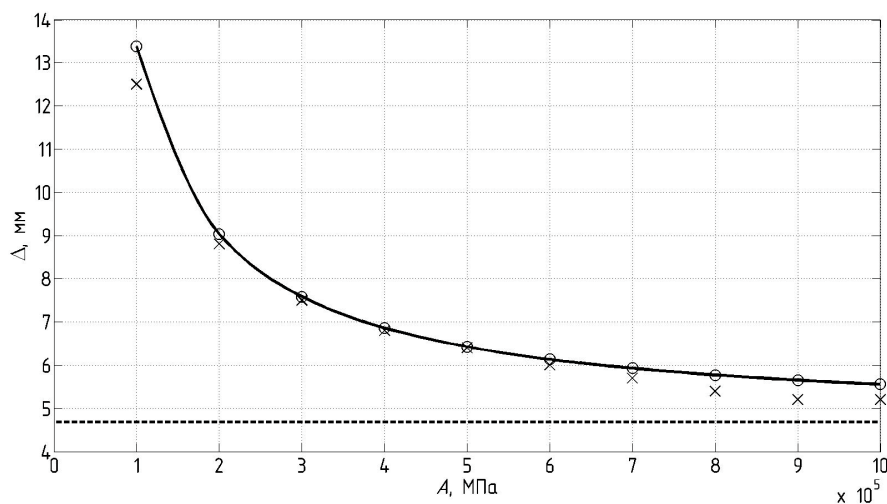


Рис. 3. График зависимости осадки штампа Δ от коэффициента упрочнения A для давления штампа $F = 5 \cdot 10^4$ МПа. $\circ$ – решение, полученное по разработанному алгоритму; $\times$ – решение, полученное методом начальных деформаций

На рис. 4 показано основное окно программы с исходными данными; на рис. 5 можно видеть результаты работы программы с картинками распределения напряжений.

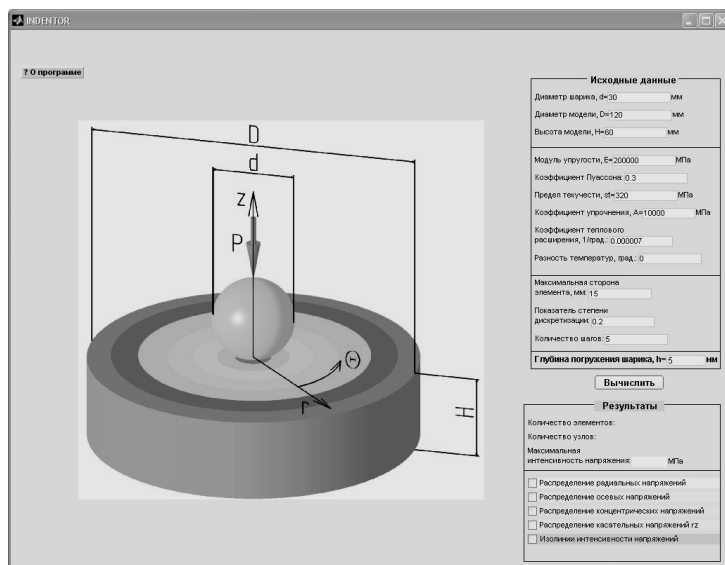


Рис. 4. Основное окно программы «INDENTOR» с исходными данными

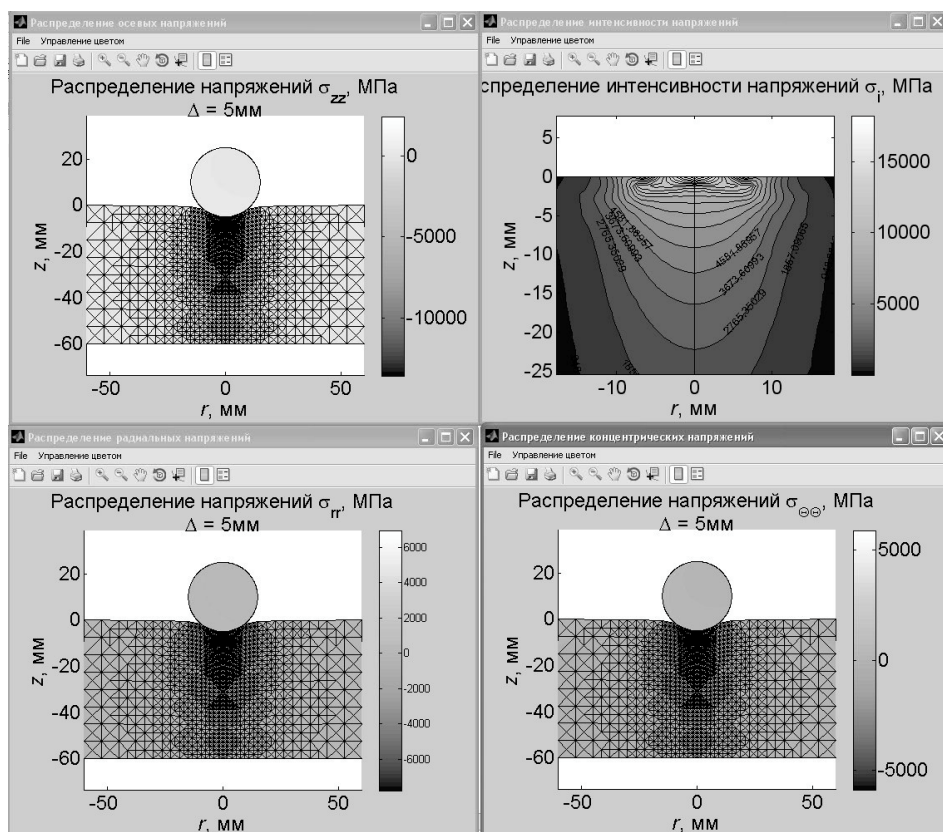


Рис. 5. Результаты работы программы «INDENTOR»

Исходными данными являются:

- геометрические размеры шарика и исследуемого тела;
- упругие и пластические характеристики материала тела (модуль упругости, коэффициент Пуассона, предел текучести недеформированного материала, коэффициент упрочнения);
- коэффициент теплового расширения материала;
- разность температур тела и окружающей среды;
- параметры, влияющие на количество конечных элементов (максимальная сторона элемента и степень дискретизации модели);
- количество шагов перемещения шарика;
- глубина погружения шарика.

Программа позволяет получить картины распределения радиальных, осевых, концентрических напряжений, а также распределение интенсивности напряжений. Трение между штампом и моделью отсутствует. Шарик идеально жесткий.

Заключение

Основными преимуществами предлагаемого алгоритма по сравнению с известными методами расчета пластических течений являются:

- исключение подбора материальных констант для итерационного процесса, таких, как матрица упругих характеристик, начальные напряжения или начальные деформации, – неизвестные параметры находятся непосредственно из системы нелинейных определяющих уравнений (2).

- отсутствие необходимости изменения напряжений на каждой итерации для выполнения условия текучести, что упрощает структуру программы и ускоряет ход вычислительного процесса.

- решение проблемы вычисления упругопластической матрицы (в соотношении (1)) и обращения к экспериментальным данным на каждом шаге вычислений, что автоматизирует и ускоряет вычислительный процесс.

- возможность исследования эволюции полей напряжений и деформаций при различных температурно-скоростных условиях, что расширяет круг рассматриваемых задач и обеспечивает универсальность алгоритму.

Рассмотренный алгоритм соответствует современным подходам к моделированию сложных физических процессов, когда теоретики занимаются разработкой новых вычислительных схем, доказательством сходимости и оценкой точности, а прикладники – разработкой алгоритмов решения, оптимизацией технологических процессов и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еременко С.Ю. Метод конечных элементов в механике деформируемых тел. Харьков: Изд-во «Основа» при Харьк.ун-те, 1991. 272с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
3. Манахов П.В., Федосеев О.Б. Об альтернативном методе вычисления накопленной пластической деформации в пластических задачах с использованием метода конечных элементов // Изв. вузов. Машиностроение. 2007. № 7. С. 16–22.
4. Манахов П.В., Федосеев О.Б. Аппроксимация кривых упрочнения стали 08Х22Н6Т и стали 20 параболическими функциями // Вестник машиностроения. 2010. № 4. С. 50–52.
5. Манахов П.В., Федосеев О.Б. Альтернативный подход к решению задач теории пластичности на примере упругопластического сжатия тела прямоугольного сечения // Вестник машиностроения. 2009. № 1. С. 25–27.

6. Манахов П.В., Федосеев О.Б. Численное моделирование эволюции полей пластических деформаций при испытаниях на твердость с помощью альтернативного алгоритма решения пластических задач // Вектор науки ТГУ. 2011. № 2(16). С. 114–116.

Статья поступила 24.10.2012 г.

Manahov P.V., Fedoseev O.B. OPTIMIZATION OF CALCULATIONS OF PLASTIC DEFORMATIONS IN NONLINEAR PROBLEMS OF DEFORMABLE SOLID MECHANICS. The article gives a numerical method for solving plasticity problems of the flow theory using the finite element method. The main characteristic of the method is the direct solution of a set of nonlinear constitutive equations by means of the software tools that implement residual minimization algorithm of a function. Operation of the program to determine strained-deformed state for the elasto-plastic axisymmetrical problem has been presented. The advantages of this method in comparison with known methods of plastic flow analysis have been pointed out.

Keywords: finite element method, theory of plastic flow, approximation, hardening curves, iterative process, plasticity condition, yield point.

Manahov Pavel Vladimirovich (Togliatti State University)

E-mail: Pavel18991@yandex.ru

Fedoseev Oleg Borisovich (Togliatti State University)

E-mail: office@tltsu.ru

УДК 629.78.001

Н.Н. Севастьянов

ПОСТРОЕНИЕ РЕЖИМОВ ОРИЕНТАЦИИ БЕЗ ДАТЧИКОВ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ НА СС «ЯМАЛ-200»

Рассматривается возможность построения режимов ориентации без использования датчиков угловой скорости. Помимо традиционных режимов управления с использованием сигналов угловых отклонений, получаемых от датчиков ориентации, исследуется возможность управления по вычисляемому значению угловой скорости. Показана возможность такого управления, в основе которого лежит закон сохранения кинетического момента; режимы управления такого рода получили название «прогноза», и они, по сути дела, являются режимами управления по инерциальной информации.

Ключевые слова: *датчики углового положения, кинетический момент спутника, вычисляемая угловая скорость, режимы ориентации.*

Результаты летных испытаний первого спутника связи «Ямал-100», выведенного на геостационарную орбиту 6 сентября 1999 г., были позитивными. Спутник проработал на орбите 11 лет (техническое задание содержало требование 10-летнего ресурса), подтвердив надежды разработчиков на создание новой базовой платформы для связных спутников среднего класса. Концепция построения системы ориентации и управления движением также подтвердила рациональность своих принципов построения [1]. Точностные характеристики инерциальных измерителей угловой скорости (прибор «ГИВУС») после компенсации систематики уходов оказались достаточно высокими: за сутки набегаящая ошибка ориентации в режиме инерциальной памяти не превышала 5 угловых минут. Автоматический контроль уходов, осуществляемый за счет избыточной информации измерителя (четыре измерительных оси), гарантировал правильность ориентации, корректирование положения бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) с использованием звездного датчика БОКЗ (блока определения координат звезды) или же датчика земной вертикали БОКЦ (блока определения координат центра) и солнечного датчика БОКС (блока определения координат Солнца) проводилось раз в сутки, что существенно сэкономило ресурс датчиков. Итоги первых двух лет эксплуатации дали основание использовать приборные и программные решения по системе ориентации спутника «Ямал-100» для последующей программы «Ямал-200».

В целом по изделию «Ямал-100» были достаточно серьезные замечания к некоторым приборам: модулю никель-водородных батарей, телеметрической системе, аппаратуре управления электрореактивными двигателями, и ряд других менее существенных замечаний. Эти замечания были учтены и некоторые системы подверглись серьезной доработке или замене на более совершенные приборы, разработка которых была выполнена с учетом полученного опыта при создании первых спутников.

При разработке следующих аппаратов «Ямал-200» были существенно увеличены энергетика спутника (примерно в 2,5 раза), число и мощность бортовых ретрансляторов.

К сожалению, разработчик прибора «ГИВУС» – НИИ ПМ им. В.И. Кузнецова, ссылаясь на кризисное состояние Омского приборостроительного завода, который осуществил изготовление и поставку первых приборов на космический аппарат (КА) «Ямал-100», перевел изготовление прибора на свое предприятие. При этом была осуществлена доработка электроники прибора с переходом на более высоко интегрированную элементную базу. Испытания двух КА «Ямал-200» были завершены в 2003 г., и запуск на геостационарную орбиту (ГСО) состоялся 24 ноября 2003 г.; через месяц спутники были введены в штатную эксплуатацию. Примерно через два года полета спутников контрольная служба центра управления начала фиксировать первые замечания к работе приборов. В связи с этим возникла необходимость решить задачу создания программного обеспечения для работы системы ориентации без использования гироскопических измерителей угловой скорости. К середине 2006 г. такое программное обеспечение было создано; два месяца спустя на спутнике «Ямал-201» произошел катастрофический отказ сразу всех четырех каналов прибора, еще через месяц такой же отказ произошел на спутнике «Ямал-202». Новая версия программного обеспечения была установлена в бортовые компьютеры БКУ (бортовой комплекс управления) и спутники были сохранены. В настоящей статье описывается концепция построения такого рода режимов.

Описание концепции построения

В основу концепции положено то обстоятельство, что режимы постоянной высокоточной ориентации спутника связи выполняются с использованием только инерционных маховиков, т.е. КА является гироскопом. Полный кинетический момент КА изменяется только за счет действия внешних возмущающих моментов M_d , которые достаточно малы (исследование этих моментов будет проведено позднее) и в первом приближении могут быть не учитываемы. Принимая во внимание обозначения предыдущей статьи [1], запишем кинематику движения связанной системы координат КА относительно орбитальной системы координат (ОСК):

$$2\Lambda_Q^B = \Lambda_Q^B \circ \omega_B' = \Lambda_Q^B (\omega_B - \omega_B^0) = \Lambda_Q^B \circ \omega_B - \omega_Q^0 \circ \Lambda_Q^B, \quad (1)$$

где $\omega_B' = \omega_B - \omega_B^0$ – угловая скорость КА относительно ОСК. Динамику изменения кинетического момента будем рассматривать параллельно в инерциальной и связанной системах координат:

$$\dot{G}_I = M_{dI}, \dot{G}_B = \omega_B \times G_B = M_{dB}, \quad (2)$$

где G_I, G_B и M_{dI}, M_{dB} – отображения полного кинетического и внешнего возмущающего моментов на инерциальный и связанный базисы, причем справедливы соотношения перепроектирования

$$M_I = \Lambda_I^B \circ M_B \circ \tilde{\Lambda}_I^B, \quad G_I = \Lambda_I^B \circ G_B \circ \tilde{\Lambda}_I^B. \quad (3)$$

Уравнения изменения кинетического момента имеют следующие интегралы:

$$G_I(t) = G_I^0 + \int_0^t M_{dI} dt, \quad G_B(t) = \tilde{\Lambda}_I^B(t) \circ \left[G_I^0 + \int_0^t \Lambda_I^B(t') \circ M_{dB} \circ \tilde{\Lambda}_I^B(t') dt' \right] \circ \Lambda_I^B(t). \quad (4)$$

Величина кинетического момента в связанных осях

$$G_B = J_B \cdot \omega_B + H_B, \quad (5)$$

где J_B – тензор инерции КА и H_B – кинетический момент системы инерционных маховиков. Описание штатного процесса ориентации в ОСК выполняется динамическими уравнениями

$$J_B \cdot \dot{\omega}'_B + \dot{H}_B + (\omega_B^0 + \omega'_B) \times H_B + \omega_B^0 \times (J_B \cdot \omega'_B) = M_{dB}. \quad (6)$$

В качестве кинематических параметров удобно использовать вектор малого отклонения связанной системы координат от опорной $\theta(t)$. Представим кватернион рассогласования связанного базиса от опорного в виде $\Lambda_Q^B = 1 + \frac{1}{2}\theta$, после этой подстановки получаем

$$J_B \cdot \ddot{\theta} + \dot{H}_B + (\omega_B^0 + \dot{\theta}) \times H_B + \omega_B^0 \times (J_B \cdot \dot{\theta}) = M_{dB}. \quad (7)$$

Как мы и показывали ранее, выбором управления $\dot{H}_B = F(\omega'_B, \theta) = F(\dot{\theta}, \theta)$ в виде положительно определенных функций от угла и угловой скорости, можно получить асимптотическую устойчивость процесса стабилизации.

Для организации управления без информации об угловой скорости предлагается вычислять её значение из соотношения (5):

$$\hat{\omega}_B = J_B^{-1} \cdot (G_B(t) - H_B). \quad (8)$$

В этом соотношении значения моментов инерции КА и величина $H_B(t)$ известны (в системе управления), а величина $G_B(t)$ подлежит определению и прогнозированию.

Первый порядок этого приближения может быть представлен таким образом: основным кинематическим параметром, позволяющим определять текущие значения $G_B(t)$, является кватернион

$$\Lambda_I^B(t) = \Lambda_I^Q(t) \circ \Lambda_Q^B(t), \quad \Lambda_Q^B = 1 + \frac{1}{2}\theta. \quad (9)$$

С учетом достаточно высокой точности стабилизации (порядка нескольких угловых минут), т.е. малости угла $\theta(t)$, величина $\Lambda_I^B(t)$ достаточно точно может быть задана функцией $\Lambda_I^Q(t)$ – хорошо известной и прогнозируемой. Таким образом

$$G_B(t) = \tilde{\Lambda}_Q^B \circ G_Q \circ \Lambda_Q^B = G_Q + G_Q \times \theta, \quad (10)$$

где
$$G_Q(t) = \tilde{\Lambda}_I^Q \circ \left[G_I^0 + \int_0^t \Lambda_I^Q \circ M_B \circ \tilde{\Lambda}_I^Q dt' \right] \circ \Lambda_I^Q. \quad (11)$$

Точно так же хорошо известна величина переносной угловой скорости $\omega_Q^0 \equiv \omega^0$, заданной в осях ОСК. Если далее не учитывать действие внешних возмущающих моментов, то величина $G_B(t)$ определяется только начальным значением G_I^0 из формулы (11). Если предположить, что переход к управлению по вы-

числяемой угловой скорости происходит непосредственно из режима штатной ориентации, то величина начального значения G_I^0 (или же G_B^0) в системе управления также известна. Тем самым, режим управления с использованием штатных алгоритмов корректируемой БИНС [1] с использованием вместо измеряемой величины угловой скорости ее вычисляемых значений возможен, что и подтвердили результаты математического моделирования и летные эксперименты. Такой режим получил название «прогноз»; по своему смыслу этот режим эквивалентен схеме управления на основе инерциальной информации. Однако анализ приведенных выше соотношений показывает, что погрешности оценки (8) определяются погрешностями знания входящих величин, имеющих сложную структуру. Классические инерциальные системы неустойчивы в том смысле, что определяемые ими навигационные параметры имеют уход, т.е. нарастающую со временем ошибку. К примеру, уход определения углового положения имеет основную составляющую, измеряемую показателем «градусы в час». Можно видеть, что описываемый режим «прогноза» имеет погрешности определения скорости, зависящие прямо от угловой ошибки $\theta(t)$, которая, в свою очередь, возрастает пропорционально ошибке угловой скорости, т.е. имеет место нелинейное возрастание погрешностей этой системы. Очевидно, что работа системы ориентации на основе «прогноза» возможна только на коротких интервалах времени и должна сопровождаться постоянным процессом устранения нарастающих ошибок инерциального метода по сигналам датчиков углового положения. Кроме того, в этом процессе должна решаться задача начальной ориентации (начальной выставки).

Процесс выставки режима «прогноз» и режимы ориентации

Таких режимов выставки и построения ОСК – два, в зависимости от используемых датчиков: БОКЗ и БОКЦ, кроме того, возможен режим ориентации на Солнце в качестве дежурного или промежуточного при построении ориентации.

Приведем сначала описание режима выставки с использованием датчика БОКЗ как основного режима, использованного сразу же после отказа датчиков гироскопического измерителя угловой скорости «ГИВУС» летом 2006 г. БОКЗ обладает уникальными возможностями сразу определять кватернион $\Lambda_{J2000}^B(t_i)$ в дискретные моменты времени, угловая скорость движения связанного базиса $\omega_B(t_i)$ получается непосредственными вычислениями по двум соседним измерениям

$$\tilde{\Lambda}_{J2000}^{B(t_{i-1})} \circ \Lambda_{J2000}^{B(t_i)} = \Lambda_{B(t_{i-1})}^{B(t_i)} = \left(1 + \frac{1}{2}\theta\right), \quad \omega_B = \theta / \Delta t. \quad (12)$$

Для увеличения точности измерений можно использовать аппроксимацию на большем числе точек (например, кубическими сплайнами), такая же процедура применялась и для формирования в системе величин скоростей вращения маховиков, первичная информация о которой состоит в четырех импульсных сигналах (в четырех точках) на одном обороте. Данной информации достаточно для организации управления по штатным алгоритмам, если не считать приведенных выше алгоритмов вычисления угловой скорости и уточнения первичной информации.

Тем самым в системе был создан контур прямого управления по сигналам БОКЗ и контур режима «прогноз» с периодической выставкой от БОКЗ.

Уже после реализации резервных режимов ориентации без датчиков угловых скоростей с использованием БОКЗ встал вопрос о разработке режима с использованием датчика БОКЦ. Низкая точность инерциального управления в режиме «прогноз» сразу же сняла с повестки дня вопрос использования режима гироскопирования для выставки третьей оси. Далее схему с применением измерений БОКС для такой же выставки использовать оказалось так же сложно, так как измерения БОКС проводятся ограниченное время на суточном витке.

Была предложена и далее технически реализована схема измерения угла ориентации КА и его антенн по углу курса измерениями на Земле угла поляризации сигнала ретранслятора. Были установлены дополнительные специальные земные станции, измеряющие этот угол, являющийся, по сути дела, углом курса КА, и далее была реализована схема передачи значения этого угла на борт КА для использования его в контуре ориентации. Тем самым была создана возможность осуществления резервного режима ориентации при прямом управлении по трем сигналам: крена и тангажа – от датчика БОКЦ, и рысканья – от измерений земных станций. Такой режим получил название БОКЦ – РПХ (режим измерения поляризационного сигнала по оси X).

В этом режиме оказалось возможным применять два способа управления: прямое управление по сигналам углов отклонений (мы здесь не описываем эти хорошо известные принципы стабилизации, когда угловая скорость вычисляется по текущей информации об углах) и управление в режиме инерциального прогноза. В этом случае текущая ориентация (углы и угловая скорость КА) и текущие значения $G_B(t)$ в момент перехода из режима прямого управления в режим «прогноз» берутся как начальные значения. Далее параметры режима «прогноз» (точности и уходы) определяются в зависимости от этих начальных значений. Таким образом, были созданы новые режимы ориентации без использования датчиков угловой скорости [2, 3].

На рис. 1 показан в качестве примера ТМ процесс перехода из режима прямого управления в режим «прогноз».

Реальная эксплуатация этих режимов показала низкую точность режимов «прогноз». Максимальная точность достигалась при переходе в режим из управления с использованием БОКЗ. В этом случае инерциальное управление сохранялось в пределах заданных точностей за 10–15 минут. Поскольку точности режима БОКЦ – РПХ ниже точности режима БОКЗ, точности режима «прогноз», реализуемого после БОКЦ – РПХ, также оказались существенно хуже.

Кроме того, режим БОКЦ – РПХ мог быть применен не на всех участках орбиты полета КА. Поскольку датчик работал в видимой части спектра, прибор БОКЦ способен функционировать только при углах Солнце – объект – Земля (углах СОЗ) более 30 градусов. При наличии нормальной инерциальной системы с высокой точностью такое ограничение не являлось существенным, так как в «запретных» позициях режим инерциальной памяти высокой точности полностью решал задачу ориентации. В том виде, каким получился режим инерциального «прогноза», сохранение ориентации на период засветок БОКЦ не могло быть и речи. Поэтому была поставлена задача увеличения точности инерциального управления режима «прогноз».

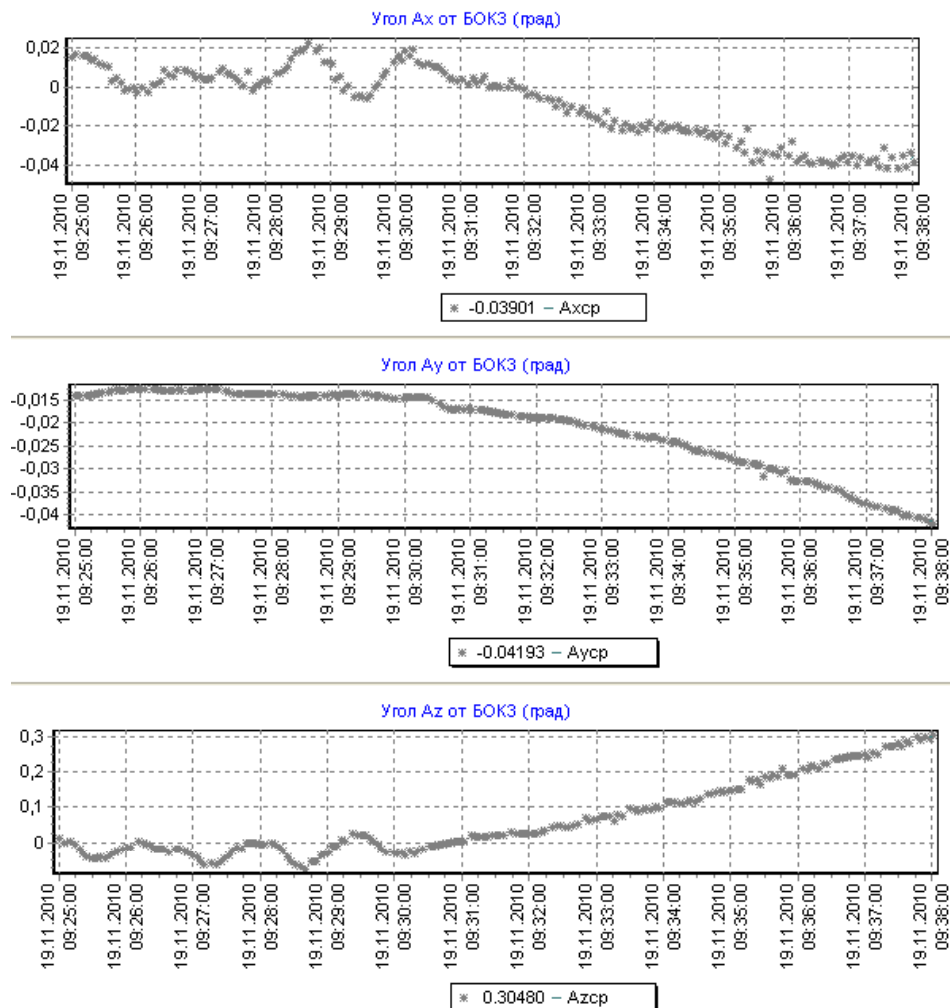


Рис. 1. КА «Ямал-202» 9.11.2010 г. Переход из режима прямого управления (датчик БОКЗ) в режим «прогноз»

ЛИТЕРАТУРА

1. Севастьянов Н.Н. Концепция построения системы ориентации и управления движением спутника связи «Ямал». Штатная схема функционирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2 (22). С. 85–96.
2. Севастьянов Н.Н., Бранец В.Н., Платонов В.Н. и др. Исследование возможности управления КА «Ямал-200» с использованием математической модели движения // Труды XIV Международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб., 2007. С. 174–182.
3. Севастьянов Н.Н., Банит Ю.Р., Бранец В.Н. О возможности ориентации КА при неполной информации от датчиков (задача корректируемого прогноза) // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. Ч. 5. С. 2479–2481.

Статья поступила 25.03.2013 г.

Sevast'yanov N.N. BUILDING OF ORIENTATION MODES ON YAMAL-200 COMMUNICATION SATELLITE WITHOUT ANGULAR SPEED SENSORS. The possibility to build orientation modes without angular speed sensors is considered. In addition to traditional controlling modes using angular deviations signals derived from the orientation sensors, the possibility of control on the computed value of the angular velocity is investigated. The possibility of such control, which is based on the law of conservation of angular momentum is shown; management modes of this kind are called "prognosis" and they are essentially management modes by inertial information.

Keywords: angular position sensors, kinetic momentum of the satellite, calculated angular velocity, orientation modes.

SEVASTYANOV Nikolay Nikolaevich (Tomsk State University)

E-mail: sevastyanov@gascom.ru

УДК 539.3

А.М. Сергеева, А.В. Ткачева, В.И. Одинок

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ЛЕДОКОЛЬНЫМ СУДНОМ

С использованием теории малых упругих деформаций строится математическая модель ледокольного устройства с целью исследования его влияния устройства на разрушения ледяного покрова.

Ключевые слова: *ледяной покров, ледокольное устройство, напряженно-деформированное состояние, численные методы, математическая модель.*

Водные пути являются связующим звеном между крупными городами и малочисленными населенными пунктами. Продление навигационного периода – одна из основных задач для развития и роста экономического благосостояния малых и удаленных населенных пунктов. На сегодняшний день разработано и находится в эксплуатации множество ледоразрушительных устройств. Прежде чем ввести устройство в производство, следует оценить его ледоразрушающую способность с помощью математической модели. В зависимости от характера воздействия устройства на лед принимаются различные математические модели ледяного покрова. При исследовании ледоразрушающей способности судна на воздушной подушке лед рассматривают как пластину на упругом основании. Для исследований ледокольных устройств, которые имеют сложную конфигурацию, лучше всего рассматривать ледяной покров как твердое тело, которое подчиняется законам механики сплошных сред.

Работа направлена на исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) ледяного покрова, находящегося под воздействием ледокольного устройства [1]. Целью является нахождение оптимального расстояния между надводной и подводной частями устройства, при котором в ледяном покрове возникнут наибольшие разрушения.

Описание устройства

Рассмотрим ледокольное судно, изображенное на рис. 1, которое состоит из надводной 1, подводной 2 и двух боковых частей 3. В надводной части расположены система управления, пассажирский салон, снизу установлены резцы 4 и система фрез 5. Угол наклона форштевня β . Подводная часть имеет спереди резец 6, отсеки для воздуха, топлива, двигателя судна. Боковые части содержат систему коммуникаций, гидропривод перемещения в вертикальной плоскости надводной части относительно подводной, имеют спереди клинья для прорезания льда и вертикальные фрезы. Расстояние между надводной и подводной частями (h) должно быть $h \geq 1,5S$, где S – толщина ледяного покрова. Эта величина устанавливается системой гидроцилиндров, расположенных в боковых частях, перед началом движения судна.

Работа устройства осуществляется следующим образом. Ледокольное судно набирает требуемую скорость на чистой воде и находит на ледяной покров. При

движении судна пластина льда, уткнувшись в наклонную поверхность надводной части, испытывает под действием вертикальной силы, возникающей на наклонной поверхности, изгиб, которому препятствует передний конец подводной части. Возникает изгибающий момент, под действием которого происходит поперечный излом, который стимулируется резами надводной и подводной частей. Ледяная плита (плиты) под действием надвигающегося спереди ледяного поля проталкивается в туннель, образуемый надводной, подводной и боковыми частями судна, и всплывает с кормы после прохождения судна. При поперечном разрушении образовавшиеся в ледяном поле выступы, препятствующие движению судна и прохождению льдин через туннель, скалываются клиньями боковых частей. Чтобы не образовалась пробка внутри полости, вращающиеся фрезы 5 не дают возможность льдинам тормозиться о нижнюю поверхность надводной части, стимулируя дальнейшее разрушение льда. Фактически ледокольное судно пропускает колотый лед внутри себя, стараясь, чтобы льдины не задерживали его движение. Предполагается, что смерзания составных частей устройства с ледяным покровом не возникнет и нижняя часть льда будет гладкой и ровной.

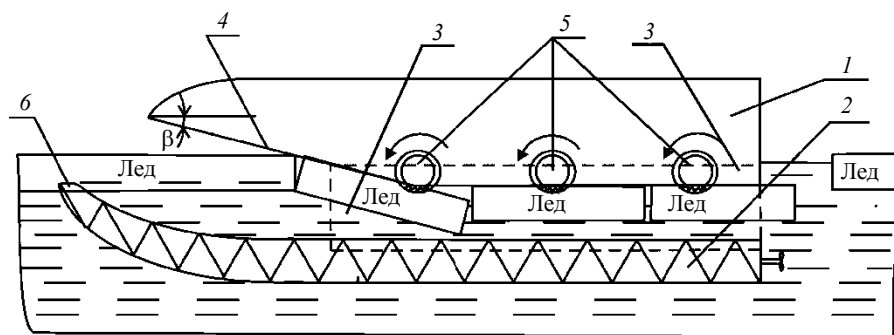


Рис. 1. Схема ледокольного судна в вертикальной проекции

Постановка задачи

При разработке новой ледокольной техники учитываются особенности ледяного покрова водоемов, на котором будет эксплуатироваться устройство. Это, прежде всего, температура окружающей среды, прочностные особенности ледяного покрова (толщина льда, соленость, максимальные напряжения на сжатие, растяжение, сдвиг). Неоднородность ледяного покрова связана со структурой льда и с всевозможными включениями: пузырьками воздуха, инородными телами: камни, песок и др. Сплошным его тоже назвать затруднительно из-за наличия температурных трещин, которые образуются в процессе роста льда. Образовавшиеся сквозные трещины заполняются водой на 90 % по высоте, после вода замерзает, и недостаток льда сменяется его достоинствами, увеличиваются прочностные характеристики ледяного покрова. Невозможно учесть все, поэтому ледяной покров принимался сплошным без учета пористости и всевозможных включений.

Согласно результатам экспериментальных исследований, описанных в работе [2], лед ведет себя упруго при температурах ниже -5°C и нагрузках менее 10 с. Примем лед как упругое тело, по данным работы [2, 3] имеем: модуль Юнга – $E = (87,6 - 0,21\theta - 0,0017\theta^2) \cdot 10^2 \text{ МПа}$; θ – температура льда; коэффициент Пуас-

сона – $\mu=0,36$; модуль сдвига – $G=E/2(1+\mu)$; коэффициент объемного сжатия – $K=(1-2\mu)/E$. В качестве критериев нарушения сплошности ледяного покрова примем напряжения $\sigma_{кр}^{pac} \approx 4$ МПа, $\sigma_{кр}^{сж} \approx -8$ МПа, приведенные в работе [2].

Используя основные уравнения теории упругости, строится математическая модель устройства. Материал, из которого изготовлено устройство, не рассматривается, поэтому трением пренебрегаем.

Уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i - I_i = 0; \quad I_i = \rho \left(\dot{v}_i + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Закон Гука для малых деформаций

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G \varepsilon_{ij}^*; \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}, \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon \delta_{ij}; \quad \varepsilon_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad (2)$$

$$i = 1, 2, 3; \quad (3)$$

$$\sigma = 3k\varepsilon; \quad (3)$$

$$\xi_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{d\tau} \Rightarrow \varepsilon_{ij} \equiv \sum_m \xi_{ij} \Delta \tau_m. \quad (4)$$

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

В уравнениях (1), (2) используется суммирование по повторяющимся индексам; ρ – плотность льда; $G=G(\theta)$ – модуль сдвига льда; $[\sigma_{ij}]$ – тензор напряжений; $[\varepsilon_{ij}]$ – тензор деформаций; v_i , F_i – проекции скорости перемещений и удельной объемной силы по координатным осям x_i , $i=1,2,3$; $F_2=F_3=0$; λ – коэффициент теплопроводности; θ – температура льда; $\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial \tau}$, τ – время деформации, K – коэффициент объемного сжатия.

Для расчета температурного поля воспользуемся решением уравнения теплопроводности с учетом $\lambda = \lambda_0(1+a\theta)$, запишем его в конечном виде

$$\theta = -\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{x_1}{h} \left(\frac{2\theta_1}{a} + \theta_1^2 \right)}. \quad (6)$$

При выводе (6) использовались граничные условия: при $x_1=0$ $\theta=0^\circ\text{C}$; при $x_1=h$ $\theta_1=-30^\circ\text{C}$, h – толщина льда, $a=-0,0159$ град $^{-1}$.

Рассмотрим 1/2 области льда и 1/2 носовой части ледокольного судна, которые являются симметричными относительно плоскости Ox_1x_2 , проведенной вдоль судна. На рис. 2. представлена схема нагружения ледяного покрова.

В плоскости, находящейся на расстоянии h (h – толщина ледяного покрова) от плоскости Ox_2x_3 , выделим три области: S_1 и S_4 , S_{16} , где S_1 – поверхность взаимодействия льда с атмосферой, S_4 – площадка контакта форштевня с льдом, S_{16} – область взаимодействия клина с атмосферой. В плоскости Ox_2x_3 определим

четыре области – S_2 , S_3 , S_{14} , S_{15} (рис. 2). Площадка S_2 характеризует взаимодействие льда с несжимаемой жидкостью – водой. Участки льда S_3 и S_{14} моделируют соответственно взаимодействие подводной части судна с нижней поверхностью льда и неподвижность льда в направлении оси Ox_1 , т.е. $v_1|_{S_{14}}=0$. Участок нижней поверхности льда, ограниченный областью S_{15} , моделирует взаимодействие клина с водой. Поверхности S_6 и S_7 расположены параллельно друг другу, причем S_7 находится в плоскости симметрии Ox_1x_2 , а S_6 – на расстоянии b от нее. Поверхность S_5 расположена в плоскости Ox_1x_3 параллельно свободной кромке льда S_8 . Свободная кромка льда S_8 находится в одной плоскости с поверхностью S_9 , на которой задаются граничные условия, моделирующие жесткое взаимодействие рассматриваемой области деформирования льда с неподвижным ледяным полем. На поверхностях S_{10} , S_{11} , S_{12} , S_{13} , S_{15} , S_{16} задаются граничные условия, отражающие взаимодействие внедряющегося в лед клина ледокола. Площадки S_{10} и S_{12} характеризуют боковые части клина, причем S_{10} лежит параллельно плоскости Ox_1x_2 на расстоянии (b_1+b_2) , а S_{12} находится под углом α к S_{10} . Области S_{11} и S_{13} , расположены параллельно плоскости Ox_1x_3 , моделируют площадки острия и основания клина соответственно.

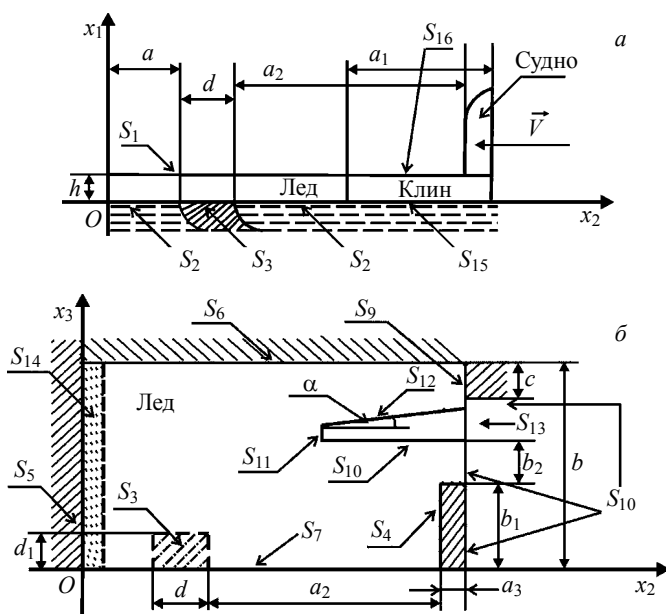


Рис. 2. Схема нагрузки ледяного покрова:
 a – в вертикальной плоскости, b – в горизонтальной

Граничные условия задачи (рис. 2):

$$\sigma_{11}|_{S_1} = -p_0; v_1|_{S_4} = -v^* \operatorname{tg} \beta; \sigma_{11}|_{S_2} = -(p_0 + \gamma h); \sigma_{11}|_{S_i} = 0, i=15,16;$$

$$v_1|_{S_i} = 0, i=3, 14; \sigma_{22}|_{S_5} = 0; \sigma_{22}|_{S_8} = -p_0; v_2|_{S_9} = 0; v_3|_{S_i} = 0, i=7,8;$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22}|_{S_{13}} &= 0; \quad v_2|_{S_{11}} = -v^*; \quad v_3|_{S_{10}} = 0; \quad v_3|_{S_{12}} = v^* \sin(\alpha); \\ (\sigma_{12} = \sigma_{13})|_{S_i} &= 0, \quad i=1,2,3,4,14,15,16; \quad (\sigma_{21} = \sigma_{23})|_{S_i} = 0, \quad i=5,8,11,13; \\ (\sigma_{31} = \sigma_{32})|_{S_i} &= 0, \quad i=6,7,10,12.\end{aligned}$$

Здесь p_0 – атмосферное давление; γ – удельный вес льда; h – толщина льда; v^* – скорость передвижения судна; β – угол между носовым отсеком надводной части судна и льдом, принят равным 15° ; α – угол острого клина (рис. 2), принят равным 25° .

Для решения поставленной задачи воспользуемся численным методом [4], согласно которому область деформирования разбивается на ортогональные элементы конечных размеров; для каждого элемента записывается в разностном виде система уравнений.

Для решения системы уравнений (1) – (5) с учетом граничных условий воспользуемся алгоритмом, описанным в работе [5, 6] и программным комплексом [7]. Достоинствами данного метода является то, что на границе исследования области можно задать как скорости, так и напряжения, возможно провести расчета как в упругом, так и в пластичном теле, практически любую область можно представить в криволинейных ортогональных элементах, и нет привязки к системе координат. Этот метод довольно прост для представления в различных языках программирования.

Рассматриваемая система уравнений нелинейна. Перепишем в уравнениях (1) инерционный член I_i в виде

$$I_i = \rho \left(\dot{v}_i + \bar{v}_k \frac{\Delta v_i}{\Delta x_k} \right), \quad (7)$$

где $\bar{v}_k$ будет считаться известным, тогда система (1) – (5) будет линейной.

Алгоритм решения задачи

1. Исследуемая область деформирования разбивается на элементы ортогональной формы. Рассчитывается матрица длин дуг элементов.

2. Время исследования (деформирования) τ разбивается на m временных промежутков.

3. Насчитывается поле температур по каждому элементу.

4. Насчитываются значения модуля сдвига и коэффициент объемного сжатия по каждому элементу.

5. Задаются начальные условия задачи.

6. Задается шаг по времени Δt .

7. Задаются граничные условия задачи.

8. Задается $(\bar{v}_i)_0$ в (7).

9. Насчитывается матрица коэффициентов и свободных членов новой эквивалентной системы в соответствии с последовательностью, описанной в работе [7].

10. Решается система линейных уравнений методом Гаусса.

11. По каждому элементу (его граням) (ij) насчитываются σ_{ij} , v_i , ξ_{ij} , ε_{ij} .

12. Уточняются значения $\bar{v}_i$. Производится сравнение $(\bar{v}_i)_n$ и $(\bar{v}_i)_{n-1}$, n – номер итерации. Если заданная точность соответствия $(\bar{v}_i)_n$ и $(\bar{v}_i)_{n-1}$ удовлетворяется, то следует операция 12, в противном случае осуществляется операция 8.

13. Исследуются элементы, непосредственно контактирующие с деформирующим устройством, на наличие растягивающих напряжений; если такие элементы существуют, то на границе льда и устройства (S – площадка контакта) следует переназначение граничных условий $\sigma_{ii}|_S = 0$; $i, j = 1, 2, 3$, следует операция 9, иначе 14.

14. Исследуются площадки элементов на наличие напряжений, превышающих предел прочности льда. Если такие элементы присутствуют, то граничные условия перестраиваются $\sigma_{ij}|_S = 0$, $i, j = 1, 2, 3$, следует операция 9, иначе 15.

15. Осуществляется шаг по времени $\tau = \tau + \Delta\tau_i$, если $\tau < \sum_m \Delta\tau$, то следует операция 5, если – нет, то – операция 16.

16. Окончание расчета.

Результаты исследований

Расчеты проводились с использованием программного комплекса [7]. Язык программирования Фортран, алгоритм линейный. Область деформирования ледяного покрова разбивалась на 2500 ортогональных элементов. Количество уравнений составило 7680. Временной интервал одной итерации, затраченный компьютером с процессором на базе INTEL(R)Core(TM)i5CPU 760@2.80GHz, составил примерно 1 час. Для сходимости решения с установленной точностью 0,001 потребовалось до 25 итерационных процессов.

Геометрические параметры устройства: a – расстояние от подводной части судна до окончания исследуемой области деформирования льда в направлении, противоположном положительному направлению оси x_2 , принято равным 29,0 м; a_1 – глубина внедрения клина в лед – принята равной 3,0 м; a_2 – расстояние от подводной части судна до надводной – 4,0, 5,0, 6,0 м; a_3 – ширина площадки контакта надводной части судна с ледяным покровом – 1,0 м; b_1 – половина длины площадки контакта надводной части судна с ледяным покровом – 3,0 м; b_2 – расстояние от надводной части судна до клина – 1,5 м; b_3 – ширина клина – 0,8 м; b_4 – длина свободной кромки льда от клина до закрепленной части льда 0,03 м; c – расстояние от свободной кромки льда до края рассматриваемой области деформирования ледяного покрова – принято равным 19,0 м, по всей этой длине лед жестко закреплен с припайным льдом; d – ширина подводной части судна – 1,0 м; d_1 – половина длины площадки контакта подводной части судна с ледяным покровом – 0,5 м, ширина острия клина 0,03 м. Скорость устройства 10 км/ч, $\tau = 0,4$ с, $\Delta\tau = 0,1$ с.

Авторы ледокольного судна предполагают, что максимальная толщина льда, по которому способно пройти судна 1,0 м, а рабочая толщина составляет около 0,5 м. Поэтому толщину ледяного покрова принимаем равной 0,5 м.

Во всех рассматриваемых случаях касательные напряжения на порядок меньше нормальных, поэтому все нормальные напряжения можно принять за главные напряжения.

Устойчивость получаемого решения проверялась численно при отклонении от начальных данных на малую величину 0,01 %. В результате данные с веденной погрешностью и без погрешности совпали.

Рассмотрим подробнее процессы, происходящие в ледяном покрове, при воздействии устройством, расстояние которого между подводной и надводной час-

тями равно 5,0 м. На рис. 3 представлена эпюра напряжений по толщине ледяного покрова.

До образования магистральной трещины и других разрушений в ледяном покрове происходят следующие процессы. Напряжения σ_{22} , расположенные в ледяном покрове вдоль действия устройства, носят сжимающий характер.

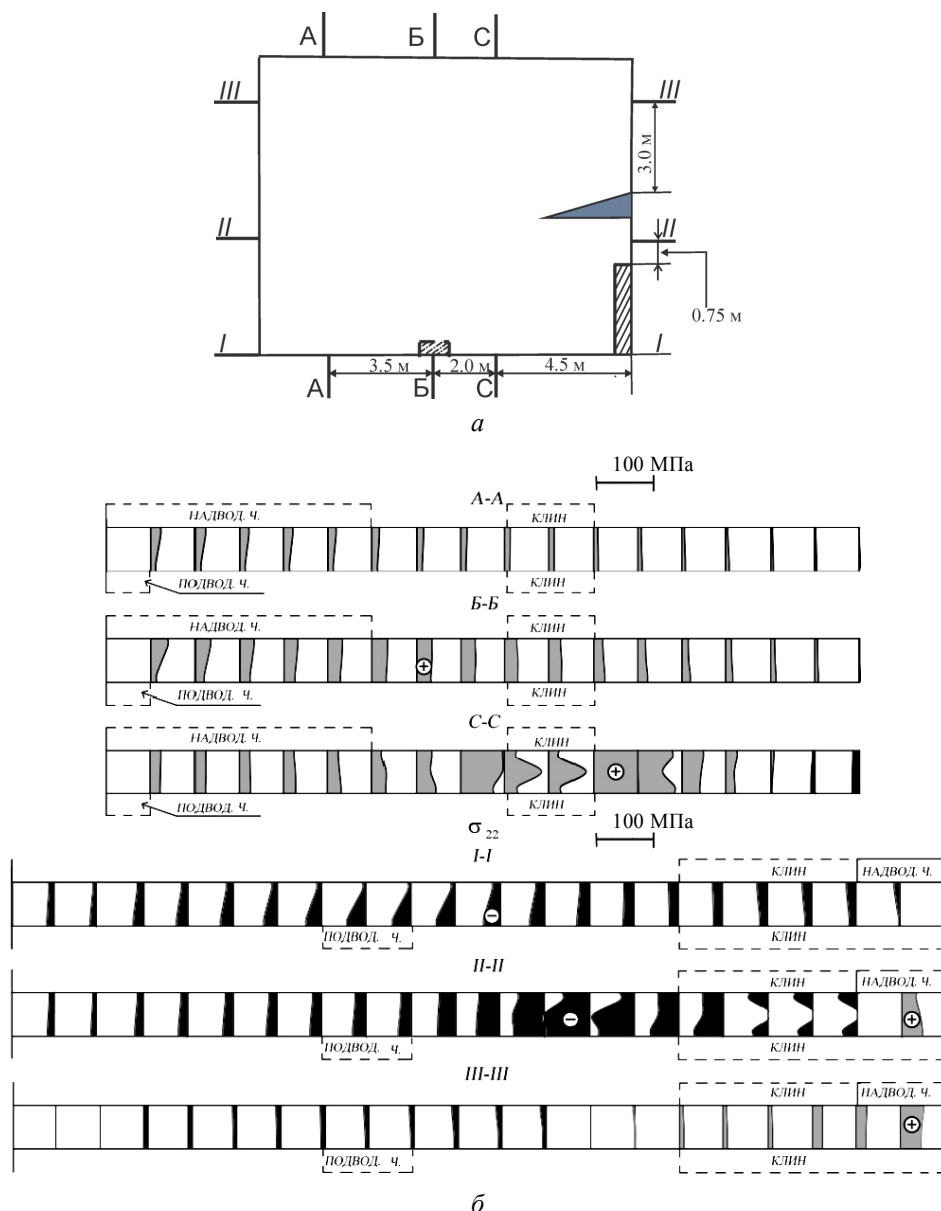
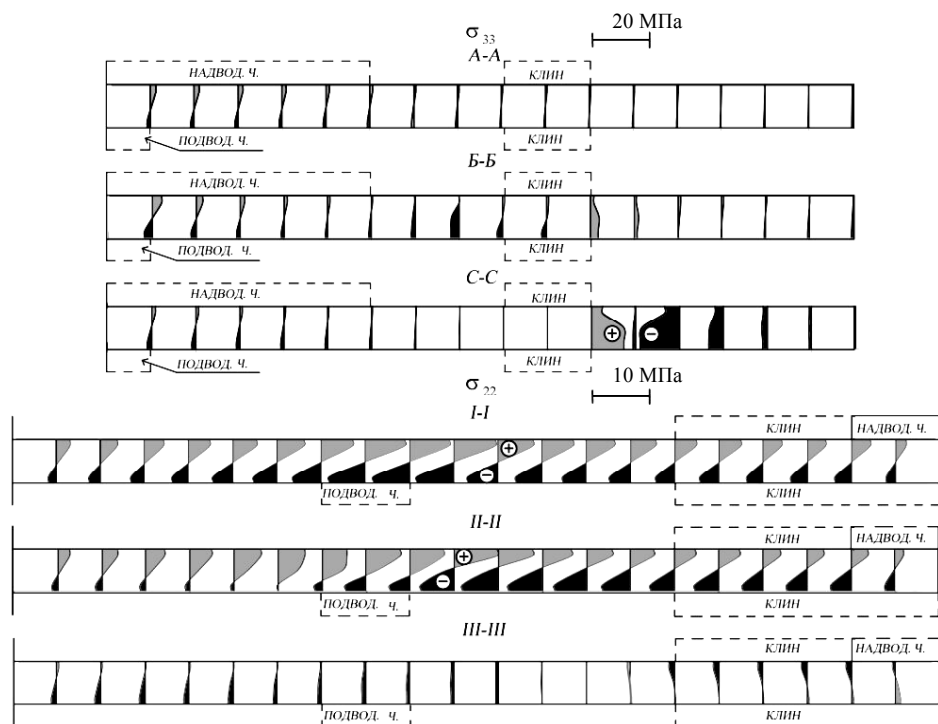


Рис. 3 (начало). Эпюра напряжений ледяного покрова в момент образования магистральной трещины и трещины с наклонного бока клина: а – схема, б – эпюра напряжений до образования магистральной трещины



6

Рис. 3 (окончание). Эпюры напряжений ледяного покрова в момент образования магистральной трещины и трещины с наклонного бока клина: ϵ – эпюры напряжений после образования магистральной трещины

Наибольшие из них находятся фронтально от клина и над подводной частью. Нормальные напряжения, перпендикулярные действию устройства, носят растягивающий характер, наибольшие из них расположены у наклонной части клина. Все напряжения с удалением от устройства сглаживаются. Как видно из рис. 3, a , напряжения на порядок превосходят критические, поэтому лед будет трещать и ломаться. Фронтально от клина пройдет основная трещина, ее называют магистральной, она разделит лед на две зоны – внутреннюю и внешнюю. На рис. 4 представлены распределения напряжений в ледяном покрове в момент возникновения магистральной трещины, она выделена белой линией, видно, что концентратор напряжений расположен в вершине трещины. Это свидетельствует о том, что трещина будет расти. От наклонной боковой поверхности клина пойдет трещина, на рис. 4 показано расположение напряжений в этой области, лед здесь разрушится на мелкие фрагменты. После образования магистральной трещины пойдет падение напряжений рис. 3. В ледяном покрове возникнет изгибающий момент, подтверждение этому – смена знака напряжения по толщине льда, расположенного в области над подводной частью судна. Во внутренней зоне ледяного покрова в верхнем слое льда напряжения носят растягивающий характер, а в нижнем слое – сжимающий (эпюра вид $I-I$ и $II-II$, рис. 3, b) произойдет изгиб льда.

В области ледяного покрова, расположенной между надводной и подводной частями устройства, наибольшие напряжения возникнут при параметре устрой-

ва a_2 равном 4 м. С увеличением параметра a_2 снижаются напряжения в данной области, при этом длина магистральной трещины увеличивается с 3 до 4 м. На рис. 4 трещины изображены прямыми белыми линиями.

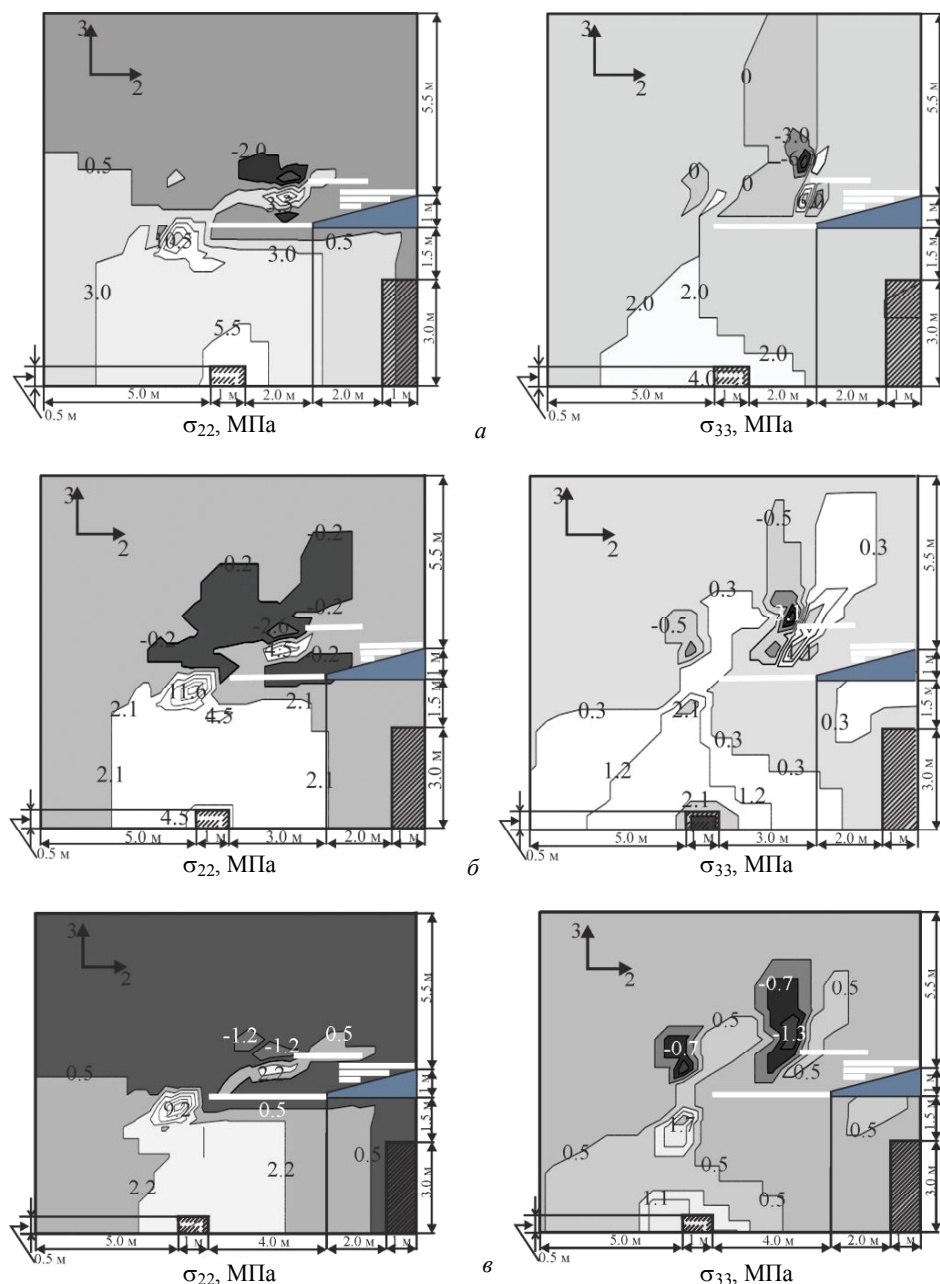


Рис. 4. Распределение напряжений в верхнем слое ледяного покрова, при контакте с ледокольным судном, время контакта 0,3 с, параметр устройства a_2 , м: а – 4, б – 5, в – 6

Далее рассмотрим более подробно нагрузку на составные части судна. Наибольшая нагрузка придется на клин устройства: острие 0,992, 0,813, 0,689 тс, наклонная боковая площадка (S_{12}) – 2,041, 2,034, 2,024 тс соответственно при a_2 равном 4,0, 5,0, и 6,0 м. Нагрузка на подводную часть составит 0,0059, 0,0052, 0,052 тс соответственно при a_2 равном 4,0, 5,0, и 6,0 м. Нагрузка на надводную часть увеличится с увеличением расстояния a_2 составит 0,0086, 0,0074, 0,0067 тс. Видно, что при увеличении расстояния a_2 нагрузка на составные части устройства уменьшается.

Вывод: Разрушительное воздействие подводной части на ледяной покров будет наибольшим, если расстояние между подводной и надводной частями составит не более 4 м. При этой конфигурации устройства усиливается разрушительная способность всего устройства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пат. 2276037 РФ МПК В 63 В 35/08. Ледокольное судно / В.И. Одинок, В.Л. Колмогоров. № 2004114052/11; Заяв. 06.05.2004; Опубл. 10.05.2006, Бюл. № 13.
2. Богородский В.В., Гаврило В.П. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеиздат, 1980.
3. Войтковский К.Ф. Основы гляциологии. М.: Наука, 1999.
4. Одинок В.И. Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом. Владивосток: Дальнаука, 1995.
5. Сергеева А.М., Марченко О.В. Деформация ледяного покрова под действием атмосферного давления и собственного веса льда // Труды Нижегородского технического университета им. Алексеева. 2010. № 4 (83). С. 157–165.
6. Одинок В.И., Сергеева А.М., Захарова Е.А. Построение математической модели для численного анализа процесса разрушения ледяного покрова // Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 12. С. 15–26.
7. Одинок В.И., Сергеева А.М., Ткачева А.В. Математическое моделирование процесса разрушения ледяного покрова ледокольной судном: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012614206. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 12 мая 2012.

Статья поступила 12.12.2012 г.

Sergeeva A.M., Tkacheva A.V., Odinokov V.I. NUMERICAL STUDY OF THE DEFORMATION PROCESS OF THE ICE COVER UNDER THE ACTION OF AN ICEBREAKING SHIP. Using the theory of small elastic deformations, a mathematical model of an icebreaking device is built to study the effect of the device on the ice cover destruction.

Keywords: ice cover, ice-breaking device, the stress-strain state, numerical analysis, mathematical model.

Sergeeva Anastasiya Mikhailovna (Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences)
E-mail: serg-nasty@mail.ru

Tkacheva Anastasiya Valerievna (Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences)
E-mail: 4nansi4@mail.ru

Odinokov Valery Ivanovich (Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences)
E-mail: mail@imim.ru

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛЕКСАНДРОВ Игорь Александрович – доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАО, профессор, заведующий кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ma@math.tsu.ru

БУХТЯК Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии Томского государственного университета. E-mail: bukhtyakm@mail.ru

ВАСИЛЕВСКИЙ Михаил Викторович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры экологии и безопасности жизнедеятельности Института неразрушающего контроля Томского политехнического университета. E-mail: vasmix40@mail.ru

ГРИНШПОН Ирина Эдуардовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. E-mail: irina-grinshpon@yandex.ru

ГРИНШПОН Самуил Яковлевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: grinshpon@math.tsu.ru

ЕРШОВ Игорь Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин). E-mail: i_ershov@ngs.ru

ЗЫКОВ Евгений Геннадьевич – кандидат технических наук, директор ООО «Томскгазоочистка». E-mail: zikoveg@mail.ru

КОЛМАКОВА Татьяна Витальевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: kolmakova@ftf.tsu.ru

КОПАНЕВ Сергей Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: Kopanев_d@mail.ru

МАНАХОВ Павел Владимирович – аспирант Тольяттинского государственного университета. E-mail: pavell8991@yandex.ru

МЕРКУЛОВА Нина Николаевна – старший преподаватель кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

ОДИНОКОВ Валерий Иванович – доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки, главный научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук. E-mail: odinokov@uralweb.ru

ПОЛЮШКО Владимир Анальевич – младший научный сотрудник НИИ ПММ Томского государственного университета. E-mail: polyushko@niipmm.tsu.ru

РАЗВА Александр Сергеевич – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры теоретической и прикладной теплотехники Энергетического института Томского политехнического университета. E-mail: razva@mail.ru

РАХМЕЛЕВИЧ Игорь Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики Нижегородского коммерческого института. E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

РОМАНДИН Владимир Иванович – старший научный сотрудник НИИ ПММ Томского государственного университета. E-mail: romandin@niipmm.tsu.ru

СЕВАСТЬЯНОВ Николай Николаевич – заведующий кафедрой промышленных и космических систем физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: sevastiyanov@gascom.ru

СЕДЫХ Анна Геннадьевна – аспирантка кафедры математического анализа Кемеровского государственного университета. E-mail: Nuska2522@mail.ru

СЕРГЕЕВА Анастасия Михайловна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования технологических процессов Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук. E-mail: serg-nasty@mail.ru

СУЛТОНОВА Шахноза Хайдаровна – студентка кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: sultonova_sh@sibmail.com

ТКАЧЕВА Анастасия Валерьевна – аспирантка лаборатории математического моделирования технологических процессов Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук. E-mail: 4nansi4@mail.ru

ФЕДОСЕЕВ Олег Борисович – доктор технических наук, профессор Тольяттинского государственного университета. E-mail: office@tltsu.ru

ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: cheklov@math.tsu.ru