

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2018

№ 53

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конев, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenschikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenichikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager, Nikolay R. Shcherbakov.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Галанова Н.Ю. О симметричных сечениях одного вещественно замкнутого поля.....	5
Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц	16
Смоленцев Н.К. О почти (пара) комплексных структурах Кэли на сферах $S^{2,4}$ и $S^{3,3}$	22
Сухачева Е.С. О функциях первого класса Бэра на некоторых классах неметризуемых пространств	39

МЕХАНИКА

Бубенчиков М.А., Колыхалова О.Э., Усенко О.В. Расчет проницаемости укладок многостенных нанотрубок.....	47
Глазунов А.А., Еремин И.В., Жильцов К.Н., Костюшин К.В., Тырышкин И.М., Шувариов В.А. Численное исследование определения величин пульсаций давления и собственных акустических частот в камерах сгорания с наполнителем сложной формы	59
Глазунов П.А., Решетиловский В.П., Манжай В.Н., Зятиков П.Н., Соловьев В.В. Физическое моделирование процессов брикетирования на основе отходов полидисперсных частиц кокса и криогелей поливинилового спирта	73
Зуев Л.Б., Бараникова С.А., Ли Ю.В., Жармухамбетова А.М. О численных оценках параметров локализованной пластичности при растяжении металлов.....	83
Крайнов А.Ю., Порязов В.А., Моисеева К.М. Скорость распространения пламени в аэрозвеси наноразмерного порошка алюминия.....	95
Кривулина Э.Ф., Каневская И.Ю. Оценка надежности по устойчивости прямоугольной рамы, выполненной из пористого материала, на основе вероятностного подхода.....	107
Шваб А.В., Брендаков Р.В., Порохнин А.Ю. Моделирование процесса фторирования металлического вольфрама	116
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	130

CONTENTS

MATHEMATICS

Galanova N.Yu. On symmetric cuts of a real-closed field	5
Krylov P. A., Norbosambuev T.D. Group of automorphisms of one class of formal matrix algebras.....	16
Smolentsev N.K. On almost (para)complex Cayley structures on spheres $S^{2,4}$ and $S^{3,3}$	22
Sukhacheva E. On first Baire class functions defined on some classes of nonmetrizable spaces.....	39

MECHANICS

Bubenchikov M.A., Kolykhalova O.E., Usenko O.V. Calculation of the permeability of the stackings of multi-walled nanotubes	47
Zuev L.B., Barannikova S.A., Li Yu.V , Zharmukhambetova A.M. On numerical estimates of the parameters of localized plasticity during metal tension.	59
Glazunov A.A., Eremin I.V., Zhiltsov K.N., Kostyushin K.V., Tyryshkin I.M., Shuvarikov V.A. Numerical investigation of the pressure pulsation magnitude and natural aeroacoustic frequencies in the combustion chambers with a charge of a complex shape	73
Glazunov P.A., Reschetilowski V.P., Manzhai V.N., Zyatikov P.N., Solov'ev V.V. Physical modeling of briquetting processes on the basis of the wastes of polydisperse coke particles and cryogels of a polyvinyl alcohol.	83
Krainov A.Yu., Poryazov V.A., Moiseeva K.M. Flame propagation velocity in an aerosuspension of nanoscale aluminum powder.....	95
Krivulina E.F., Kanevskaya I.Yu. Estimation of the reliability of a rectangular frame made of the porous metal in terms of its rigidity on the basis of probabilistic approach.	107
Shvab A.V., Brendakov R.V., Porokhnin A.Yu. Modeling of the process of metallic tungsten fluorination.....	116
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	130

МАТЕМАТИКА

УДК 512.623.23
DOI 10.17223/19988621/53/1

MSC 12F20, 12J15

Н.Ю. Галанова

О СИММЕТРИЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ ОДНОГО ВЕЩЕСТВЕННО ЗАМКНУТОГО ПОЛЯ

Рассматривается конструкция вещественно замкнутого подполя H поля ограниченных формальных степенных рядов, $\mathbf{R}[[G, \beta]] \subset H \subset \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$. Доказывается замкнутость относительно усечений полей H , $\overline{H(x_{\beta^+})}$. Доказывается, что конфинальность симметричных сечений поля H , производимых элементами из $\overline{H(x_{\beta^+})} \setminus H$, равна β^+ . Используются классификации сечений по Пестову (симметричные, алгебраические, трансцендентные) и по Шелаху (симметричные, алгебраические), рассматривается связь между этими понятиями. Принимается ОКГ.

Ключевые слова: *вещественно замкнутое поле, поле ограниченных формальных степенных рядов, симметричное сечение, конфинальность сечения, замкнутое относительно усечений поле.*

1. Основные понятия

В данной статье исследуются вещественно замкнутые подполя поля ограниченных формальных степенных рядов методами теории сечений.

Здесь $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbf{R}$ – поле вещественных чисел. Далее все поля в данной статье линейно упорядоченные и неархимедовы. Поле F называется неархимедовым, если $\exists a \in F^+$ такое, что $\forall n \in \mathbf{N} \quad a > n$. Элементы $a, b \in F \setminus \{0\}$ упорядоченного поля F называются *архимедовски эквивалентными*, если существует такое натуральное число n , что $n|a| > |b|$ и $n|b| > |a|$. Фактор-группа G_F мультипликативной группы $F \setminus \{0\}$ упорядоченного поля F по отношению архимедовской эквивалентности называется *группой архимедовых классов* поля F [1].

Поле называется *вещественно замкнутым*, если -1 не представляется в нём в виде суммы квадратов, но в каждом его собственном алгебраическом расширении -1 можно представить в виде суммы квадратов. Каждое вещественно замкнутое поле можно единственным образом упорядочить [2–4].

Как известно (Kaplansky, [2]), каждое вещественно замкнутое поле F вкладывается с сохранением порядка в поле формальных степенных рядов $\mathbf{R}[[G_F]]$, элементы которого имеют вид $x = \sum_{g \in G_F} r_g g$, где $r_g \in \mathbf{R}$, и носитель ряда

$\text{supp}(x) = \{g \in G_F \mid r_g \neq 0\}$ – вполне антиупорядоченное (каждое непустое подмножество имеет наибольший элемент) подмножество группы архимедовых классов G_F поля F . Полагаем $x > 0 \Leftrightarrow r_{g_0} > 0$, $g_0 = \max(\text{supp}(x))$ [1]. В дальнейшем, говоря об F как о подполе поля $\mathbf{R}[[G_F]]$, мы имеем в виду вложение $\varphi: F \rightarrow \mathbf{R}[[G_F]]$, такое, что каждый архимедов класс поля $\mathbf{R}[[G_F]]$ содержит элемент из $\varphi(F)$ [2].

Пусть G – линейно упорядоченная мультипликативная абелева группа, β – кардинал, $\aleph_0 < \beta \leq |G|$. Через $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ обозначается поле таких формальных степенных рядов x , что $|\text{supp}(x)| < \beta$. Это поле называется *полем ограниченных формальных степенных рядов*. Группы архимедовых классов упорядоченных полей $\mathbf{R}[[G]]$ и $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ изоморфны G [2]. Будем отождествлять группы архимедовых классов полей $\mathbf{R}[[G]]$ и $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ с группой G . При изоморфном вложении вещественно замкнутого поля F в поле $\mathbf{R}[[G_F]]$ будем отождествлять группу архимедовых классов поля $\mathbf{R}[[G_F]]$ с группой G_F .

Мультипликативная группа G называется *делимой*, если для любого $g \in G$ и любого натурального n существует решение уравнения $h^n = g$. Известно (S. MacLane, [2]), что если группа G делимая, то поля $\mathbf{R}[[G]]$, $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ вещественно замкнуты.

Пара непустых подмножеств A и B упорядоченного поля F называется *сечением* поля F , если $A < B$ и $A \cup B = F$. В этом случае сечение обозначим (A, B) .

В данной статье будем использовать понятия симметричного и трансцендентного сечений из классификации, разработанной Г.Г. Пестовым [5–8], а также классификацию сечений Шелаха (S. Shelah, [9]).

Сечение (A, B) упорядоченного поля F называется *симметричным* (по Пестову), если для каждого $a \in A$ существует такое $a_1 \in A$, что $(a_1 + (a_1 - a)) \in B$ и для каждого $b \in B$ существует такое $b_1 \in B$, что $(b_1 - (b - b_1)) \in A$ [5–8].

Пусть A – упорядоченное множество, $X \subset A$. Говорят, что X *конфинально* (коинициально) A , если для каждого $x \in A$ существует $y \in X$ такое, что $x \leq y$ ($x \geq y$). Наименьшая мощность среди мощностей всех множеств, конфинальных (коинициальных) A , называется *конфинальностью* (коинициальностью) A и обозначается $cf(A)$ и $coi(A)$ соответственно [2].

Замечание 1.1. Если сечение симметрично по Пестову, то $cf(A) = coi(B)$. Конфинальностью симметричного сечения (A, B) называется $cf(A)$ [8].

Сечение (A, B) упорядоченного поля F называется *симметричным* (по Шелаху), если $cf(A) = coi(B)$ [9].

Замечание 1.2. Каждое сечение, симметричное по Пестову, симметрично и по Шелаху, обратное неверно, как показывает пример из [10]. Далее в этой статье будем рассматривать симметричность только по Пестову.

Пусть F – упорядоченное расширение поля K . Будем говорить, что элемент $x \in F \setminus K$ порождает сечение (A, B) в упорядоченном поле K , если $A < x < B$ [8, 9].

Говорят, что многочлен $f(x)$ меняет знак на сечении (A, B) упорядоченного поля F , если существуют такие $a \in A$, $b \in B$, что на множестве $A \cap [a, b]$ многочлен строго положителен (отрицателен), а на множестве $B \cap [a, b]$ строго отрицателен (положителен). Если существует многочлен из $F[x]$, меняющий знак на сечении, то это сечение будем называть *алгебраическим (по Пестову)*. В противном случае сечение называется *трансцендентным* [5–8].

Замечание 1.3. Каждое сечение, производимое элементом самого поля, является несимметричным (по Пестову и по Шелаху) и трансцендентным.

Будем называть сечение (A, B) упорядоченного поля K *алгебраическим (по Шелаху)*, если существуют упорядоченное расширение F поля K и элемент $x \in F \setminus K$, порождающий данное сечение (A, B) , причем x является алгебраическим элементом над K . В противном случае говорят, что сечение *не является алгебраическим (по Шелаху)* [9].

Через $\bar{K}$ будем обозначать *вещественное замыкание* поля K (максимальное вещественно замкнутое поле, содержащее K).

Замечание 1.4. Если поле K вещественно замкнуто, то $\bar{K} = K$. Вещественное замыкание единственно с точностью до изоморфизма [3, 4, 11].

Лемма 1.5. Если сечение (A, B) упорядоченного поля K алгебраическое по Пестову, то оно алгебраическое и по Шелаху.

Доказательство. Пусть (A, B) – алгебраическое по Пестову сечение упорядоченного поля K . Тогда существует многочлен $f(x) \in K[x]$, который меняет знак на сечении (A, B) . То есть существуют $a \in A$, $b \in B$, такие, что на множестве $A \cap [a, b]$ многочлен $f(x)$ строго положителен (для определённости), а на множестве $B \cap [a, b]$ строго отрицателен. В частности, $f(a)f(b) < 0$, поэтому в вещественном замыкании $\bar{K}$ поля K найдётся элемент c , такой, что $a < c < b$ и $f(c) = 0$. Докажем, что $A < c < B$.

Допустим, что между A и B нет корней многочлена $f(x)$. При этом может оказаться, что

1). Существует $c_1 \in \bar{K}$ – наибольший корень многочлена $f(x)$, такой, что $a < c_1 < B$, существует $c_2 \in \bar{K}$ – наименьший корень $f(x)$, такой, что $A < c_2 < b$. Так как алгебраическое сечение не производится никаким элементом из K , найдутся $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, $c_1 < a_1 < b_1 < c_2$, причём $f(a_1)f(b_1) < 0$. Тогда между a_1 и b_1 найдётся корень $f(x)$ из $\bar{K}$. Противоречие.

2). В $\bar{K}$ нет корней $f(x)$, лежащих между a и B , но существует c_2 – наименьший корень $f(x)$, такой, что $A < c_2 < b$. Тогда найдётся $b_1 \in B$, $b_1 < c_2$, причём $f(a)f(b_1) < 0$. Поэтому между a и b_1 есть корень многочлена $f(x)$ из $\bar{K}$. Но c_2 был между A и b наименьшим корнем. Противоречие. Случай, когда в $\bar{K}$ нет корней $f(x)$, лежащих между A и b , но существует c_1 – наибольший корень $f(x)$, такой, что $a < c_1 < B$, рассматривается аналогично.

Итак, $A < c < B$. Таким образом, $c \in \overline{K}$, являясь алгебраическим над K , порождает сечение (A, B) . Значит, сечение (A, B) алгебраическое по Шелаху. $\square$

2. Свойства упорядоченных полей, связанные с сечениями

Строение сечений в упорядоченном поле несёт существенную информацию о свойствах самого поля. Для исследования полей формальных степенных рядов получим некоторые следствия из теорем теории упорядоченных полей.

Через $F(x)$ будем обозначать простое расширение поля F (наименьшее поле, содержащее F и x).

Теорема 2.1 [6]. Если сечение (A, B) поля F трансцендентно, x принадлежит некоторому упорядоченному расширению поля F и $A < x < B$, то порядок из F единственным образом продолжается на поле $F(x)$, полученное заполнением этого сечения, и далее на вещественное замыкание $\overline{F(x)}$.

Теорема 2.2 [5]. Упорядоченное поле F вещественно замкнуто тогда и только тогда, когда все сечения F трансцендентны.

Следствие 2.3. Пусть (A, B) – сечение вещественно замкнутого поля F , порождённое элементом $x \in \mathbf{R}[[G_F]] \setminus F$, $A < x < B$. Если $y \in \mathbf{R}[[G_F]] \setminus F$, $A < y < B$, то $\overline{F(x)}$ и $\overline{F(y)}$ упорядоченно изоморфны.

Доказательство. По теореме 2.2 в вещественно замкнутом поле F все сечения трансцендентны, далее применяем теорему 2.1 (см. также [11]). $\square$

Теорема 2.4 [7]. Пусть (A, B) – сечение упорядоченного поля K , $f(x) \in K[x]$. Если сам многочлен и все его производные не меняют знак на сечении (A, B) , то найдутся такие $a \in A$ и $b \in B$, что для каждого упорядоченного расширения F поля K выполняется:

- 1) $f(x) > 0$ всюду на отрезке $[a, b]_F$ поля F или $f(x) < 0$ всюду на отрезке $[a, b]_F$ поля F ;
- 2) $f(x)$ строго монотонно на $[a, b]_F$.

Следствие 2.5. Пусть (A, B) – трансцендентное сечение упорядоченного поля K . Если F есть упорядоченное расширение поля K и элемент $t \in F$ таков, что $A < t < B$, то элемент t трансцендентен над K .

Доказательство. Если t – алгебраический над K элемент, то найдётся многочлен $f(x) \in K[x]$, такой, что $f(t) = 0$. Так как сечение (A, B) трансцендентное, то $f(x)$ и его производные не меняют знак на (A, B) . По теореме 2.4 $f(x)$ не меняет знак всюду на некотором отрезке $[a, b]_F$ поля F , где $a \in A$ и $b \in B$, $A < t < B$. Значит, $f(t) \neq 0$. Получаем противоречие. $\square$

Следствие 2.6. Пусть (A, B) – сечение вещественно замкнутого поля K . Если F есть упорядоченное расширение поля K и элемент $t \in F$ таков, что $A < t < B$, то элемент t трансцендентен над K .

Доказательство. По теореме 2.2 сечение (A, B) трансцендентно. Далее применяем следствие 2.5. $\square$

Таким образом, если поле вещественно замкнуто, то между берегами каждого его сечения в любом его упорядоченном расширении нет алгебраических над этим полем элементов.

Лемма 2.7. Пусть (A, B) – трансцендентное (т.е. не являющееся алгебраическим по Пестову) сечение упорядоченного поля K . Тогда (A, B) не является алгебраическим и по Шелаху.

Доказательство. Если (A, B) алгебраическое (по Шелаху), то, по определению, существуют упорядоченное расширение F поля K и элемент $t \in F \setminus K$, порождающий данное сечение (A, B) , причем t является алгебраическим элементом над K . Однако по следствию 2.5 элемент t трансцендентен над K . Противоречие. $\square$

Таким образом, для упорядоченного поля понятия «сечение, алгебраическое по Пестову» и «сечение, алгебраическое по Шелаху» совпадают.

Следствие 2.8. Сечение упорядоченного поля алгебраическое по Пестову тогда и только тогда, когда оно алгебраическое по Шелаху.

Доказательство. По лемме 1.5 и лемме 2.7.

Из результатов [9] следует

Теорема 2.9 [9]. Пусть $x \in \overline{F(x)} \setminus \overline{F}$ порождает сечение (A_x, B_x) в поле $\overline{F}$. Тогда для каждого сечения (A_y, B_y) в $\overline{F}$, порождённого некоторым $y \in \overline{F(x)} \setminus \overline{F}$ и не являющегося алгебраическим по Шелаху, имеют место равенства $cf(A_x) = cf(A_y)$, $coi(B_x) = coi(B_y)$.

Следствие 2.10. Пусть F – вещественно замкнутое поле и $x \in \overline{F(x)} \setminus F$ порождает сечение (A_x, B_x) в поле F . Тогда для каждого сечения (A_y, B_y) в F , порождённого некоторым $y \in \overline{F(x)} \setminus F$, имеют место равенства $cf(A_x) = cf(A_y)$, $coi(B_x) = coi(B_y)$.

Доказательство. Применяем лемму 2.7 и теорему 2.9. $\square$

Теорема 2.11 [12]. Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа. Пусть β – кардинал, $\aleph_0 < \beta \leq |G|$. Тогда конфинальность каждого симметричного сечения поля $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ равна $cf(\beta)$. В частности, если β – регулярный кардинал, то конфинальность каждого симметричного сечения $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ равна β .

Теорема 2.12 [6]. Пусть вещественно замкнутые поля F_1, F_2 таковы, что $|F_1| = |F_2| = \alpha > \aleph_0$ и конфинальность каждого симметричного сечения в обоих полях равна α . Тогда для того чтобы F_1, F_2 были упорядоченно изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы группы архимедовых классов этих полей были изоморфны.

Следствие 2.13 (ОКГ) [13]. Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа, β – регулярный кардинал, $\aleph_0 < \beta = cf(G) = |G|$. Тогда каждое вещественно замкнутое поле F мощности β с группой архимедовых классов G , в котором каждое симметричное сечение имеет конфинальность β , упорядоченно изоморфно полю $\mathbf{R}[[G, \beta]]$.

Теорема 2.14 [13]. Пусть вещественно замкнутое поле F имеет группу архимедовых классов G_F . Сечение (A, B) поля F симметрично тогда и только тогда, когда существует элемент $x \in \mathbf{R}[[G_F]] \setminus F$, такой, что $A < x < B$.

Пусть G – линейно упорядоченная абелева группа, $x \in \mathbf{R}[[G]]$. Усечением (начальным отрезком) ряда $x = \sum_{g \in G} r_g g$ называется ряд вида $\sum_{g \in \text{supp}(x), g > \tilde{g}} r_g g$ для некоторого $\tilde{g} \in \text{supp}(x)$, $\tilde{g} < \max \text{supp}(x)$. Поле $F \subset \mathbf{R}[[G]]$ называется замкнутым относительно усечений, если усечение каждого ряда из поля F принадлежит F [14, 15]. Например, поле ограниченных формальных степенных рядов замкнуто относительно усечений.

Далее будем использовать более общие результаты из [15] для нашего частного случая формальных степенных рядов с вещественными коэффициентами.

Теорема 2.15 ([15], лемма 3.4, с. 644). Пусть G – линейно упорядоченная абелева группа, F – замкнутое относительно усечений подполе поля $\mathbf{R}[[G]]$ и $x \in \mathbf{R}[[G]]$ – такой элемент, что все его усечения принадлежат полю F . Тогда $F(x)$ тоже замкнуто относительно усечений.

Теорема 2.16 (F. Delon, [15], лемма 3.5, с. 644). Пусть F – замкнутое относительно усечений подполе $\mathbf{R}[[G_F]]$. Тогда $\overline{F}$ тоже замкнуто относительно усечений.

3. Простые расширения полей ограниченных формальных степенных рядов

В [13] вводится конструкция вещественно замкнутого поля H , имеющего симметричное сечение заданной конфинальности. Применим эту конструкцию для полей ограниченных формальных степенных рядов. Будем принимать обобщённую континуум-гипотезу.

Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа, β – регулярный кардинал, $\aleph_0 < \beta < \beta^+ = cf(G) = |G|$. При ОКГ имеем

$$|\mathbf{R}[[G, \beta]]| = |\mathbf{R}[[G, \beta^+]]| = |G| = \beta^+ < |\mathbf{R}[[G]]| = 2^{|G|} = 2^{\beta^+} [2, 16].$$

Так как $\beta^+ = cf(G)$, найдётся $\Gamma = \{g_\gamma\}_{\gamma \in \beta^+}$ – подмножество группы G , такое, что отображение $\gamma \mapsto g_\gamma$ задаёт инверсное подобие кардинала β^+ и множества Γ .

Зададим ряд: $x_{\beta^+} = \sum_{g \in \Gamma} 1g$, $x_{\beta^+} \in \mathbf{R}[[G]] \setminus \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$. По теоремам 2.11 и 2.14 ряд

x_{β^+} порождает в поле $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$ симметричное сечение конфинальности β^+ , обозначим его (A, B) .

Для каждого γ , $\beta \leq \gamma < \beta^+$, через x_γ обозначим усечение $\sum_{\delta < \gamma} 1g_\delta$ ряда x_{β^+} . Так как мощность $\text{supp}(x_\gamma)$ равна β , каждый ряд x_γ принадлежит полю $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$. Возрастающая последовательность $\{x_\gamma\}_{\beta \leq \gamma < \beta^+}$ конфинальна A . По трансфинитной рекурсии строим последовательность вещественно замкнутых полей

$\{K_\gamma\}_{\beta \leq \gamma < \beta^+}$. Первое поле в этой последовательности $K_\beta = \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\beta)}$ – вещественное замыкание простого трансцендентного расширения поля $\mathbf{R}[[G, \beta]]$. Если γ – непрелдельный ординал, то полагаем $K_\gamma = \overline{K_{\gamma-1}(x_\gamma)}$. Заметим, что если $x_\gamma \in K_{\gamma-1}$, то $K_\gamma = K_{\gamma-1}$. Если γ – предельный ординал, то полагаем

$$K_\gamma = \overline{\left(\bigcup_{\beta \leq \delta < \gamma} K_\delta \right)}(x_\gamma). \text{ Полагаем также } H = \bigcup_{\beta \leq \gamma < \beta^+} K_\gamma. \text{ В [13] доказано, что элемент}$$

x_{β^+} порождает в поле H симметричное сечение конфинальности β^+ . Заметим, что при этом $\mathbf{R}[[G, \beta]] \subset H \subset \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$ и x_{β^+} в поле $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ порождает симметричное сечение конфинальности β , а в поле $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$ порождает симметричное сечение конфинальности β^+ .

Сечение (A, B) упорядоченного поля F называется *фундаментальным* (сечением Скотта), если $\forall \varepsilon \in F^+ \exists a \in A, \exists b \in B, |b - a| < \varepsilon$ [2, 5, 9].

Если носитель $\Gamma = \text{supp}(x_{\beta^+})$ коинициален G , то сечение (A, B) фундаментально и не производится элементом самого поля; такие сечения всегда имеют конфинальность, равную $cf(G)$ [12]. Если Γ не коинициально G (группу, имеющую такие подмножества, можно построить [10]), то сечение (A, B) не является фундаментальным [17]. Если в поле H все симметричные сечения фундаментальны, то H упорядоченно изоморфно $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$. Действительно, по следствию 2.13 из теоремы 2.12 об изоморфизме каждое вещественно замкнутое поле мощности β^+ с группой архимедовых классов G , в котором каждое симметричное сечение имеет конфинальность β^+ , упорядоченно изоморфно полю $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$. И если в поле H все симметричные сечения фундаментальны, то по [12] они будут иметь конфинальность, равную $cf(G) = \beta^+$.

Утверждение 3.1. Поле H – наименьшее по включению вещественно замкнутое подполе поля $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$, содержащее поле $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ и все усечения ряда x_{β^+} .

Доказательство. Пусть H_1 – наименьшее по включению вещественно замкнутое подполе поля $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$, содержащее поле $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ и все усечения ряда x_{β^+} . Очевидно, что $H_1 \subset H$. Обратное включение докажем по трансфинитной индукции. Имеем $K_\beta = \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\beta)} \subset H_1$. Далее, пусть для всех δ , таких, что $\beta \leq \delta < \gamma$, выполняется $K_\delta \subset H_1$. Если γ – непрелдельный ординал, то $\overline{K_{\gamma-1}(x_\gamma)} = K_\gamma \subset H_1$. Если γ – предельный ординал, то $\bigcup_{\beta \leq \delta < \gamma} K_\delta \subset H_1$ и

$$K_\gamma = \overline{\left(\bigcup_{\beta \leq \delta < \gamma} K_\delta \right)}(x_\gamma) \subset H_1. \text{ Следовательно, } H = \bigcup_{\beta \leq \gamma < \beta^+} K_\gamma \subset H_1. \square$$

Утверждение 3.2. Поле H замкнуто относительно усечений.

Доказательство. По трансфинитной индукции.

База индукции: $K_\beta = \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\beta)}$ замкнуто относительно усечений. Действительно, мощность носителя каждого усечения ряда x_β строго меньше β , поэтому $\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\beta)$ по теореме 2.15 замкнуто относительно усечений и по теореме 2.16 поле $\overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\beta)}$ замкнуто относительно усечений.

Пусть теперь для всех δ , таких, что $\beta \leq \delta < \gamma$, поле K_δ замкнуто относительно усечений. Если γ – непредельный ординал, то $\overline{K_{\gamma-1}(x_\gamma)} = K_\gamma$ замкнуто относительно усечений по теоремам 2.15, 2.16. Если γ – предельный ординал, то по построению $\bigcup_{\beta \leq \delta < \gamma} K_\delta$ есть объединение расширяющихся полей, замкнутых относительно усечений. Поэтому само объединение также замкнуто относительно усечений. К полю $K_\gamma = \left(\bigcup_{\beta \leq \delta < \gamma} K_\delta \right)(x_\gamma)$ применяем теоремы 2.15, 2.16. Поле H есть объединение вложенных расширяющихся полей K_γ , замкнутых относительно усечений, поэтому H замкнуто относительно усечений. $\square$

Утверждение 3.3. Поле $\overline{H(x_{\beta^+})}$ замкнуто относительно усечений.

Доказательство. По утверждению 3.2 поле H замкнуто относительно усечений. Далее применяем теоремы 2.15, 2.16. $\square$

Теорема 3.4.

1) $\bigcup_{\beta \leq \gamma < \beta^+} \mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma) \subset H$ и каждое поле из объединения упорядоченно изоморфно полю $\overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\beta)}$.

2) Если для каждого предельного ординала γ , $\beta \leq \gamma < \beta^+$, поле $\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)$ замкнуто относительно усечений, то $\bigcup_{\beta \leq \gamma < \beta^+} \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)} = H$.

Доказательство.

1) $\mathbf{R}[[G, \beta]] \subset H$ и для каждого γ , $\beta \leq \gamma < \beta^+$, имеем $x_\gamma \in H$. Тогда $\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma) \subset H$, и так как H вещественно замкнуто, $\overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)} \subset H$, поэтому $\bigcup_{\beta \leq \gamma < \beta^+} \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)} \subset H$.

Рассмотрим теперь вещественно замкнутые поля $\overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\beta)}$ и $\overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)}$, где $\beta \leq \gamma \leq \beta^+$. Ряды x_β и x_γ порождают в $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ то же самое сечение (A, B) , что и ряд x_{β^+} , то есть $A < x_\beta \leq x_\gamma \leq x_{\beta^+} < B$. Тогда по следствию 2.3 $\overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\beta)}$ и $\overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)}$ упорядоченно изоморфны.

2) Докажем по трансфинитной индукции, что $K_\gamma = \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)}$ для всех $\beta \leq \gamma < \beta^+$. Имеем $K_\beta = \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\beta)}$. Далее, пусть для всех δ , таких, что $\beta \leq \delta < \gamma < \beta^+$, выполняется $K_\delta = \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\delta)}$. Докажем, что $K_\gamma = \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)}$.

2А) Пусть γ – непредельный ординал, тогда, с одной стороны, $\overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)} \subset \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_{\gamma-1})(x_\gamma)} = \overline{K_{\gamma-1}(x_\gamma)} = K_\gamma$. С другой – $x_\gamma - 1g_{\gamma-1} = x_{\gamma-1} \in \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)}$, следовательно, $\overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_{\gamma-1})} \subset \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)}$ и, далее, $K_\gamma = \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_{\gamma-1})(x_\gamma)} \subset \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)}$. Получаем $K_\gamma = \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)}$.

2Б) Пусть γ – предельный ординал по построению и индукционному предположению: $K_\gamma = \overline{\left(\bigcup_{\beta \leq \delta < \gamma} K_\delta \right)(x_\gamma)} = \overline{\left(\bigcup_{\beta \leq \delta < \gamma} \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\delta)} \right)(x_\gamma)}$. С одной стороны, $\overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)} \subset K_\gamma = \overline{\left(\bigcup_{\beta \leq \delta < \gamma} \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\delta)} \right)(x_\gamma)}$. С другой – по условию $\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)$ замкнуто относительно усечений, поэтому $x_\delta \in \mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)$ для всех $\beta \leq \delta < \gamma$ и $\overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\delta)} \subset \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)}$. Значит, $\bigcup_{\beta \leq \delta < \gamma} \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\delta)} \subset \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)}$, и наконец,

$$K_\gamma = \overline{\left(\bigcup_{\beta \leq \delta < \gamma} \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\delta)} \right)(x_\gamma)} \subset \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\gamma)}. \square$$

Теорема 3.5. $H(x_{\beta^+}) \setminus H \neq \emptyset$ и каждый элемент разности $H(x_{\beta^+}) \setminus H$ порождает в поле H симметричное сечение конфинальности β^+ .

Доказательство. $H \subset \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$, поэтому $x_{\beta^+} \notin H$. Значит, уже $H(x_{\beta^+}) \setminus H \neq \emptyset$. Ряд x_{β^+} порождает в H симметричное и трансцендентное сечение конфинальности β^+ . Если $t \in H(x_{\beta^+}) \setminus H$, то t порождает в H симметричное (по теореме 2.14) и трансцендентное сечение. Далее применяем следствие 2.10. $\square$

Замечание 3.6. Если $H = \overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_{\gamma_0})}$ для некоторого γ_0 , $\beta \leq \gamma_0 < \beta^+$, то H упорядоченно изоморфно $\overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\beta)}$. В этом случае поля H и $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$ упорядоченно изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$ упорядоченно изоморфно своему подполю $\overline{\mathbf{R}[[G, \beta]](x_\beta)}$.

Замечание 3.7. Если H не изоморфно (упорядоченно) полю $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$, то в поле H не все симметричные сечения будут иметь конфинальность β^+ . Действительно, если бы все симметричные сечения в H имели конфинальность β^+ , то H было бы изоморфно полю $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$ по следствию 2.13. Таким образом, в

этом случае H будет примером упорядоченного поля с симметричными сечениями разной кофинальности.

Остаются открытыми вопросы: будет ли H равно (изоморфно) $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$; существует ли упорядоченное поле с симметричными сечениями разной кофинальности? Будут ли упорядоченно изоморфны поля $\mathbf{R}[[G, \beta]](x_{\beta^+})$ и $\mathbf{R}[[G, \beta^+]](x_{\beta^+})$?

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.
2. Dales H.J., Woodin H. Super real fields. Oxford: Clarendon Press, 1996.
3. ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1979.
4. Кейслер Г., Чен Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.
5. Пестов Г.Г. Строение упорядоченных полей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980.
6. Пестов Г.Г. К теории сечений в упорядоченных полях // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 6. С. 1213–1456.
7. Пестов Г.Г. К теории упорядоченных полей и групп: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Томск, 2003.
8. Пестов Г.Г. Исследования по упорядоченным группам и полям в Томском государственном университете // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 3(15).
9. Shelah S. Quite complete real closed fields // Israel J. Math. 142 (2004). P. 261–272.
10. Galanova N.Yu. Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series // Serdica Math. 2004. V. 30. P. 495–504.
11. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М.: Наука, 1967.
12. Галанова Н.Ю., Пестов Г.Г. Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов // Алгебра и логика. 2008. Т. 47. № 2. С. 174–185.
13. Галанова Н.Ю. Линейно упорядоченные поля с симметричными сечениями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 14–20.
14. Kuhlmann F.-V., Kuhlmann S., Marshall M., Zekavat M. Embedding ordered fields in formal power series fields // J. Pure and Applied Algebra. 2002. V. 169. Issue 1. P. 71–90.
15. Mourgues M.H., Ressayre J.P. Every real closed field has an integer part // J. Symb. Logic. 1993. V. 58. P. 641–647.
16. Alling N.L. On the existence of real-closed fields that are η_α -set of power $\aleph_\alpha$ // Trans. Amer. Math. Soc. V. 103 (1962). P. 341–352.
17. Галанова Н.Ю. Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов и нестандартной вещественной прямой // Алгебра и логика. 2003. Т. 42. № 1. С. 26–36.

Статья поступила 28.01.2018 г.

Galanova N.Yu. (2018) ON SYMMETRIC CUTS OF A REAL-CLOSED FIELD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 5–15

DOI 10.17223/19988621/53/1

Keywords: real closed field, truncation closed field, field of bounded formal power series, symmetric cut, cofinality of a cut.

The paper investigates properties of a subfield of the field of bounded formal power series $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$, $|G| = cf(G) = \beta^+ > \beta > \aleph_0$. We construct (under GCH) a real closed field H ,

$\mathbf{R}[[G, \beta]] \subset H \subset \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$ which has symmetric cuts of cofinality β^+ . We show that H and $\overline{H(x_{\beta^+})}$ are truncation closed. We use G. Pestov's and S. Shelah's classifications of cuts (a symmetric cut and a non-algebraic cut).

AMS Mathematical Subject Classification: 12F20, 12J15

GALANOVA Nataliya Yur'evna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: galanova@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Fuchs L. (1963) *Partially ordered algebraic systems*. Pergamon Press.
2. Dales H.J., Woodin H. (1996) *Super real fields*. Oxford: Clarendon Press.
3. van der Waerden B.L. (1971) *Algebra*. New York: Springer.
4. Keisler H.G., Chang C.C. (1973) *Model Theory*. Amsterdam: North-Holland.
5. Pestov G.G. (1980) *Stroenie uporyadochennykh poley* [The structure of ordered fields]. Tomsk: TSU Publ.
6. Pestov G.G. (2001) On the theory of cuts in ordered fields (Russ.). *Sib. Math. J.* 42(6). pp. 1350–1360.
7. Pestov G.G. (2003) *K teorii uporyadochennykh poley i grupp* [To the theory of ordered fields and groups]. Dis. Doct. fiz.-mat. nauk; 01.01.06. Tomsk.
8. Pestov G.G. (2011) Issledovaniya po uporyadochennym gruppam i polyam v Tomskom gosudarstvennom universitete [Investigations on ordered groups and fields in Tomsk State University]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 3(15).
9. Shelah S. (2004) Quite complete real closed fields. *Israel Journal of Mathematics* 142. pp. 261–272. <https://arxiv.org/pdf/math/0112212v1.pdf>
10. Galanova N.Yu. (2004) Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series. *Serdica Math.* 30. pp. 495–504.
11. Robinson A. (1963) *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*. Amsterdam: North-Holland.
12. Galanova N.Y., Pestov G.G. (2008) Symmetry of cuts in fields of formal power series. *Algebra and Logic*. 47(2). pp. 100–106. DOI:10.1007/s10469-008-9001-5.
13. Galanova N.Yu. (2017) Totally ordered fields with symmetric cuts. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 46. pp. 14–20. DOI:10.17223/19988621/46/2
14. Kuhlmann F.-V., Kuhlmann S., Marshall M., Zekavat M. (2002) Embedding ordered fields in formal power series fields. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 169(1). pp. 71–90.
15. Mourgues M.H., Ressayre J.P. (1993) Every real closed field has an integer part. *J. Symb. Logic*. 58. pp. 641–647.
16. Alling N.L. (1962) On the existence of real-closed fields that are η_α -set of power $\aleph_\alpha$. *Trans. Amer. Math. Soc.* V. 103. pp. 341–352.
17. Galanova N.Y. (2003) Symmetry of sections in fields of formal power series and non-standard real line. *Algebra and Logic*. 42. pp. 14–19. DOI: 10.1023/A:1022672606591.

П.А. Крылов, Ц.Д. Норбосамбуев

ГРУППА АВТОМОРФИЗМОВ ОДНОГО КЛАССА АЛГЕБР ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

При некоторых условиях найдено строение группы автоморфизмов алгебры формальных матриц над коммутативным кольцом. Группа автоморфизмов такой алгебры является полупрямым произведением нескольких подгрупп, состоящих из автоморфизмов с известным строением. Это достигается за счет того, что алгебра формальных матриц представляется как расщепляющееся расширение некоторого нильпотентного идеала с помощью произведения обычных колец матриц.

Ключевые слова: *автоморфизм, алгебра формальных матриц, полупрямое произведение.*

Автоморфизмы и изоморфизмы различных колец и алгебр всегда привлекают внимание специалистов (см., например, [1–8]). В данной статье рассматриваются автоморфизмы алгебр формальных матриц над коммутативным кольцом.

Если R – кольцо, то $M(n, R)$ – кольцо всех $(n \times n)$ -матриц над R , E – единичная матрица. Через $\text{Aut}_R(T)$ обозначается группа автоморфизмов R -алгебры T над коммутативным кольцом R .

1. Алгебры формальных матриц

Общая теория колец формальных матриц изложена в книгах [9] и [10]. Определим их один частный вид – алгебры формальных матриц над данным коммутативным кольцом R .

Пусть $n \geq 2$ и $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ – некоторое множество элементов кольца R , удовлетворяющих равенствам

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ikl} = s_{ijl} \cdot s_{jkl} \quad (1)$$

для всех индексов $i, j, k, l = 1, \dots, n$.

Для произвольных матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ из $M(n, R)$ положим

$$AB = C = (c_{ij}), \quad \text{где } c_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ikj} a_{ik} b_{kj}.$$

Все матрицы порядка n над кольцом R относительно сложения и введенного нового умножения образуют ассоциативную R -алгебру с единицей. Будем её обозначать $M(n, R, \Sigma)$, где $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$, или буквой K . Алгебра K называется алгеброй формальных матриц порядка n над кольцом R . Множество Σ – система множителей, а его элементы называются множителями R -алгебры K . Если все s_{ijk} равны 1, то получаем алгебру $M(n, R)$.

Из тождеств (1) вытекают следующие тождества:

$$s_{jji} = s_{jij} = s_{ijl} \cdot s_{jil} = s_{lij} \cdot s_{lji}. \quad (2)$$

Симметрическая матрица $S = (s_{jji})$ называется матрицей множителей алгебры K .

Пусть $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ – система множителей, τ – подстановка степени n . Тогда $\{s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ – тоже система множителей, так как она удовлетворяет равенствам (1). Обозначим её через $\tau\Sigma$. Существует алгебра формальных матриц $\tau K = M(n, R, \tau\Sigma)$. Соответствие $A \rightarrow \tau A$, где $A = (a_{ij})$, $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$, задает изоморфизм алгебр K и τK .

До конца статьи буква K обозначает некоторую алгебру формальных матриц $M(n, R, \Sigma)$, все множители которой равны 1 или 0.

Пусть индексы i, j, k попарно различны. С помощью тождеств (2) нетрудно убедиться, что для множителей s_{iji} , s_{jkj} и s_{kik} имеет место только одна из следующих возможностей:

- 1) все три элемента – единицы;
- 2) какие-то два из этих трех элементов – нули, а третий – единица;
- 3) все три элемента – нули.

Существует подстановка τ , такая, что в матрице τS (как действуют подстановки на матрицах написано выше) на главной диагонали стоят блоки, состоящие из единиц, а все позиции вне этих блоков заняты нулями (можно говорить, что матрица τS имеет канонический вид). Алгебры K и τK изоморфны. Договоримся, что матрица множителей S алгебры K уже имеет указанный блочный вид.

Можно получить теперь некоторое разложение алгебры K . Пусть число блоков на главной диагонали матрицы S равно m . На главной диагонали каждой матрицы A из K выделим блоки $A_1, \dots, A_m$ того же порядка и в той же последовательности, что и на главной диагонали матрицы S . Тогда блоки A_l для фиксированного l всех матриц из K образуют алгебру матриц $M(k_l, R)$ для какого-то l . Обозначим её K_l .

В дальнейшем буква L обозначает прямую сумму алгебр $K_1 \oplus \dots \oplus K_m$, а I – множество всех матриц $A \in K$, для которых блоки $A_1, \dots, A_m$ состоят из нулей. Тогда I – нильпотентный идеал алгебры K . И верно равенство $K = L \oplus I$, т. е. K есть расщепляющееся расширение идеала I с помощью алгебры L .

Считаем, что множители s_{ijk} удовлетворяют следующему дополнительному условию: для любых попарно различных индексов i, j, k из $s_{iji} = s_{jkj} = s_{kik} = 0$ следует $s_{ijk} = 0$. В таком случае $I^2 = 0$.

2. Автоморфизмы алгебр формальных матриц

Пусть дана R -алгебра K . Запишем её, как в разделе 1, в виде $K = L \oplus I$. Предполагаем, что для L и I выполняются условия, сформулированные в разделе 1. Еще считаем, что $\phi I = I$ для всех $\phi \in \text{Aut}_R(K)$. Это будет так, когда, например, R – полупервичное кольцо.

Естественным образом идеал I является L - L -бимодулем. Если $\alpha \in \text{Aut}_R(L)$, то имеем также притягивающий L - L -бимодуль ${}_a J_\alpha$, где $x \circ a \circ y = \alpha(x) a \alpha(y)$ для всех $x, y \in L$, $a \in I$. Разложение $L = K_1 \oplus \dots \oplus K_m$ позволяет рассматривать каждую матрицу из K как блочную матрицу порядка m . Запишем $E = e_1 \oplus \dots \oplus e_m$, где e_i – единичный элемент кольца K_i . Положим $I_{ij} = e_i I e_j$. Здесь I_{ij} – подбимодуль L - L -бимодуля I .

Каждый автоморфизм ϕ R -алгебры K можно представить матрицей $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ относительно разложения $K = L \oplus I$. В этой матрице $\alpha: L \rightarrow L$, $\beta: I \rightarrow I$, $\delta: L \rightarrow I$ – R -модульные гомоморфизмы. Кроме того, α – автоморфизм R -алгебры L , β – изо-

морфизм между бимодулями ${}_1I_1$ и ${}_aI_a$, δ – дифференцирование алгебры L со значениями в бимодуле ${}_aI_a$.

Верно и обратное. Если $\alpha: L \rightarrow L$, $\beta: I \rightarrow I$, $\delta: L \rightarrow I$ – отображения со свойствами, перечисленными выше, то преобразование алгебры K , задаваемое матрицей $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$, является её автоморфизмом. Не будем различать автоморфизм и соответствующую матрицу.

Алгебра L сепарабельна. Поэтому всякое дифференцирование со значениями в L – L -бимодуле ${}_aI_a$ является внутренним. То есть найдется матрица $D \in I$ со свойством $\delta(X) = (\alpha X)D - D(\alpha X)$, $X \in L$. Изоморфизм β «переставляет» бимодули I_{ij} для всех $i, j = 1, \dots, m$ с $i \neq j$.

Приведем некоторую полезную информацию о группе $\text{Aut}_R(L)$. Считаем далее кольцо R неразложимым. Несложно проверить, что всякий автоморфизм α алгебры L «переставляет» кольца $K_1, \dots, K_m$ в том смысле, что для любого $i = 1, \dots, m$ верно равенство $\alpha K_i = K_j$ для какого-то j . Используя это наблюдение, можно выделить в группе $\text{Aut}_R(L)$ подгруппу Σ , изоморфную некоторой группе подстановок степени m (ее строение известно; мы отождествляем автоморфизмы из Σ с соответствующими подстановками). Обозначим через Γ нормальную подгруппу в $\text{Aut}_R(L)$, состоящую из автоморфизмов, переводящих каждое кольцо K_i в себя. Тогда $\Gamma \cap \Sigma = \langle e \rangle$ и группа $\text{Aut}_R(L)$ есть полупрямое произведение $\Gamma \rtimes \Sigma$ подгрупп Γ и Σ . Последнее означает, что каждый автоморфизм $\alpha \in \text{Aut}_R(L)$ можно единственным образом записать в виде $\alpha = \mu\tau$, где $\mu \in \Gamma$, $\tau \in \Sigma$. Это дает гомоморфизм $h: \text{Aut}_R(L) \rightarrow \Sigma$, $\alpha \mapsto \tau$.

Определим еще такой гомоморфизм $f: \text{Aut}_R(K) \rightarrow \text{Aut}_R(L)$, что $f(\varphi) = \alpha$ для каждого $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in \text{Aut}_R(K)$. Далее положим $g = hf$. Тогда

$\text{Kerg} = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha K_i = K_i, i = 1, \dots, m \right\}$. Что важно, подгруппа Img совпадает с Σ .

Подстановки из Σ естественным образом можно считать подстановками степени n . Затем, используя соглашение о множителях s_{ijk} , находим, что для всякой подстановки $\tau \in \Sigma$ верно равенство $s_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$ при всех $i, j, k = 1, \dots, n$. Получается, что соответствие $(a_{ijk}) \rightarrow (a_{\tau(i)\tau(j)})$ является автоморфизмом R -алгебры K (см. раздел 1). Обозначим этот автоморфизм через ξ_τ . Он переставляет в матрицах из K те же строки и столбцы, что и автоморфизм τ в матрицах из L . Автоморфизмы вида ξ_τ для всех $\tau \in \Sigma$ образуют подгруппу в $\text{Aut}_R(K)$. Она изоморфна Σ при соответствии $\xi_\tau \mapsto \tau$. Отождествляем ξ_τ с τ . После этого можно записать полупрямое произведение $\text{Aut}_R(K) = \text{Kerg} \rtimes \Sigma$.

Есть еще одно полупрямое разложение группы $\text{Aut}_R(K)$. Пусть буква Δ обозначает нормальную подгруппу автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}$. Поскольку дифференцирование δ является внутренним, то подгруппа Δ изоморфна мультипликативной группе $E+I$. Пусть Λ – подгруппа автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Имеем разложение $\text{Aut}_R(K) = \Delta \rtimes \Lambda$. Существуют также разложения

$$\text{Kerg} = \Delta \rtimes \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha K_i = K_i, i = 1, \dots, m \right\}$$

и
$$\text{Aut}_R(K) = \Delta \rtimes \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha K_i = K_i, i = 1, \dots, m \right\} \rtimes \Sigma.$$

Отметим, что строение подгрупп Δ и Σ понятно. Подгруппа $\text{Ker} f$ также имеет достаточно ясное строение (некоторые сведения о ней есть в разделе 4). Проблема описания группы $\text{Aut}_R(K)$ фактически сводится к вычислению группы $\text{Im} f|_{\text{Ker} f}$. Обозначим ее через Ω . Таким образом, $\Omega = \{ \alpha \in \Gamma \mid \text{найдется } \varphi \in \text{Aut}_R(K) \text{ такой, что } \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ для некоторого } \beta \}$. Справедливо равенство $\text{Im} f = \Omega \rtimes \Sigma$. В ряде случаев строение группы Ω будет выявлено в следующем разделе.

3. Группа Ω

Сохраняются все принятые ранее обозначения. Пусть $\alpha \in \Omega$ и $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ – соответствующий автоморфизм R -алгебры K , то есть $f(\varphi) = \alpha$. Для любых $i, j = 1, \dots, m$ верны равенства $\beta(I_{ij}) = \alpha(e_i)I\alpha(e_j) = e_i I e_j = I_{ij}$ (L - L -бимодули I_{ij} появились в разделе 2). Обозначим $\beta_{ij} = \beta|_{I_{ij}}$. Запишем еще $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, где $\alpha_i = \alpha|_{K_i} \in \text{Aut}_R(K_i)$. Тогда $\beta_{ij} : {}_1(I_{ij})_1 \rightarrow {}_{\alpha_i}(I_{ij})_{\alpha_j}$ – изоморфизм K_i - K_j -бимодулей (бимодули вида ${}_a A_\beta$ определены в разделе 2).

Вопросу о том, какие элементы из Γ входят в Ω , можно придать следующую форму. Для каких автоморфизмов $\alpha_i \in \text{Aut}_R(K_i)$ и $\alpha_j \in \text{Aut}_R(K_j)$ существуют изоморфизмы между K_i - K_j -бимодулями I_{ij} .

Обозначим через $l_1, \dots, l_m$ порядки колец матриц $K_1, \dots, K_m$ соответственно. Положим $c = \text{НОК}(l_1, \dots, l_m)$ и $\overline{K} = M(c, R)$. Автоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ стандартным способом считаем автоморфизмами R -алгебры $\overline{K}$. Сформулируем одно необходимое условие существования изоморфизма L - L -бимодулей ${}_1 I_1 \rightarrow {}_\alpha I_\alpha$.

Следствие 3.1. Если L - L -бимодули ${}_1 I_1$ и ${}_\alpha I_\alpha$ изоморфны, то для любых $i, j \in \{1, \dots, m\}$ автоморфизм $\alpha_i^{-1} \alpha_j$ R -алгебры $\overline{K}$ является внутренним.

Группу внутренних автоморфизмов R -алгебры T будем обозначать $\text{Inn}(\text{Aut}_R(T))$.

Предложение 3.2. Справедливо включение $\text{Inn}(\text{Aut}_R(L)) \subseteq \Omega$.

Следствие 3.3. Если все автоморфизмы каждой из R -алгебр $K_1, \dots, K_m$ являются внутренними (это будет так, когда R – кольцо главных идеалов или локальное кольцо), то имеет место равенство $\Omega = \text{Aut}_R(K_1) \times \dots \times \text{Aut}_R(K_m)$.

Строение группы Ω можно найти, если все кольца матриц $K_1, \dots, K_m$ имеют одинаковый порядок. Отождествим эти кольца.

Следствие 3.4. Пусть все кольца $K_1, \dots, K_m$ имеют одинаковый порядок. Тогда группа Ω порождается внутренними автоморфизмами R -алгебры L и автоморфизмами вида $(\gamma, \gamma, \dots, \gamma)$.

4. Некоторые полупрямые разложения

Установим несколько изоморфизмов, проясняющих строение группы $\text{Aut}_R(K)$.

Введенная в разделе 2 подгруппа Δ лежит в $\text{Inn}(\text{Aut}_R(K))$. Разложение $\text{Aut}_R(K) = \Delta \rtimes \Lambda$ влечет разложение $\text{Inn}(\text{Aut}_R(K)) = \Delta \rtimes \text{Inn}_0(\text{Aut}_R(K))$, где $\text{Inn}_0(\text{Aut}_R(K))$ – подгруппа внутренних автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Здесь α – внутренний автоморфизм алгебры L .

Обозначим через Φ подгруппу всех таких автоморфизмов $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, где α – внутренний автоморфизм алгебры L . Понятно, что $\Phi \subseteq \text{Kerf}$ и верно равенство $\Phi = \text{Kerf} \cdot \text{Inn}_0(\text{Aut}_R(K))$.

Введем еще подгруппу Ψ , состоящую из автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Действие изоморфизма β на каждом бимодуле I_{ij} ($i \neq j$) совпадает с умножением на некоторый обратимый элемент кольца R . Отсюда следует изоморфизм $\Psi \cong U(R) \times \dots \times U(R)$, где $U(R)$ – мультипликативная группа кольца R . Так как $\text{Kerf} = \Delta \rtimes \Psi$, то имеем равенства:

$$\begin{aligned} \Phi &= \text{Kerf} \cdot \text{Inn}_0(\text{Aut}_R(K)) = (\Delta \rtimes \Psi) \cdot \text{Inn}_0(\text{Aut}_R(K)) = \\ &= (\Delta \rtimes \text{Inn}_0(\text{Aut}_R(K))) \cdot \Psi = \text{Inn}(\text{Aut}_R(K)) \cdot \Psi. \end{aligned}$$

Получается, что о подгруппе Φ мы располагаем полной информацией.

С помощью найденных полупрямых разложений выведем несколько результатов о строении подгруппы Kerf и всей группы $\text{Aut}_R(K)$.

Следствие 4.1. Фактор-группа Kerf/Φ изоморфно вкладывается в фактор-группу $\Gamma/\text{Inn}(\text{Aut}_R(L))$ и является ограниченной абелевой группой.

Напомним, что буква S обозначает матрицу множителей кольца K (введена в разделе 1, там же есть сведения о блоках матрицы S).

Следствие 4.2. 1) Если порядки всех блоков на главной диагонали матрицы S попарно различны, то справедливо равенство $\text{Aut}_R(K) = \text{Kerf}$.

2) Если все автоморфизмы каждой R -алгебры $K_1, \dots, K_m$ являются внутренними, то имеем равенство $\text{Aut}_R(K) = \Delta \rtimes (\Psi \cdot \text{Inn}_0(\text{Aut}_R(K))) \rtimes \Sigma$ (см. еще следствие 3.3).

Отметим, что строение всех встречающихся в п. 2 следствия 4.2 подгрупп известно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anh P.N., van Wyk L. Automorphism group of generalized triangular matrix rings // Linear Algebra Appl. 2011. V. 434. No. 4. P. 1018–1026. doi:10.1016/j.laa.2010.10.007.
2. Anh P.N., van Wyk L. Isomorphisms between strongly triangular matrix rings // Linear Algebra Appl. 2013. V. 438. No. 11. P. 4374–4481. https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.01.030.
3. Khazal K., Dascalescu S., van Wyk L. Isomorphism of generalized triangular matrix rings and recovery of tiles // Int. J. Math. Sci. 2003. No. 9. P. 533–538. http://dx.doi.org/10.1155/S0161171203205251.
4. Boboc C., Dascalescu S., van Wyk L. Isomorphisms between Morita context rings // Linear and Multilinear Algebra. 2012. V. 60. No. 5. P. 545–563. https://doi.org/10.1080/03081087.2011.611946.
5. Kezlan T.P. A note on algebra automorphisms of triangular matrices over commutative rings // Linear Algebra Appl. 1990. V. 135. P. 181–184. https://doi.org/10.1016/0024-3795(90)90121-R.
6. Tang G., Li Ch., Zhou Y. Study of Morita contexts // Comm. Algebra. 2014. V. 42. P. 1668–1681. https://doi.org/10.1080/00927872.2012.748327.
7. Крылов П.А. Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. Т. 47. № 4. С. 456–463. https://doi.org/10.1007/s10469-008-9016-y.
8. Абызов А.Н., Тапкин Д.Т. Кольца формальных матриц и их изоморфизмы // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56. № 6. С. 1199–1214. https://doi.org/10.17377/smzh.2015.56.601.
9. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. М.: МЦНМО, 2017.
10. Krylov P., Tuganbaev A. Formal matrices. Algebra and Applications. V. 23. Springer, 2017. 10.1007/978-3-319-53907-2.

Статья поступила 18.01.2018 г.

Krylov P.A., Norbosambuev T.D. GROUP OF AUTOMORPHISMS OF ONE CLASS OF FORMAL MATRIX ALGEBRAS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 16–21

DOI 10.17223/19988621/53/2

Keywords: automorphism, formal matrix algebra, semidirect product.

The structure of the automorphism group of a formal matrix algebra over a commutative ring has been found under certain conditions. The automorphism group of such algebra is a semidirect product of several subgroups consisting of automorphisms with a known structure. This is achieved due to the fact that the formal matrix algebra is represented as a splitting extension of a certain nilpotent ideal by means of the product of ordinary matrix rings.

AMS Mathematical Subject Classification: 15A30

KRYLOV Piotr Andreevich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: krylov@math.tsu.ru

NORBOSAMBUEV Tsyrendorji Dashatsyrenovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: NsTsdDts@yandex.ru

REFERENCES

1. Anh P. N., van Wyk L. (2011) Automorphism group of generalized triangular matrix rings. *Linear Algebra Appl.* 434(4). pp. 1018–1026. doi:10.1016/j.laa.2010.10.007.
2. Anh P.N., van Wyk L. (2013) Isomorphisms between strongly triangular matrix rings. *Linear Algebra Appl.* 438(11). pp. 4374–4481. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.01.030>.
3. Khazal K., Dascalescu S., van Wyk L. (2003) Isomorphism of generalized triangular matrix rings and recovery of tiles *Int. J. Math. Sci.* 9. pp. 533–538. <http://dx.doi.org/10.1155/S0161171203205251>.
4. Boboc C., Dascalescu S., van Wyk L. (2012) Isomorphisms between Morita context rings. *Linear and Multilinear Algebra.* 60(5). pp. 545–563. <https://doi.org/10.1080/03081087.2011.611946>.
5. Kezlan T.P. (1990) A note on algebra automorphisms of triangular matrices over commutative rings. *Linear Algebra Appl.* 135. pp. 181–184. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(90\)90121-R](https://doi.org/10.1016/0024-3795(90)90121-R).
6. Tang G., Li Ch., Zhou Y. (2014) Study of Morita contexts. *Comm. Algebra.* 42. pp. 1668–1681. <https://doi.org/10.1080/00927872.2012.748327>.
7. Krylov P.A. (2008) Isomorphism of generalized matrix rings. *Algebra and Logic.* 47(4). pp. 456–463. <https://doi.org/10.1007/s10469-008-9016-y>.
8. Abyzov A.N., Tapkin D.T. (2015) Formal matrix rings and their isomorphisms. *Siberian Mathematical Journal.* 56(6). pp. 1199–1214. <https://doi.org/10.17377/smzh.2015.56.601>.
9. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. *Koltsa formal'nyh matric i moduli nad nimi* [Rings of formal matrices and modules over them]. Moscow: MCNMO, 2017.
10. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal matrices. Algebra and Applications.* 23. Springer. 10.1007/978-3-319-53907-2.

УДК 514.76
DOI 10.17223/19988621/53/3

MSC 53C15; 53C50; 53C30; 53C25; 53C38

Н.К. Смоленцев

О ПОЧТИ (ПАРА) КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУРАХ КЭЛИ НА СФЕРАХ $S^{2,4}$ И $S^{3,3}$

Изучаются почти комплексные и почти пара-комплексные структуры Кэли на шестимерных псевдоримановых сферах в пространстве чисто мнимых октав расщепляемой алгебры Кэли $\mathbf{Ca}'$. Показано, что структуры Кэли неинтегрируемы, вычислены их основные геометрические характеристики. В отличие от обычной римановой сферы S^6 , на рассматриваемых псевдосферах существуют (интегрируемые) комплексные структуры пара-комплексные структуры.

Ключевые слова: алгебра Кэли, расщепляемая алгебра Кэли, группа G_2 , сплит-октонионы, векторное произведение, почти комплексная структура, почти пара-комплексная структура, шестимерные псевдоримановы сферы.

1. Введение

Почти комплексные структуры на обычной шестимерной сфере S^6 изучаются давно и активно, (см., например, библиографию и исторический обзор по этой теме в статьях [1 и 2]). В 1958 г. LeBrun показал, что ортогональные почти комплексные структуры J на S^6 не интегрируемы, а в 1999 г. Bog и Hernandez-Lamonedá показали, что неинтегрируемыми будут почти комплексные структуры J , ортогональные не только относительно стандартной метрики g_0 , но и для метрик, близких к стандартной. Однако вопрос о существовании на S^6 интегрируемых почти комплексных структур не решен до сих пор. Среди ортогональных почти комплексных структур J на (S^6, g_0) особое место занимает почти комплексная структура Кэли J_0 , которая получается при помощи векторного произведения в объемлющем пространстве $\mathbf{R}^7$ чисто мнимых октав Кэли. Структура Кэли J_0 является инвариантной относительно действия компактной особой группы G_2 , при этом $S^6 \cong G_2 / SU(3)$. В работе [3] для структуры Кэли J_0 на S^6 получены аналитические выражения фундаментальной формы и ее внешнего дифференциала через калибровки пространства $\mathbf{R}^7$, найден тензор Нейенхейса через тройное векторное произведение и показано, что фундаментальная 2-форма ω является собственной для оператора Лапласа. Классификация инвариантных почти комплексных структур на однородных многообразиях размерности 6 с полупростой группой изотропии представлена в работе [4].

Как известно [5], существует расщепляемая алгебра Кэли $\mathbf{Ca}'$, которая получается из кватернионов процедурой удвоения Кэли – Диксона с использованием «мнимого» числа e , такого, что $e^2 = +1$. Алгебра Кэли $\mathbf{Ca}'$ имеет псевдоевклидово скалярное произведение сигнатуры (4,4), определенное квадратичной формой $|\overline{x\bar{x}}|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2$. Группой автоморфизмов алгебры $\mathbf{Ca}'$

является некомпактная особая группа G_2^* . Пространство чисто мнимых сплит-октонионов наследует квадратичную форму g сигнатуры (3,4) и является поэтому псевдоевклидовым пространством $\mathbf{R}^{3,4}$. Существуют два типа сфер в пространстве $\mathbf{R}^{3,4}$: действительного и мнимого радиуса. Псевдосфера $S^{2,4}$ действительного радиуса является однородным псевдоримановым многообразием $S^{2,4} \cong G_2^* / SU(1, 2)$ сигнатуры (2,4). Псевдосфера $S^{3,3}(i)$ мнимого радиуса является однородным псевдоримановым многообразием $S^{3,3} \cong G_2^* / SL(3, \mathbf{R})$ сигнатуры (3,3).

Умножение в алгебре $\mathbf{Ca}'$ определяет в пространстве $\mathbf{R}^{3,4}$ чисто мнимых октав векторное произведение, инвариантное относительно G_2^* . Это позволяет определить на сфере $S^{2,4} \subset \mathbf{R}^{3,4}$ ортогональную почти комплексную структуру Кэли J через умножение касательных векторов на вектор нормали.

В данной работе показано, что такая структура не интегрируема и вычислен ее тензор Нейенхайса через тройное векторное произведение. Найдено выражение фундаментальной 2-формы ω почти эрмитовой структуры на $S^{2,4}$ и показано, что 2-форма ω является собственной для оператора Лапласа. В отличие от обычной римановой сферы S^6 , на $S^{2,4}$ существуют интегрируемые почти комплексные структуры.

На сфере $S^{3,3}(i) \subset \mathbf{R}^{3,4}$ мнимого радиуса векторное произведение в $\mathbf{R}^{3,4}$ определяет почти пара-комплексную структуру P . Показано, что она не интегрируема, вычислен тензор Нейенхайса через тройное векторное произведение. Найдено выражение фундаментальной 2-формы ω на $S^{3,3}(i)$ и показано, что ω является собственной 2-формой оператора Лапласа. В отличие от обычной римановой сферы S^6 , на $S^{3,3}(i)$ существуют интегрируемые почти пара-комплексные структуры, которые легко строятся с использованием стереографической проекции.

2. Предварительные сведения

2.1. Алгебры Кэли

Пусть $\mathbf{H}$ – алгебра кватернионов $w = x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$. Алгебра $\mathbf{Ca}$ чисел Кэли получается процедурой удвоения Кэли – Диксона. Для этого вводится еще одна мнимая единица e и образуются числа Кэли в виде $x = a + be$, где a и b – кватернионы. Умножение таких чисел определяется по формуле $xy = (a + be)(c + de) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})e$. Группой автоморфизмов алгебры Кэли $\mathbf{Ca}$ является простая особая компактная группа G_2 .

Известен другой вариант процедуры удвоения Кэли – Диксона. В этом случае дополнительная «единица» e обладает свойством $e^2 = +1$. Тогда мы получаем так называемые сплит-октонионы (split-octonions) в виде $x = a + be$, где a и b – кватернионы. Умножение таких чисел определяется по формуле

$$xy = (a + be)(c + de) = (ac + \bar{d}b) + (da + b\bar{c})e.$$

В результате получается неассоциативная алгебра $\mathbf{Ca}'$, которая называется расщепляемой (split) алгеброй Кэли. В дальнейшем удобно ввести обозначения: $e_4 = e$, $e_5 = e_1 e$, $e_6 = e_2 e$, $e_7 = e_3 e$. Отметим, что $e_i^2 = -1$ при $i = 1, 2, 3$ и $e_j^2 = +1$ при $j = 4, 5, 6, 7$. Каждое сплит-число Кэли записывается в виде $x = x^0 + x^1 e_1 + \dots + x^7 e_7$,

где $x_\alpha \in \mathbf{R}$, а числа $e_1, e_2, \dots, e_7$ – мнимые единицы. Имеют место следующие правила их перемножения (первый сомножитель в столбце слева, а второй – в строке сверху):

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	+1	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	e_1	+1	e_3	$-e_2$
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	e_2	$-e_3$	+1	e_1
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	e_3	e_2	$-e_1$	+1

Напомним основные свойства алгебры $\mathbf{Ca}'$, подробнее об этом см. [5]. Сопряжение сплит-октонионов задается обычным образом, $\bar{x} = x_0 - x_1e_1 - \dots - x_7e_7$, и обладает свойством $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$. Алгебра Кэли $\mathbf{Ca}'$ имеет квадратичную форму $N(x) = x\bar{x} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2$ и соответствующее псевдоевклидово скалярное произведение $\langle x, y \rangle = (x\bar{y} + y\bar{x})/2$ сигнатуры (4,4). Поэтому алгебру $\mathbf{Ca}'$ мы будем часто рассматривать как псевдоевклидово пространство $\mathbf{R}^{4,4}$. Алгебра $\mathbf{Ca}'$ является композиционной [5], поскольку выполняется равенство $N(xy) = N(x)N(y)$.

Алгебра $\mathbf{Ca}'$ неассоциативна, т.е. $(xy)z \neq x(yz)$. Ассоциатором называется выражение $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$. Расщепленная алгебра $\mathbf{Ca}'$ является альтернативной, т.е. выполняются свойства

- $(xx)y = x(xy)$, $x(yx) = (xy)x$, $\forall x, y \in \mathbf{Ca}'$.

Это название такие алгебры получили потому, что ассоциатор кососимметричен (альтернативен) по всем аргументам. В частности, свойство альтернативности записывается через ассоциатор следующим образом: $[x, x, y] = 0$, $[x, y, y] = 0$. Отметим еще ряд свойств алгебры $\mathbf{Ca}'$:

- $x(yx) = (xy)x$;
- $(x\bar{x})y = x(\bar{x}y)$, $x(\bar{y}y) = (x\bar{y})y$, т.е. $[x, \bar{x}, y] = 0$ и $[x, \bar{y}, y] = 0$;
- $(xx)y = xx(yx)$, т.е. $[xx, y, x] = 0$;
- $((xy)z)y = x(yzy)$, $(xyx)z = x(y(xz))$, $(xy)(zx) = x(yz)x$.

2.2. Группа G_2^*

Комплексная исключительная простая группа Ли G_2 имеет две вещественных формы. Одна из них, компактная, обозначается символами G_2^c или G_2 и хорошо известна [6]. Вторая, некомпактная, вещественная форма обозначается G_2^* , ее описание можно найти в [7]. Эта группа G_2^* может быть определена как группа автоморфизмов расщепляемой алгебры $\mathbf{Ca}'$. Поэтому $G_2^* \subset SO(4,3)$. Группу G_2^* можно также понимать, как стабилизатор векторного произведения на семимерном псевдоевклидовом пространстве V сигнатуры (3,4). Выберем в псевдоевклидовом пространстве V базис $(e_1, e_2, \dots, e_7)$, в котором квадратичная форма принимает вид $g = -2(e^1 \cdot e^5 + e^2 \cdot e^6 + e^3 \cdot e^7) - (e^4)^2$. Тогда группа G_2^* является стабилизатором следующей 3-формы на V : $\Omega_0 = \sqrt{2}(e^{123} - e^{567}) + e^4 \wedge (e^{15} + e^{26} + e^{37})$.

2.3. Векторное произведение

Векторным (r -местным) произведением на вещественном n -мерном векторном пространстве V с невырожденной билинейной формой $\langle x, y \rangle$ называется [8] полилинейное отображение $P: V^r \rightarrow V$ ($1 \leq r \leq n$), которое обладает свойствами

$$\langle P(x_1, \dots, x_r), x_i \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq r \quad \text{и} \quad \|P(x_1, \dots, x_r)\|^2 = \det(\langle x_i, x_j \rangle).$$

Одноместные векторные произведения – это ортогональные комплексные структуры J на четномерном векторном пространстве V . Двухместное векторное произведение существует только в размерности 3 и 7. На семимерном векторном пространстве V они описываются следующим образом [8]. Пусть W – композиционная алгебра и V – ортогональное дополнение к единице e в алгебре W . Определим $P: V \times V \rightarrow V$ формулой $P(x, y) = xy + \langle x, y \rangle e$. Тогда P является двухместным векторным произведением и, наоборот, каждое такое векторное произведение возникает таким образом. Если $\dim W = 8$, мы получаем 2-местное векторное произведение на 7-мерном пространстве V . Билинейная форма, ассоциированная с таким векторным произведением, имеет сигнатуру $(0, 7)$ или $(4, 3)$. Группа автоморфизмов есть либо G_2 (компактная форма), либо G_2^* (некомпактная форма). Любые два двуместных векторных произведения являются изоморфными.

Трехместные векторные произведения. Пусть V – композиционная алгебра и $\langle x, y \rangle$ – соответствующая билинейная форма. Определим $P_1, P_2: V \times V \rightarrow V$ формулами [8]:

$$P_1(x, y, z) = \varepsilon(-x(\bar{y}z) + \langle x, y \rangle z + \langle y, z \rangle x - \langle z, x \rangle y),$$

$$P_2(x, y, z) = \varepsilon(-(x\bar{y})z + \langle x, y \rangle z + \langle y, z \rangle x - \langle z, x \rangle y),$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Тогда P_1 и P_2 представляют собой трехместные векторные произведения на V относительно билинейной формы $\varepsilon \langle x, y \rangle$ и обратно каждое трехместное векторное произведение возникает таким образом.

Алгебра Кэли $\mathbf{Ca}'$ является композиционной с билинейной формой сигнатуры $(4, 4)$, поэтому на ней определены трехместные векторные произведения P_1 и P_2 . Операция сопряжения определяет антиизоморфизм этих векторных произведений. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать на $\mathbf{Ca}'$ только второе векторное произведение P :

$$P(x, y, z) = -(x\bar{y})z + \langle x, y \rangle z + \langle y, z \rangle x - \langle z, x \rangle y.$$

Отметим, что если векторы x, y, z взаимно ортогональны, то $P(x, y, z) = -(x\bar{y})z$.

2.4. Псевдосферы в пространстве $\mathbf{R}^{3,4}$

Рассмотрим семимерное пространство $\mathbf{R}^7$ чисто мнимых элементов $X = x_1 e_1 + \dots + x_7 e_7$ расщепляемой алгебры $\mathbf{Ca}'$. Оно наследует квадратичную форму g сигнатуры $(3, 4)$ и является поэтому псевдоевклидовым пространством $\mathbf{R}^{3,4}$. В пространстве $\mathbf{R}^{3,4}$ можно определить два вида (псевдо)сфер:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 = r^2$$

и

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 = -r^2.$$

Первая псевдосфера $S^{2,4}(r)$ имеет действительный радиус $r > 0$, она пересекает оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 . Касательные плоскости являются псевдоевклидовыми сигнатуры (2,4). Скалярные квадраты векторов нормалей к $S^{2,4}(r)$ положительны, а их квадраты в алгебре Кэли $\mathbf{Ca}'$ – отрицательны. Группа G_2^* действует транзитивно и изометрично на $S^{2,4}(r)$, а ее группа изотропии совпадает с $SU(1,2)$. Поэтому сфера $S^{2,4}(r)$ является однородным пространством: $S^{2,4} \cong G_2^* / SU(1,2)$. Отметим также, что $S^{2,4} \cong SO(3,4) / SO(2,4)$.

Вторая псевдосфера $S^{3,3}(ir)$ мнимого радиуса ir , она пересекает оси $Ox_4, \dots, Ox_7$. Касательные плоскости являются псевдоевклидовыми сигнатуры (3,3). Скалярные квадраты векторов нормалей к $S^{3,3}(ir)$ отрицательны, а их квадраты в алгебре Кэли $\mathbf{Ca}'$ – положительны. Группа G_2^* действует транзитивно и изометрично на $S^{3,3}(ir)$, а ее группа изотропии совпадает с $SL(3, \mathbf{R})$. Поэтому сфера $S^{3,3}(ir)$ является однородным пространством: $S^{3,3} \cong G_2^* / SL(3, \mathbf{R})$.

2.5. Почти пара-комплексные структуры

Почти пара-комплексной структурой на $2n$ -мерном многообразии M называется [9] поле P эндоморфизмов касательного расслоения TM , таких, что $P^2 = Id$ и ранги собственных распределений $T^\pm M := \ker(Id \mp P)$ равны. Почти пара-комплексная структура P называется *интегрируемой*, если распределения $T^\pm M$ инволютивны. В этом случае P называется пара-комплексной структурой. Тензор Нейенхайса N_P почти пара-комплексной структуры P определяется равенством

$$N_P(X, Y) = 2([X, Y] + [PX, PY] - P[X, Y] - P[PX, PY])$$

для всех векторных полей X, Y на M . Как и в комплексном случае, пара-комплексная структура P интегрируема тогда и только тогда, когда $N_P = 0$. В работе [9] представлен обзор теории и подробно рассмотрены инвариантные пара-комплексные и пара-кэлэровы структуры на группах Ли.

3. Векторное произведение в $\mathbf{R}^{3,4} = \text{Im}(\mathbf{Ca}')$

Пусть $\mathbf{Ca}'$ – расщепляемая алгебра Кэли. Как обычно, числа вида $x = x^0$ будем называть действительными, а числа $X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^7 e_7$ – чисто мнимыми. Будем записывать сплит-октонионы в виде суммы $x = x^0 + X$. Пространство $\mathbf{R}^{3,4} = \text{Im}(\mathbf{Ca}')$ мнимых октав наследует из $\mathbf{Ca}'$ скалярное произведение $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ сигнатуры (3,4). Пусть $x = X, y = Y$ – два чисто мнимых сплит-октониона. Определим векторное произведение элементов $X, Y \in \text{Im}(\mathbf{Ca}')$ как мнимую часть их произведения в алгебре $\mathbf{Ca}'$:

$$X \times Y = \text{Im}(XY).$$

Легко видеть, что

$$X \times Y = XY + g(X, Y).$$

Также легко видеть, что данное векторное произведение $X \times Y$ билинейно, кососимметрично и ортогонально каждому из сомножителей. Умножение в алгебре $\mathbf{Ca}'$ выражается через векторное произведение следующим образом: для $x = x^0 + X$ и $y = y^0 + Y$ имеем $xy = (x^0 y^0 - \langle X, Y \rangle) + x^0 Y + y^0 X + X \times Y$. Для любых векторов $X, Y \in \text{Im}(\mathbf{Ca}')$ имеет место следующее равенство:

$$X \times (X \times Y) = -g(X, X)Y + g(X, Y)X.$$

В частности, если $\mathbf{n}$ – вектор единичной длины, то для любого $Y \in \mathbf{R}^{3,4}$ выполняется равенство

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times Y) = -Y + g(\mathbf{n}, Y)\mathbf{n}.$$

Смешанное произведение определяется равенством $(XYZ) = g(X, Y \times Z) = g(X \times Y, Z)$ и представляет собой кососимметричную 3-форму Ω на $\mathbf{R}^{3,4}$,

$$\Omega(X, Y, Z) = g(X \times Y, Z).$$

В обозначениях $\omega^{pqr} = dx^p \wedge dx^q \wedge dx^r$ 3-форма Ω имеет следующее выражение:

$$\Omega = \omega^{123} - \omega^{145} + \omega^{167} - \omega^{246} - \omega^{257} - \omega^{347} + \omega^{356}.$$

Поскольку на $\mathbf{R}^{3,4}$ имеется псевдориманова метрика и соответствующая форма объема $\mu = \sqrt{|\det(g)|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^7 = \omega^{1234567}$, то определен оператор Ходжа $*$: $\Lambda^k(\mathbf{R}^{3,4}) \rightarrow \Lambda^{7-k}(\mathbf{R}^{3,4})$. Поэтому на пространстве $\mathbf{R}^{3,4} = \text{Im}(\mathbf{Ca}')$ определена внешняя 4-форма $\Psi = *\Omega$,

$$\Psi = \omega^{4567} - \omega^{2367} + \omega^{2345} - \omega^{1357} - \omega^{1346} - \omega^{1256} + \omega^{1247}.$$

Очевидно, что $\Omega = *\Psi$. Вычисляя значения Ψ на векторах базиса $e_1, \dots, e_7$, легко видеть, что имеет место следующее выражение на векторах $X, Y, Z, W \in \mathbf{R}^{3,4}$:

$$\Psi(X, Y, Z, W) = g(X, (Y \times Z) \times W) = -g(X, Y \times (Z \times W)).$$

Лемма 1. На пространстве $\mathbf{R}^{3,4} = \text{Im}(\mathbf{Ca}')$ мнимых октав ассоциатор $[X, Y, Z]$ может быть выражен следующей формулой:

$$[X, Y, Z] = 2(X \times Y) \times Z + 2g(Y, Z)X - 2g(Z, X)Y.$$

Доказательство. Используя кососимметричность 3-формы Ω и ассоциатора $[X, Y, Z]$, а также формулу $XY = X \times Y - g(X, Y)$, получаем

$$\begin{aligned} [X, Y, Z] &= (XY)Z - X(YZ) = (X \times Y) \times Z - X \times (Y \times Z) - g(X \times Y, Z) + g(X, Y \times Z) - \\ &- g(X, Y)Z + g(Y, Z)X = (X \times Y) \times Z - X \times (Y \times Z) - g(X, Y)Z + X \cdot g(Y, Z). \end{aligned}$$

Теперь используем это выражение в следующей сумме и получаем необходимую формулу:

$$[X, Y, Z] = [X, Y, Z] + [Z, X, Y] + [X, Z, Y] = 2(X \times Y) \times Z + 2g(Y, Z)X - 2g(Z, X)Y.$$

Следствие. Имеет место следующая формула:

$$(X \times Y) \times Z - g(X, Z)Y + g(Y, Z)X = -X \times (Y \times Z) + g(X, Z)Y - g(X, Y)Z.$$

Доказательство. Следует из равенства $[X, Y, Z] = -[Z, Y, X]$.

Нам потребуются также свойства векторного произведения, которые сразу следуют из предыдущего равенства:

- Если $\mathbf{n}, Y, Z \in \mathbf{R}^{3,4}$ и если $Y, Z \perp \mathbf{n}$, то

$$(\mathbf{n} \times Y) \times Z = -\mathbf{n} \times (Y \times Z) - g(Y, Z)\mathbf{n}.$$

- Если $\mathbf{n}$ – вектор единичной длины, то для любых $Y, Z \in \mathbf{R}^{3,4}$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times Z) = -Z + g(\mathbf{n}, Z)\mathbf{n}, \quad g(\mathbf{n} \times Y, \mathbf{n} \times Z) = g(Y, Z) - g(Y, \mathbf{n})g(Z, \mathbf{n}).$$

- Если же $g(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1$, то для любых $Y, Z \in \mathbf{R}^{3,4}$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times Z) = Z + g(\mathbf{n}, Z)\mathbf{n}, \quad g(\mathbf{n} \times Y, \mathbf{n} \times Z) = -g(Y, Z) - g(Y, \mathbf{n})g(Z, \mathbf{n}).$$

4. Почти комплексная структура на $S^{2,4}(r)$

Рассмотрим сферу $S^{2,4} = S^{2,4}(1)$ единичного радиуса в пространстве $\mathbf{R}^{3,4} = \text{Im}(\mathbf{Ca}')$ мнимых сплит-октав Кэли. Касательные плоскости $T_x S^{2,4}$ к сфере являются псевдоевклидовыми сигнатуры $(2,4)$. Скалярные квадраты векторов нормалей $\mathbf{n}(x) = x$ к сфере $S^{2,4}$ положительны. Рассмотрим векторное умножение касательных векторов $Y \in T_x S^{2,4}$ на вектор нормали $\mathbf{n}(x) = x$. Легко видеть, что эта операция переводит касательное пространство в себя: если $Y \in T_x S^{2,4}$, т.е., $g(Y, \mathbf{n}) = 0$, то

$$g(\mathbf{n} \times Y, \mathbf{n}) = 0, \text{ т.е. } \mathbf{n} \times Y \in T_x S^{2,4}.$$

Из свойства векторного произведения следует

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times Y) = -g(\mathbf{n}, \mathbf{n})Y + g(\mathbf{n}, Y)\mathbf{n} = -Y.$$

Это означает, что оператор $J_x(Y) = \mathbf{n} \times Y$ левого умножения касательных векторов в точке $x \in S^{2,4}$ на вектор нормали $\mathbf{n}(x) = x$ к сфере $S^{2,4}$ определяет на $T_x S^{2,4}$ комплексную структуру. Поскольку такая операция определена в каждой точке $x \in S^{2,4}$, то мы получаем, что единичная сфера $S^{2,4}$ имеет естественную почти комплексную структуру J , которую мы будем называть *структурой Кэли*:

$$J_x: T_x S^{2,4} \rightarrow T_x S^{2,4}, \quad J_x(Y) = \mathbf{n}(x) \times Y.$$

Из равенства $g(\mathbf{n} \times X, \mathbf{n} \times Y) = g(X, Y) - g(X, \mathbf{n})g(Y, \mathbf{n})$ сразу следует ее ортогональность.

Пусть $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ – фундаментальная 2-форма, соответствующая J . Поскольку $g(X \times Y, Z) = \Omega(X, Y, Z)$, то легко видеть, что

$$\omega(X, Y) = g(\mathbf{n} \times X, Y) = \Omega(\mathbf{n}, X, Y) = \Omega(X, Y, \mathbf{n}) = g(X \times Y, \mathbf{n}) = g(\mathbf{n}, X \times Y).$$

Лемма 2. Форма Ω при ее ограничении на сферу обладает свойством

$$\Omega(JX, Y, Z) = \Omega(X, JY, Z) = \Omega(X, Y, JZ).$$

Доказательство. Используем формулу $(\mathbf{n} \times Y) \times Z = -\mathbf{n} \times (Y \times Z) - g(Y, Z)\mathbf{n}$ и равенство $g(X, Y \times Z) = g(X \times Y, Z)$:

$$\begin{aligned} \Omega(Z, JX, Y) &= g(Z, JX \times Y) = g(Z, (\mathbf{n} \times X) \times Y) = g(Z, -\mathbf{n} \times (X \times Y) - g(X, Y)\mathbf{n}) = g(Z, - \\ &\mathbf{n} \times (X \times Y)) = -g(Z \times \mathbf{n}, X \times Y) = g(\mathbf{n} \times Z, X \times Y) = g(JZ, X \times Y) = \Omega(JZ, X, Y). \end{aligned}$$

Лемма 3. Для любых $X, Y, Z \in T_x S^{2,4}$ имеет место равенство

$$i_n \Psi(X, Y, Z) = -\Omega(JX, Y, Z),$$

где i_n – внутреннее произведение с вектором нормали $\mathbf{n}(x)$.

Доказательство. $i_n \Psi(X, Y, Z) = -g(\mathbf{n}, X \times (Y \times Z)) = -g(\mathbf{n} \times X, Y \times Z) = -\Omega(JX, Y, Z)$.

Пусть $e_1, \dots, e_6$ – ортонормированный базис пространства $T_x S^{2,4}$, в котором e_1 и e_2 являются пространственноподобными, а остальные – времениподобны. Тогда $e_0 = \mathbf{n}(x)$, $e_1, \dots, e_6$ – ортонормированный базис пространства $\mathbf{R}^{3,4} = \mathbf{R}x \oplus T_x S^{2,4}$. Пусть $\mu = e^0 \wedge e^1 \wedge \dots \wedge e^6$ – элемент объема $\mathbf{R}^{3,4}$ и $\mu_S = e^1 \wedge \dots \wedge e^6$ – элемент объема сферы $S^{2,4}$ (в точке x). Очевидно, $\mu_S = i_n \mu$, где i_n – внутреннее произведение с вектором нормали $\mathbf{n}(x)$. Пусть $*_S$ и $*_R$ – операторы Ходжа на сфере и на $\mathbf{R}^{3,4}$ соответственно. Символом $\theta|_S$ будем обозначать ограничение дифференциальной формы θ в $\mathbf{R}^{3,4}$ на подмногообразии $S^{2,4}$, а символом $\theta|_n$ – нормальную компоненту формы θ вдоль $S^{2,4}$, то есть, $\theta|_n = \mathbf{n} \wedge \tilde{\theta}$.

Лемма 4. Пусть θ – k -форма на $\mathbf{R}^{3,4}$ и $\theta|_S$ – ее ограничение на касательное пространство $T_x S^{2,4} \subset \mathbf{R}^{3,4}$. Тогда для операторов Ходжа $*_S$ и $*_R$ на сфере и на $\mathbf{R}^{3,4}$ соответственно выполняются равенства

$$*_R \theta = (-1)^k \mathbf{n} \wedge *_S \theta, \quad *_S(\theta|_S) = (-1)^k i_n(*_R \theta).$$

Доказательство. Форму θ можно записать в виде $\theta = \theta|_S + \mathbf{n} \wedge \tilde{\theta}$, где $\tilde{\theta}$ – форма степени $k-1$, которая выражается через $e^1, \dots, e^6$. Очевидно, что $i_n(*_R(\mathbf{n} \wedge \tilde{\theta})) = 0$. Поэтому достаточно доказать лемму для $\theta = \theta|_S$. Для любой k -формы v на $S^{2,4}$ имеем $v \wedge *_S \theta = g(v, \theta)\mu_S$. Из этого равенства, с учетом того, что $\mu = \mathbf{n} \wedge \mu_S$, получаем $\mathbf{n} \wedge v \wedge *_S \theta = g(v, \theta)\mathbf{n} \wedge \mu_S = g(v, \theta)\mu$ или, что то же самое, $(-1)^k v \wedge \mathbf{n} \wedge *_S \theta = g(v, \theta)\mu = v \wedge *_R \theta$. Последнее равенство верно не только для форм v на $T_x S^{2,4}$, но и для любых k -форм $v = v|_S + \mathbf{n} \wedge \tilde{v}$ на $\mathbf{R}^7$. На второй компоненте $\mathbf{n} \wedge \tilde{v}$ обе части равенства обращаются в нуль. Поэтому мы получаем равенство $(-1)^k \mathbf{n} \wedge *_S \theta = *_R \theta$. Применяя внутреннее произведение i_n к обеим частям последнего равенства, получаем утверждение леммы.

Теорема 1. Фундаментальная форма ω почти комплексной структуры Кэли J на $S^{2,4}$ и ее внешний дифференциал $d\omega$ обладают свойствами:

- (1) $\omega = i_n \Omega, \quad d\omega = 3\Omega|_S,$
- (2) $*_S \omega = \Psi|_S, \quad *_S d\omega = -3i_n \Psi,$
- (3) $d\omega(X, Y, Z) = 3i_n \Psi(JX, Y, Z),$
- (4) $d\omega(JX, Y, Z) = d\omega(X, JY, Z) = d\omega(X, Y, JZ),$
- (5) $d\omega(X, JY, JZ) = -d\omega(X, Y, Z),$
- (6) $\omega \wedge d\omega = 0.$

Доказательство. Первое равенство вытекает из определения ω и Ω : $i_n \Omega(X, Y) = g(\mathbf{n}, X \times Y) = \omega(X, Y)$ для любых X, Y , касательных к сфере. Во втором равенстве мы считаем, что векторное поле $\mathbf{n}(x) = x$ определено на всем $\mathbf{R}^7$. Тогда, поскольку 3-форма Ω с постоянными коэффициентами в $\mathbf{R}^7$, является замкнутой, поэтому $di_n \Omega = L_n \Omega = 3\Omega$, где $L_n = d i_n + i_n d$ – производная Ли вдоль векторного поля $\mathbf{n}(x) = x$ на $\mathbf{R}^7$. Следовательно, $d\omega = di_n \Omega = L_n \Omega = 3\Omega$. Вторая пара равенств получается из лемм 2 и 3 и из первых свойств, $*_S \omega = *_S(i_n \Omega)|_S = i_n *_R(i_n \Omega)$. Подробнее, пусть $\mathbf{e}_n$ – оператор внешнего умножения на 1-форму, дуальную векторному полю $\mathbf{n}(x) = x$. Как известно, на k -формах ν операторы i_n и $\mathbf{e}_n$ связаны соотношением $i_n *_R = (-1)^k *_R \mathbf{e}_n$. Поэтому

$$*_S \omega = i_n *_R(i_n \Omega) = *_R \mathbf{e}_n(i_n \Omega) = *_R(\Omega|_n) = \Psi|_S.$$

Далее, $*_S d\omega = 3*_S \Omega|_S = -3i_n *_R \Omega = -3i_n \Psi$. Равенство (3) вытекает из (1) и из леммы 2. Свойства (4), (5) следуют из (1) и леммы 1. Последнее равенство следует из (1) и из $i_n(\Omega \wedge \Omega) = 0$.

Замечание. Фундаментальная 2-форма ω на $S^{2,4}$ является козамкнутой $\delta\omega = 0$. Действительно, 4-форма Ψ на $\mathbf{R}^7$ имеет постоянные коэффициенты, поэтому $d\Psi = 0$. Хорошо известно, что на k -формах кодифференциал δ имеет выражение: $\delta = (-1)^k *^{-1} d * = (-1)^{kn+n+1+\eta} * d *$, где η – число «минусов» метрического тензора g . В нашем случае $\eta = 4$ и $n = 6$. Следовательно, $\delta = -* d *$. Поэтому

$$\delta\omega = -* d *\omega = -* d (\Psi|_S) = -(d\Psi)|_S = 0.$$

В работе [10] Хитчин определил понятие невырожденности (стабильности) для 3-форм Φ на шестимерном вещественном векторном пространстве V и построил для 3-формы Φ линейный оператор K_Φ , квадрат которого пропорционален тождественному оператору: $K_\Phi^2 = \lambda(\Phi)Id$. Если $\lambda(\Phi) < 0$, то K_Φ определяет на V комплексную структуру, а если $\lambda(\Phi) > 0$, то пара-комплексную структуру. Пусть μ

– форма объема на V . Оператор K_Φ определяется следующей формулой:
 $\iota_{K_\Phi(X)}\mu = \iota_X\Phi \wedge \Phi$.

Для фундаментальной формы ω почти комплексной структуры Кэли на $S^{2,4}$ 3-форма $d\omega$ имеет вид $d\omega = 3\Omega|_S$, где $\Omega = \omega^{123} - \omega^{145} + \omega^{167} - \omega^{246} - \omega^{257} - \omega^{347} + \omega^{356}$. Найдем оператор Хитчина [5] $K_{d\omega}$ для 3-формы $d\omega$ на сфере $S^{2,4}$. Рассмотрим сначала точку $x = e_1 \in S^{2,4}$. Касательное пространство $T_x S^{2,4}$ имеет ортонормированный базис векторов $e_2, \dots, e_7$ и форму объема $\mu = \omega^{234567}$. 2-форма $d\omega$ на $T_x S^{2,4}$ имеет вид

$$d\omega_x = 3(-\omega^{246} - \omega^{257} - \omega^{347} + \omega^{356}).$$

2-форма $d\omega_x$ является инвариантной при действии на $T_x S^{2,4}$ подгруппы изотропии $SU(1,2) \subset G_2^*$.

Поэтому достаточно вычислить $K_{d\omega}$ на одном векторе, например $K_{d\omega}(e_2)$:

$$\begin{aligned} \iota_{e_2} d\omega_x \wedge d\omega_x &= 9(-\omega^{46} - \omega^{57})(-\omega^{246} - \omega^{257} - \omega^{347} + \omega^{356}) = \\ &= 9(\omega^{46} \wedge \omega^{257} + \omega^{57} \wedge \omega^{246}) = -18\omega^{24567} = 18\iota_{e_3}\omega^{234567} = 18\iota_{e_3}\mu. \end{aligned}$$

Поэтому $K_{d\omega}(e_2) = 18e_3 = 18e_1 \times e_2 = 18J(e_2)$. Отсюда следует, что $I_{d\omega} = J_x$. Из инвариантности почти комплексной структуры Кэли J и формы Ω относительно группы G_2^* , действующей транзитивно на $S^{2,4}$, мы получаем, что равенство $I_{d\omega} = J_x$ имеет место во всех точках псевдосферы $S^{2,4}$.

Вывод. 3-форма $d\omega$ на $S^{2,4}$ является всюду невырожденной и определяет почти комплексную структуру $I_{d\omega}$ на $S^{2,4}$, которая совпадает с почти комплексной структурой Кэли J .

Вычислим тензор Нейенхейса $N(X,Y) = 2([JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY])$ почти комплексной структуры J [11]. Для этого найдем ковариантную производную тензора J . Поскольку $n(x) = x$, то для любого касательного вектора $X \in T_x S^{2,4}$ имеем $Dn_x(X) = X$. Будем считать, что касательные векторы $X, Y \in T_x S^{2,4}$ продолжены на пространство $\mathbf{R}^7$ как постоянные векторные поля и $n(x) = x$ также определено на $\mathbf{R}^7 \setminus \{0\}$. Тогда имеют место равенства $(\nabla_X J)Y = \text{pr}_x(D_X(JY)) = \text{pr}_x(D_X(n \times Y)) = \text{pr}_x(X \times Y)$, где pr – ортогональная в $\mathbf{R}^{3,4}$ проекция на касательное пространство $T_x S^{2,4}$, $\text{pr}_x(Z) = Z - g(Z, n)n$. Получаем

$$(7) \quad (\nabla_X J)Y = X \times Y - g(n, X \times Y)n = X \times Y - \omega(X, Y)n.$$

Замечание. Из полученного выражения $\nabla_X J$ сразу вытекает кососимметричность оператора $\nabla_X J$ и, в частности, свойство $\nabla_X(J)X = 0$ приближенной псевдокэлеровости многообразия $S^{2,4}$ и равенство $\nabla_{JX}J = -J\nabla_X J$.

Теорема 2. Тензор Нейенхейса $N(X,Y)$ почти комплексной структуры Кэли J на $S^{2,4}$ имеет вид

$$N(X,Y) = -8n \times (X \times Y).$$

Доказательство. В книге [11] приведена формула

$$4g((\nabla_Z J)X, Y) = 6d\Phi(Z, JX, JY) - 6d\Phi(Z, X, Y) + g(N(X, Y), JZ),$$

где $\Phi(X, Y) = g(X, JY)$ – фундаментальная форма. В нашем случае фундаментальная форма $\omega(X, Y) = g(JX, Y) = -\Phi(X, Y)$. Кроме того, в [6] берется другое определение внешнего умножения. Поэтому формула для внешнего дифференциала тоже меняется. Внешний дифференциал d в [11] берется с коэффициентом $1/3$: $d\omega = d\omega/3$. Учитывая это, имеем в нашем случае $4g((\nabla_Z J)X, Y) = -2d\omega(Z, JX, JY) + 2d\omega(Z, X, Y) + g(N(X, Y), JZ)$, поэтому $g(N(X, Y), JZ) = 4g((\nabla_Z J)X, Y) + 2d\omega(Z, JX, JY) - 2d\omega(Z, X, Y)$. Тогда, учитывая, что $d\omega(X, Y, Z) = 3g(X, Y \times Z)$, имеем

$$\begin{aligned}
g(N(X,Y),JZ) &= 4g((\nabla_Z J)X,Y) + 2d\omega(Z,JX,JY) - 2d\omega(Z,X,Y) = \\
&= 4g(Z \times X - 2\omega(Z,X)n,Y) - 2d\omega(X,Y,Z) - 2d\omega(Z,X,Y) = \\
&= 4g(Z \times X,Y) - 12g(X,Y \times Z) = 4g(Z,X \times Y) - 12g(X \times Y,Z) = \\
&= -8g(n \times (X \times Y), n \times Z) = -8g(n \times (X \times Y), JZ).
\end{aligned}$$

Теорема 3. Фундаментальная 2-форма ω почти комплексной структуры Кэли на $S^{2,4}$ является собственной для оператора Лапласа: $\Delta\omega = 12\omega$.

Доказательство. Лапласиан, действующий на дифференциальных формах, определяется формулой $\Delta = d\delta + \delta d$, где δ – кодифференциал. Хорошо известно, что на k -формах кодифференциал δ имеет выражение $\delta = (-1)^k *^{-1} d * = (-1)^{kn+n+1+\eta} * d *$, где η – число «минусов» метрического тензора g . В нашем случае $\eta = 4$ и $n = 6$. Следовательно, $\delta = -*d*$. Для формы ω известно, что $\delta\omega = 0$. Поэтому достаточно вычислить $\delta d\omega$. Будем обозначать внешний дифференциал в пространстве $\mathbf{R}^7$ с индексом d_R . Используем свойство $*_S(\theta|_S) = (-1)^k i_n(*_R\theta)$, установленное в лемме 4, и результаты теоремы 1:

$$\begin{aligned}
\delta d\omega &= -*_S d *_S(d\omega) = -3 *_S d *_S(\Omega|_S) = -3(-1)^3 *_S d(i_n *_R \Omega) = \\
&= 3 *_S(d_R i_n(\Psi))|_S = 3 *_S(L_n \Psi)|_S = 12 *_S(\Psi|_S) = 12 i_n *_R \Psi = 12 i_n \Omega = 12\omega.
\end{aligned}$$

В этих вычислениях мы использовали производную Ли $L_n = d i_n + i_n d$ вдоль векторного поля $n(x) = x$ на $\mathbf{R}^7 \setminus \{0\}$. 4-форма Ψ с постоянными коэффициентами в $\mathbf{R}^7$ является замкнутой, поэтому $d i_n \Psi = L_n \Psi$. Кроме того, поле $n(x) = x$ задает растяжение $\mathbf{R}^7 \setminus \{0\}$, следовательно, для 4-формы Ψ с постоянными коэффициентами выполняется равенство $L_n \Psi = 4\Psi$. Теорема доказана.

Комплексная структура на $S^{2,4}(r)$. В этом пункте мы покажем, что на псевдосфере $S^{2,4}$ существуют интегрируемые комплексные структуры. Рассмотрим стереографическую проекцию $S^{2,4}$ из точки начала координат $\mathbf{R}^7$ на часть цилиндра $S^2 \times D^4$, где S^2 – стандартная единичная сфера в пространстве $\mathbf{R}^3$ с координатами (x_1, x_2, x_3) и D^4 – единичный шар в пространстве $\mathbf{R}^4$ с координатами (x_4, x_5, x_6, x_7) , $x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 < 1$. Прямая, проходящая через начало координат и точку $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)$ псевдосферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 = 1$, пересекает цилиндр $S^2 \times D^4$ в точке y с координатами

$$y_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, 7.$$

Ясно, что первые переменные (y_1, y_2, y_3) описывают двумерную сферу S^2 в $\mathbf{R}^3$. Остальные координаты меняются в единичном шаре D^4 в пространстве $\mathbf{R}^4$. Действительно, пусть $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. На псевдосфере $r^2 \geq 1$. Тогда из уравнения псевдосферы следует, что

$$\frac{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1 - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \text{ или } 0 \leq y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 + y_7^2 = 1 - \frac{1}{r^2} < 1.$$

Через каждую точку $(y_4, y_5, y_6, y_7) \in D^4$, при фиксированной точке $(y_1, y_2, y_3) \in S^2$, проходит единственная прямая, пересекающая псевдосферу в точке $x_i = r \cdot y_i$,

$i = 1, 2, \dots, 7$, при $r = 1/\sqrt{1 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2}$ и, наоборот, каждая прямая, проходящая через начало координат и точку $x \in S^{2,4}$, пересекает шар D^4 при определенных $(y_1, y_2, y_3) \in S^2$.

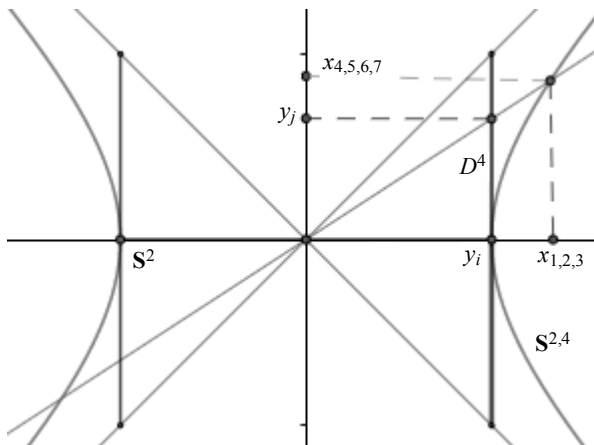


Рис. 1. Стереографическая проекция

Fig. 1. Stereographic projection

Поскольку прямое произведение $S^2 \times D^4$ допускает комплексные структуры, то диффеоморфизм стереографической проекции $f: S^{2,4} \rightarrow S^2 \times D^4$ позволяет перенести комплексные структуры с $S^2 \times D^4$ на сферу $S^{2,4}$. Отметим, что по построению $S^2 \times D^4$ является псевдоримановым сигнатуры $(2,4)$.

5. Почти пара-комплексная структура на $S^{3,3}(i)$

Результаты этой части аналогичны тем, что были получены для сферы $S^{2,4}$, однако имеются и некоторые отличия.

Рассмотрим сферу $S^{3,3} = S^{3,3}(i)$ чисто мнимого единичного радиуса в пространстве $\mathbf{R}^{3,4} = \text{Im}(\mathbf{C}a')$ мнимых сплит-октав Кэли. Касательные плоскости к сфере $T_x S^{3,3}$, $\forall x \in S^{3,3}$, являются псевдоевклидовыми сигнатуры $(3,3)$. Скалярные квадраты векторов нормалей $\mathbf{n}(x) = x$ к сфере $S^{3,3}$ отрицательны, $g(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1$.

Векторное умножение касательных векторов $Y \in T_x S^{3,3}$ на вектор нормали $\mathbf{n}(x) = x$ переводит касательное пространство в себя: если $Y \in T_x S^{3,3}$, то есть, $g(Y, \mathbf{n}) = 0$, то

$$g(\mathbf{n} \times Y, \mathbf{n}) = 0, \text{ т.е. } \mathbf{n} \times Y \in T_x S^{3,3}.$$

Из свойства векторного произведения следует, что

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times Y) = -g(\mathbf{n}, \mathbf{n})Y + g(\mathbf{n}, Y)\mathbf{n} = Y.$$

Это означает, что $(P_x)^2 = \text{Id}$. Оператор $P_x(X) = \mathbf{n} \times X$ кососимметричен, $g(\mathbf{n} \times X, Y) = -g(X, \mathbf{n} \times Y)$, но не ортогонален: $g(P_x X, P_x Y) = g(\mathbf{n} \times X, \mathbf{n} \times Y) = -g(X, Y)$, $\forall X, Y \in T_x S^{3,3}$. Оператор P_x пространственноподобные векторы переводит во времениподобные векторы. Собственные подпространства оператора P_x являются трехмерными изотропными подпространствами, касательными к $S^{3,3}$. Поэтому оператор $P_x(Y) = \mathbf{n} \times Y$ умножения касательных векторов на вектор нормали $\mathbf{n}(x) = x$ к сфере $S^{3,3}$ определяет на $T_x S^{3,3}$ пара-комплексную структуру. Такая операция определена в каждой точке $x \in S^{3,3}$, следовательно, мы получаем, что единичная псевдориманова сфера $S^{3,3}$ имеет естественную почти пара-комплексную структуру P , которую мы будем называть *почти пара-комплексной структурой Кэли*:

$$P_x: T_x S^{3,3} \rightarrow T_x S^{3,3}, \quad P_x(Y) = \mathbf{n}(x) \times Y, \quad \forall x \in S^{3,3}, \forall Y \in T_x S^{3,3}.$$

Пусть $\omega(X, Y) = g(PX, Y)$ – фундаментальная 2-форма, соответствующая P , и пусть $\Omega(X, Y, Z) = g(X \times Y, Z)$. Тогда легко видеть, что

$$\omega(X, Y) = g(n \times X, Y) = \Omega(n, X, Y) = \Omega(X, Y, n) = g(X \times Y, n) = g(n, X \times Y).$$

Напомним, что на пространстве $\mathbf{R}^{3,4} = \text{Im}(\text{Ca}')$ определена внешняя 4-форма $\Psi = *\Omega$.

Пусть $*_S$ и $*_R$ – операторы Ходжа на сфере и на $\mathbf{R}^{3,4}$ соответственно. Символом $\theta|_S$ будем обозначать ограничение дифференциальной формы θ в $\mathbf{R}^{3,4}$ на подмногообразие $S^{3,3}$, а символом $\theta|_n$ – нормальную компоненту формы θ вдоль $S^{3,3}$, то есть, $\theta|_n = n \wedge \tilde{\theta}$.

Для почти пара-комплексной структуры Кэли совершенно аналогично доказываются все результаты, установленные в разделе 3.2 для почти комплексных структур Кэли:

1. Форма Ω при ее ограничении на сферу обладает свойством

$$\Omega(PX, Y, Z) = \Omega(X, PY, Z) = \Omega(X, Y, PZ).$$

2. Для любых $X, Y, Z \in T_x S^{3,3}$ имеет место равенство

$$i_n \Psi(X, Y, Z) = -\Omega(PX, Y, Z).$$

3. Пусть θ – k -форма на $\mathbf{R}^{3,4}$ и $\theta|_S$ – ее ограничение на касательное пространство $T_x S^{3,3} \subset \mathbf{R}^{3,4}$. Тогда

$$*_R \theta = (-1)^k n \wedge *_S \theta, \quad *_S(\theta|_S) = (-1)^k i_n(*_R \theta).$$

4. Фундаментальная форма ω почти пара-комплексной структуры Кэли P на $S^{3,3}$ и ее внешний дифференциал $d\omega$ обладают свойствами:

$$\omega = i_n \Omega, \quad d\omega = 3\Omega|_S, \quad *_S \omega = \Psi|_S, \quad *_S d\omega = -3i_n \Psi, \quad \omega \wedge d\omega = 0,$$

$$d\omega(X, Y, Z) = 3i_n \Psi(PX, Y, Z), \quad d\omega(X, Y, Z) = 3g(X, Y \times Z),$$

$$d\omega(PX, Y, Z) = d\omega(X, PY, Z) = d\omega(X, Y, PZ), \quad d\omega(X, PY, PZ) = -d\omega(X, Y, Z).$$

Для фундаментальной формы ω почти пара-комплексной структуры Кэли на $S^{3,3}$ 3-форма $d\omega$ имеет вид $d\omega = 3\Omega|_S$, где $\Omega = \omega^{123} - \omega^{145} + \omega^{167} - \omega^{246} - \omega^{257} - \omega^{347} + \omega^{356}$. Найдем оператор Хитчина [10] $K_{d\omega}$ для сферы $S^{3,3}$. Рассмотрим сначала точку $x = e_4 \in S^{3,3}$. Касательное пространство $T_x S^{3,3}$ имеет ортонормированный базис и форму объема $\mu = \omega^{123567}$. 2-форма $d\omega$ на $T_x S^{3,3}$ имеет вид

$$d\omega_x = 3(\omega^{123} + \omega^{167} - \omega^{257} + \omega^{356}).$$

Вследствие инвариантности формы $d\omega_x$ относительно подгруппы изотропии $SL(3, \mathbf{R}) \subset G_2^*$, действующей на $T_x S^{3,3}$, достаточно вычислить $K_{d\omega}$ на одном векторе, например $K_{d\omega}(e_1)$:

$$\begin{aligned} i_{e_1} d\omega_x \wedge d\omega_x &= 9(\omega^{23} + \omega^{67})(\omega^{123} + \omega^{167} - \omega^{257} + \omega^{356}) = \\ &= 9(\omega^{12367} + \omega^{12367}) = 18\omega^{12367} = -18i_{e_5} \omega^{123567} = -18i_{e_5} \mu. \end{aligned}$$

Поэтому $K_{d\omega}(e_1) = -18e_5 = 18e_4 \times e_1 = 18P(e_1)$. Отсюда следует, что $I_{d\omega} = P_x$. Из инвариантности почти пара-комплексной структуры Кэли P и формы Ω относительно группы G_2^* , действующей транзитивно на $S^{3,3}$, получаем, что равенство $I_{d\omega} = P_x$ имеет место во всех точках псевдосферы $S^{3,3}$.

Вывод. 3-форма $d\omega$ на $S^{3,3}$ является всюду невырожденной и определяет почти пара-комплексную структуру $I_{d\omega}$ на $S^{3,3}$, которая совпадает с почти пара-комплексной структурой Кэли P .

Вычислим тензор Нейенхейса [9] почти пара-комплексной структуры P :

$$N_P(X, Y) = 2([X, Y] + [PX, PY] - P[PX, Y] - P[X, PY]).$$

Для этого найдем ковариантную производную тензора P . Поскольку $\mathbf{n}(x) = x$, то для любого касательного вектора $X \in T_x \mathbf{S}^{3,3}$ имеем $D\mathbf{n}_x(X) = X$. Будем считать, что касательные векторы $X, Y \in T_x \mathbf{S}^{3,3}$ продолжены на пространство $\mathbf{R}^7$ как постоянные векторные поля и $\mathbf{n}(x) = x$ также определено на $\mathbf{R}^7 \setminus \{0\}$.

Тогда имеют место равенства $(\nabla_X P)Y = \text{pr}_x(D_X(PY)) = \text{pr}_x(D_X(\mathbf{n} \times Y)) = \text{pr}_x(X \times Y)$, где $\text{pr}_x(Z) = Z + g(Z, \mathbf{n})\mathbf{n}$ – ортогональная в $\mathbf{R}^{3,4}$ проекция на касательное пространство $T_x \mathbf{S}^{3,3}$, здесь мы учитываем, что $g(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1$. Получаем

$$(\nabla_X P)Y = X \times Y + g(\mathbf{n}, X \times Y)\mathbf{n} = X \times Y + \omega(X, Y)\mathbf{n}.$$

Замечание. Из полученного выражения $\nabla_X P$ сразу вытекает кососимметричность оператора $\nabla_X P$ и, в частности, свойство $\nabla_X(P)X = 0$ приближенной паракэлеровости многообразия $\mathbf{S}^{3,3}$ и равенство $\nabla_{PX}P = -P\nabla_X P$.

Теорема 4. Тензор Нейенхейса $N_P(X, Y)$ почти пара-комплексной структуры Кэли P на $\mathbf{S}^{3,3}$ имеет вид

$$N_P(X, Y) = -8\mathbf{n} \times (X \times Y).$$

Доказательство. Прямое вычисление с использованием формулы $(\nabla_X P)Y = X \times Y + \omega(X, Y)\mathbf{n}$ и равенства $(\mathbf{n} \times X) \times Y = -\mathbf{n} \times (X \times Y) - g(X, Y)\mathbf{n}$ для $X, Y \perp \mathbf{n}$:

$$\begin{aligned} N_P(X, Y)/2 &= [X, Y] + [PX, PY] - P[PX, Y] - P[X, PY] = \\ &= \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) + \nabla_{PX}(PY) - \nabla_{PY}(PX) - P\nabla_{PX}(Y) + P\nabla_Y(PX) - P\nabla_X(PY) + P\nabla_{PY}(X) = \\ &= \nabla_{PX}(P)Y - \nabla_{PY}(P)X + P\nabla_Y(P)X - P\nabla_X(P)Y = \\ &= (PX) \times Y + \omega(PX, Y)\mathbf{n} - ((PY) \times X + \omega(PY, X)\mathbf{n}) + P(Y \times X + \omega(Y, X)\mathbf{n}) - P(X \times Y + \omega(X, Y)\mathbf{n}) = \\ &= (\mathbf{n} \times X) \times Y - (\mathbf{n} \times Y) \times X + \mathbf{n} \times (Y \times X) - \mathbf{n} \times (X \times Y) = -4\mathbf{n} \times (X \times Y) \end{aligned}$$

Теорема 5. Фундаментальная 2-форма ω почти пара-комплексной структуры Кэли на $\mathbf{S}^{3,3}$ является собственной для оператора Лапласа: $\Delta\omega = -12\omega$.

Доказательство. Полностью повторяет доказательство теоремы 3 с одним отличием: $\delta = +*d*$. Действительно, на k -формах кодифференциал δ имеет выражение $\delta = (-1)^k *^{-1} d* = (-1)^{kn+n+1+\eta} *d*$, где η – число «минусов» метрического тензора g . В нашем случае $\eta = 3$ и $n = 6$. Следовательно, $\delta = +*d*$.

Пара-комплексная структура на $\mathbf{S}^{3,3}(j)$. На псевдосфере $\mathbf{S}^{3,3}$ существуют интегрируемые пара-комплексные структуры. Это следует из того, что $\mathbf{S}^{3,3}$ диффеоморфно прямому произведению трехмерных многообразий. Рассмотрим стереографическую проекцию $\mathbf{S}^{3,3}$ из точки начала координат $\mathbf{R}^7$ на часть цилиндра $D^3 \times \mathbf{S}^3$, где $\mathbf{S}^3$ – стандартная единичная сфера в пространстве $\mathbf{R}^4$ с координатами (x_4, x_5, x_6, x_7) и D^3 – единичный шар в пространстве $\mathbf{R}^3$ с координатами (x_1, x_2, x_3) , $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$. Прямая, проходящая через начало координат и точку $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)$ псевдосферы $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 = 1$, пересекает цилиндр $D^3 \times \mathbf{S}^3$ в точке y с координатами

$$y_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, 7.$$

Ясно, что последние переменные (y_4, y_5, y_6, y_7) описывают трехмерную сферу $\mathbf{S}^3$. Остальные координаты меняются в единичном шаре D^3 в пространстве $\mathbf{R}^3$. Действ-

вительно, пусть $\rho^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2$. На псевдосфере $\rho^2 \geq 1$. Тогда из уравнения псевдосферы следует, что

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2} = 1 - \frac{1}{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2} \quad \text{или} \quad 0 \leq y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 - \frac{1}{\rho^2} < 1.$$

Через каждую точку $(y_1, y_2, y_3) \in D^3$, при фиксированной точке $(y_4, y_5, y_6, y_7) \in S^3$, проходит единственная прямая, пересекающая псевдосферу в точке $x_i = \rho \cdot y_i$, $i = 1, 2, \dots, 7$ при $\rho = 1/\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2}$ и, наоборот, каждая прямая, проходящая через начало координат и точку $x \in S^{3,3}$, пересекает шар D^3 при определенных (y_1, y_2, y_3) .

Поскольку прямое произведение $D^3 \times S^3$ естественно допускает пара-комплексные структуры, то диффеоморфизм стереографической проекции $f: S^{3,3} \rightarrow D^3 \times S^3$ позволяет перенести пара-комплексные структуры с прямого произведения трехмерных многообразий $D^3 \times S^3$ на сферу $S^{3,3}$. Отметим, что по построению, $D^3 \times S^3$ является псевдоримановым сигнатуры $(3,3)$.

6. Почти комплексная и почти пара-комплексная структуры на алгебре Кэли

Пространство $\mathbf{R}^7 = \mathbf{R}^{3,4}$ чисто мнимых чисел $X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_7 e_7$ разбивается конусом $N_0(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - \dots - x_7^2 = 0$ на два открытых множества $\mathbf{R}^{7+}$ и $\mathbf{R}^{7-}$ элементов, для которых $N_0(X) > 0$ и $N_0(X) < 0$ соответственно. Рассмотрим прямые произведения этих множеств с вещественной прямой $\mathbf{R}_0$ алгебры Кэли:

$$\mathbf{R}^{8+} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7+} \quad \text{и} \quad \mathbf{R}^{8-} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7-}.$$

В данном разделе мы определим неинтегрируемую почти комплексную структуру на открытом множестве $\mathbf{R}^{8+}$ и неинтегрируемую пара-комплексную структуру на $\mathbf{R}^{8-}$.

Почти комплексная структура Кэли. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^{8+} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7+}$ и определим на нем неинтегрируемую почти комплексную структуру J . На пространстве $\mathbf{R}_0$ определено единичное векторное поле $n_1 = e_0 = 1$. Определим единичное векторное поле $n_2(u)$ на $\mathbf{R}^{8+}$ формулой $n_2(u) = U / \|U\|$, где $\|U\| = \sqrt{N_0(U)} > 0$, $u = u_0 + U \in \mathbf{R}^{8+} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7+}$. Отметим, что $\langle n_2, n_2 \rangle = 1$, а $n_2 n_2 = -1$. Определим оператор $J: \mathbf{R}^8 \rightarrow \mathbf{R}^8$ в точке $u = u_0 + U \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7+}$ формулой

$$J(y) = n_2(u) \cdot y = \frac{U}{\|U\|} y.$$

Поскольку $n_2 n_2 = -1$, то $J^2 = -Id$ и получаем почти комплексную структуру в точке $u = u_0 + U \in \mathbf{R}^{8+}$.

Фундаментальная форма $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$, соответствующая J , легко вычисляется с учетом свойства $n_2 \times Y = n_2 Y + \langle n_2, Y \rangle$:

$$\begin{aligned} \omega(y, z) &= \langle J(y), z \rangle = \langle n_2 y, z \rangle = \langle n_2(y_0 + Y), z_0 + Z \rangle = \\ &= y_0 \langle n_2, z_0 + Z \rangle + \langle n_2 Y, z_0 + Z \rangle = y_0 \langle n_2, z \rangle + \langle n_2 \times Y, Z \rangle - \langle n_2, y \rangle z_0 = \\ &= n_1^* \wedge n_2^*(y, z) + \langle n_2 \times Y, Z \rangle. \end{aligned}$$

Также легко вычисляется производная $D_x(J)$ тензорного поля J в направлении вектора $x = x_0 + X \in \mathbf{R}^{8+}$. Поскольку пространство $\mathbf{R}^{8+}$ является открытым подмножеством в $\mathbf{R}^8$, то можно считать векторы x, y с параллельными векторными полями на $\mathbf{R}^{8+}$ и тогда $D_x(J)(y) = D_x(n_2)y$.

Векторное поле $n_2(u)$ не зависит от переменной u_0 , поэтому его производная в направлении вектора $x = e_0$ равна нулю. Поэтому достаточно вычислить $D_x(n_2)$ только в направлении вектора $x = X \in \mathbf{R}^{7+}$. Эта производная находится простым дифференцированием единичного векторного поля $n_2(u)$. Если $u = u_0 + U \in \mathbf{R}^{8+}$, то $n_2(u) = U / \|U\|$. Поэтому из формулы $D_x(J)(y) = D_x(n_2)y$ получаем следующее выражение для производной почти комплексной структуры Кэли J на $\mathbf{R}^{8+}$ в точке $u = u_0 + U$ в направлении вектора $x = x_0 + X$:

$$D_x(J)y = (d_x n_2)y = \frac{1}{\|U\|} (X - \langle X, n_2(u) \rangle n_2(u)) \cdot y.$$

Используя это выражение, можно легко вычислить (так же, как и в теореме 4) тензор Нейенхейса $N(x, y)$ для векторов x, y , ортогональных $n_2(u)$. Вычислим внешний дифференциал 2-формы ω в точке $u = u_0 + U$ с использованием полученной формулы для $D_x(J)$:

$$\begin{aligned} d\omega(x, y, z) &= x\omega(y, z) + y\omega(z, x) + z\omega(x, y) = \langle D_x(J)y, z \rangle + \langle D_y(J)z, x \rangle + \langle D_z(J)x, y \rangle = \\ &= \frac{1}{\|U\|} (3\langle X \times Y, Z \rangle - \langle X, n_2(u) \rangle \omega(Y, Z) - \langle Y, n_2(u) \rangle \omega(Z, X) - \langle Z, n_2(u) \rangle \omega(X, Y)) = \\ &= \frac{1}{\|U\|} (3\Omega(X, Y, Z) - (n_2^* \wedge \omega)(X, Y, Z)). \end{aligned}$$

Почти пара-комплексная структура Кэли. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^{8-} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7-}$ и определим неинтегрируемую почти пара-комплексную структуру P . На прямой $\mathbf{R}_0$ определено единичное векторное поле $n_1 = e_0 = 1$. Определим единичное векторное поле $n_2(u)$ на $\mathbf{R}^{8-}$ формулой $n_2(u) = U / \|U\|$, где $\|U\| = \sqrt{-N_0(U)} > 0$, $u = u_0 + U \in \mathbf{R}^{8-} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7-}$. Отметим, что $\langle n_2, n_2 \rangle = -1$ и $n_2 n_2 = +1$. Определим оператор $P: \mathbf{R}^8 \rightarrow \mathbf{R}^8$ в точке $u = u_0 + U \in \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}^{7-}$ такой же формулой

$$P(y) = n_2(u) \cdot y = \frac{U}{\|U\|} y.$$

Легко видеть, что $P^2 = Id$. Поэтому мы получаем неинтегрируемую почти пара-комплексную структуру на $\mathbf{R}^{8-}$. Совершенно аналогично вычисляются $D_x(P)$, фундаментальная форма $\omega(X, Y) = g(PX, Y)$, соответствующая P , и ее внешний дифференциал в точке $u = u_0 + U$. Они имеют точно такой же вид, как и в случае почти комплексной структуры на $\mathbf{R}^{8+}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Agricola I., Bazzoni G., Goertsches J., et al. On the history of the Hopf problem // Diff. Geom. and Appl. 2018. V. 57. P. 1–9. DOI: doi.org/10.1016/j.difgeo.2017.10.014 (arXiv: 1708.01068 [math.HO]).
2. Agricola I., Borówka A., Friedrich T. S6 and the geometry of nearly Kähler 6-manifolds // Diff. Geom. and Appl. 2018. V. 57. P. 75–86. DOI: 10.1016/j.difgeo.2017.10.007 (arXiv: 1707.08591 [math.DG], 2017, 12 pages).

3. Смоленцев Н.К. О почти комплексных структурах на шестимерных произведениях сфер // Ученые записки Казанского государственного университета. 2009. Т. 151. Кн. 4. С. 116–135.
4. Alekseevsky D.V., Winther H. Homogeneous almost complex structures in dimension 6 with semi-simple isotropy // Ann. Glob. Anal. Geom. 2014. V. 46. P. 361–387. DOI: doi.org/10.1007/s10455-014-9428-y (arXiv:1401.8187v2 [math.DG]).
5. Жевлаков К., Слинко А., Шестаков И., Шириов А. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
6. Yokota I. Exceptional Lie groups. arXiv:0902.0431v1 [math.DG] 2009. DOI: doi = 10.1.1.401.8095&rep = rep1&type = pdf
7. Yokota I. Non-compact Simple Lie Group G_2' of Type G_2 // J. Fac. Sci. Shinshu University. 1977. V. 12. No. 1. P. 45–52.
8. Gray A. Vector cross products on manifolds // Trans AMS. 1969. V. 141. P. 465–504. DOI: doi.org/10.1090/S0002-9947-1969-0243469-5.
9. Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А. Однородные пара-кэлеровы многообразия Эйнштейна // УМН. 2009. Т. 64. Вып. 1(385). С. 3–50. DOI: https://doi.org/10.4213/rm9262.
10. Hitchin N.J. The geometry of three-forms in six dimensions // J. Diff. Geom. 2000. V. 55. P. 547–576.
11. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1 и 2. М.: Наука, 1981.

Статья поступила 14.02.2018 г.

Smolentsev N.K.(2018) ON ALMOST (PARA)COMPLEX CAYLEY STRUCTURES ON SPHERES $S^{2,4}$ AND $S^{3,3}$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 22–38

DOI 10.17223/19988621/53/3

Keywords: Cayley algebra, split Cayley algebra, G_2 group, split-octonions, vector product, almost complex structure, almost para-complex structure, six-dimensional pseudo-Riemannian spheres.

It is well known that almost complex structures exist on the six-dimensional sphere S^6 but the question of the existence of complex (ie, integrable) structures has not been solved so far. The most known almost complex structure on the sphere S^6 is the Cayley structure which is obtained by means of the vector product in the space $\mathbf{R}^7$ of the purely imaginary octaves of Cayley $\mathbf{Ca}$. There is another, split Cayley algebra $\mathbf{Ca}'$, which has a pseudo-Euclidean scalar product of signature (4,4). The space of purely imaginary split octonions is the pseudo-Euclidean space $\mathbf{R}^{3,4}$ with a vector product. In the space $\mathbf{R}^{3,4}$, there are two types of spheres: pseudospheres $S^{2,4}$ of real radius and pseudo sphere $S^{3,3}$ of imaginary radius. In this paper, we study the Cayley structures on these pseudo-Riemannian spheres. On the first sphere $S^{2,4}$, the Cayley structure defines an orthogonal almost complex structure J ; on the second sphere, $S^{3,3}$, the Cayley structure defines an almost para-complex structure P . It is shown that J and P are nonintegrable. The main characteristics of the structures J and P are calculated: the Nijenhuis tensors, as well as fundamental forms and their differentials. It is shown that, in contrast to the usual Riemann sphere S^6 , there are (integrable) complex structures on $S^{2,4}$ and para-complex structures on $S^{3,3}$.

AMS Mathematical Subject Classification: 53C15; 53C50; 53C30; 53C25; 53C38

SMOLENTSEV Nikolay Konstantinovich (Dr. Sci. in Physics and Mathematics, professor of Fundamental Mathematics department of Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: smolennk@yandex.ru

REFERENCES

1. Agricola I., Bazzoni G., Goertsches J., Konstantis P., Rollenske S. (2018) On the history of the Hopf problem. *Diff. Geom. and Appl.* 57. pp. 1–9. DOI: doi.org/10.1016/j.difgeo.2017.10.014 (arXiv:1708.01068 [math.HO]).
2. Agricola I., Borówka A., Friedrich T. (2018) S^6 and the geometry of nearly Kähler 6-manifolds. *Diff. Geom. and Appl.* 57. pp. 75–86. DOI: 10.1016/j.difgeo.2017.10.007 (arXiv:1707.08591 [math.DG], 2017, 12 pages.).
3. Smolentsev N.K. (2009) O pochtі kompleksnykh strukturakh na shestimernykh proizvedeni-yakh sfer [On almost complex structures on six-dimensional products of spheres]. *Scientific Notes of Kazan State University*. 151(4). pp. 116–135.
4. Alekseevsky D.V., Kruglikov B.S., Winther H. (2014) Homogeneous almost complex structures in dimension 6 with semi-simple isotropy. *Ann. Glob. Anal. Geom.* 46. pp. 361–387. DOI: doi.org/10.1007/s10455-014-9428-y (arXiv:1401.8187v2 [math.DG]).
5. Zhevlakov K., Slin'ko A., Shestakov I., Shirshov A. (1978) *Kol'tsa, blizkie k assotsiativnym* [Rings close to associative]. Moscow: Nauka.
6. Yokota I. (2009) Exceptional Lie groups. *arXiv:0902.0431v1 [math.DG]*. doi: 10.1.1.401.8095&rep=rep1&type=pdf.
7. Yokota I. Non-compact Simple Lie Group G_2' of Type G_2 (1977) *Jour. Fac. Sci. Shinshu University*. 12(1). pp. 45–52.
8. Gray A. (1969) Vector cross products on manifolds. *Trans. AMS.* 141. pp. 465–504. DOI: doi.org/10.1090/S0002-9947-1969-0243469-5.
9. Alekseevsky D.V., Medori C., Tomassini A. (2009) Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds. *Russ. Math. Surv.* 64(1). pp. 1–43. DOI: https://doi.org/10.1070/RM2009v064n01ABEH004591.
10. Hitchin N.J. (2000) The geometry of three-forms in six dimensions. *J. Diff. Geom.* 55. pp. 547–576.
11. Kobayashi S., Nomizu K. (1963) *Foundations of Differential Geometry. Vol. 1 and 2*. New York, London: Interscience Publ.

Е.С. Сухачева

О ФУНКЦИЯХ ПЕРВОГО КЛАССА БЭРА НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НЕМЕТРИЗУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВ¹

Для функций первого класса Бэра заданных на метризуемых пространствах известен критерий Бэра. Доказывается аналог этой теоремы для функций первого класса Бэра, заданных на более широком классе пространств, а именно на пространствах, являющихся одновременно наследственно линделефовыми и наследственно бэровским, но не обязательно метризуемых. В частности, прямая Зоргенфрея, ее модификации и пространства Хаттори обладают этими свойствами.

Ключевые слова: прямая Зоргенфрея, функция первого класса Бэра, наследственно бэровское пространство, наследственно линделефово пространство, cl -функция, множества типа F_σ и G_δ .

В данной работе все топологические пространства подразумеваются нормальными и используются следующие обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{R}$ – пространство вещественных чисел, наделенное стандартной евклидовой топологией; символом S обозначается прямая Зоргенфрея (или «стрелка»), представляющая собой множество вещественных чисел, топология в котором порождена базой $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Если множество $A \subset \mathbb{R}$, то символом S_A обозначим топологическое пространство, в котором база окрестностей точки x определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\{[x, x + \varepsilon), \forall \varepsilon > 0\}, \text{ если } x \in A \subset \mathbb{R}; \\ &\{(x - \varepsilon, x], \forall \varepsilon > 0\}, \text{ если } x \in \mathbb{R} \setminus A. \end{aligned}$$

В частности, если $A = \emptyset$, то $S_A = S$.

Множеством первой категории в топологическом пространстве называется множество, представимое в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. Топологическое пространство X называется *бэровским*, если пересечение любой последовательности открытых всюду плотных множеств всюду плотно. Топологическое пространство X называется *наследственно бэровским*, если каждое замкнутое подмножество $F \subset X$ является бэровским пространством.

В работе [3] показано, что регулярное, с первой аксиомой счетности пространство является наследственно бэровским тогда и только тогда, когда оно не имеет счетного замкнутого подпространства без изолированных точек.

Предложение 1. Пространство S_A является наследственно бэровским для любого множества $A \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. Поскольку пространство S_A регулярное и имеет первую аксиому счетности, то в силу предыдущего утверждения достаточно показать, что

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-11-18051.

пространство S_A не имеет счетного замкнутого подпространства без изолированных точек. Пусть множество F замкнуто в S_A и не имеет изолированных точек. Тогда замыкание $\overline{F}$ множества F в евклидовой топологии прямой также не содержит изолированных точек. Это означает [1], что множество $\overline{F}$ несчетно. Поскольку множество $\overline{F} \setminus F$ счетно, то F является несчетным. $\square$

Для любого множества $A \subset \mathbb{R}$, пространство S_A нормальное и линделефовое. Эти факты можно доказать аналогично доказательствам нормальности и линделефовости прямой Зоргенфрея [8].

Совершенным пространством называется пространство, в котором все замкнутые множества имеют тип G_δ . Нетрудно видеть, что в пространстве S_A открытые множества являются счетным объединением промежутков вида $(a_1, b_1]$, $[a_2, b_2)$, (a_3, b_3) , $[a_4, b_4]$, а каждый из этих промежутков имеет тип F_σ . Таким образом, пространство S_A является совершенным для любого множества $A \subset \mathbb{R}$. Отсюда следует, что пространство S_A наследственно линделефово [8].

Пусть X – топологическое пространство. Отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется функцией первого класса Бэра, если существует последовательность непрерывных функций $\{f_i\}_{i=1}^\infty$, поточечно сходящаяся к функции f на множестве X . Множество всех функций первого класса Бэра обозначается $B_1(X)$. В силу того, что топология, заданная на S_A , тоньше, чем топология на прямой, то $B_1(\mathbb{R}) \subset B_1(S_A)$, но обратное включение не верно.

Пример 2. Пусть K – канторово множество в евклидовой прямой. Тогда $\mathbb{R} \setminus K = \bigcup_{n=1}^\infty (a_n, b_n)$. Пусть $B = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и для каждого натурального n заданы возрастающие последовательности $\{b_n^i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $b_n^i \in (a_n, b_n)$, сходящиеся к точкам b_n . Определим непрерывные функции $f_i: S \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $f_i(x) = 0$, если $x \in (K \setminus B) \cup \left(\bigcup_{n=1}^i [a_n, b_n^i] \right)$, $f_i(b_n) = 1$ при $n \leq i$ и линейные на каждом множестве $[b_n^i, b_n]$. Нетрудно видеть, что для всех $i \in \mathbb{N}$ функции f_i непрерывны на S и $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = \chi_B(x)$ для любой точки $x \in S$. Таким образом, характеристическая функция χ_B является функцией первого класса Бэра на S . Так как функция $\chi_B|_K$ не имеет точек непрерывности на замкнутом в евклидовой топологии множестве K , то $\chi_B \notin B_1(\mathbb{R})$ по теореме Бэра [4].

Тот факт, что пространства $B_1(\mathbb{R})$ и $B_1(S)$ различны также следует из [6] ввиду того, что $B_1(\mathbb{R})$ секвенциально сепарабельно, а $B_1(S)$ – нет (напомним, что пространство X называется секвенциально сепарабельным, если существует счетное подмножество $D \subset X$, такое, что любая точка $x \in X$ есть предел некоторой последовательности точек из множества D).

Функцию f , заданную на топологическом пространстве X со значениями в вещественной прямой, называют *cl-функцией* (*cliquish*) в точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой окрестности U точки x существует открытое непустое множество $G \subset U$, такое, что $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ для любых двух точек $y, z \in G$. Функцию f называют *cl-функцией*, если она cl-функция в каждой точке $x \in X$, а множество всех таких функций обозначается $CL(X)$. В работе [5] показано, что для любой cl-функции f , заданной на топологическом пространстве X , множество точек разрыва D_f функции f является множеством первой категории. Из этого вытекает следующее

Предложение 3. Пусть X – бэровское пространство, $f \in CL(X)$ и C_f – множество точек непрерывности функции f . Тогда множество C_f всюду плотно в X .

Доказательство. Поскольку $f \in CL(X)$, то в силу предыдущего утверждения

$$D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \text{ где множества } F_n \text{ нигде не плотны. Следовательно, } C_f = X \setminus D_f = X \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n). \text{ Тогда множества } X \setminus F_n \text{ открыты, всюду плотны и,}$$

поскольку пространство X – бэровское, то множество C_f всюду плотно. $\square$

Теорема 4. Пусть X – бэровское пространство. Тогда $B_1(X) \subset CL(X)$.

Доказательство. Пусть множество U открыто в X . Тогда подпространство U – бэровское (см. [7]). Пусть функция $g \in B_1(X)$ и $f = g|_U$. Очевидно, что $f \in B_1(U)$. Пусть последовательность непрерывных функций $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ на множестве U поточечно сходится к функции f . Следовательно, для любой точки $x \in U$ последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в $\mathbb{R}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $U = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} F_p$, где $F_p = \bigcap_{n, m \geq p} \left\{ x \in X; |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$. Заметим, что $F_p \cap U$ – замкнуто в U и $U = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} (F_p \cap U)$. Поскольку подпространство U

бэровское, то найдется номер $p_0 \in \mathbb{N}$, такой, что $\text{int}_U(F_{p_0} \cap U) \neq \emptyset$. Тогда множество $V = \text{int}_U(F_{p_0} \cap U)$ открыто в U , следовательно, открыто в X и $V \subset F_{p_0} \cap U$. Это означает, что для любых $n, m \geq p_0$ и точки $x \in V$ верно неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ получаем, что

$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ для любой точки $x \in V$ и $n \geq p_0$. В силу непрерывности функции f_{p_0} существует окрестность $W \subset V$, такая, что для любых $y, z \in W$ и $n \geq p_0$ верно неравенство $|f_{p_0}(y) - f_{p_0}(z)| < \varepsilon/3$. Применяя неравенства треугольника, получаем $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. $\square$

Из предложения 3 и теоремы 4 получаем

Следствие 5. Пусть X – наследственно бэровское пространство и $f \in B_1(X)$. Тогда для любого замкнутого множества $F \subset X$ функция $f|_F$ на множестве F имеет точку непрерывности.

Доказательство следующих трех лемм повторяет доказательства этих утверждений для метризуемых пространств (см. [4]), если учесть тот факт, что пространство X – совершенно нормальное. Мы приведем доказательство только последней из них.

Лемма 6. Пусть X – топологическое пространство. Если последовательность функций первого класса Бэра $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно к функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, то $f \in B_1(X)$.

Лемма 7. Пусть X – совершенное пространство. Если $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$, где множества A_i имеют тип F_σ , то существуют попарно непересекающиеся множества $B_1, \dots, B_n$ типа F_σ , такие, что $X = \bigcup_{i=1}^n B_i$ и $B_i \subset A_i$ для любого $i = \overline{1, n}$.

Лемма 8. Пусть X – нормальное пространство и $f : X \rightarrow \{c_0, \dots, c_n\}$, где числа $c_0 < \dots < c_n$ из $\mathbb{R}$. Если множества $E_k = \{x \in X; f(x) = c_k\}$ имеют тип F_σ при $k = \overline{0, n}$, то $f \in B_1(X)$.

Доказательство. Пусть $E_k = \bigcup_{i=1}^\infty F_i^k$. Положим $L_m^k = \bigcup_{i=1}^m F_i^k$, $L_m = \bigcup_{k=1}^n L_m^k$ и определим функцию $\varphi_m : L_m \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $\varphi_m(x) = c_k$, если $x \in L_m^k$. Заметим, что все множества L_m^k – непересекающиеся и замкнуты в X и, следовательно, функция φ_m непрерывна на L_m . Тогда в силу теоремы Титце – Урысона существует непрерывное продолжение $\widetilde{\varphi_m} : X \rightarrow \mathbb{R}$, такое, что $\widetilde{\varphi_m}(x) = \varphi_m(x)$ для любого $x \in L_m$. Нетрудно видеть, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \widetilde{\varphi_m}(x) = f(x)$ для любого $x \in X$. $\square$

Для функций первого класса Бэра заданных на метризуемых пространствах, хорошо известны теорема Лебега и теорема Бэра. Следующие теоремы являются их аналогами в случае наследственно линделефовых пространств.

Теорема 9. Пусть X – наследственно линделефово пространство и функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Функция $f \in B_1(X)$ тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ его прообраз $f^{-1}(U)$ имеет тип F_σ .

Доказательство. Пусть множество U открыто в $\mathbb{R}$. Тогда $U = \bigcup_{k=1}^\infty F_k$ для некоторых множеств F_k , замкнутых в $\mathbb{R}$ и таких, что $F_k \subset \text{int}_{\mathbb{R}} F_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $f \in B_1(X)$, то существует последовательность непрерывных функций

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, такая, что $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Тогда $f^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} f_n^{-1}(F_k)$ и, следовательно, множество $f^{-1}(U)$ имеет тип F_{σ} .

Предположим теперь, что для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ его прообраз $f^{-1}(U)$ имеет тип F_{σ} и функция f ограничена сверху и снизу точками a и b соответственно. Разобьём множество значений на конечное число промежутков точками $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$ длины не больше $1/n$ и положим $A_0 = \{x \in X; f(x) < c_1\}$, $A_k = \{x \in X; c_{k-1} < f(x) < c_{k+1}\}$, где $k = \overline{1, n-1}$ и $A_n = \{x \in X; f(x) > c_{n-1}\}$. Заметим, что для любого $k = \overline{0, n}$ множества A_k имеют тип F_{σ} . Тогда для пространства $X = \bigcup_{k=0}^n A_k$ по лемме 7 существуют множества

$B_0, \dots, B_n$ типа F_{σ} , такие, что $X = \prod_{k=0}^n B_k$, $B_k \subset A_k$ для любого $k = \overline{0, n}$.

Введем функцию $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, полагая $f_n(x) = c_k$ при $x \in B_k$ для любого $k = \overline{0, n}$. Согласно лемме 8, $f_n \in B_1(X)$. Зафиксируем точку $x \in X$. Тогда для некоторого номера k имеем, что $x \in B_k \subset A_k$. Значит, $f_n(x) = c_k$ и $c_{k-1} < f(x) < c_{k+1}$. Отсюда ясно, что $|f_n(x) - f(x)| < 1/n$.

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ функции f_n равномерно сходятся к функции f и, стало быть, функция $f(x) \in B_1(X)$.

Пусть теперь для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ его прообраз $f^{-1}(U)$ имеет тип F_{σ} и функция f неограниченная. Рассмотрим функцию $g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$. Очевидно, что для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ прообраз $g^{-1}(U)$ есть множество типа F_{σ} . Функция g ограниченная и, следовательно, по предыдущему рассуждению является функцией первого класса Бэра. Тогда $f(x) = \operatorname{tg}(g(x))$ есть функция первого класса Бэра. $\square$

Теорема 10. Пусть пространство X наследственно линделефово и $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Если на всяком непустом замкнутом множестве F имеются точки непрерывности индуцированной функции $f|_F$, то $f \in B_1(X)$.

Доказательство. В силу теоремы 9 достаточно показать, что прообраз открытого множества имеет тип F_{σ} .

Пусть $p, q \in \mathbb{R}$, $p < q$. Положим $P = \{x \in X; f(x) > p\}$, $Q = \{x \in X; f(x) < q\}$. Тогда $X = P \cup Q$. Используя метод трансфинитной индукции, определим ω_1 -последовательности замкнутых множеств $\{F_{\beta} \subset X; \beta < \omega_1\}$ и открытых множеств $\{U_{\beta}; \beta < \omega_1\}$, таких, что $F_{\alpha} \subset F_{\beta}$ при $\beta < \alpha$ и множество $f(U_{\beta} \cap F_{\beta})$ принадлежит P или Q при любом $\beta < \omega_1$. Пусть $F_0 = S_A$ и U_0 – окрестность некоторой точки непрерывности функции f , такая, что $f(U_0)$ принадлежит P или Q .

Предположим, что для всех $\beta < \alpha$ определены семейство открытых множеств $\{U_\beta\}_{\beta < \alpha}$ и семейство замкнутых множеств $\{F_\beta\}_{\beta < \alpha}$, таких, что $F_\beta = F_{\beta-1} \setminus U_{\beta-1}$, $U_{\beta-1}$ – окрестность некоторой точки непрерывности функции $f|_{F_{\beta-1}}$, такая, что $f(U_{\beta-1})$ принадлежит P или Q , если β – непредельный ординал и $F_\beta = \bigcap_{\gamma < \beta} F_\gamma$, U_β – окрестность некоторой точки непрерывности функции $f|_{F_\beta}$, такая, что $f(U_\beta \cap F_\beta)$ входит в P или Q , если β – предельный ординал. Если α такое, что существует $\alpha-1$, положим $F_\alpha = X \setminus (U_0 \cup \dots \cup U_{\alpha-1})$. Заметим, что $F_\alpha = F_{\alpha-1} \setminus U_{\alpha-1}$ и $F_\alpha \subseteq F_{\alpha-1}$. Если α – предельный ординал, то $F_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} F_\beta$. Пусть U_α – окрестность точки непрерывности функции $f|_{F_\alpha}$, такая, что $f(U_\alpha \cap F_\alpha)$ входит в P или Q . Нетрудно видеть, что семейства множеств $\{F_\beta \subset X; \beta < \omega_1\}$ и $\{U_\beta; \beta < \omega_1\}$ удовлетворяют требуемым условиям.

Пусть $G = X \setminus \left(\bigcap_{\alpha < \omega_1} F_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} (X \setminus F_\alpha)$. Так как пространство X – наследственно линделефово, то существует ординал $\gamma < \omega_1$, такой, что $G = \bigcup_{\alpha < \gamma} (X \setminus F_\alpha)$ и $F_\gamma = F_{\gamma+1} = \dots$. Если $F_\gamma \neq \emptyset$, то $U_\gamma \cap F_\gamma \neq \emptyset$, что невозможно, так как $F_{\gamma+1} = F_\gamma \setminus U_\gamma = F_\gamma$. Таким образом, существует ординал $\alpha < \omega_1$, такой, что $F_\beta \neq \emptyset$ при любом $\beta < \alpha$ и $F_\alpha = \emptyset$. Тогда $X = \bigcup_{\beta < \alpha} (F_\beta \setminus F_{\beta+1})$. Положим $T = \{\beta < \alpha; F_\beta \setminus F_{\beta+1} \subset P\}$, $L = \{\beta < \alpha; F_\beta \setminus F_{\beta+1} \subset Q\} \setminus T$. Ясно, что $L \cap T = \emptyset$. Тогда $X = A \cup B$, где $A = \bigcup_{\beta \in T} (F_\beta \setminus F_{\beta+1})$, $B = \bigcup_{\beta \in L} (F_\beta \setminus F_{\beta+1})$. Поскольку для любого β множества $F_\beta \setminus F_{\beta+1}$ имеют тип F_σ , то и множества A и B имеют тип F_σ . Заметим, что $A \subset P$, $B \subset Q$ и $A \cap B = \emptyset$.

Таким образом, для любых чисел $p, q \in \mathbb{R}$, где $p < q$, верно, что $X = A \cup B$, $A \subset P$, $B \subset Q$, множества A , B имеют тип F_σ . Фиксируем число $p \in \mathbb{R}$ и последовательность $q_1 > q_2 > \dots$, такую, что $p = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ $X = A_n \cup B_n$, где $A_n \cap B_n = \emptyset$, множества A_n и B_n имеют тип F_σ , $A_n \subset P$, $B_n \subset Q_n$, где $Q_n = \{x \in X; f(x) < q_n\}$. Положим $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $W = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $R \cap W = \emptyset$, $X = R \cup W$, множество R имеет тип F_σ . Покажем, что $P = R$. Пусть $x \in P$. Тогда найдется число $n \in \mathbb{N}$, такое, что $f(x) > q_n$ и $x \notin B_n$. Значит, $x \notin W$. Следовательно, $x \in R$. Таким образом, множество P имеет тип F_σ . Аналогичный результат справедлив для множества Q .

Следовательно, прообраз любого открытого множества имеет тип F_σ . $\square$

Таким образом, из следствия 5 и теоремы 10 получен следующий критерий для функций первого класса Бэра.

Теорема 11. Пусть пространство X наследственно линделефово и наследственно бэровское. Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит $B_1(X)$ тогда и только тогда, когда для любого непустого замкнутого подмножества $F \subset X$ функция $f|_F$ имеет точку непрерывности.

В работе [9] для любого множества $A \subset \mathbb{R}$ определено пространство Хаттори $H(A)$. Это множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, в котором база окрестностей точки x определяется следующим образом:

$$\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon), \forall \varepsilon > 0\}, \text{ если } x \in A \subset \mathbb{R};$$

$$\{[x, x + \varepsilon), \forall \varepsilon > 0\}, \text{ если } x \in \mathbb{R} \setminus A.$$

Заметим, что пространства S_A и пространства Хаттори $H(A)$ удовлетворяют условию теоремы 11 (см. [2]) и, значит, верно следующее

Следствие 12. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, где $E = S_A$ или $E = H(A)$, принадлежит $B_1(E)$ тогда и только тогда, когда для любого непустого замкнутого подмножества $F \subset X$ функция $f|_F$ имеет точку непрерывности.

Благодарность: Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю Хмылевой Татьяне Евгеньевне за ценные советы для выполнения данного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
2. Bouziad A., Sukhacheva E. On Hattori spaces // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 2017. No. 2. P. 213–223. DOI 10.14712/1213-7243.2015.199.
3. van Douwen E.K. Closed copies of the rationals // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 1987. V. 28. No. 1. P. 137–139.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
5. Neubrunnová A. On quasicontinuous and cliquish functions // Časopis pro pěstování matematiky. 1974. V. 99. No. 2. P. 109–114.
6. Osipov A.V., Pytkeev E.G. On sequential separability of functional spaces // Topology and its Applications. 2017. V. 221. P. 270–274.
7. Tkachuk V.V. A Cp-Theory problems book. Topological and functions space. New York: Springer, 2011.
8. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
9. Hattori Y. Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces // Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B Math. Sci. 2010. V. 43. P. 13–26.

Статья поступила 13.04.2018 г.

Sukhacheva E.S. (2018) ON FIRST BAIRE CLASS FUNCTIONS DEFINED ON SOME CLASSES OF NONMETRIZABLE SPACES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 39–46

DOI 10.17223/19988621/53/4

For first Baire class functions given on Polish spaces, Baire's and Lebesgue's criteria are known. We prove analogs of these theorems for topological spaces that are both hereditarily Lindelöf and hereditarily Baire spaces.

An analogue of Lebesgue's theorem is as follows: let a space X be a hereditarily Lindelöf space and a function $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. A function f is a first Baire class function if and only if the inverse image of an open set in $\mathbb{R}$ has type F_σ .

The necessity of the following theorem is true for hereditarily Baire spaces and the proof uses the concept of cliquish functions. We affirm that sufficiency is true for hereditarily Lindelöf spaces.

An analogue of Baire's theorem is as follows: let X be a hereditarily Lindelöf and hereditarily Baire space. A function $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ belongs to the set of first Baire class functions if and only if for any non-empty closed subset F the function $f|_F$ has a point of continuity.

For a subset A of the real line $\mathbb{R}$, a modification of the Sorgenfrey line S denoted as S_A is defined as follows: neighborhoods of points from A are given by neighborhoods of the right half-open topology, and those in the complement of A are given by neighborhoods of the left half-open topology. For a subset A of the real line $\mathbb{R}$, a Hattori space denoted as $H(A)$ is defined as follows: neighborhoods of points from A are given by usual Euclidean neighborhoods and those in the complement of A are given by neighborhoods of the right half-open topology. In particular, spaces $S = S_\emptyset$, S_A , and $H(A)$ satisfy the conditions of the previous two theorems.

Keywords: Sorgenfrey line, function of the first Baire class, hereditarily Baire space, hereditarily Lindelöf space, cliquish function, F_σ and G_δ sets.

AMS Mathematical Subject Classification: 54E52, 26A21

SUKHACHEVA Elena Sergeevna (Postgraduate student faculty of mechanics and mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation; Département de Mathématiques, Université de Rouen, UMR CNRS 6085, Avenue de l'Université, BP.12, F76801 Saint-Etienne-du-Rouvray, France). E-mail: sirius9113@mail.ru

REFERENCES

1. Aleksandrov P.S. (1977) *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* [Introduction to the set theory and general topology]. Moscow: Nauka. 368 p.
2. Bouziad A., Sukhacheva E. (2017) On Hattori spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. 2. pp. 213–223. DOI 10.14712/1213-7243.2015.199.
3. van Douwen E.K. (1987) Closed copies of the rationals. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. 28(1). pp. 137–139.
4. Natanson I.P. (1974) *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of functions of a real variable]. Moscow: Nauka. 480 p.
5. Neubrunnová A. (1974) On quasicontinuous and cliquish functions. *Časopis pro pěstování matematiky*. 99(2). pp. 109–114.
6. Osipov A.V., Pytkееv E.G. (2017) On sequential separability of functional spaces. *Topology and its Applications*. 221. pp. 270–274. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.02.059>.
7. Tkachuk V.V. (2011) *A C_p -Theory problems book. Topological and functions space*. New York: Springer.
8. Engelking R. (1977) *General Topology*. Warszawa: PWN Publ.
9. Hattori Y. (2010) Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces. *Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B Math. Sci.* 43. pp. 13–26.

МЕХАНИКА

УДК 531.351

DOI 10.17223/19988621/53/5

М.А. Бубенчиков, О.Э. Колыхалова, О.В. Усенко

РАСЧЕТ ПРОНИЦАЕМОСТИ УКЛАДОК
МНОГОСТЕННЫХ НАНОТРУБОК

В рамках ньютоновской механики строится квазидетерминированное описание процесса проникновения молекул через нанопористые структуры, в частности через систему параллельно уложенных открытых углеродных нанотрубок (УНТ). Дается строгое обоснование подхода в случае, когда сечение пор не меняется по толщине слоя. Метод расчета опирается на определение средней энергии воздействия от рассматриваемой системы трубок на пробную молекулу. Установлено, что укладки открытых трубок дают высокую степень разделения смесей CH_4/He при производительности, отвечающей режиму сверхпроницаемости системы.

Ключевые слова: потенциал взаимодействия молекула – нанотрубка, укладка трубок, проницаемость укладки, селективность разделения метан-гелиевой смеси.

Интерес к поверхностным углеродным структурам обусловлен широким спектром возможных приложений. Традиционно большой интерес вызывают вопросы электронной проводимости самого графена и структур на его основе [1, 2]. В настоящее время множество работ также посвящено изучению углеродных нанотрубок (УНТ). Так, например, в [3] рассмотрены структурные параметры, электронные свойства и квантовая емкость УНТ. Работа [4] освещает работы по фотопроводимости многостенных УНТ. Обеспечивающие очевидный практический результат каталитические свойства УНТ рассмотрены в [5 и 6]. Результаты по разделению газовых смесей представлены в работах [7 и 8]. Энергетические взаимодействия между атомами внутри структуры приводят к задачам механики углеродных структур, решение которых дает данные по упругим свойствам одностенных УНТ [9], по механическим свойствам при растяжении графена [10], по изгибу и вибрации УНТ [11], по неустойчивости УНТ, обернутой молекулой полиэтилена [12]. Перенос энергии колебаний атомов как в чисто углеродных, так и в смешанных структурах, называемый теплопроводностью нанообъектов, рассмотрен в работах [13,14]. В них рассматривается один из аспектов коллективного взаимодействия атомов углеродной структуры, а именно трансляция энергии в одном из направлений. В задачах прохождения свободных молекул через нанопористые структуры определяющим является аспект взаимодействия отдельных молекул с фрагментами структуры, в качестве которых часто выступают УНТ. Это привело к созданию высокопроизводительных микс-матричных мембран для эффективного разделения газовых смесей [15–17]. Важными также являются работы по кана-

лированию протонов через углеродную трубку [18] и по использованию УНТ для хроматографического разделения [19].

Очень интересными для теоретического изучения и перспективными для практического применения являются чистые УНТ-материалы [20]. Именно такой материал рассматривается в настоящей работе, который в конце концов используется для анализа разделения CH_4/He -смеси.

Личный опыт авторов связан с вопросами математического моделирования проницаемости на базе молекулярно-кинетических моделей [21–25].

Трубки, не содержащие пор на боковой поверхности, являются непроницаемыми в отношении поперечных переходов любых молекул и атомов. В связи с этим газовые компоненты могут двигаться лишь по межтрубному пространству по треугольным туннелям или через саму трубку, являющуюся цилиндрическим туннелем. Трубки, уложенные параллельно друг другу, образуют некий слой, в котором объем свободного пространства будет пропорционален свободной площади, находящейся в нормальном по отношению к осям трубок сечении. В методе эквивалентного однородного слоя свободное пространство начинается непосредственно от стенки 2D-материала, и это очень удобно, поскольку можно проводить интегрирование по всей рассматриваемой области.

Рассмотрим проницаемость системы параллельно уложенных многостенных УНТ. На первый взгляд кажется, что внешние слои трубки не оказывают влияния на движение молекул в приосевой зоне трубки. Однако это не так. Хвосты потенциальных ям, порожденных каждым отдельным внутренним слоем (рис. 1), складываются и обеспечивают большую скорость прохождения молекул в продольном направлении в сравнении со случаем одностенной трубки. Идеальная укладка трубок позволяет применить достаточно строгий подход при описании процесса взаимодействия молекул с углеродной структурой.

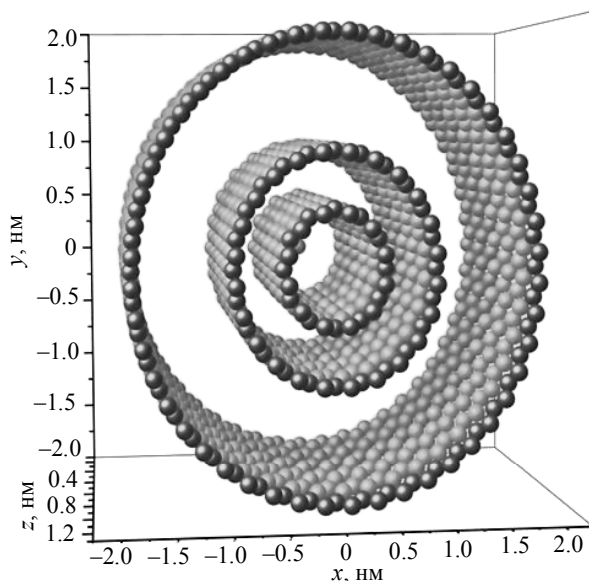


Рис. 1. Фрагмент трехстенной УНТ, не содержащий торцевых крышек
Fig. 1. Fragment of a three-walled carbon nanotube (CNT) without end caps

Туннельные структуры

Под туннельными структурами будем понимать систему параллельно уложенных нанотрубок, а также фуллерит, сэндвич-структуру и другие идеальные системы, в которых просматривается туннель. УНТ – совершенный туннель со стенками, запрещающими боковые переходы молекул (туннель закрытого типа).

Если решить задачу о прохождении молекулы сквозь открытую одностенную УНТ, то мы увидим, что четверть сечения стандартной трубки свободно для прохождения молекул. Перемещающаяся частица, направленная внутрь трубки, затягивается в туннель, где продолжает движение в приосевой зоне трубки. При этом в первой половине по длине трубки ее скорость увеличивается в несколько раз, во второй половине и при выходе из УНТ – снижается до начального уровня скоростей. Это отличает молекулярный туннель от движения капсулы в трубе пневматической системы или движения света в оптическом волокне, где скорости движения не зависят от длины туннеля.

В результате из-за ускорения движения средняя скорость молекулы внутри УНТ увеличивается более чем в два раза по сравнению со скоростью входа. Таким образом, молекулы, попавшие в трубку, долго там не задерживаются. Другими словами, сам туннель стремится освободиться от находящихся в нем частиц. Поэтому сорбционных (физическая сорбция) молекул внутри трубки нет. Могут быть только встречные молекулы, число которых можно свести к минимуму за счет уменьшения противодавления. Таким образом, скорость частицы в молекулярном туннеле направлена по оси туннеля и всегда выше средней скорости теплового движения молекул. Причем если молекула попала в туннель, то ее движение остается однонаправленным. Все это создает основы для сверхпроницаемости мембран, выполненных из параллельно уложенных открытых нанотрубок.

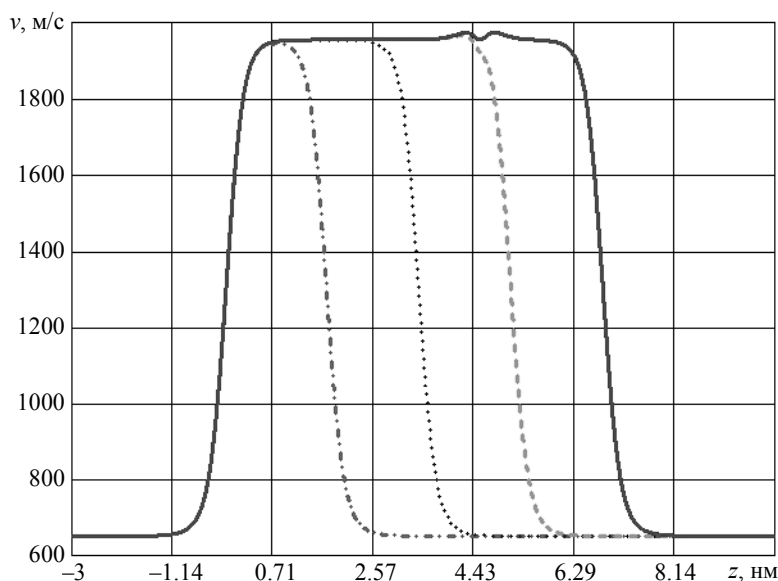


Рис. 2. Скорость атомов гелия при прохождении нанотрубок различной длины (длины трубок равны 1.69, 3.38, 5.07 и 6.76 нм соответственно)

Fig. 2. Velocity of the helium atoms when passing nanotubes of various lengths (the lengths are of 1.69, 3.38, 5.07, and 6.76 nm, respectively)

На рис. 2 показано распределение скоростей при движении атомов гелия по осевой линии нанотрубок различной длины. Как видно из рисунков, средняя скорость частиц более чем в два раза выше скорости входа в трубку.

Таким образом, молекула проходит рассматриваемый идеальный туннель очень быстро.

Это никак не вяжется с диффузионными скоростями, которые на несколько порядков ниже тепловой скорости движения молекул. Поэтому применение схемы определения диффузионной проницаемости к туннельным структурам нецелесообразно. Нужна другая процедура, которая будет опираться на определение массы прошедшего через мембрану вещества в условиях неглубокого вакуума справа от мембраны.

Если настроить туннельную структуру (регулируя перепад давления p_1/p_2) на разделение газов таким образом, что молекулы будут двигаться по туннелю цепочкой в нужном направлении, то встречные не попадут в мембрану, а столкновения будут уже за фильтрующим слоем. Не будет и роста температуры за счет того, что внутри туннеля практически нет столкновений молекул со стенкой.

Математическая модель проницаемости слоя

В дальнейшем нам понадобится среднее значение энергии взаимодействия на свободных участках движения молекул и атомов в межтрубном пространстве. Для того чтобы избежать особенности в распределении энергии, т.е. иметь конечное ее значение вплоть до самой стенки, воспользуемся модифицированным LJ -потенциалом [24]. С его помощью осесимметричное распределение энергии внутри и вокруг трубки конечной длины можно получить, численно проводя двукратное интегрирование [43]:

$$U_k(r, z) = 4\epsilon a_k q \int_0^{2\pi} \int_0^l \left(\frac{\sigma}{\rho} \right) \text{th} \left[\left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{11} - \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^5 \right] d\varphi' dz', \quad (1)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi' + (z - z')^2, \quad (2)$$

где r, z – цилиндрические координаты; φ', z' – переменные интегрирования; σ, ϵ – параметры LJ -потенциала; a_k ($k = 1, \dots, n$) – радиусы слоев многослойной трубки (нумерация слоев от внутреннего к внешнему); длина трубок l – одинаковая для всех трубок укладки; q – количество атомов углерода на единицу площади поверхностной кристаллической структуры.

Подынтегральное выражение в (1), взятое в нуле, имеет бесконечность, такую как $\frac{1}{\rho}$. Такую же особенность в нуле имеют гравитационный потенциал Ньютона

и потенциал Кулона. В то же время интеграл (1) для точек на поверхности любой наночастицы обеспечивает конечные значения потенциала взаимодействия. Это дает возможность еще раз проинтегрировать энергию взаимодействия, но уже поперек порового пространства. Причем атомы структуры могут попадать на одну из границ интегрирования. Выполнив эту операцию, нетрудно получить 1D-распределение энергии взаимодействия, являющееся барьером для представленных молекул, проходящих сквозь мембрану. Другими словами, представленная модификация LJ -потенциала позволяет для расчета проницаемости нанопористых структур использовать метод эквивалентного однородного слоя [25].

Для последующего изложения лучше иметь аналитическое распределение энергии, которое можно получить лишь аппроксимацией численных значений, полученных на основе (1) и (2). Однако можно пользоваться и данными в виде таблицы таких значений. В любом случае будем считать, что распределение (1) уже вычислено и тем самым задано.

Если энергетическое воздействие оказывается только одной многослойной трубкой, то среднее значение энергии в кольце, захватывающем свободную зону (рис. 3), можно определить по формуле

$$U^{(1)}(z) = \frac{2\pi}{s_e} \sum_{k=1}^n \int_0^{a_e} U_k(r, z) r dr. \quad (3)$$

Здесь n – число внутренних слоев многостенной трубки, a_e – радиус осреднения; $s_e = \pi a_e^2$, где $a_e^2 = (2a + h)\sqrt{2}$; a – собственный радиус трубки; h – шаг укладки.

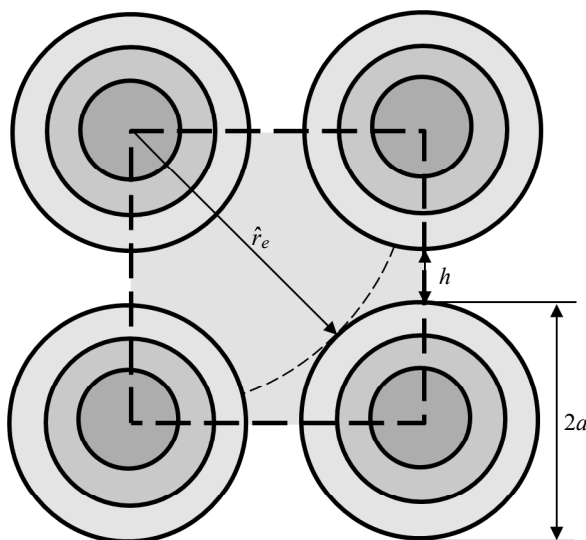


Рис. 3. Фрагмент регулярной укладки трёхстенных нанотрубок
Fig. 3. Fragment of the regular stacking of three-walled nanotubes

Поскольку среднее воздействие от каждой из четырех симметрично расположенных трубок одинаково, то полное воздействие определится простым суммированием:

$$U(z) = 4U^{(1)}(z). \quad (4)$$

Проницаемость однородного слоя определяется лишь поперечной по отношению к слою составляющей движения некоторой молекулы-представителя всех проходящих частиц:

$$m \frac{dw}{dt} = - \frac{dU(z)}{dz}. \quad (5)$$

Здесь m – масса проходящей через слой молекулы, w – нормальная по отношению к слою компонента скорости, $U(z)$ определяется формулами (1) – (4).

Поскольку движение внутри однородного слоя является инерционным, то решение уравнения (5), определяющее поперечную к слою компоненту скорости, включает в себе всю статистику, связанную с местоположением молекулы и ее направлением движения.

Опираясь на распределение Максвелла для частиц, находящихся перед мембраной, можно найти долю прошедших через слой молекул, определяющуюся лишь предельной скоростью молекулы:

$$D_o = 2\sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int_{w_{\text{пр}}}^{\infty} \exp(-\beta w^2) dw. \quad (6)$$

Здесь $w_{\text{пр}}$ – предельная скорость молекулы-представителя.

Распределение Максвелла, справедливое для каждой из подсистем исходной смеси газов, используется здесь как способ набора статистики по исходному состоянию газовых компонент. Определяющую роль в предлагаемой схеме расчета проницаемости однородного слоя имеет процедура нахождения предельной минимальной скорости прохождения молекул. Расчетами было установлено, что для каждой проницаемой мембраны существует ненулевая скорость, ниже которой молекула не проходит слой, а выше – проходит. Причем лимитирует прохождение молекул через однородный слой лишь поперечная к слою компонента скорости. Эта компонента находится из решения соответствующего одномерного уравнения движения (5). При этом другие компоненты скоростей имеют постоянные значения, поскольку перемещения в продольных к поверхности однородного слоя направлениях являются инерционными.

Построенное соотношение (6) учитывает и все наклонные падения молекул. Если при наклонном падении z -компонента скорости $w > w_{\text{пр}}$, то молекула все равно пройдет через слой, как и при нормальном по отношению к поверхности падении. В процессе нахождения $w_{\text{пр}}$ проводится около десятка баллистических испытаний по величине нормальной по отношению к поверхности скорости молекулы. Поэтому соотношение (6) с найденным значением $w_{\text{пр}}$ учитывает всю статистику ударяющихся о стенку молекул и по величинам их скоростей, и по углам наклона траекторий этих молекул к поверхности слоя.

Все интегралы берутся численно с применением формулы трапеций, а уравнение (5) интегрируется по схеме Рунге–Кутты высокого порядка точности.

Результаты расчетов

Найденное по формулам (1) – (4) 1D-распределение потенциальной энергии взаимодействия углеродной структуры позволяет заменить материальных представителей этой структуры (атомы углерода) их энергетическим воздействием. Этот прием является доминирующим в квантовой механике и квантовой химии. Таким образом, как и в задачах химического реагирования, в вопросах проницаемости барьерная теория имеет определяющее значение. Поэтому очень важным является правильное определение формы барьера в направлении проникающего движения молекул (вдоль оси z).

Полученное 1D-распределение энергии для коротких трехслойных трубок представлено на рис. 4. Видно, что форма профиля энергии на входе и выходе и даже сама величина энергии около средней части трубки не зависят от ее длины.

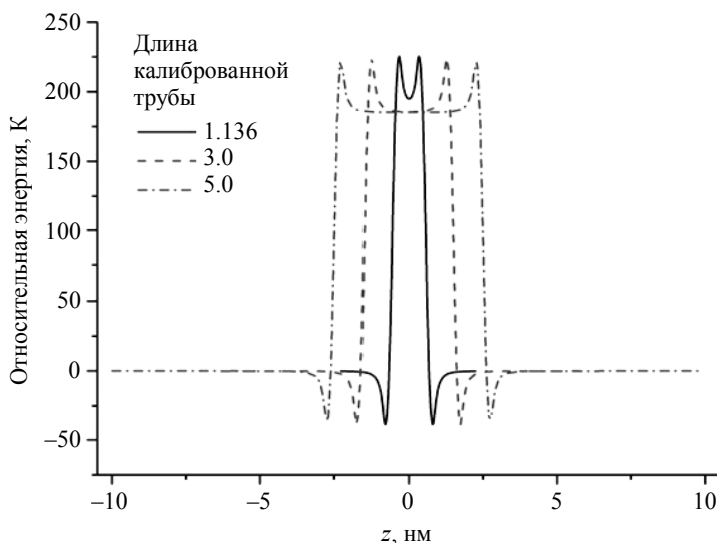


Рис. 4. Распределение энергии в перпендикулярном к слою направлении при различных значениях длины калиброванных трубок

Fig. 4. Energy distribution in a direction perpendicular to the layer for various lengths of calibrated tubes

После получения распределения, заданного этим соотношением, требуется десятков-полтора пусков молекул газа определенного сорта, позволяющих найти предельную скорость для заданного значения параметра укладки h .

Предельная скорость прохождения укладок, отвечающих различным значениям h , представлена на рис. 5. Как видно из рисунка, гелий имеет более низкую минимальную скорость прохождения однородного слоя.

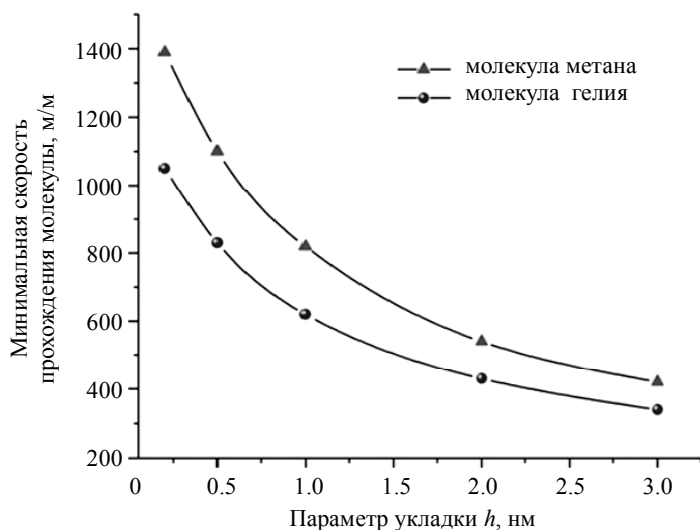


Рис. 5. Предельная скорость прохождения прямоугольной укладки трубок

Fig. 5. Ultimate permeability of the rectangular stacking of tubes

Если учесть, что при нормальных условиях наиболее вероятная скорость движения атомов гелия составляет 1 100 м/с, а молекул метана – всего 550 м/с, то мы получим большое различие в величинах проницаемостей. Эти различия демонстрируются рис. 6, из которого видно, что при $h = 0.5$ нм селективность разделения достигает порядка 100 единиц.

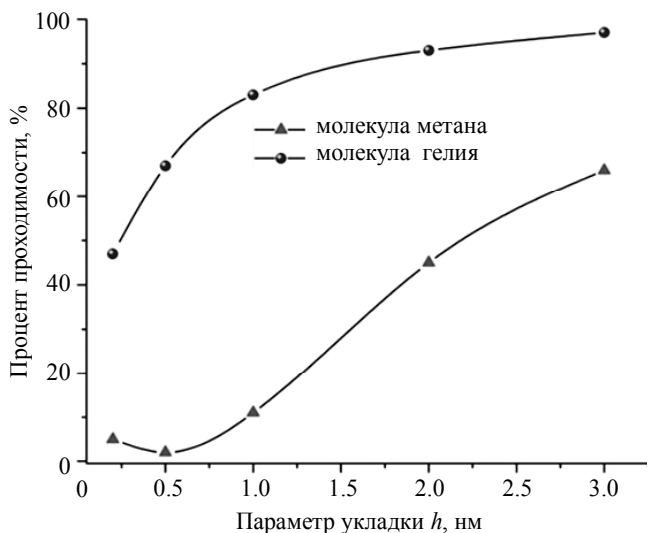


Рис. 6. Кривая проницаемости прямоугольной укладки нанотрубок в отношении атомов гелия и молекул метана

Fig. 6. Permeability curve of the rectangular stacking of nanotubes with respect to helium atoms and methane molecules

Заключение

Таким образом, предложен детерминированный способ расчета относительной проницаемости нанопористых слоев, которая, в конечном счете, определяется статистикой ударов молекул о фронтальную поверхность слоя. Дается достаточно строгое обоснование этого подхода в случае туннельной структуры слоя, а именно для укладки одинаково ориентированных углеродных трубок. В то же время этот способ допускает естественные обобщения на случай произвольной ориентации удлинённых углеродных наночастиц, а также нанофрагментов из других материалов, составляющих компактированные нанопористые слои.

Применение разработанной теории позволило без использования статистических расчетов определить величину относительной проницаемости слоя. Расчетами также установлено, что укладки трехстенных нанотрубок дают более высокую степень разделения смесей CH_4/He в сравнении с укладками трубок, имеющих меньшее количество внутренних слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lima J.R.F. Controlling the energy gap of graphene by Fermi velocity engineering // Phys. Lett. A. 2015. V. 379. No. 3. P. 179–182. DOI: 10.1016/j.physleta.2014.11.005.
2. Radchenko T.M. Effects of nitrogen-doping configurations with vacancies on conductivity in graphene / T.M. Radchenko, V.A. Tatarenko, I.Yu. Sagaljanov, Yu.I. Prylutskyy // Phys. Lett. A. 2014. V. 378. No. 30–31. P. 2270–2274. DOI: 10.1016/j.physleta.2014.05.022.

3. *Masumian E.* Structural, electronic properties, and quantum capacitance of B, N and P-doped armchair carbon nanotubes / E. Masumian, S.M. Hashemianzadeh, A. Nowroozi // *Phys. Lett. A.* 2016. V. 380. No. 41. P. 3378–3383. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.07.067.
4. *Khoshnevisan B.* Photoconductivity enhancement in alkali metal doped multiwall carbon nanotubes / B. Khoshnevisan, M. Zareie Mahmoudabadi, M. Izadifard // *Phys. Lett. A.* 2013. V. 377. No. 42. P. 3033–3037. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.09.029.
5. *Guo Z.H.* Dissociation of methane on the surface of charged defective carbon nanotubes / Z.H. Guo, X.H. Yan, Y. Xiao // *Phys. Lett. A.* 2010. V. 374. No. 13–14. P. 1534–1538. DOI: 10.1016/j.physleta.2010.01.060.
6. *Katin K.P.* Chemisorption of hydrogen atoms and hydroxyl groups on stretched graphene: A coupled QM/QM study / K.P. Katin, V.S. Prudkovskiy, M.M. Maslov // *Phys. Lett. A.* 2017. V. 381. No. 33. P. 2686–2690. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.06.017.
7. *Liu L.* Impact of H₂O on CO₂ separation from natural gas: comparison of carbon nanotubes and disordered carbon / L. Liu, D. Nicholson, S.K. Bhatia // *J. Phys. Chem. C.* 2015. V. 119. P. 407–419. DOI: 10.1021/jp5099987.
8. *Liu L.* Adsorption of CH₄ and CH₄/CO₂ mixtures in carbon nanotubes and disordered carbons: A molecular simulation study / L. Liu, D. Nicholson, S.K. Bhatia // *Chem. Eng. Sci.* 2015. V. 121. P. 268–278. DOI: 10.1016/j.ces.2014.07.041.
9. *Wong C.H.* Compressive characteristics of single walled carbon nanotube with water interactions investigated by using molecular dynamics simulation / C.H. Wong, V. Vijayaraghavan // *Phys. Lett. A.* 2014. V. 378. No. 5–6. P. 570–576. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.12.026.
10. *Mortazavi B.* Nitrogen doping and vacancy effects on the mechanical properties of graphene: A molecular dynamics study / B. Mortazavi, S. Ahzi, V. Toniazzi, Y. Rémond // *Phys. Lett. A.* 2012. V. 376. No. 12–13. P. 1146–1153. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.11.034.
11. *Wang C.Y.* Circumferential nonlocal effect on the buckling and vibration of nanotubes / C.Y. Wang, X.H. Li, Y. Luo // *Phys. Lett. A.* 2016. V. 380. No. 16. P. 1455–1461. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.02.023.
12. *Wang Q.* Buckling of carbon nanotubes wrapped by polyethylene molecules // *Phys. Lett. A.* 2011. V. 375. No. 3. P. 624–627. DOI: 10.1016/j.physleta.2010.12.005.
13. *Zhang Y.Y.* Thermal conductivity of defective graphene / Y.Y. Zhang, Y. Cheng, Q.X. Pei, C.M. Wang, Y. Xiang // *Phys. Lett. A.* 2012. V. 376. No. 47–48. P. 3668–3672. DOI: 10.1016/j.physleta.2012.10.048.
14. *Liu C.* Pressure effects on the thermal resistance of few-layer graphene / C. Liu, Z. Wei, W. Chen, K. Bi, J. Yang, Y. Chen // *Phys. Lett. A.* 2016. V. 380. No. 1–2. P. 248–254. DOI: 10.1016/j.physleta.2015.09.007.
15. *Lin R.* Mixed-matrix membranes with metal-organic framework decorated CNT fillers for efficient CO₂ separation / R. Lin, L. Ge, S. Liu, V. Rudolph, Z. Zhu // *ACS Appl. Mater. Interfaces.* 2015. V. 7. P. 14750–14757. DOI: 10.1021/acsami.5b02680.
16. *Ahmad A.L.* A cellulose acetate/multi-walled carbon nanotube mixed matrix membrane for CO₂/N₂ separation / A.L. Ahmad, Z.A. Jawad, S.C. Low, S.H.S. Zein // *Journal of Membrane Science.* 2014. V. 451. P. 55–66.
17. *He X.* Hybrid fixed-site-carrier membranes for CO₂ removal from high pressure natural gas: Membrane optimization and process condition investigation / X. He, T.-J. Kim, M.-B. Hägg // *J. Membr. Sci.* 2014. V. 470. P. 266–274. DOI: 10.1016/j.memsci.2014.07.016.
18. *Borka Jovanović V.* Channeling of protons through radial deformed carbon nanotubes / V. Borka Jovanović, D. Borka, S.M.D. Galijaš // *Phys. Lett. A.* 2017. V. 381. No. 19. P. 1687–1692. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.03.029.
19. *Intrchom W.* Analytical sample preparation, preconcentration and chromatographic separation on carbon nanotubes / W. Intrchom, S. Mitra // *Curr. Opin. in Chem. Eng.* 2017. V. 16. No. 102. P. 114. DOI: 10.1016/j.coche.2017.05.001.
20. *Zhang L.* Preparation and transport performances of high-density, aligned carbon nanotube membranes / L. Zhang, B. Zhao, C. Jiang, J. Yang, G. Zheng // *Nanoscale Res Lett.* 2015. V. 10. P. 266. DOI: 10.1186/s11671-015-0970-8.

21. Potekaev A.I. New physical ideas and method of description and calculation of resistance to motion of small particles in a gaseous medium / A.I. Potekaev, A.M. Bubenichikov, M.A. Bubenichikov // Russ. Phys. J. 2013. V. 55. No. 12. P. 1434–1443. DOI: 10.1007/s11182-013-9977-8.
22. Bubenichikov M.A. Three fundamental problems of molecular statistics / M.A. Bubenichikov, A.I. Potekaev, A.M. Bubenichikov // Russ. Phys. J. 2013. V. 56. No. 3. P. 341–348. DOI: 10.1007/s11182-013-0038-0.
23. Bubenichikov M.A. Thermophoresis of ultrafine and nanosized particles / M.A. Bubenichikov, A.I. Potekaev, A.M. Bubenichikov // Russ. Phys. J. 2013. V. 56. No. 7. P. 785–790. DOI: 10.1007/s11182-013-0100-y.
24. Bubenichikov A.M. The potential field of carbon bodies as a basis for sorption properties of barrier gas systems / A.M. Bubenichikov, M.A. Bubenichikov, A.I. Potekaev, E.Ye. Libin, Yu.P. Hudobina // Russ. Phys. J. 2015. V. 58. No. 7. P. 882–888. DOI: 10.1007/s11182-015-0586-6.
25. Bubenichikov A.M. Separation of methane-helium mixture by porous graphite / A.M. Bubenichikov, M.A. Bubenichikov, E.A. Tarasov, O.V. Usenko, A.S. Chelnokova // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2017. No. 45. P. 80–87. DOI: 10.17223/19988621/45/7.
26. Андриященко В.А., Рудяк В.Я. Самодиффузия молекул флюида в наноканалах // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2012. № 2. С. 63–66
27. Потеряева В.А., Усенко О.В., Шерстобитов А.А. Дифференциальная проницаемость ультратонкого пористого слоя монодисперсных наночастиц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 96–102.

Статья поступила 16.01.2018 г.

Bubenichikov M.A., Kolykhalova O.E., Usenko O.V. (2018) CALCULATION OF THE PERMEABILITY OF THE STACKINGS OF MULTI-WALLED NANOTUBES *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 47–58

DOI 10.17223/19988621/53/5

Carbon nanotubes (CNTs) with open tips are ideal tunnels for molecules and atoms to move at an average velocity exceeding velocity at the tunnel entrance. A membrane with unique physical properties can be obtained by stackable packing of CNTs. The performance of such membrane is essentially higher than that of the membranes whose mass transfer rate is limited by diffusion transfer. In this paper, a quasi-deterministic description of the molecular penetration through an ideal tunnel structure, in particular, through the regular stacking of carbon nanotubes with open tips, is presented. The mathematical model is based on the fundamental concepts of classical mechanics and is related to development of the barrier theory for the motion of a representative molecule of penetrating particles. Determining of the barrier energy is implemented using a modified Lennard – Jones potential that provides a convergence of the integrals over infinite surfaces, which are perpendicular to the main direction of molecular transport. It is revealed that there exists a minimum velocity limit for a representative molecule motion through the energy barrier found. The values of velocities exceeding the stated limit provide a transparent barrier for molecules. Therefore, the fraction of passing molecules is determined as integral of the Maxwell distribution function with the lower limit equal to the minimum rate of penetration. It is also discovered that three-walled tubes provide higher degree of separation in contrast to the tubes with fewer layers.

Keywords: potential of “molecule–nanotube” interaction, stacking of tubes, stacking permeability, selectivity of the separation of methane-helium mixtures.

BUBENCHIKOV Mikhail Alekseevich (Candidate of Physics and Mathematics, Gazprom Transgaz Tomsk Ltd., Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

KOLYKHALOVA Olga Eduardovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ms.friol@mail.ru

USENKO Olesya Vadimovna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: usenko.olesya@yandex.ru

REFERENCES

1. Lima J.R.F. (2015) Controlling the energy gap of graphene by Fermi velocity engineering. *Physics Letters A*. 379(3). pp. 179–182. DOI: 10.1016/j.physleta.2014.11.005.
2. Radchenko T.M., Tatarenko V.A., Sagalianov I.Yu., Prylutskiy Yu.I. (2014) Effects of nitrogen-doping configurations with vacancies on conductivity in grapheme. *Physics Letters A*. 378(30–31). pp. 2270–2274. DOI: 10.1016/j.physleta.2014.05.022.
3. Masumian E., Hashemianzadeh S.M., Nowroozi A. (2016) Structural, electronic properties, and quantum capacitance of B, N and P-doped armchair carbon nanotubes. *Physics Letters A*. 380(41). pp. 3378–3383. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.07.067.
4. Khoshnevisan B., Zareie Mahmoudabadi M., Izadifard M. (2013) Photoconductivity enhancement in alkali metal doped multiwall carbon nanotubes. *Physics Letters A*. 377(42). pp. 3033–3037. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.09.029.
5. Guo Z.H., Yan X.H., Xiao Y. (2010) Dissociation of methane on the surface of charged defective carbon nanotubes. *Physics Letters A*. 374(13–14) pp. 1534–1538. DOI: 10.1016/j.physleta.2010.01.060.
6. Katin K.P., Prudkovskiy V.S., Maslov M.M. (2017) Chemisorption of hydrogen atoms and hydroxyl groups on stretched graphene: A coupled QM/QM study. *Physics Letters A*. 381(33). pp. 2686–2690. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.06.017.
7. Liu L., Nicholson D., Bhatia S.K. (2015) Impact of H₂O on CO₂ separation from natural gas: Comparison of carbon nanotubes and disordered carbon. *Journal of Chemical Physics*. 119. pp. 407–419. DOI: 10.1021/jp5099987.
8. Liu L., Nicholson D., Bhatia S.K. (2015) Adsorption of CH₄ and CH₄/CO₂ mixtures in carbon nanotubes and disordered carbons: A molecular simulation study. *Chemical Engineering Science*. 121. pp. 268–278. DOI: 10.1016/j.ces.2014.07.041.
9. Wong C.H., Vijayaraghavan V. (2014) Compressive characteristics of single walled carbon nanotube with water interactions investigated by using molecular dynamics simulation. *Physics Letters A*. 378(5–6). pp. 570–576. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.12.026.
10. Mortazavi B., Ahzi S., Toniazzo V., Rémond Y. (2012) Nitrogen doping and vacancy effects on the mechanical properties of graphene: A molecular dynamics study. *Physics Letters A*. 376(12–13). pp. 1146–1153. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.11.034.
11. Wang C.Y., Li X.H., Luo Y. (2016) Circumferential nonlocal effect on the buckling and vibration of nanotubes. *Physics Letters A*. 380(16). pp. 1455–1461. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.02.023.
12. Wang Q. (2011) Buckling of carbon nanotubes wrapped by polyethylene molecules. *Physics Letters A*. 375(3). pp. 624–627. DOI: 10.1016/j.physleta.2010.12.005.
13. Zhang Y.Y., Cheng Y., Pei Q.X., Wang C.M., Xiang Y. (2012) Thermal conductivity of defective grapheme. *Physics Letters A*. 376(47–48). pp. 3668–3672. DOI: 10.1016/j.physleta.2012.10.048.
14. Liu C., Wei Z., Chen W., Bi K., Yang J., Chen Y. (2016) Pressure effects on the thermal resistance of few-layer grapheme. *Physics Letters A*. 380(1–2). pp. 248–254. DOI: 10.1016/j.physleta.2015.09.007.
15. Lin R., Ge L., Liu S., Rudolph V., Zhu Z. (2015) Mixed-matrix membranes with metal-organic framework decorated CNT fillers for efficient CO₂ separation. *ACS Appl. Mater. Interfaces*. 7. pp. 14750–14757. DOI: 10.1021/acsami.5b02680.

16. Ahmad A.L., Jawad Z.A., Low S.C., Zein S.H.S. (2014) A cellulose acetate/multi-walled carbon nanotube mixed matrix membrane for CO₂/N₂ separation. *Journal of Membrane Science*. 451. pp. 55–66. DOI: 10.1016/j.memsci.2013.09.043.
17. He X., Kim T.J., Hägg M.B. (2014) Hybrid fixed-site-carrier membranes for CO₂ removal from high pressure natural gas: Membrane optimization and process condition investigation. *Journal of Membrane Science*. 470. pp. 266–274. DOI: 10.1016/j.memsci.2014.07.016.
18. Borka Jovanović V., Borka D., Galijaš S.M.D. (2017) Channeling of protons through radial deformed carbon nanotubes. *Physics Letters A*. 381(19). pp. 1687–1692. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.03.029.
19. Intrichom W., Mitra S. (2017) Analytical sample preparation, preconcentration and chromatographic separation on carbon nanotubes. *Current Opinion in Chemical Engineering*. 16(102). pp. 102–114. DOI: 10.1016/j.coche.2017.05.001.
20. Zhang L., Zhao B., Jiang C., Yang J., Zheng G. (2015) Preparation and transport performances of high-density, aligned carbon nanotube membranes. *Nanoscale Research Letters*. 10. P. 266. DOI: 10.1186/s11671-015-0970-8.
21. Potekaev A.I., Bubenichikov A.M., Bubenichikov M.A. (2013) New physical ideas and method of description and calculation of resistance to motion of small particles in a gaseous medium. *Russian Physics Journal*. 55(12). pp. 1434–1443. DOI: 10.1007/s11182-013-9977-8.
22. Bubenichikov M.A., Potekaev A.I., Bubenichikov A.M. (2013) Three fundamental problems of molecular statistics. *Russian Physics Journal*. 56(3). pp. 341–348. DOI: 10.1007/s11182-013-0038-0.
23. Bubenichikov M.A., Potekaev A.I., Bubenichikov A.M. (2013) Thermophoresis of ultrafine and nanosized particles. *Russian Physics Journal*. 56(7). pp. 785–790. DOI: 10.1007/s11182-013-0100-y.
24. Bubenichikov A.M., Bubenichikov M.A., Potekaev A.I., Libin E.Ye., Hudobina Yu.P. (2015) The potential field of carbon bodies as a basis for sorption properties of barrier gas systems. *Russian Physics Journal*. 58(7). pp. 882–888. DOI: 10.1007/s11182-015-0586-6.
25. Bubenichikov A.M., Bubenichikov M.A., Tarasov E.A., Usenko O.V., Chelnokova A.S. (2017) Separation of methane-helium mixture by porous graphite. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 45. pp. 80–87. DOI: 10.17223/19988621/45/7.
26. Andryushchenko V.A., Rudyak V.Ya. (2012) Samodiffuziya molekul flyuida v nanokanalakh [Self-diffusion of fluid molecules in nano-channels]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 18. pp. 63–66.
27. Poteryaeva V.A., Usenko A.V., Sherstobitov A.A. (2015) Differentsial'naya pronitsaemost' ul'tratonkogo poristogo sloya monodispersnykh nanochastits [Differential permeability of an ultra-thin porous layer of monodisperse nanoparticles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 34. pp. 96–102. DOI: 10.17223/19988621/34/9.

УДК 532.543

DOI 10.17223/19988621/53/6

А.А. Глазунов, И.В. Еремин, К.Н. Жильцов,
К.В. Костюшин, И.М. Тырышкин, В.А. Шувариков

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИН ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ
И СОБСТВЕННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ
В КАМЕРАХ СГОРАНИЯ С НАПОЛНИТЕЛЕМ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ¹**

Проведено численное моделирование возникновения неустойчивости течения и автоколебаний давления для камер сгорания с наполнителем сложной формы. Расчет течения продуктов сгорания в газодинамическом тракте проводился в рамках однофазной модели на основе решения уравнений Навье – Стокса для сжимаемой среды. Показано влияние модели турбулентности $k-\epsilon$ и модели крупномасштабных вихрей (LES) на характеристики пульсаций давления. Предложен подход для определения положения первых мод колебаний давления в камерах сгорания сложной геометрии.

Ключевые слова: камера сгорания, продукты сгорания, газовая динамика, турбулентность, математическое моделирование, пульсации давления, частотный анализ, собственные акустические колебания.

Процессы, протекающие в камере сгорания ракетного двигателя на твердом топливе (ТТ), характеризуются высокими давлениями, скоростями горения топлива и сложным составом продуктов сгорания [1–4]. Автоколебания рабочих параметров, выходящие за установленные пределы, могут приводить к развитию неустойчивости процессов в камере сгорания (КС) с последующим нарушением работы отдельных систем и ракетного двигателя в целом. Основными источниками такой неустойчивости могут быть как нестационарное горение заряда ТТ, так и газодинамическая неустойчивость крупномасштабных вихревых структур [3].

Развитие неустойчивости в объеме камеры сгорания происходит под действием возмущений, образующих волны давления [4]. Такие волны давления распространяются в продольном направлении с частотами близкими к собственным акустическим частотам камеры сгорания. Собственные акустические частоты колебаний давления в камере сгорания обычно находятся в диапазоне $f \approx 100\text{--}1000$ Гц. При сложной конфигурации камер сгорания в современных РДТТ в процессе работы двигателя поток продуктов сгорания представляет собой сложную структуру с наличием застойных зон. Сложная, изменяющаяся во времени геометрия приводит к газодинамической неустойчивости потока, возможному срыву течения и последующему интенсивному образованию крупномасштабных вихревых структур. Вихри генерируют акустические сигналы, влияющие на изменение характеристик основного течения. Когда полоса частот вихреобразования совпадает с собственными акустическими колебаниями камеры сгорания, происходит захват частот и повышение величины пульсаций давления в КС.

¹ Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России, проект № 9.9063.2017/8.9.

В последнее время проводится достаточно большое число работ по исследованию природы возникновения неустойчивых режимов работы в камерах РДТТ, выработаны методические рекомендации по определению собственных колебаний для камер сгорания [5, 6]. В работе [3] представлены исследования гидродинамической природы низкочастотных колебаний, обусловленные неустойчивостью крупномасштабных вихревых структур в основном потоке газа, а в [7–9] – исследования влияния нестационарных режимов горения твердого топлива на колебания давления в камерах сгорания. В [10] предложена и апробирована модель внутрикамерного процесса в ракетном двигателе на твердом топливе с учетом инерционности газофазных процессов в волне горения твердого ракетного топлива. Работы [11, 12] посвящены подробному изучению вихревой динамики в каналах РДТТ различных конфигураций и их влиянию на величину колебаний давления. В работе [13] приводятся численные расчеты течения в двухкамерном РДТТ с возникающими низкочастотными колебаниями давления. Следует отметить, что во всех исследованиях рассматриваются ракетные двигатели с твердотопливными зарядами различных конфигураций [14], что связано с реализацией заданной кривой давления в камере сгорания. Таким образом, учет геометрии наполнителя требует уточнения устоявшихся методик определения собственных частот камер сгорания с целью определения источника колебаний давления.

В данной работе с использованием пакета прикладных программ FLUENT приведены результаты тестирования методики определения собственных частот газовой полости камер сгорания. Для математического моделирования привлекается решение уравнений газовой динамики совместно с низкорейнольдсовой моделью турбулентности $k-\varepsilon$ [15] или моделью крупномасштабных вихрей [16]. Изучение газодинамической структуры течения показывает, что интенсивное вихреобразование в случае использования модели LES может вносить существенный вклад в положение первых мод и амплитуду акустических колебаний давления.

Постановка задачи

Решается осесимметричная задача о течении потока продуктов сгорания в объеме камеры сгорания и сопловом блоке. Продукты сгорания представляют собой высокотемпературный газ, вдуваемый с поверхности горения с постоянным расходом. Газ является однофазной сжимаемой средой, термодинамические свойства которого соответствуют равновесным параметрам двухфазной смеси продуктов сгорания типового смесового твердого топлива [14]. Физическая постановка задачи схематически представлена на рис. 1, где показан разрез двигателя с утопленным соплом. Форма заряда твердого топлива включает осесимметричную радиальную щель. Стрелками показан вдув продуктов сгорания с поверхности горения.

Расчетная область и граничные условия

Размер сетки расчетной области при проведении расчетов составляет более $3 \cdot 10^6$ ячеек. Сетка состоит из прямоугольных элементов и создается в предпроцессоре GAMBIT. На границах, являющихся стенками камеры сгорания и сопла обеспечивается дополнительное сгущение сетки для удовлетворения условия по y^+ для соответствующей модели турбулентности.

На входной проницаемой границе имитируется процесс горения твердого топлива на стационарном участке кривой давления и задаются граничные условия постоянства массового расхода, энтальпии и направления вектора скорости по нормали к поверхности. На твердых непроницаемых стенках реализуются условия прилипания, на оси симметрии – условия симметрии. На срезе сопла, являющемся выходной границей, используется условие сверхзвукового истечения газа ($p_{\text{атм}} = 0$). На рис. 2 изображена схема расчетной области, геометрические параметры которой представлены в табл. 1.

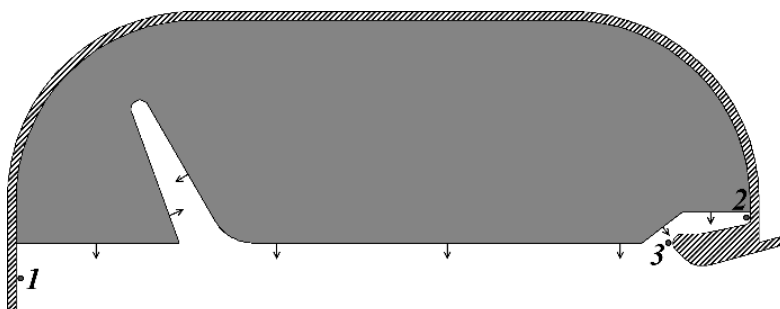


Рис. 1. Камера сгорания с зарядом и соплом
Fig. 1. Combustion chamber with charge and nozzle

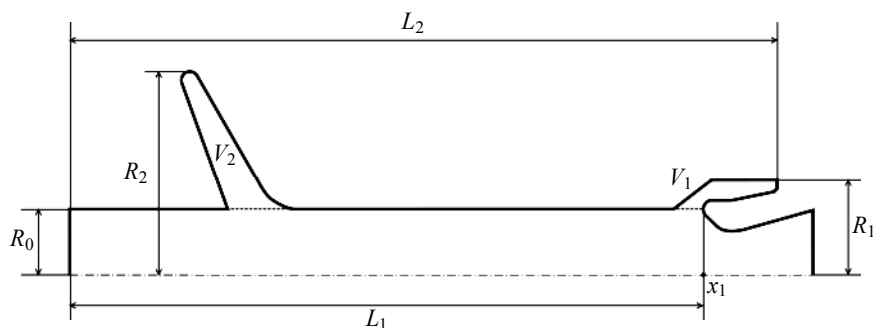


Рис. 2. Схема расчетной области
Fig. 2. Schematic view of the computation domain

Таблица 1

Геометрические параметры расчетной области

Параметр	Обозначение	Величина
Длина КС до входа в сопло	L_1	1.47 м
Полная длина КС	L_2	1.64 м
Радиус цилиндрического участка КС	R_0	0.152 м
Радиус утопленной части	R_1	0.22 м
Радиус боковой щели	R_2	0.47 м
Объем утопленной части	V_1	0.043 м ³
Объем боковой щели	V_2	0.107 м ³
Входное сечение сопла	x_1	–0.064 м

Вычислительная методика

Численные исследования проведены с использованием пакета программ FLUENT 6.3, который успешно применяется для расчета задач газодинамики и внутренней баллистики. Для расчета уравнений неразрывности, момента импульса и энергии используется связный решатель, позволяющий получать устойчивое решение. Осредненные уравнения Навье – Стокса замыкаются уравнениями модели турбулентности k – ϵ . В случае использования модели крупных вихрей уравнения Навье – Стокса рассчитываются непосредственно для крупных вихревых структур, а для мелких вихрей, размер которых меньше размера расчетной ячейки, – с помощью модели турбулентности Смагоринского – Лилли [15]. Применяемые разностные схемы имеют второй порядок точности по времени и пространству. Методические расчеты показали, что шаг интегрирования по времени равный $1 \cdot 10^{-5}$ с позволяет фиксировать пульсации давления в камере сгорания для получения спектра сигнала с высоким разрешением.

Пульсации давления записываются на установленных в расчетной области 3 виртуальных точках. Точка № 1 расположена у переднего днища камеры сгорания, точки № 2 и № 3 – в утопленной части сопла (см. рис. 1). Математическое моделирование работы газодинамического тракта проводилось в два этапа. На первом этапе через поверхность горения по нормали производился вдув газа и проводился расчет до установления поля течения в газодинамическом тракте. На втором этапе, для получения колебательного характера процесса, вдув рабочего газа с поверхности горения резко увеличивается. Поле течения, полученное на первом этапе, используется здесь в качестве начальных условий. Общее физическое время моделирования для всех проведенных вариантов расчетов составляло 0.5 с, что является достаточным для определения характеристик пульсаций давления в камере сгорания с использованием метода быстрого преобразования Фурье.

Методы исследования

Аналитическая методика

Аналитические методы исследования собственных акустических частот колебаний в камерах сгорания подразумевают взаимодействие волн давления, возникающих в газе, с поверхностью горения и стенками камеры сгорания. При этом формула определения собственных акустических частот в соответствии с [4] записывается как

$$f = \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{2\alpha_{mk}}{D}\right)^2}, \quad (1)$$

где a – скорость звука в газе; L – длина камеры сгорания; D – диаметр камеры сгорания; n – целое число, определяющее моду продольных колебаний; m, k – целые числа, определяющие радиальные и тангенциальные моды.

В соответствии с [4] предполагается, что в камерах сгорания, длина которых значительно больше поперечных размеров, колебания давления, значительно влияющие на работу камеры сгорания, возникают, как правило, на частотах продольных мод. Таким образом, формулу (1) можно преобразовать к виду

$$f_L = \frac{a}{2L} n = \frac{\sqrt{\gamma(RT)_{\text{cp}}}}{2L} n, \quad (2)$$

где $(RT)_{\text{cp}}$ – осредненное значение по всей камере.

Расчет пульсаций давления и частотный анализ

Пульсации давления определяются на виртуальных точках следующим образом:

$$p'_i = p_i - p_{\text{кам}},$$

где p_i – локальные изменения давления в виртуальных точках, $p_{\text{кам}}$ – среднее по объему газовой полости значение давления в камере сгорания в текущий момент времени.

Полученные сигналы пульсационных составляющих давления раскладываются в частотный спектр с помощью прямого преобразования Фурье:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt,$$

где $f(t)$ – непрерывный сигнал исходной функции, $F(\omega)$ – частотный сигнал.

Результаты расчетов

С использованием изложенной методики расчета проведены численные исследования по определению собственных частот газовых полостей камер сгорания с наполнителями сложной формы. На рис. 3 приведены результаты расчетов по сравнению влияния модели турбулентности k – ε и модели LES на распределение газодинамических характеристик для исходной конфигурации (рис. 1). Видно, что картины течения на этапе вдува продуктов сгорания с поверхности сильно отличаются. В частности, для модели LES хорошо показана динамика крупномасштабных вихревых структур. На рис. 4 представлены распределения давления по сечению камеры вдоль оси двигателя, от переднего днища до входа в сопло, на стационарном участке кривой давления.

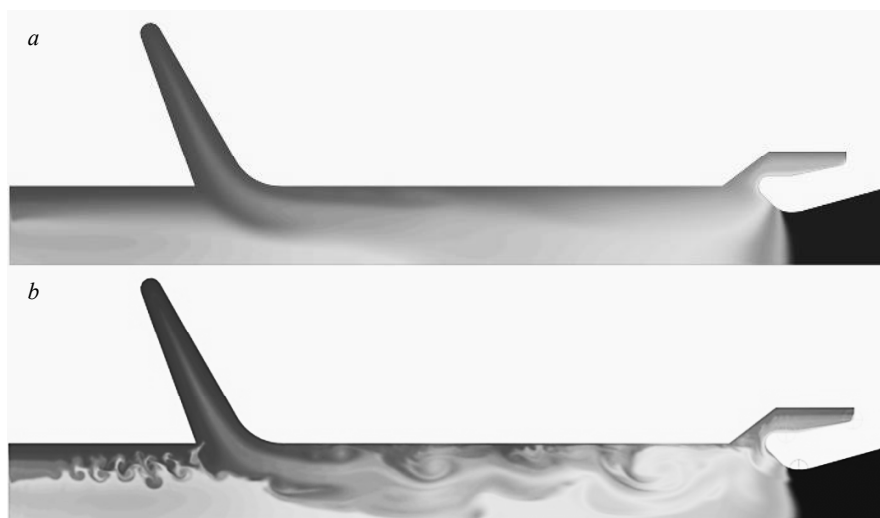


Рис. 3. Распределения плотности для модели k – ε (a) и LES (b) в начальный момент времени

Fig. 3. Density distribution for (a) k – ε model and (b) LES-model at the initial time instant

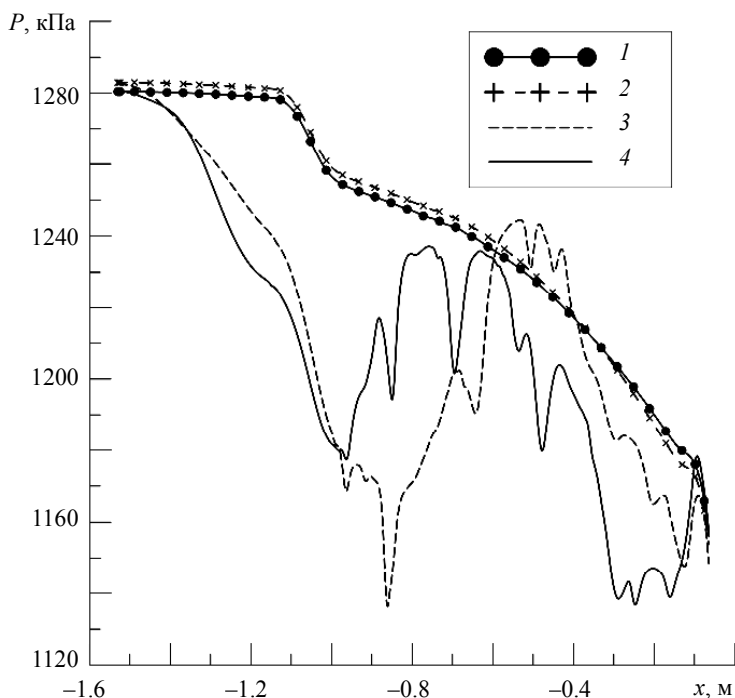


Рис. 4. Распределения давления в продольном сечении цилиндрической части камеры сгорания: 1 – k - ϵ -модель при $t = t_1$; 2 – k - ϵ -модель при $t = t_2$; 3 – LES-модель при $t = t_1$; 4 – LES-модель при $t = t_2$

Fig. 4. Pressure distributions in the axial cross-section of cylindrical part of the combustion chamber: 1, k - ϵ model at $t = t_1$; 2, k - ϵ model at $t = t_2$; 3, LES model at $t = t_1$; and 4, LES model at $t = t_2$

Кривые 1, 2 показывают распределение давления, рассчитанного по осреднённой модели k - ϵ в моменты времени t_1 и t_2 , а кривые 3, 4 – аналогичные распределения давления рассчитанные с использованием модели LES. Видно, что распределение давления вдоль оси двигателя существенно немонотонно в случае модели LES, что является следствием вихревой структуры течения. Применение решений на основе осредненных моделей в данном случае не дает полного представления о картине течения и исключает возможность определения источника пульсаций. Это, в свою очередь, не позволяет выработать методы борьбы с колебаниями.

На рис. 5 представлены результаты частотного анализа сигналов с точек № 1–3 для расчета течения с привлечением модели турбулентности k - ϵ . Видно, что положение 1-й моды совпадает для точек, расположенных у переднего днища и в утопленном сопле. Амплитуда пульсаций 1-й моды в точке № 1 составляет порядка 430 Па. В то же время в точках № 2 и 3 в утопленной части сопла амплитуда составляет величину 880 Па. Такую разницу в амплитудах пульсаций можно объяснить исходя из выводов, полученных в [3]. В данном случае, в застойной зоне, имеющей место в утопленной части сопла, создается область завихренности, вихревая частота которой определяется размерами контактного разрыва потенциального и вихревого полей течения. Вследствие этого происходит наложение 1-й

моды собственных частот акустических колебаний и частот вихревых колебаний застойной зоны, что приводит к локальному увеличению амплитуды пульсаций. Стоит заметить, что на всех виртуальных точках нет ярко выраженной 2-й моды, а 3-я мода фиксируется только в точке № 1 у переднего днища.

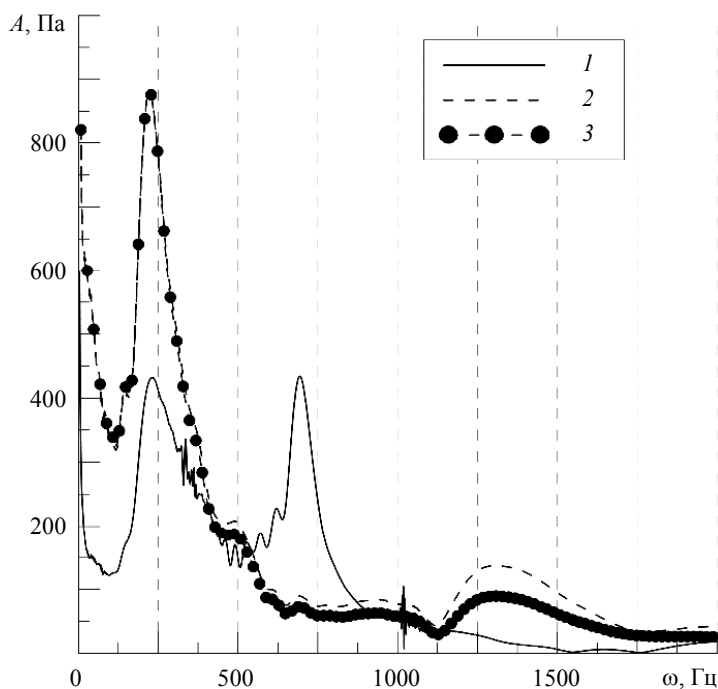


Рис. 5. Частотный спектр пульсаций давления на виртуальных точках № 1–3, рассчитанный моделью $k-\varepsilon$
Fig. 5. Frequency range of the pressure oscillations on the virtual sensors No. 1–3 calculated using $k-\varepsilon$ model

На рис. 6 приведены результаты частотного анализа сигналов с виртуальных точек № 1 (рис. 6, *a*) и № 2 (рис. 6, *b*) для расчета, выполненного моделью LES. Данные в точке № 3 в данном случае опускаются, так как спектры и амплитуды пульсаций давления практически идентичны точке № 2. Амплитуда 1-й моды колебаний выше в 2 раза, по сравнению с предыдущим расчетом, и на виртуальном датчике № 1 составляет порядка 850 Па, а в точке № 2 – 1850 Па. Вид частотного спектра пульсаций давления при расчете моделью LES существенно отличается от расчетов, выполненных для осредненного течения с привлечением модели $k-\varepsilon$ (рис. 5, 6).

Методика определения собственных частот камер сгорания

Методика определения собственных частот по формуле (2) хорошо работает для цилиндрических камер сгорания. В случае сложной конфигурации заряда, которая является источником газодинамических возмущений в потоке, однозначное

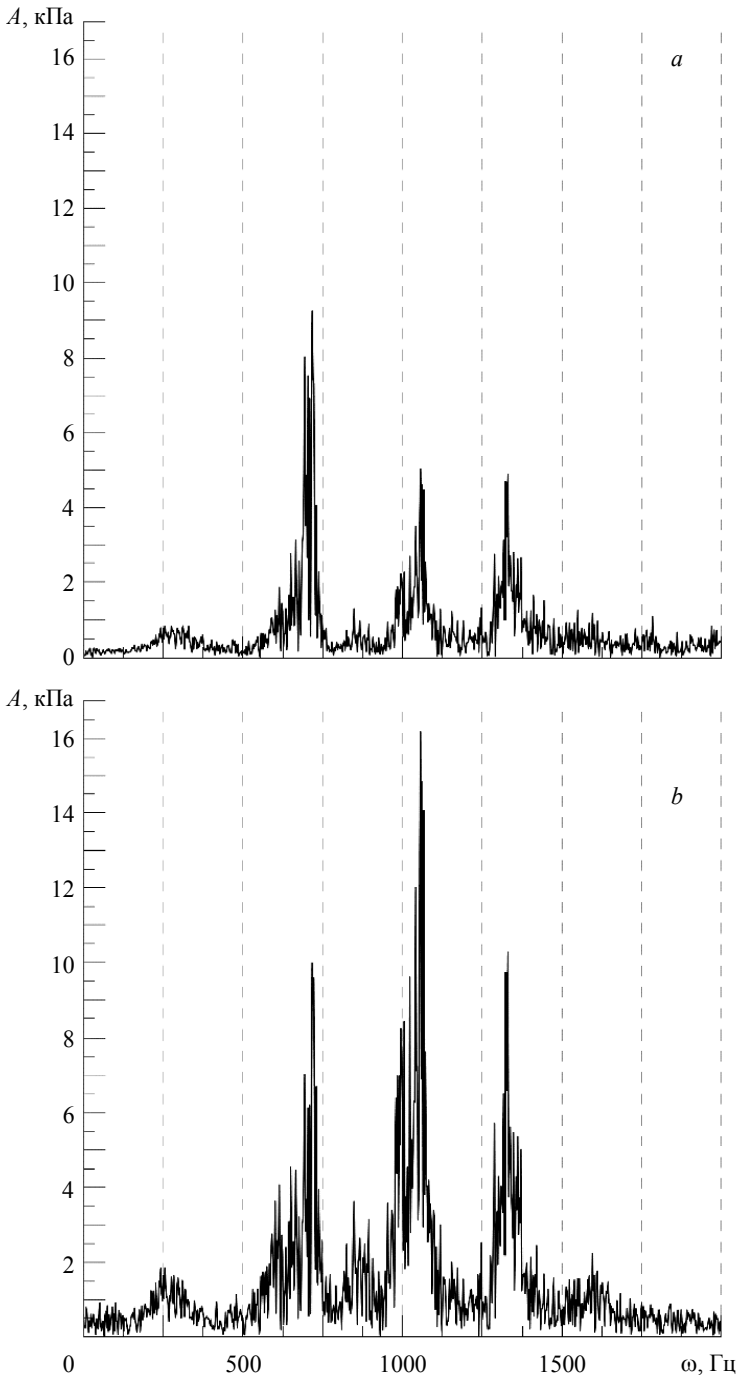


Рис. 6. Частотный спектр пульсаций давления на виртуальных точках №1 (а) и 2 (b), модель LES
Fig. 6. Frequency range of the pressure oscillations on the virtual sensors Nos. (a) 1 and (b) 2 calculated using LES model

применение аналитической формулы (2) не представляется возможным. Так, к примеру, частота собственных акустических колебаний, определенная по (2) для конфигурации, показанной на рис. 2, составляет 332 Гц. Результаты численных расчетов с применением модели $k-\epsilon$, показывают, что 1-я мода колебаний для данной конфигурации составляет $\sim 225\text{--}230$ Гц, а по модели LES $\sim 250\text{--}270$ Гц. Таким образом существует необходимость корректировки формулы (2) для определения собственных частот газовой полости сложной формы. На рис. 7 представлены 3 дополнительных конфигурации расчетной области для отработки методики расчета с использованием геометрического подхода. Данный подход основан на приведении газовой полости камеры сгорания к цилиндрической форме с сохранением полного объема и площади поперечного сечения цилиндрического участка исходной конфигурации.

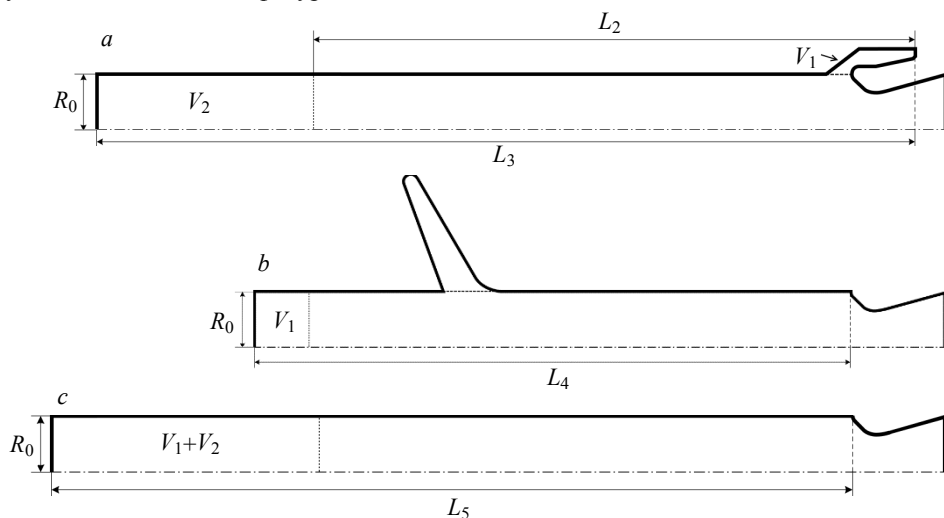


Рис. 7. Тестовые конфигурации расчетной области:

a) конфигурация № 1; *b)* конфигурация № 2; *c)* конфигурация № 3

Fig. 7. Variation in the computational domains: domain № (a) 1; (b) 2; and c) 3

На рис. 8 приведены результаты расчетов для 3 представленных на рис. 7 конфигураций с применением модели $k-\epsilon$. Показан результат обработки сигналов с виртуальных точек, расположенных у переднего днища камеры сгорания. На рис. 8, *a* представлен амплитудно-частотный спектр для конфигурации № 1, на рис. 8, *b* – для конфигурации № 2, на рис. 8, *c* – для конфигурации № 3. Для всех тестовых конфигураций (рис. 7) 1-я мода колебаний находится в диапазоне 220–225 Гц, что соответствует исходной конфигурации (рис. 2). Данный результат говорит о том, что изменение формы газовой полости с сохранением исходного свободного объема камеры сгорания и исходной площади поперечного сечения цилиндрического участка не приводит к смещению собственной акустической частоты, в отличие от применения соотношения (2), основным параметром которого является линейная длина камеры сгорания. Изменение геометрической формы заряда влияет только на амплитуду пульсаций и газодинамическую структуру течения, что отражается на графиках 8, *a*, *b*. Приведение сложной формы исходного заряда к цилиндрической форме (рис. 8, *c*) хорошо согласуется с аналитической формулой (2).

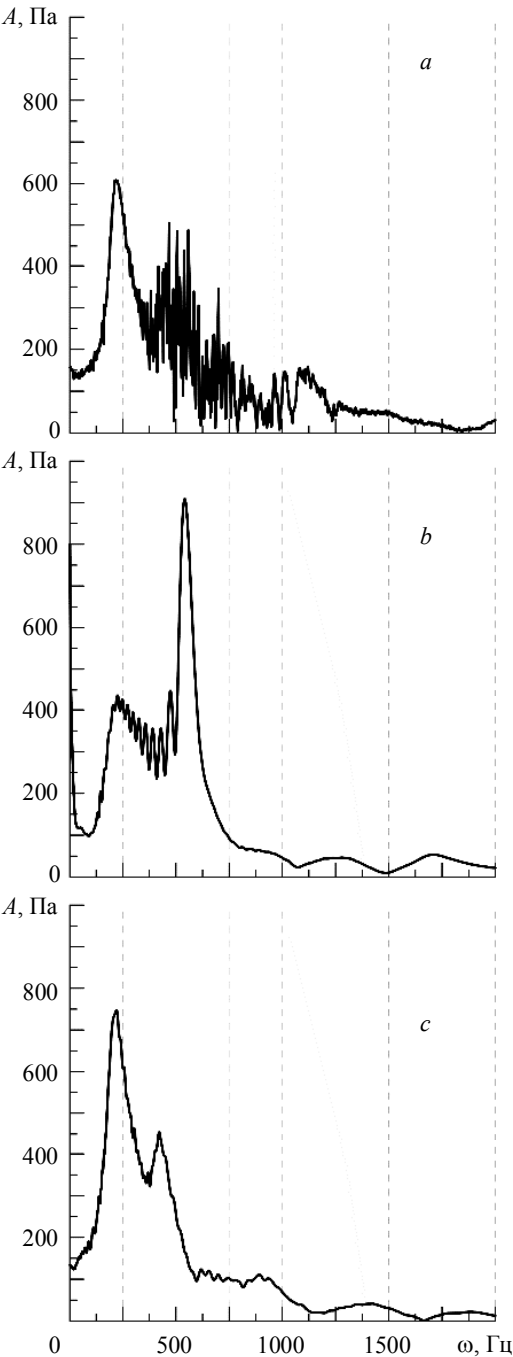


Рис. 8. Частотно-амплитудный спектр для исследуемых конфигураций:
a) конфигурация № 1; *b*) конфигурация № 2; *c*) конфигурация № 3
Fig. 8. Frequency range of the pressure oscillations for tested domains:
domain № *a*) 1; *b*) 2; and *c*) 3

Полученные результаты исследований позволяют скорректировать аналитическую формулу (2) для определения продольных мод колебаний давления в газовых полостях сложной формы, отталкиваясь не от фактической длины камеры сгорания, а от полного свободного объема газовой полости и представить ее в виде

$$f_L = \frac{\sqrt{\gamma(RT)_{\text{ср}}}}{2L_{\text{eff}}} \cdot n, \quad L_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{г.п}}}{\pi R_0^2}, \quad (3)$$

где $V_{\text{г.п}}$ – полный объем газовой полости.

В табл. 2 представлены обобщенные результаты расчетов для всех представленных конфигураций расчетных областей. Численные исследования с использованием осредненной модели турбулентности k – ϵ показывают очень близкие результаты для всех конфигураций, но разница с аналитической формулой (2) для каждой отдельной конфигурации весьма существенна. Расчет, проведенный с использованием модели LES для исходной конфигурации, показывает отличия от обеих использованных методик расчета, что объясняется сложной вихревой структурой течения и непосредственным взаимодействием основного потока с вихревыми возмущениями. Предложенный в данной работе геометрический подход (3) дает хорошие результаты при определении положения собственных акустических частот. Наблюдаемое различие с расчетными данными объясняется тем, что оценка проводится на основе геометрических размеров области и не учитывает реальную картину течения в свободном объеме камеры сгорания.

Таблица 2

Положение 1-й собственной моды газовой полости

Конфигурация	Формула (2), Гц	Расчет k – ϵ , Гц	Расчет LES, Гц	Формула (3), Гц
Исходная	332	~228	~250–270	240
№ 1	245	~217	–*	
№ 2	325	~225	–	
№ 3	240	~222	–	

* – расчет для данных конфигураций не проводился

Заключение

Представлены результаты численного моделирования процесса работы ракетного двигателя на твердом топливе по определению характеристик пульсаций давления. Расчеты проводились с использованием двух численных подходов: осредненных уравнений Навье – Стокса с уравнениями турбулентности k – ϵ ; расчетом полных уравнений Навье – Стокса в рамках модели крупномасштабных вихрей (LES). Проведено сравнение частотно-амплитудных спектров пульсаций давления для осесимметричной конфигурации газовой полости сложной формы камеры сгорания в рамках обоих численных подходов. Результаты исследований показывают, что использование численного подхода на основе осредненных уравнений позволяют достаточно точно оценивать положение 1-й моды собственной акустической частоты камеры сгорания. Проведенные методические исследования для различных конфигураций свободного объема позволили скорректировать существующую аналитическую методику (2) в рамках геометрического подхода (3) для определения собственной акустической частоты газовых полостей сложной формы.

Расчет полных уравнений Навье – Стокса с использованием модели *LES* показал, что характер течения значительно отличается от расчета в рамках осредненного подхода. Ярко выраженная вихревая картина приводит к значительному увеличению амплитуды пульсаций давления. Учитывая сложную форму поверхности горения, разработка методики расчета, позволяющей моделировать сложную вихревую газодинамическую структуру течения, является важным звеном в выявлении причин и предотвращении возможной неустойчивости в работе ракетного двигателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимнат И. Ракетные двигатели на химическом топливе: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 294 с.
2. Ерохин Б.Т. Теория внутрикамерных процессов и проектирование РДТТ: учебник для высших технических учебных заведений. М.: Машиностроение, 1991. 560 с.
3. Сухинин С.В., Ахмадеев В.Ф. Гидродинамические источники колебаний в камерах сгорания // Физика горения и взрыва. 1993. Т. 29. № 6. С. 38–46.
4. Присяжков В.Ф. Динамика ракетных двигателей твердого топлива: учеб. пособие для вузов. М.: Машиностроение, 1984. 248 с.
5. Vassenin I.M., Krainov A.Yu., Lipanov A.M., and Shrager E.R. Method for direct numerical simulation of turbulent gas flows in curvilinear coordinates // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. V. 55(5). P. 883–890. DOI: 10.1134/S0965542515050176.
6. Hirschberg L., Schuller T., Collinet J., Schram C., Hirschberg A. Analytical model for the prediction of pulsations in a cold-gas scale-model of a Solid Rocket Motor // J. Sound and Vibration. 2018. V. 419. P. 452–468. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.01.025.
7. Poryazov V.A., Krainov A.Yu. Mathematical model and calculation of the unsteady combustion rate of the metallized solid rocket propellants // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika. 2017. No. 50. P. 99–111. DOI: 10.17223/19988621/50/9
8. Su W., Wang N., Li J., Zhao Y., Yan M. Improved method of measuring pressure coupled response for composite solid propellants // J. Sound and Vibration. 2014. V. 333. P. 2226–2240. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.12.003.
9. Minkov L.L., Shrager E.R. and Kiryushkin A.E. Two Approaches for Simulating the Burning Surface in Gas Dynamics // Key Engineering Materials. 2016. V. 685. P. 114–118. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114.
10. Ларионов Б.И., Кузьменко А.В. Исследование пульсаций давления в камере твердотопливного ракетного двигателя на квазистационарном участке работы // Горение и взрыв. 2016. Т. 9. № 4. С. 116–125.
11. Zhang Q., Li J., Wang W., Wang N. Numerical analysis on oscillation characteristics in a tailpipe nozzle solid rocket motor // J. Spacecraft and Rockets. 2011. V.48(1). P. 103–109. DOI: 10.2514/1.48867.
12. Zhang Q., Wang N., Li J., Su W., Zhang Y. Effect of the head cavity on pressure oscillation suppression characteristics in large solid rocket motors // Technological Sciences. 2015. V. 58(7). P. 1250–1262. DOI: 10.1007/s11431-015-5834-z.
13. Егоров М.Ю., Егоров Я.В. Численное исследование низкочастотной акустической неустойчивости в двухкамерном РДТТ // Математическое моделирование систем и процессов. 2005. №13. С. 101–109.
14. Алемасов В.Е., Дрегалин А.Ф., Тишин А.П. Теория ракетных двигателей: учебник для студентов машиностроительных специальностей вузов / под ред. В.П. Глушко. М.: Машиностроение, 1980. 533 с.
15. Lauder B.E., Spalding D.B. Lectures in Mathematical Models of Turbulence. London: Academic Press. 1972. 169 p.
16. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 368 с.

Статья поступила 10.04.2018 г.

Glazunov A.A., Eremin I.V., Zhiltsov K.N., Kostyushin K.V., Tyryshkin I.M., Shuvarikov V.A. (2018) NUMERICAL INVESTIGATION OF THE PRESSURE PULSATION MAGNITUDE AND NATURAL AEROACOUSTIC FREQUENCIES IN THE COMBUSTION CHAMBERS WITH A CHARGE OF A COMPLEX SHAPE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 59–72

DOI 10.17223/19988621/53/6

The paper presents the results of numerical modeling of combustion product outflow in a gas-dynamic channel of the rocket engine. The pressure fluctuations have been determined in a gas cavity of combustion chamber. A numerical model is based on the Navier-Stokes equations for a single-phase compressible gas. The obtained solution of the Reynolds-averaged Navier–Stokes (RANS) equations with k – ε turbulence model has been compared with that of the complete Navier-Stokes equations with large-eddy simulation (LES) model. The calculations have been implemented using the FLUENT package and GAMBIT CAD preprocessor.

The numerical simulations for a complex combustion surface have been performed to reveal a possible instability of the flow and pressure self-oscillations. The frequency-amplitude spectrum of the pressure fluctuations in the different regions of combustion chamber has been determined by the fast Fourier transform. Methodological calculations have been carried out for various configurations of the free volume in the gas cavity. The results of calculations made it possible to define more precisely the analytical formula for determining natural acoustic frequencies in the combustion chamber. Solutions in the framework of the RANS equations allowed one to determine accurately the positions of the acoustic modes in the combustion chamber. In combustion chambers of a complex shape, vortex disturbances generate sound waves and represent a strong source of the gas-dynamic perturbations. An approach based on the solution of the complete Navier-Stokes equations with LES turbulence model made it possible to determine the amplitude of the pressure oscillations taking into account a large-scale vortex generation. It has been shown that when the frequency of vortex generation is equal to the natural acoustic oscillations of combustion chamber, the frequency capture occurs accompanied with an increase in the pressure fluctuation magnitude.

Keywords: combustion chamber, combustion products, gas dynamics, turbulence, mathematical modeling, pressure pulsations, frequency analysis, natural acoustic oscillation.

GLAZUNOV Anatoliy Alekseevich, (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

EREMIN Ivan Vladimirovich (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

ZHILTSOV Konstantin Nikolaevich (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: konstantin@niipmm.tsu.ru

KOSTYUSHIN Kirill Vladimirovich (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushin@niipmm.tsu.ru

TYRYSHKIN Il'ya Mikhailovich (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tyryshkin@niipmm.tsu.ru

SHUVARIKOV Vladimir Andreevich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shuvaa@niipmm.tsu.ru

REFERENCES

1. Timnat Y.M. (1987) *Advanced Chemical Rocket Propulsion*. London: Academic Press.
2. Erokhin B.T. (1991) *Teoriya vnutrikamernykh protsessov i proektirovaniya RDTT* [Theory of processes in combustion chambers and solid propellant rocket engine design]. Moscow: Mashinostroenie.
3. Sukhinin S.V., Akhmadeev V.F. (1993) Hydrodynamic sources of oscillations in combustion chambers. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 29(6). pp. 699–705. DOI: 10.1007/BF00786851.
4. Prisnyakov V.F. (1984) *Dinamika raketnykh dvigateley tverdogo topliva* [Dynamics of solid propellant rocket engines]. Moscow: Mashinostroenie.
5. Vasenin I.M., Krainov A.Yu., Lipanov A.M., Shrager E.R. (2015) Method for direct numerical simulation of turbulent gas flows in curvilinear coordinates. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 55(5). pp. 883–890. DOI: 10.1134/S0965542515050176.
6. Hirschberg L., Schuller T., Collinet J., Schram C., Hirschberg A. (2018) Analytical model for the prediction of pulsations in a cold-gas scale-model of a solid rocket motor. *Journal of Sound and Vibration*. 419. pp. 452–468. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.01.025.
7. Poryazov V.A., Krainov A.Yu. (2017) Matematicheskaya model' i raschet nestatsionarnoy skorosti goreniya metallizirovannykh tverdykh raketnykh topliv [Mathematical model and calculation of the unsteady combustion rate of the metallized solid rocket propellants]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 99–111. DOI: 10.17223/19988621/50/9.
8. Su W., Wang N., Li J., Zhao Y., Yan M. (2014) Improved method of measuring pressure coupled response for composite solid propellants. *Journal of Sound and Vibration*. 333. pp. 2226–2240. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.12.003.
9. Minkov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. (2016) Two approaches for simulating the burning surface in gas dynamics. *Key Engineering Materials*. 685. pp. 114–118. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114.
10. Larionov B.I., Kuzmenko A.V. (2016) Issledovanie pul'satsiy davleniya v kamere tverdotoplivnogo raketnogo dvigatelya na kvazistatsionarnom uchastke raboty [Study of pressure fluctuations in a solid rocket motor chamber in quasi-stationary operation mode]. *Combustion and Explosion*. 9(4). pp. 116–125.
11. Zhang Q., Li J., Wang W., Wang N. (2011) Numerical analysis on oscillation characteristics in a tailpipe nozzle solid rocket motor. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 48(1). pp. 103–109. DOI: 10.2514/1.48867.
12. Zhang Q., Wang N., Li J., Su W., Zhang Y. (2015) Effect of the head cavity on pressure oscillation suppression characteristics in large solid rocket motors. *Technological Sciences*. 58(7). pp. 1250–1262. DOI: 10.1007/s11431-015-5834-z.
13. Egorov M.Y., Egorov Ya.V. (2005) *Chislennoe issledovanie nizkochastotnoy akusticheskoy neustoychivosti v dvukhamernom RDTT* [Numerical study of low-frequency acoustic instability in a two-chamber solid propellant rocket engine]. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*. 13. pp. 101–109.
14. Alemasov V.E., Dregalin A.F., Tishin A.P. (1980) *Teoriya raketnykh dvigateley* [The theory of rocket engines]. Moscow: Mashinostroenie.
15. Launder B.E., Spalding D.B. (1972) *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*. London: Academic Press.
16. Volkov K.N., Emelyanov V.N. (2008) *Modelirovanie krupnykh vikhrey v raschetakh turbulentnykh techeniy* [Modeling of large eddies in turbulent flow calculations]. Moscow: Fizmatlit.

УДК 661.66
DOI 10.17223/19988621/53/7

П.А. Глазунов, В.П. Решетиловский, В.Н. Манжай,
П.Н. Зятиков, В.В. Соловьев

ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ БРИКЕТИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ОТХОДОВ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ КОКСА И КРИОГЕЛЕЙ ПОЛИВИНИЛОВОГО СПИРТА

Предложено физическое моделирование процессов брикетирования на основе отходов полидисперсных частиц кокса и криогелей поливинилового спирта, а также проведение лабораторных исследований и разработка способа утилизации отходов коксохимического производства. Рассмотрены механизмы гелеобразования поливинилового спирта, а также влияние характеристик полимера и режимов обработки на структуру и физико-химические свойства получаемых криогелей. Приведены сведения об особенностях замерзания концентрированных растворов поливинилового спирта. Получены топливные брикеты из частиц кокса, структурированные криогелями поливинилового спирта. Изучены упругие и прочностные свойства брикетов, а также исследованы их механические и теплофизические свойства. Техническим результатом предлагаемого исследования является создание из углеродсодержащих отходов кокса высокопрочных топливных брикетов, что обеспечивает его высокую технологичность и более низкую себестоимость производства брикетов. Брикеты обладают высокими энергетическими характеристиками, могут транспортироваться на любые расстояния, и технологичны при хранении. Они могут эффективно использоваться в малой энергетике и бытовом использовании. Предложена технологическая схема получения топливных брикетов, заключающаяся в брикетировании твердых частиц кокса с применением криогелей поливинилового спирта.

Ключевые слова: отходы полидисперсных частиц кокса, криогель, брикеты, поливиниловый спирт, физическое моделирование процессов.

Переработка отходов в полезные продукты и изделия часто бывает сложным и дорогостоящим процессом, а иногда вовсе экономически бесперспективна. Поэтому поиск оптимальных путей утилизации отходов является одной из задач развития современных энерго- и ресурсосберегающих технологий. Отходы полидисперсных частиц кокса и угля являются одним из существенных источников загрязнения почвы, водоемов и грунтовых вод и требуют квалифицированного подхода к их утилизации. Для приготовления углеродных брикетов служит мелочь из сухих и плохо спекающихся частиц. Чтобы получить прочные брикеты, к угольной пыли часто добавляют различные вещества природного или синтетического происхождения (древесную или нефтяную смолу, лигносульфонат, декстрин, белок, поливиниловый спирт и другие компоненты), а затем прессуют ее [1–4].

Водные растворы поливинилового спирта (ПВС) после замораживания при отрицательной температуре (ниже 0 °С) и последующего оттаивания при положительной температуре образуют упругие полимерные тела [1, 2], которые называются криогелями. Температура плавления сформированных криогелей превышает 70 °С, т.е. существенно больше температуры плавления льда. Механические свойства криоструктуратов принципиально отличаются от свойств исходных вязкотекучих композиций, что позволяет использовать упругие криогели в качестве

связующего материала. Криогели – нетоксичный и экологически чистый материал – в настоящее время нашли широкое применение в биотехнологиях, медицине и пищевой промышленности [1, 3, 5]. Они являются перспективным материалом для брикетирования любых мелкодисперсных частиц. Введение в исходную полимерную композицию (водный раствор ПВС) модификаторов и наполнителей может в значительной степени изменить (улучшить) физико-механические, а также потребительские свойства конечного продукта [6].

Целью настоящей работы является физическое моделирование процессов брикетирования на основе отходов полидисперсных частиц кокса и криогелей поливинилового спирта, а также проведение лабораторных исследований и разработка способа утилизации отходов коксохимического производства. Сформированные прочные криогелевые брикеты можно в дальнейшем использовать как горючее вещество, которое будет востребовано для производственных и бытовых целей.

Лабораторные исследования

В лабораторных исследованиях использовали образцы ПВС с молекулярной массой $MM = (50-150) \cdot 10^3$. Водные растворы ПВС являются неньютоновскими жидкостями и их вязкость, измеренная на ротационном вискозиметре «RheoStress 600» (Германия), зависит от скорости сдвига (рис. 1). Опытным путем установлено, что образовывать криогели способны растворы при концентрации полимера не ниже 5 %. Эти экспериментальные факты свидетельствуют о том, что в исходных растворах с такой концентрацией уже существует сплошная флуктуационная сетка из взаимно перепутанных макромолекулярных цепей, наличие которой подтверждается проявлением в них эффекта Вайссенберга [2].

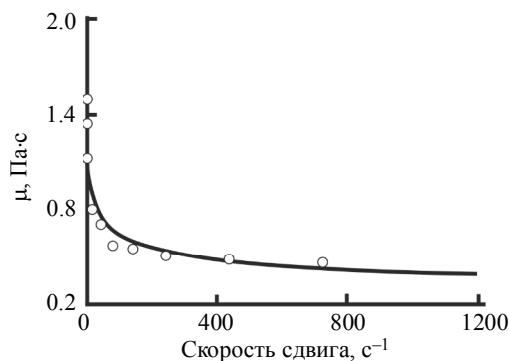


Рис. 1. Зависимость динамической вязкости (μ) раствора ПВС от скорости сдвига

Fig. 1. Dynamic viscosity of the polyvinyl alcohol solution (μ) as a function of share rate

Для получения криогелей водные растворы ПВС различных концентраций заливали в цилиндрические ячейки и замораживали при температуре $T = -20^\circ\text{C}$ в течение суток, после чего размораживали их при комнатной температуре $T = 20^\circ\text{C}$. Затем сформированным эластичным (каучукоподобным) образцам криогелей задавали деформацию (γ) и измеряли упругое напряжение (P), возникающее в материале. Затем по формуле Гука $P = G \cdot \gamma$ рассчитывали модуль упругости (G) [7–10].

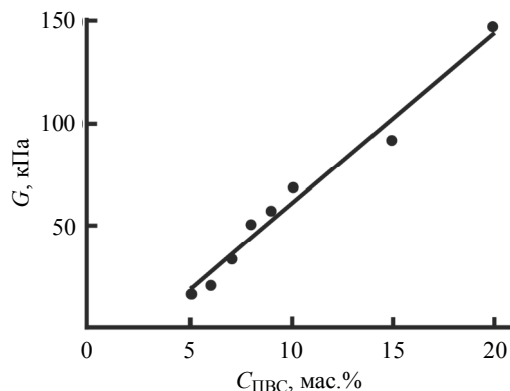


Рис. 2. Зависимость модуля упругости двух-компонентных криогелей (вода – ПВС) от концентрации поливинилового спирта

Fig. 2. Elasticity modulus of two-component cryogels (water – polyvinyl alcohol) as a function of polyvinyl alcohol concentration

Из рис. 2 следует, что при увеличении концентрации ПВС от 5 до 20 мас.% модуль упругости криогелей возрастает по линейному закону от 10 до 150 кПа. При содержании полимера ниже 5 % из него после цикла замораживания – оттаивания криогели не образуются. С практической и экономической точки зрения, для получения криогелей целесообразно использовать минимальную концентрацию поливинилового спирта, поэтому в дальнейших экспериментах брали водный раствор ПВС, концентрация которого 5 мас.% [11–15].

Для получения криогелей, наполненных частицами кокса ($d \sim 1\text{--}5$ мм), в водный раствор ПВС вносили мелкодисперсный кокс в количестве от 30 до 70 мас.%. После проведения цикла замораживания – оттаивания получали криогели и определяли их упругость (рис. 3).

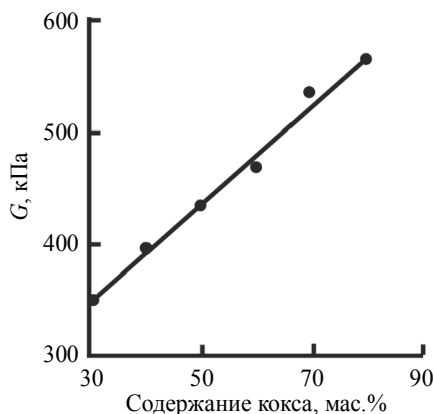


Рис. 3. Зависимость модуля упругости криогеля ($C_{\text{ПВС}} = 5$ мас.%) от содержания кокса

Fig. 3. Elasticity modulus of the cryogel ($C_{\text{PVA}} = 5$ wt.%) as a function of coke content

Из рисунка следует, что увеличение содержания твердых частиц кокса приводит к значительному росту упругости наполненных криогелей, которая обусловлена главным образом наличием механического каркаса, построенного из частиц кокса. Экспериментально установлен температурный предел ($T_{пл} = 70^\circ\text{C}$), до которого криогели, наполненные сажей и коксом, сохраняют свою структуру.

Известно, что кокс имеет капиллярно-пористую структуру [4]. Для предотвращения абсорбции воды частицами кокса их предварительно пропитывали минеральным маслом (допустимо и целесообразно использовать отработанное масло), а затем смешивали с водным раствором ПВС. После цикла замораживания – оттаивания формировали криогели, наполненные коксом и маслом [16]. Затем сушили их при комнатной температуре и получали жесткие брикеты. При высоком содержании кокса (более 70 %) наблюдается недостаточное пропитывание частичек раствором ПВС и образование пустот между ними, поэтому полученные криогели данного состава после сушки рассыпались. Экспериментально установлено, что прочные брикеты формируются при содержании кокса до 70 %. Высушенные брикеты, полученные в лабораторных условиях, после их поджигания интенсивно горят (рис. 4).



Рис. 4. Горение сухого брикета
Fig. 4. Burning of the dry briquette

Измерение предела прочности на раздавливание (R) высушенных брикетов, содержащих разное количество кокса, проводили с помощью прибора Crush-BK (Ma. Tec. Materials Technologies Snc., Italy). Для оценки состава и теплотворной способности компонентов брикетов был использован термический анализ. Исследование проводили на синхронном термоанализаторе STA 449 C Jpiter фирмы Netzsch (Германия) в атмосфере воздуха со скоростью нагрева $10^\circ\text{C}/\text{мин}$ в интервале температур $25\text{--}1000^\circ\text{C}$ в тиглях из оксида алюминия. Используемая ячейка позволила измерять одновременно температурное изменение массы образца (термогравиметрическая кривая ТГ) и теплового потока (дифференциальная сканирующая калориметрия ДСК).

Анализ термогравиметрических кривых окисления криогелей, наполненных коксом и сажей (рис. 5), свидетельствует о том, что образец мелкодисперсной сажи не содержит неорганических примесей и полностью сгорает в интервале температур от 500 до 750 °С.

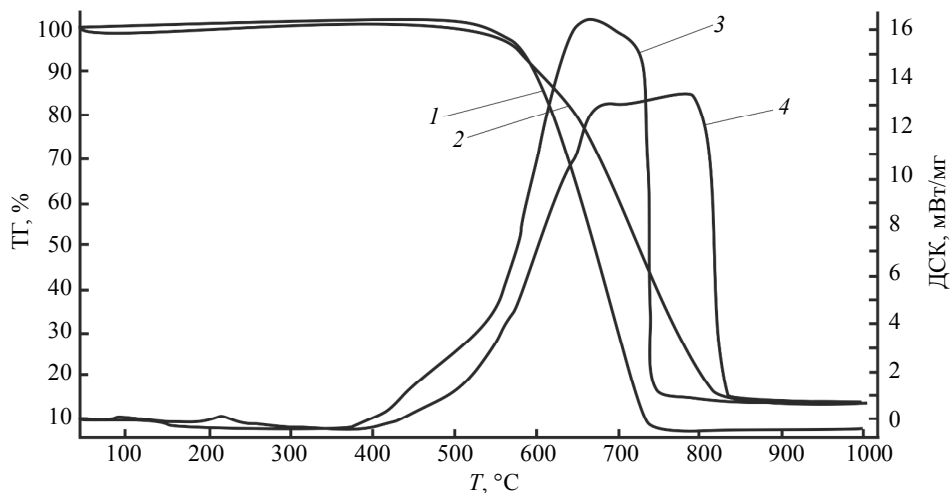


Рис. 5. Термогравиметрические кривые окисления кокса и сажи:

1 – ТГ (сажа); 2 – ТГ (кокс); 3 – ДСК (сажа); 4 – ДСК (кокс)

Fig. 5. Thermogravimetric curves (TC) of the coke and soot oxidation:

1, TC of the soot; 2, TC of the coke; 3, Differential Scanning Calorimetry (DSC) of the soot; and 4, DSC of the coke

Крупнодисперсный кокс имеет зольность ~10 %, поэтому окисляется в более высокотемпературной области от 500 до 850 °С [17]. Состав и физические свойства брикетов представлены в таблице.

Теплотворная способность (Q) всех сухих брикетов, состоящих почти на 80–90 % из кокса, примерно одинакова (~ 29.0 МДж/кг) и практически равна теплоте сгорания чистого кокса. Брикеты имеют высокий предел прочности ($R \sim 27.5$ МПа), т.е. достаточный для их транспортировки без разрушения и использования в технологических процессах.

Наряду с поливиниловым спиртом, коксом и минеральным маслом, которые в реакции окисления (горения) являются восстановителями, при формировании брикетов в качестве наполнителей можно также использовать древесные опилки, торф и другие мелкодисперсные отходы растительного происхождения, дающие после сгорания малую зольность [18–20].

Для изготовления брикетов в промышленных условиях используется специальная технологическая линия, состоящая из смесителя, вибропресса, морозильной камеры, сушилки, автомата-фасовщика (рис. 6).

Технологическая цепочка включает следующие операции:

1. Растворение порошка ПВС в воде при перемешивании.
2. Пропитка маслом частиц кокса.
3. Загрузка дисперсных частиц кокса и угля в ёмкости определенной формы и объёма, с предварительно залитым необходимым объёмом вязкого раствора ПВС.
4. Вибрационное уплотнение расположения частиц в емкости.

- 5. Замораживание растворов, наполненных дисперсными частицами, на естественном холоде или в криокамерах.
- 6. Размораживание брикетов в естественных (комнатных) условиях.
- 7. Дегидратация, т.е. сушка брикетов.

Физико-механические и теплофизические свойства брикетов

Состав исходных композиций для получения криогелей, мас. % Composition of the initial compositions for the preparation of cryogels, mass %	Состав сухих брикетов, мас. % Composition of dry briquettes, mass %	Предел прочности брикетов R, МПа Strength limit of Briquettes R, MPa	Теплотворная способность Q, МДж/кг Calorific capacity Q, MJ/kg
Мелкодисперсный кокс Finely dispersed coke, 100	-	-	29.3
Поливиниловый спирт, 10 Мелкодисперсный кокс Finely dispersed coke, 50 Вода Water, 40	16 84 0	28.1	28.5
Поливиниловый спирт Polyvinyl alcohol, 5 Мелкодисперсный кокс Finely dispersed coke, 30 Вода Water, 65	14 86 0	- 27.6	- 28.5
Поливиниловый спирт Polyvinyl alcohol, 5 Мелкодисперсный кокс Finely dispersed coke, 50 Вода Water, 45	9 91 0	27.6	28.7
Поливиниловый спирт Polyvinyl alcohol, 5 Мелкодисперсный кокс Finely dispersed coke, 70 Вода Water, 25	6 94 0	27.1	28.8
Поливиниловый спирт Polyvinyl alcohol, 5 Мелкодисперсный кокс Finely dispersed coke, 50 Минеральное масло Mineral Oil, 5 Вода Water, 40	8 87 5 0	27.4	29.8

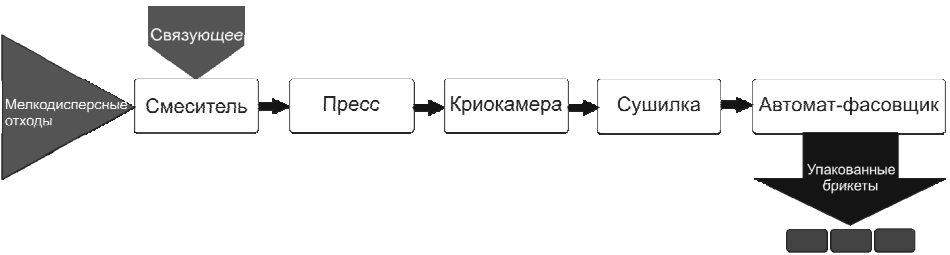


Рис. 6. Технология изготовления брикетов из частиц кокса
Fig. 6. Technique for a briquette manufacturing from coke particles

Процесс брикетирования дисперсных и горючих отходов обладает рядом достоинств:

- а) в результате криоструктурирования и сушки получают угольные брикеты высокого качества со стандартными показателями, необходимыми потребителю;
- б) пористый брикет состоит из мелких частиц, поэтому он легкий и в отличие от монолитного куска угля при сгорании проницаем для кислорода воздуха;
- в) для увеличения содержания горючего вещества в брикете допускается его прессование;
- г) возможность формирования брикетов заданной формы, объема и массы;
- д) легко реализуемый процесс уменьшения размеров брикетов путем их распиливания;
- е) сформированные брикеты влагоустойчивы и не разрушаются в воде, а брикеты с добавками масла обладают гидрофобными свойствами.

Заключение

Таким образом, физическое моделирование процессов брикетирования на основе отходов полидисперсных частиц кокса и криогелей поливинилового спирта и экспериментальные данные позволили разработать способ структурирования объектов любой формы и размеров и формировать прочные брикеты из мелкодисперсных отходов кокса или угля, а также попутно утилизировать другие ингредиенты, обладающие свойствами восстановителей. Предложено техническое решение, которое позволяет утилизацию отходов коксохимического производства и повышение экологической безопасности. Полученные топливные брикеты хорошо горят, выделяя при этом большое количество тепла, поэтому их можно использовать в качестве горючего вещества для бытовых и производственных целей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhanga G., Sun Y., Xua Y. Review of briquette binders and briquetting mechanism // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2018. V. 82. No. 1. P. 477–487. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.09.072>.
2. Манжай В.Н., Фуфаева М.С., Егорова Л.А. Топливные брикеты на основе мелкодисперсных частиц кокса и криогелей поливинилового спирта // Химия твердого топлива. 2013. № 1. С. 44–47. DOI: 10.7868/S0023117713010076.
3. Манжай В.Н., Фуфаева М.С. Дисперсность и устойчивость пены, полученной из раствора поливинилового спирта, и свойства сформированных пенокриогелей // Коллоидный журнал. 2014. Т. 76. № 4. С. 495–499.
4. Колесникова Е.С., Колосова О.Ю., Лозинский В.И. Криогели поливинилового спирта, содержащие добавки биологически активных веществ // Успехи в химии и химической технологии. 2017. Т. 31. № 12. С. 21–23.
5. Podorozhko E.A., Korlyukov A.A., Lozinsky V.I. Cryostructuring of polymer systems. XXX. Poly(vinyl alcohol)-based composite cryogels filled with small disperse oil droplets: A gel system capable of mechanically-induced releasing of the lipophilic constituents // J. Appl. Polym. Sci. 2010. V. 117. No. 3. P. 1332–1349.
6. Евтюгин В.Г., Маргулис А.Б., Дамикалн Л.Г. и др. Сорбция микроорганизмов крупнопористыми агарозными криогелями, содержащими привитые алифатические цепи различной длины // Микробиология. 2009. Т. 78. № 5. С. 667–673.
7. Лозинский В.И. Новое семейство макропористых и сверхмакропористых материалов биотехнологического назначения – полимерные криогели // Изв. РАН. Сер. химия. 2008. № 5. С. 996–1013.

8. Лозинский В.И., Дамикалн Л.Г., Курочкин И.Н., Курочкин И.И. Изучение криоструктурирования полимерных систем. Влияние скорости охлаждения водных растворов поливинилового спирта при их замораживании на физико-химические свойства и пористую морфологию криогелей, получающихся после оттаивания // Коллоидный журнал. 2012. Т. 74. № 3. С. 343–352.
9. Лозинский В.И. // Успехи химии. 2002. Т. 71. № 6. С. 559.
10. Sylvain Deville. Freezing Colloids: Observations, Principles, Control, and Use Applications in Materials Science, Life Science, Earth Science, Food Science, and Engineering. Engineering Materials and Processes. Springer, 2017. P. 598.
11. Petrenko Yu.A., Ivanov R.V., Petrenko A.Yu., Lozinsky V.I. Coupling of gelatin to inner surfaces of pore walls in spongy alginate-based scaffolds facilitates the adhesion, growth and differentiation of human bone marrow mesenchymal stromal cells // J. Mater. Sci., Mater. in Med. 2011. V. 22(6). P. 1529–1540.
12. Podorozhko E.A., Ul'yabaeva G.R., Tikhonov V.E., et al. A study of cryostructuring of systems. 43. Characteristics of microstructure of chitosan-containing complex and composite poly(vinyl alcohol) cryogels // Colloid J. Russian Academy of Sciences. 2017. V. 79. No. 1. P. 94–105.
13. Borowski G., Stepniewski W., Wójcik-Oliveira K. Effect of starch binder on charcoal briquette properties // Int. Agrophys. 2017. V. 31. P. 571–574. DOI: <https://doi.org/10.1515/intag-2016-0077>.
14. Lohmeier R., Schröder H.-W., Repke J.-U., Heckmann H. Briquetting of coal fines for use in smelting reduction processes // BHM Berg- und Hüttenmännische Monatshefte. 2013. V. 158. No. 11. P. 451–452. DOI: 10.1007/s00501-013-0193-1
15. Vasiliev N.K., Pronk A.D.C., Shatalina I.N., et al. A review on the development of reinforced ice for use as a building material in cold regions // Cold Regions Science and Technology. 2015. V. 115. P. 56–63. Eindhoven University of Technology, Eindhoven, Netherlands.
16. Manzhai V.N. and Fufaeva M.S. Polyvinyl alcohol cryogels as an efficient spent – oil utilization method // Chemistry and Technology of Fuels and Oils. 2015. No. 5. P. 38–41.
17. Скляр М.Г. Интенсификация коксования и качество кокса. М.: Металлургия, 1976. 255 с.
18. Zyatikov P.N., Vasilevsky M.V., Deeva V.C., and Burykin A.N. Separation of particles in channels rotary engine // MATEC Web of Conferences 23, 01011 (2015).
19. Vasilevsky M.V. et al. Separation of particles in swirling flow in coaxial channel [Electronic resource] // European Physical Journal Web of Conferences (EPJ Web of Conferences). 2016. V. 110: Thermophysical Basis of Energy Technologies. [01076, 4 p.]. Title screen. Свободный доступ из сети Интернет.
20. Головин Г.С., Кранчин С.С. Переработка углей – стратегическое направление повышения качества и расширения сфер их использования. М.: НТК «Трек», 2006. 396 с.

Статья поступила 11.04.2018 г.

Glazunov P.A., Reschetilowski V.P., Manzhai V.N., Zyatikov P.N., Solov'ev V.V. (2018) PHYSICAL MODELING OF BRIQUETTING PROCESSES ON THE BASIS OF THE WASTES OF POLYDISPERSE COKE PARTICLES AND CRYOGELS OF A POLYVINYL ALCOHOL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 73–82

DOI 10.17223/19988621/53/7

Keywords: wastes of polydisperse coke particles, cryogel, briquettes, polyvinyl alcohol, physical modeling.

The relevance of this research is caused by necessity, complexity, and expensiveness of a residual product recycling. Wastes of both polyvinyl coke particles and coal are one of the crucial sources of soil, water reservoir, and ground water contamination. Therefore, a competent approach is needed to recover such wastes. The main purpose of the research is to develop a

simple method for recovery of the wastes of coke-chemical industry. The work is aimed to propose the fuel briquettes made from the coke particles structured by cryogels of a polyvinyl alcohol. During experimental study, the aqueous solutions of polyvinyl alcohol are used. Such solutions are non-Newtonian fluids, whose viscosity depends on the shear rate and is measured by rotational viscometer RheoStress 600 (Germany). Industrial producing of the briquettes is implemented using special manufacturing line that consists of a mixer, vibrating press, freezing chamber, dryer, and automated packer. In the framework of this research, the fuel briquettes have been manufactured from the coke particles structured by cryogels of polyvinyl alcohol. A physical modelling of the briquetting based on the wastes of polydisperse coke particles and cryogels of polyvinyl alcohol has been implemented. A laboratory research has been carried out, which allowed one to develop a special technology applied for recovery of the coke wastes. As a result of this study, the elastic and structural behavior of the briquettes has been tested. It has been revealed that the obtained briquettes are characterized by high energetic properties. Such briquettes are easily transported and stored. They can be used in small power engineering facilities, small businesses, and in domestic use.

GLAZUNOV Pavel Anatol'evich (Tomsk Oil and Gas Research and Design Institute, Tomsk, Russian Federation). E-mail: glazunovpa@sibmail.com

RESCHETILOWSKI Vladimir Petrovich (Doctor of Chemical Sciences, Dresden University of Technology, Dresden, Germany). E-mail: wladimir.reschetilowski@tu-dresden.de

MANZHAI Vladimir Nikolaevich (Doctor of Chemical Sciences, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mang@ipc.tsc.ru

ZYATIKOV Pavel Nikolaevich (Doctor of Technical Sciences, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: zpavel@tpu.ru

SOLOV'EV Vasiliy Vasil'evich (Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: solowyevev@gmail.com

REFERENCES

1. Zhang G., Sun Y., Xu Y. (2018) Review of briquette binders and briquetting mechanism. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 82(1). pp. 477–487. DOI: 10.1016/j.rser.2017.09.072.
2. Manzhai V.N., Fufaeva M.S., Egorova L.A. (2013) Toplivnye brikety na osnove melkodispersnykh chastits koksа i kriogeley polivinilovogo spirtа [Fuel briquettes based on finely dispersed coke particles and polyvinyl alcohol cryogels]. *Solid Fuel Chemistry*. 47(1). pp. 44–47. DOI: 10.7868/S0023117713010076.
3. Manzhai V.N., Fufaeva M.S. (2014) Dispersnost' i ustoychivost' peny, poluchennykh iz rastvora polivinilovogo spirtа, i svoystva sformirovannykh penokriogeley [Dispersity and stability of foams obtained from poly(vinyl alcohol) solution and the properties of resulting foamed cryogels]. *Colloid Journal*. 76(4). pp. 495–499. DOI: 10.7868/S0023291214040090.
4. Kolesnikova E.S., Kolosova O.Yu., Lozinskiy V.I. (2017) Kriogeli polivinilovogo spirtа, soderzhashchie dobavki biologicheskii aktivnykh veshchestv [Cryogels of polyvinyl alcohol containing additives of biologically active substances]. *Advances in Chemistry and Chemical Technology*. 31(12). pp. 21–23.
5. Podorozhko E.A., Korlyukov A.A., Lozinsky V.I. (2010) Cryostructuring of polymer systems. XXX. Poly(vinyl alcohol)-based composite cryogels filled with small disperse oil droplets: A gel system capable of mechanically-induced releasing of the lipophilic constituents. *J. Appl. Polym. Sci.* 117(3). pp. 1332–1349.
6. Evtugin V.G., Margulis A.B., Damshkaln L.G., et al. (2009) Sorbtsiya mikroorganizmov krupnoporistymi agaroznymi kriogelyami, soderzhashchimi privitye alifatische tsepi razlichnoy dliny [Sorption of microorganisms by wide-porous agarose cryogels containing grafted aliphatic chains of different length]. *Microbiology*. 78(5). pp. 667–673.

7. Lozinsky V.I. (2008) Novoe semeystvo makroporistykh i sverkhmakroporistykh materialov biotekhnologicheskogo naznacheniya – polimernye kriogeli [Polymeric cryogels as a new family of macroporous and supermacroporous materials for biotechnological purposes]. *Russian Chemical Bulletin*. 5. pp. 996–1013.
8. Lozinsky V.I., Damshkaln L.G., Kurochkin I.N., Kurochkin I.I. (2012) Izuchenie kriostukturirovaniya polimernykh sistem. Vliyanie skorosti okhlazhdeniya vodnykh rastvorov polivinilovogo spirta pri ikh zamorazhivaniy na fiziko-khimicheskie svoystva i poristuyu morfologiyu kriogeley, poluchayushchikhsya posle ottaivaniya [Study of cryostructuring of polymer systems. Effect of rate of chilling aqueous poly(vinyl alcohol) solutions during their freezing on physicochemical properties and porous structure of resulting cryogels]. *Colloid Journal*. 74(3). pp. 343–352.
9. Lozinsky V.I. (2002) Cryogels on the basis of natural and synthetic polymers: preparation, properties and application. *Russian Chemical Reviews*. 71(6). pp. 489–511. DOI: 10.1070/RC2002v071n06ABEH000720.
10. Deville S. (2017) *Freezing Colloids: Observations, Principles, Control, and Use*. Engineering Materials and Processes. Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-50515-2.
11. Petrenko Yu.A., Ivanov R.V., Petrenko A.Yu., Lozinsky V.I. (2011) Coupling of gelatin to inner surfaces of pore walls in spongy alginate-based scaffolds facilitates the adhesion, growth and differentiation of human bone marrow mesenchymal stromal cells. *J. Mater. Sci. Mater. Med.* 22(6). pp. 1529–1540. DOI: 10.1007/s10856-011-4323-6.
12. Podorozhko E.A., Ul'yabaeva G.R., Tikhonov, et al. (2017) A study of cryostructuring of systems.43. Characteristics of microstructure of chitosan-containing complex and composite poly(vinyl alcohol) cryogels. *Colloid Journal*. 79(1). pp. 94–105. DOI: 10.1134/S1061933X16060119.
13. Borowski G., Stepniewski W., Wójcik-Oliveira K. (2017) Effect of starch binder on charcoal briquette properties. *Int. Agrophys.* 31. pp. 571–574. DOI: 10.1515/intag-2016-0077.
14. Lohmeier R., Schröder H.-W., Repke J.-U., Heckmann H. (2013) Briquetting of coal fines for use in smelting reduction processes. *BHM Berg- und Hüttenmännische Monatshefte*. 158(11). pp. 451–452. DOI: 10.1007/s00501-013-0193-1.
15. Vasiliev N.K., Pronk A.D.C., Shatalina I.N., Janssen F.H.M.E., Houben R.W.G. (2015) A review on the development of reinforced ice for use as a building material in cold regions. *Cold Regions Science and Technology*. 115. pp. 56–63. DOI: 10.1016/j.coldregions.2015.03.006.
16. Manzhai V.N., Fufaeva M.S. (2015) Polyvinyl alcohol cryogels as an efficient spent – oil utilization method. *Chemistry and Technology of Fuels and Oils*. 51(5). pp. 487–492. DOI: 10.1007/s10553-015-0629-2.
17. Sklyar M.G. (1976) *Intensifikatsiya koksovaniya i kachestvo koksa* [Intensification of coking and coke quality]. Moscow: Metallurgiya.
18. Zyatikov P.N., Vasilevsky M.V., Deeva V.C., and Burykin A.N. (2015) Separation of particles in channels rotary engine. *MATEC Web of Conferences*. 23(01011). DOI: 10.1051/mateconf/20152301011.
19. Vasilevsky M.V. (2016) Separation of particles in swirling flow in coaxial channel. *EPJ Web of Conferences*. 110 (01076). DOI: 10.1051/epjconf/201611001076.
20. Golovkin G.S., Krapchin S.S. (2006) *Pererabotka ugley – strategicheskoe napravlenie povysheniya kachestva i rasshireniya sfer ikh ispol'zovaniya* [Coal processing is a strategic direction for improving the quality and expanding the scope of their use]. Moscow: NTK «Trek».

УДК 539.379.4

DOI 10.17223/19988621/53/8

Л.Б. Зуев, С.А. Баранникова, Ю.В. Ли, А.М. Жармухамбетова**О ЧИСЛЕННЫХ ОЦЕНКАХ ПАРАМЕТРОВ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ МЕТАЛЛОВ¹**

Обсуждаются результаты исследования характера, природы и количественных характеристик локализованного пластического течения металлов при одноосном растяжении методом спекл-фотографии. Введен многомасштабный инвариант упругопластической деформации металлов и проанализирована его природа. Обнаружена связь макроскопических характеристик локализованного пластического течения с решеточными характеристиками и скоростью распространения поперечных звуковых волн исследованных материалов.

Ключевые слова: *локализация деформации, пластическое течение, автоволны, двухэкспозиционная спекл-фотография.*

Создание модели развития пластического течения в твердых телах под нагрузкой оказалось весьма сложной проблемой, которую, несмотря на свою, по крайней мере, двухвековую историю, до сих пор не удалось решить. В последние годы в наших исследованиях, обобщенных в монографии [1], было установлено, что пластическая деформация протекает локализованно на всех этапах этого процесса, что отличается от общепринятого представления о том, что локализация возникает лишь на заключительной стадии процесса и проявляется в формировании шейки. Более того, локализация деформации возможна уже на упругой стадии процесса [2]. Склонность к локализации можно рассматривать как признак упорядочения (самоорганизации) деформируемой среды вследствие ее нелинейности сначала на упругой стадии процесса [2], но наиболее ясно, как показали авторы [3], при пластической деформации. Для экспериментального анализа кинетики локализованного пластического течения необходима достаточно чувствительная методика. В частности, нами использована двухэкспозиционная спекл-фотография [1], позволившая *in situ* наблюдать в образце зоны локализации как области декорреляции спекл-изображений [4] при пластической деформации моно- и поликристаллов чистых металлов и сплавов в разных структурных состояниях и щелочно-галоидных кристаллов. Среди изученных материалов были вещества, деформирующиеся дислокационным скольжением, двойникованием, а также за счет деформации мартенситного превращения. Достаточно представительный круг исследованных материалов позволил выявить и далее анализировать только максимально общие для всех материалов закономерности.

Основные закономерности локализованного пластического течения

Наиболее важная качественная закономерность пластического течения, установленная в ходе экспериментов, состоит в том, что при деформации первоначально однородной среды элементарные акты пластичности (сдвиги) в ней рас-

¹ Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Государственной академии наук в 2013–2020 гг. и Программы повышения конкурентоспособности ТГУ в 2017–2018 гг.

пределяются не случайным, но строго коррелированным в пространстве и во времени образом. В результате этого при пластическом течении такая среда самопроизвольно расслаивается на деформирующиеся в данный момент времени (активные) и недеформирующиеся (пассивные) слои, чередующиеся в пространстве и способные двигаться (рис. 1, *а*, *б*). Аналогичные экспериментальные данные были независимо получены другими авторами с помощью оптических систем

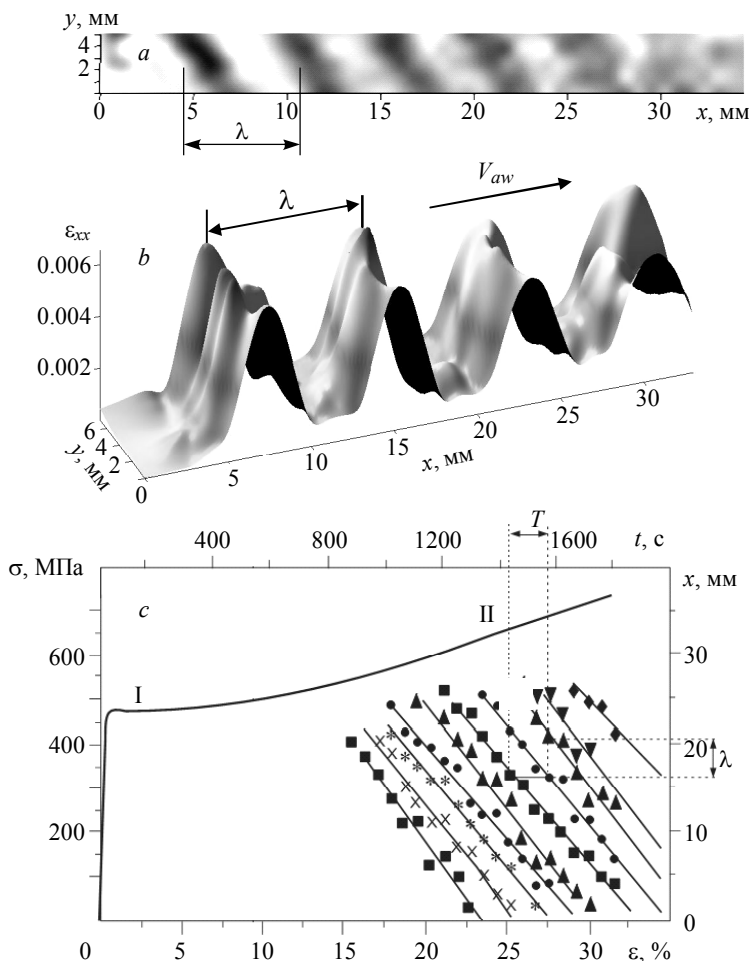


Рис. 1. Локализация пластического течения в монокристалле γ -Fe на стадии линейного деформационного упрочнения: *a* – расслоение образца на зоны локализации (темные полосы); *b* – волновое представление зон локализации пластического течения в образце; *c* – кривая пластического течения $\sigma(\varepsilon)$ и построение $X(t)$ -диаграммы для оценки параметров автоволны локализованной пластичности

Fig. 1. Localization of the plastic flow in a single crystal γ -Fe at the stage of linear strain hardening: (*a*), layering of the sample into zones of localization (dark bands); (*b*), wave representation of the zones of plastic flow localization in the sample; and (*c*), the curve of plastic flow $\sigma(\varepsilon)$ and construction of the $X(t)$ -diagram for estimation of the parameters of autowave of a localized plasticity

Vic-2D и Vic-3D. В частности, в [5, 6] наблюдались полосы макролокализации в меди, а в [7] подобный эффект зарегистрирован в сплаве на основе алюминия.

Периодическая пространственно-временная картина расслоения образца при пластическом течении, показанная на рис. 1, а, характеризуется длиной и временем корреляции, за которые удобно принять пространственный (длину волны) λ и временной T периоды волнового процесса локализованного пластического течения. Эти характеристики для каждого типа картин локализации извлекаются, как показано на рис. 1, в, из экспериментально построенных пространственно-временных диаграмм $X(t)$. С максимальной точностью это делается для линейных стадий деформационного упрочнения, на которых коэффициент деформационного упрочнения $\theta = E^{-1} d\sigma/d\varepsilon$ (E – модуль упругости материала) и величины λ и T постоянны.

В результате выявляются три важных соотношения, характеризующие развитие локализованного пластического течения на этой стадии процесса.

1. Для стадии линейного деформационного упрочнения скорость распространения волны $V_{aw} = \lambda/T$ обратно пропорциональна коэффициенту деформационного упрочнения

$$V_{aw} = V_0 + \Xi/\theta \sim \theta^{-1}, \quad (1)$$

где Ξ и $V_0 \ll \Xi/\theta$ – эмпирические константы. Типичные для исследованных материалов значения скорости распространения этих волн лежат в интервале $10^{-5} \leq V_{aw} \leq 10^{-4}$ м/с. С другой стороны, с пластической деформацией также связаны хорошо изученные и описанные (см., в частности, [8]) волны пластичности, скорость распространения которых $10 \leq V_{pw} \leq 10^2$ м/с, причем $V_{pw} \approx \sqrt{\theta/\rho} \sim \theta^{1/2}$ (ρ – плотность материала). Таким образом, $V_{aw} \ll V_{pw}$. Установленные различия в скоростях распространения и формах зависимостей $V_w(\theta)$ принципиальны и позволяют отличать один тип волнового процесса от другого.

2. Периодические процессы локализованного пластического течения имеют квадратичный закон дисперсии [9]

$$\omega = \omega_0 + \alpha(k - k_0)^2, \quad (2)$$

где частота $\omega = 2\pi/T$ и волновое число $k = 2\pi/\lambda$, а ω_0 , k_0 и α – эмпирические константы.

3. Длина корреляции локализованного пластического течения λ является структурно-чувствительной величиной и зависит от размера зерна ξ в поликристалле как

$$\lambda(\xi) = \lambda_0 + \frac{\lambda^*}{1 + C \cdot \exp(-a_1 \xi)}. \quad (3)$$

В этом экспериментально установленном в [10] соотношении λ_0 , $\lambda^* = a_1/a_2$, a_1 и a_2 – эмпирические константы, а C – постоянная интегрирования.

В [1] было показано, что при пластическом течении могут наблюдаться лишь четыре типа периодических пространственно-временных процессов, соответствующих стадиям деформационного упрочнения, как показано на рис. 2.

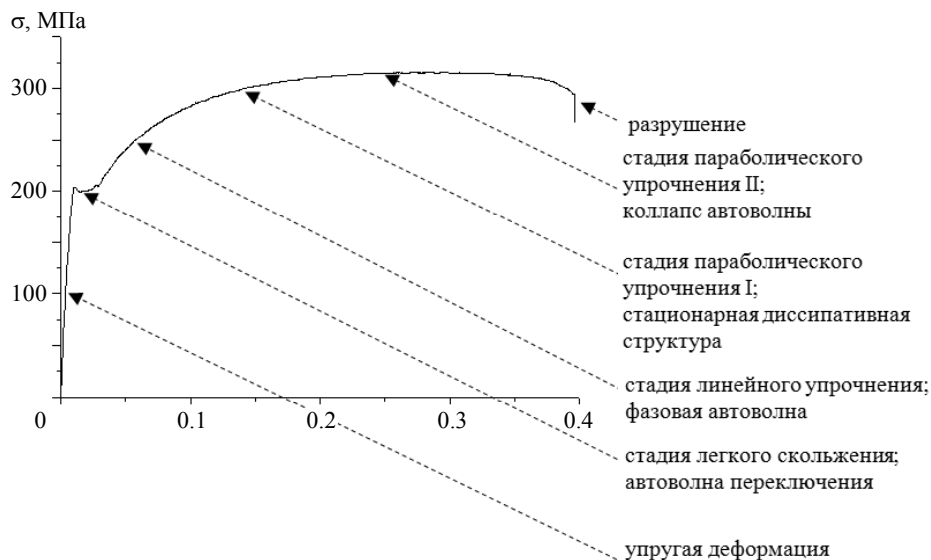


Рис. 2. Схема многостадийного процесса пластического течения
как эволюция автоволновой картины

Fig. 2. Diagram of the multi-stage plastic flow process
as an evolution of the autowave pattern

Они имеют форму движущихся периодически или аperiodически деформационных фронтов и в работе [11] были отнесены нами к явлениям, определяемым в настоящее время как различные типы автоволн [12] – автоволна переключения, фазовая автоволна, стационарная диссипативная структура, коллапс автоволны [1]. Автоволны играют важную роль в процессах самоорганизации в средах разной природы. От обычных волн они отличаются, прежде всего, тем, что для своего возбуждения не требуют переменного во времени внешнего воздействия, а порождаются при наличии потока энергии через открытую систему. Макролокализация пластического течения возникает при растяжении с постоянной скоростью, когда через образец от подвижного захвата испытательной машины к неподвижному непрерывно распространяется поток энергии. Чтобы подтвердить это, обратимся к соотношению (1), переписав которое в виде $\lambda/T = E \cdot \Xi \cdot d\varepsilon/d\sigma$, получим дифференциальное уравнение $d\sigma = E \cdot \Xi(T/\lambda) d\varepsilon$. Произведение $\Xi \cdot E$ имеет размерность $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$, и ему можно приписать смысл потока энергии через образец. Действительно, при $E \approx 5 \cdot 10^{10}$ Па, а $\Xi \approx 10^{-7}$ м/с [1] произведение $\Xi \cdot E \approx 5 \cdot 10^3$ Вт/м². С другой стороны поток энергии от захвата машины через образец $\sim \sigma \cdot V_{\text{mach}}$, что при $\sigma \approx 4 \cdot 10^8$ Па и скорости движения подвижного захвата испытательной машины $V_{\text{mach}} \approx 6 \cdot 10^{-6}$ м/с дает близкую величину $\sim 2.4 \cdot 10^3$ Вт/м².

Кроме того, автоволны характеризуются макроскопическим линейным масштабом, возникающим в исходно однородной среде за счет локальных взаимодействий на микроуровне. Макроскопический масштаб (длина когерентности) $\sim \lambda$ возникает при взаимодействии дислокаций с их характерным микроскопическим масштабом (вектор Бюргерса) $b \approx 10^{-10}$ м $\ll \lambda$ и проявляется в форме достаточно сложных дислокационных ансамблей. Многочисленные примеры таких взаимо-

действий рассмотрены в обзоре [13]. Здесь следует упомянуть, что первым, кто осознал возможность и необходимость такого подхода, был В.И. Владимиров, который в работе [14] писал: «...упорядочение дефектов на микроуровне вызывает появление дефектов второго порядка. Такое положение является общим для всех квазичастиц, сильное взаимодействие между которыми приводит к коллективным эффектам и упорядочению. Последнее требует “перенормировки вакуума”, то есть введения новой среды, которую мы считаем бездефектной. Дефекты перестроенного вакуума являются квазичастицами следующего порядка».

И, наконец, скорость автоволнового процесса нельзя выразить через материальные константы пластически деформируемой среды, как, например, выражается скорость продольных упругих волн $V_l \approx \sqrt{E/\rho}$ или скорость волн пластичности $V_{pw} \approx \sqrt{\theta/\rho}$ [8].

Наблюдения локализации пластической деформации на всех этапах процесса пластического течения и введение представлений об автоволновом характере локализованного пластического течения принципиально важны для дальнейшего развития физической теории пластичности и показывают, что пластическая деформация всегда локализована, а однородной пластической деформации вообще не существует. Это, в свою очередь, означает, что при использовании результатов локального анализа деформационной структуры (например, при электронно-микроскопических исследованиях пластического течения, которые служат экспериментальной основой многих соответствующих теорий), недостаточно сопоставлять их только с общей деформацией образца: необходим учет координат места вырезки тонких фольг для просвечивания в колонне микроскопа.

Количественные соотношения для локализованной пластической деформации

Анализ количественных данных о процессе развития локализованного пластического течения во множестве материалов [1] привел к установлению важного соотношения между упругими и пластическими характеристиками деформируемой среды, которой подчинены все без исключения картины локализованного пластического течения, наблюдавшиеся в исследованных материалах. Она обнаружена при сравнении характеристик автоволн локализованного пластического течения (λ и V_{aw}) с табличными данными о решеточных характеристиках исследованных материалов [15], в качестве которых удобно использовать межплоскостное расстояние $\chi \approx (2...5) \cdot 10^{-10}$ м и скорость распространения поперечных звуковых волн $V_t \approx \sqrt{G/\rho} \approx 10^3$ м/с.

Используя для расчетов эти величины, мы численно показали, что парные произведения $\lambda \cdot V_{aw}$ и $\chi \cdot V_t$ для каждого исследованного материала образуют равенство

$$2\lambda \cdot V_{aw} \approx \chi \cdot V_t, \quad (4)$$

справедливость которого демонстрируют таблица и график на рис. 3 (прямая 1) в безразмерных координатах $\lambda/d - V_t/V_{aw}$.

Среднее для одиннадцати исследованных материалов (чистые металлы и сплавы) с кривыми пластического течения, содержащими стадию линейного деформационного упрочнения, для которой точно измеряются величины λ и V_{aw} , отно-

шение $\langle 2\lambda \cdot V_{aw} / \chi \cdot V_t \rangle \approx 0.99 \approx 1$. Так как решеточные характеристики χ и V_t определяются межчастичным взаимодействием в кристаллах и слабо зависят от деформации, то можно полагать, что $\lambda \cdot V_{aw} \approx const = \Theta$. Соотношение (4) должно спрямляться в координатах $\lambda/\chi - V_t/V_{aw}$, что иллюстрируется прямой 1 на рис. 3.

Величина	Вещество										
	Металлы										
	Cu	Zn	Al	Zr	Ti	V	Nb	γ -Fe	α -Fe	Ni	Sn
$2\lambda \cdot V_{aw} \cdot 10^7 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$	7.2	7.4	15.8	3.8	7.0	5.6	3.6	5.1	4.5	4.2	4.7
$\chi \cdot V_t \cdot 10^7 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ (прямые 1)	4.8	5.2	7.5	5.5	6.6	6.1	5.2	6.9	6.7	6.5	5.3
$\chi \cdot V_t \cdot 10^7 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ (прямая 2) [16]	4.59	*	6.82	5.02	6.22	6.08	*	4.99	5.09	5.29	*
$\eta \cdot 10^{34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$	8.14	9.0	5.0	6.13	6.91	6.52	5.1	6.32	6.32	6.17	6.15

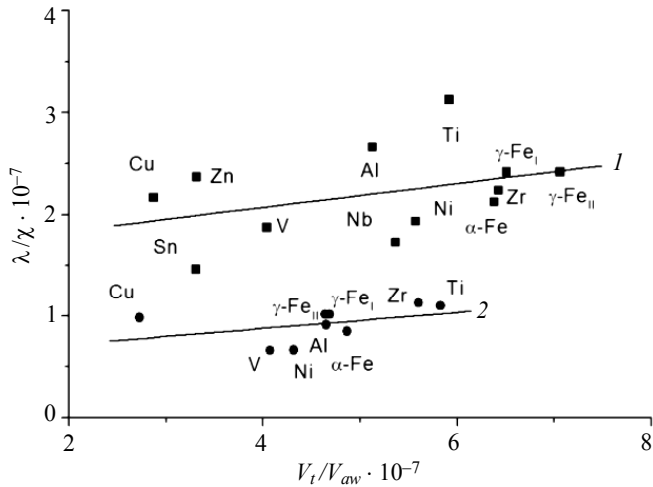


Рис. 3. К проверке инвариантного соотношения (4)
Fig. 3. To the issue of verification of invariant relation (4)

Для уточнения соотношения (4) расстояние χ между плотно упакованными плоскостями решетки и скорости поперечных упругих волн V_t были рассчитаны для сплавов [16] из «первых принципов» с использованием электронной теории твердого тела [17] на суперкомпьютере ТГУ Skif Cyberia. Для расчетов использовался метод точных маффинтин орбиталей – приближения когерентного потенциала (ЕМТО-СРА) [18]. Расстояние χ определялось по равновесным параметрам решетки, которые в свою очередь, рассчитывались путем минимизации полной энергии сплава. Скорости поперечных упругих волн рассчитывали с использованием объемного модуля [19], который определяется второй производной общей энергии сплава по объему. Такой подход позволяет получить надежные результаты как для чистых металлов [19], так и для сплавов [20–24]. Графики, показанные на рис. 3 (прямая 2) [16], демонстрируют справедливость (4) также и для этого случая.

Корреляция, представленная соотношением (4) и показанная на рис. 3, первоначально может показаться формальной, но ее глубокий смысл выясняется, если принять во внимание, что как локализованное пластическое течение твердых тел, так и распространение упругих волн в них суть пространственно-временные периодические (волновые) процессы. Это значит, что в (4) величины λ и V_t ответственны за перераспределение упругих деформаций в деформируемой среде со скоростью V_t , а величины λ и V_{aw} контролируют ход пластической деформации с много меньшей скоростью $V_{aw} \ll V_t$. Таким образом, соотношение (4) демонстрирует функциональную связь между упругой и пластической деформацией.

Произведения $\chi \cdot V_t$ и $\lambda \cdot V_{aw}$ в (4) могут претендовать на роль многомасштабных инвариантов упругих и пластических деформационных процессов, одновременно идущих в среде при ее деформации в виде одноосного растяжения. Ясно, что уравнение (4) отражает взаимосвязь малых упругих ($\varepsilon_{el} \ll 1$) и больших пластических ($\varepsilon_{pl} \approx 1$) деформаций, а одновременное присутствие двух скоростей в соотношении (4) наводит на мысль о тесной взаимосвязи контролирующих деформацию процессов. Представляется, что возможное наличие этой взаимосвязи обычно недостаточно учитывается при построении моделей пластического течения в механике деформируемого тела.

Это утверждение становится более ясным, если вспомнить, что фононный и электронный газы определяют «квазивязкое» торможение дислокаций в деформируемых кристаллах [25]. Разумеется, в настоящее время еще далеко от понимания причин возникновения соотношения (4) и его возможной роли в развитии пластической деформации, но уже представляется, что недопустимо игнорировать эту закономерность в ходе анализа получаемых экспериментальных данных и создании новых теорий пластичности. Важность соотношения (4) для понимания природы локализации пластичности дополнительно подчеркивается тем, что из него, как будет показано, непосредственно следуют соотношения (1), (2) и (3), характеризующие автоволны локализованного пластического течения.

Первым следствием из соотношения (4) является зависимость скорости распространения автоволн локализованного пластического течения от коэффициента деформационного упрочнения (1). Для доказательства продифференцируем (4) по деформации ε

$$\lambda \frac{dV_{aw}}{d\varepsilon} + V_{aw} \frac{d\lambda}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot \chi \frac{dV_t}{d\varepsilon} + \frac{1}{2} \cdot V_t \frac{d\chi}{d\varepsilon}. \quad (5)$$

Записав теперь это выражение относительно V_{aw} , придем к

$$V_{aw} = \left(\frac{d\lambda}{d\varepsilon} \right)^{-1} \left(\frac{1}{2} \cdot \chi \frac{dV_t}{d\varepsilon} + \frac{1}{2} \cdot V_t \frac{d\chi}{d\varepsilon} - \lambda \frac{dV_{aw}}{d\varepsilon} \right). \quad (6)$$

Так как межплоскостное расстояние в кристалле не зависит от пластической деформации, то в (6) $\frac{1}{2} \cdot V_t \frac{d\chi}{d\varepsilon} \approx 0$ и, следовательно,

$$V_{aw} = \frac{\chi}{2} \cdot \frac{dV_t}{d\lambda} - \lambda \cdot \frac{dV_{aw}}{d\lambda}. \quad (7)$$

После несложных преобразований это дает, как и в эксперименте,

$$V_{aw} = \frac{\chi}{2} \cdot \frac{dV_t}{d\lambda} - \chi \frac{dV_{aw}}{d\lambda} \frac{\lambda}{\chi} \approx V_0 + \frac{\Xi}{\theta}, \quad (8)$$

поскольку [26] коэффициент деформационного упрочнения может быть выражен как отношение двух структурных параметров деформируемой среды $\chi \ll \lambda$ с размерностью длины, то есть $\theta \approx \chi/\lambda$, а $dV_{aw}/d\lambda < 0$ в силу (2).

В качестве второго следствия из (4) можно получить приведенную выше квадратичную форму дисперсионного соотношения (2) для автоволн локализованной пластичности на стадии линейного деформационного упрочнения. Из (4) вытекает

$$V_{aw} = \frac{\Theta}{\lambda} = \frac{\Theta}{2\pi} \cdot k, \quad (9)$$

и, если $V_{aw} = d\omega/dk$, то $d\omega = (\Theta/2\pi)k dk$. Интегрирование

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \frac{\Theta}{2\pi} \int_0^{k-k_0} k dk \quad (10)$$

приводит к квадратичному закону дисперсии

$$\omega = \omega_0 + \frac{\Theta}{4\pi}(k - k_0)^2, \quad (11)$$

эквивалентному (2), если в последнем $\alpha = \Theta/4\pi$.

Третье следствие из (4) есть экспериментально полученная зависимость (3) длины волны локализованной деформации от размера зерна ξ , имеющая форму логистической функции Ферхюльста [27]. Чтобы доказать это, запишем (4) в виде

$$\lambda = \frac{\chi}{2} \frac{V_t}{V_{aw}} \quad (12)$$

и, принимая во внимание, что скорости V_t и V_{aw} , согласно экспериментальным данным [28], зависят от размера зерна ξ , продифференцируем (12) по ξ

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = \frac{\chi}{2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{V_t}{V_{aw}} \right) = \frac{\chi}{2} \left(\frac{V_{aw} dV_t/d\xi - V_t dV_{aw}/d\xi}{V_{aw}^2} \right). \quad (13)$$

Следующее отсюда дифференциальное уравнение

$$d\lambda = \frac{\chi}{2} \left(\frac{dV_t}{d\xi} \frac{1}{V_{aw}} - V_t \frac{dV_{aw}}{d\xi} \frac{1}{V_{aw}^2} \right) d\xi, \quad (14)$$

записанное в форме

$$d\lambda = (a_1 \lambda - a_2 \lambda^2) d\xi, \quad (15)$$

совпадает с уравнением, использованным в работах [10, 28] в рамках эвристического подхода без анализа природы коэффициентов a_1 и a_2 . Стандартное решение (15) есть уравнение (3). Однако теперь, благодаря (14), коэффициенты уравнений (3) и (15) приобретают физический смысл:

$$a_1 = \frac{1}{V_t} \frac{dV_t}{d\xi} = \frac{d \ln V_t}{d\xi} \quad \text{и} \quad a_2 = \frac{2}{\chi V_t} \frac{dV_{aw}}{d\xi}, \quad \text{так как} \quad V_{aw} = \frac{\chi V_t}{2} \frac{1}{\lambda}.$$

И, наконец, из соотношения (4) вытекает некорректность общепринятого [29] допущения, согласно которому сумма $\varepsilon_{\text{tot}} = \varepsilon_{\text{el}} + \varepsilon_{\text{pl}}$ упругой ε_{el} и пластической ε_{pl} деформаций сводится к равенству $\varepsilon_{\text{tot}} \approx \varepsilon_{\text{pl}}$ в силу «очевидного» условия $\varepsilon_{\text{el}} \ll \varepsilon_{\text{pl}}$. Однако (4) недвусмысленно указывает на неаддитивность упругих и пластических процессов. Это условие может стать фундаментом для модели локализованного пластического течения, основанной на взаимообусловленности механизмов упругой и пластической деформаций.

Рассмотренные примеры иллюстрируют фундаментальную роль соотношения (4), связывающего количественно параметры автоволн локализованного пластического течения и упругих волн, в развитии представлений о природе пластической деформации твердых тел.

Заключение

На основании обработки данных о развитии локализованной пластической деформации при одноосном растяжении в широком круге материалов показано, что количественные характеристики процесса локализованного пластического формоизменения – длина автоволны и скорость ее распространения – образуют многомасштабное инвариантное произведение $\lambda \cdot V_{\text{aw}} = \text{const}$. Его величина определяется решеточными параметрами деформируемого материала. Ряд закономерностей развития пластического течения в твердых телах, такие, как зависимости скорости распространения автоволн от коэффициента деформационного упрочнения, форма дисперсионного соотношения для таких автоволн и зависимость длины автоволны локализованной пластичности от размера зерна являются следствиями этого инварианта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зуев Л.Б., Данилов В.И., Баранникова С.А. Физика макролокализации пластического течения. Новосибирск.: Наука, 2008. 327 с.
2. Порубов А.В. Локализация нелинейных волн деформации. М.: Физматлит, 2009. 208 с.
3. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. М.: Мир, 1990. 342 с.
4. Zuev L.B., Gorbatenko V.V., Pavlichev K.V. Elaboration of speckle photography techniques for plastic flow analyses // Measurement Sci. Tech. 2010. V. 21. P. 054014-1.
5. McDonald R.J., Efstathiou C., Curath P., Engng J. The wave-like plastic deformation of single crystals copper // Mater. Technol. 2009. V. 131. P. 692.
6. Fressengeas C., Beaudoin A., Entemeyer D. Dislocation transport and intermittency in the plasticity of crystalline solids // Phys. Rev. 2009. V. B. 79. P. 014108-1.
7. Третьякова Т.В., Третьяков М.П., Вильдеман В.Э. Оценка точности измерений с использованием видеосистемы анализа полей перемещений и деформаций // Вестник ПермГТУ. Механика. 2011. Т. 2. С. 92.
8. Шестопалов Л.М. Деформирование металлов и волны пластичности в них. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1958. 268 с.
9. Баранникова С.А. Дисперсия волн локализации пластической деформации // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. № 8. С. 75–80.
10. Зуев Л.Б., Зариковская Н.В., Баранникова С.А., Шляхова Г.В. Автоволны локализации пластического течения и соотношение Холла – Петча в поликристаллическом Al // Металлофизика и новейшие технологии. 2013. Т. 35. № 1. С. 113–127.
11. Данилов В.И., Заводчиков С.Ю., Баранникова С.А., Зыков И.Ю., Зуев Л.Б. Прямое наблюдение автоволны пластической деформации в циркониевом сплаве // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24. № 1. С. 26–30.

12. Трубецков Д.И., Мчедлова Е.С., Красичков Л.В. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М.: Физматлит, 2002. 198 с.
13. Малыгин Г.А. Процессы самоорганизации дислокаций и пластичность кристаллов // УФН. 1999. Т. 169. № 9. С. 979.
14. Владимиров В.И. Вопросы теории дефектов в кристаллах. Л.: Наука, 1987. 43 с.
15. Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат. 1991. 1232 с.
16. Barannikova S.A., Ponomareva A.V., Zuev L.B., Vekilov Yu.Kh., Abrikosov I.A. Significant correlation between macroscopic and microscopic parameters for the description of localized plastic flow auto-waves in deforming alloys // Solid State Com. 2012. V. 152. P. 784–787.
17. Martin R.M. Electronic structure: Basic Theory and Practical Methods. Cambridge University Press, Cambridge 2004. 624 p.
18. Vitos L., Abrikosov I.A. Anisotropic Lattice Distortions in Random Alloys from First-Principles Theory // Johansson B. Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 156401–156404.
19. Moruzzi V.L., Janak J.F. Calculated thermal properties of metals // Phys. Rev. 1988. V. B. 37. P. 790.
20. Walle A. van de, Ceder G. The effect of lattice vibrations on substitutional alloy thermodynamics // Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. P. 11.
21. Abrikosov I. A., Ruban A. V., Ya. Kats D., Vekilov Yu. H. Electronic structure, thermodynamic and thermal properties of Ni-Al disordered alloys from LMTO-CPA- DFT calculations // J. Phys.: Condens. Matter. 1993. V. 5. P. 1271.
22. Абрикосов И.А., Никонов А.Ю., Пономарева А.В. и др. Теоретическое моделирование термодинамических и механических свойств чистых компонентов сплавов на основе Ti и Zr с использованием метода точных МТ-орбиталей // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 9. С. 52–59.
23. Barannikova S.A., Zharmukhambetova A.M., Nikonov A.Yu., et al. Influence of stresses on structure and properties of Ti and Zr- based alloys from first-principles simulations // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2015. V. 71. P. 012078. DOI 10.1088/1757-899X/71/1/012078.
24. Abrikosov I.A., Ponomareva A.V., Nikonov A.Yu., et al. Theoretical description of pressure-induced phase transitions: a case study of Ti–V alloys // High Pressure Research. 2015. V. 35. P. 42–48. DOI10.1080/08957959.2014.992896.
25. Al'shits V.I., Indenbom V.L. Dislocations in Solids. Amsterdam: Elsevier, 1986. 43p.
26. Ройтбурд А.Л. Физика деформационного упрочнения монокристаллов. Киев.: Наукова думка. 1972. 526 с.
27. Мэрди Дж. Модели популяций // Математическое моделирование. М.: Мир. 1979. 109 с.
28. Zuev L.B., Semukhin B.S. Some acoustic properties of a deforming medium // Phil. Mag. 2002. V. 82. No. 6. P. 1183–1193.
29. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир? 1964. 308 с.

Статья поступила 27.03.2018

Zuev L.B., Barannikova S.A., Li Yu.V., Zharmukhambetova A.M. ON NUMERICAL ESTIMATES OF THE PARAMETERS OF LOCALIZED PLASTICITY DURING METAL TENSION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 83–94

DOI 10.17223/19988621/53/8

Keywords: localization of deformation, plastic flow, autowaves, double-exposure speckle photography.

The article considers the results of a study of the nature and quantitative characteristics of localized plastic flow of metals under uniaxial tension using speckle photography method.

It has been revealed that, in the solid bodies, plastic deformation tends to localize on the macro-scale level ranging from the yield stress to the failure.

Localization phenomenon represents a spontaneous layering of the material into non-deforming and actively deforming volumes, which are arranged over the test sample in the form of specified patterns. Each pattern transforms consistently in accordance with a plastic flow development. Moreover, the patterns are defined by the law of strain hardening acting at the given stage of plastic flow. The patterns appear in the following order: (i) switching autowave; (ii) phase autowaves; and (iii) stationary dissipative structures. At the pre-fracture stage, the collapse of autowaves is observed.

A quantitative analysis of the results obtained has been carried out. The elastoplastic strain invariant has been determined experimentally. The nature of this invariant has been also discussed. According to the latter, development of the plastic deformation occurs due to autowave processes of localized plasticity that, in turn, depends on the elastic deformation. Hence, both types of deformation are interdependent and defined by the plastic flow diagram. It has been demonstrated that a theoretical simulation can be used to predict the parameters of autowaves of localized plastic flow in deformable alloys. In the considered approach, the plastic deformation is regarded as a result of self-organization process, which occurs in an active deformed system with nonlinear structural defects.

ZUEV Lev Borisovich (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS (ISPMs), Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lbz@ispm.su

BARANNIKOVA Svetlana Aleksandrovna (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS (ISPMs), Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bsa@ispm.su

LI Yuliya Vladimirovna (Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS (ISPMs), Tomsk, Russian Federation). E-mail: jul2207@mail.ru

ZHARMUKHAMBETOVA Albina Muratovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bsa@ispm.su

REFERENCES

1. Zuev L.B., Danilov V.I., Barannikova S.A. (2008) *Fizika makrolokalizatsii plasticheskogo techeniya* [Physics of macrolocalization of plastic flow]. Novosibirsk: Nauka.
2. Porubov A.V. (2009) *Lokalizatsiya nelineynykh voln deformatsii* [Localization of nonlinear deformation waves]. Moscow: Fizmatlit.
3. Nicolis G., Prigogine I. (1989) *Exploring complexity: An introduction*. New York: W.H. Freeman.
4. Zuev L.B., Gorbatenko V.V., Pavlichev K.V. (2010) Elaboration of speckle photography techniques for plastic flow analyses. *Measurement Sci. Tech.* 21. P. 054014. DOI: 10.1088/0957-0233/21/5/054014.
5. McDonald R.J., Efstathiou C., Curath P., Engng J. (2009) The wave-like plastic deformation of single crystals copper. *J. Eng. Mater. Technol.* 131(3). P. 692. DOI: 10.1115/1.3120410.
6. Fressengeas C., Beaudoin A., Entemeyer D. (2009) Dislocation transport and intermittency in the plasticity of crystalline solids. *Phys. Rev. B* 79. P. 014108. DOI: 10.1103/PhysRevB.79.014108.
7. Tret'yakova T.V., Tret'yakov M.P., Vil'deman V.E. (2011) Otsenka tochnosti izmereniy s ispol'zovaniem videosistemy analiza poley peremeshcheniy i deformatsiy [Estimate of measurements accuracy by using video-system of displacement and strain fields analysis]. *Vestnik PermGTU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 92–100.
8. Shestopalov L.M. (1958) *Deformirovanie metallov i volny plastichnosti v nikh* [Deformation of metals and plasticity waves]. Moscow, Leningrad: Izd-vo AN SSSR.
9. Barannikova S.A. (2004) Dispersiya voln lokalizatsii plasticheskoy deformatsii [Dispersion of localization waves of plastic deformation]. *Pis'ma v ZHTF*. 30. pp 75–80.

10. Zuev L.B., Zarikovskaya N.V., Barannikova S.A., Shlyakhova G.V. (2013) Avtovolny lokalizatsii plasticheskogo techeniya i sootnoshenie Holla – Petcha v polikristallicheskom Al [Autowaves of plastic flow localization and the Hall-Petch relationship in polycrystalline Al]. *Metallofizika i noveyshie tekhnologii*. 35(1). pp. 113–127.
11. Danilov V.I., Zavodchikov S.Yu., Barannikova S.A., Zykov I.Yu., Zuev L.B. (1998) Pryamoe nablyudenie avtovolny plasticheskoy deformatsii v cirkonievom splave [Direct observation of an autowave of plastic deformation in a zirconium alloy]. *Pis'ma v ZHTF*. 24(1). pp. 26–30.
12. Trubetskov D.I., Mchedlova E.S., Krasichkov L.V. (2002) *Vvedenie v teoriyu samoorganizatsii otkrytykh sistem* [Introduction to the theory of self-organizing open systems]. Moscow: Fizmatlit.
13. Malygin G.A. (1999) Protsessy samoorganizatsii dislokatsiy i plastichnost' kristallov [Dislocation self-organization processes and crystal plasticity]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*. 169(9). pp. 979–1010. DOI: 10.3367/UFNr.0169.199909c.0979.
14. Vladimirov V.I. (1987) *Voprosy teorii defektov v kristallakh* [Issues in the theory of defects in crystals]. Leningrad: Nauka.
15. Babichev A.P., Babushkina N.A., Bratkovskiy A.M. (1991) *Fizicheskie velichiny. Spravochnik* [Physical quantities. Handbook]. Moscow: Energoatomizdat.
16. Barannikova S.A., Ponomareva A.V., Zuev L.B., Vekilov Yu.Kh., Abrikosov I.A. (2012) Significant correlation between macroscopic and microscopic parameters for the description of localized plastic flow auto-waves in deforming alloys. *Solid State Com.* 152(9). pp. 784–787. DOI: 10.1016/j.ssc.2012.01.044.
17. Martin R.M. (2004) *Electronic structure: Basic Theory and Practical Methods*. Cambridge: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9780511805769.
18. Vitos L., Abrikosov I.A. (2001) Anisotropic lattice distortions in random alloys from first-principles theory. *Johansson B. Phys. Rev. Lett.* 87. pp. 156401–156404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.156401.
19. Moruzzi V.L., Janak J.F., Schwarz K. (1988) Calculated thermal properties of metals. *Phys. Rev. B*. 37. P. 790. DOI: 10.1103/PhysRevB.37.790.
20. Van de Walle A., Ceder G. (2002) The effect of lattice vibrations on substitutional alloy thermodynamics. *Rev. Mod. Phys.* 74(1). pp. 11–45. DOI: 10.1103/RevModPhys.74.11.
21. Abrikosov I.A., Ruban A.V., Kats Ya.D., Vekilov Yu.H. (1993) Electronic structure, thermodynamic and thermal properties of Ni-Al disordered alloys from LMO-CPA-DFT calculations. *J. Phys.: Condens. Matter*. 5(9). P. 1271. DOI: 10.1088/0953-8984/5/9/012.
22. Abrikosov I.A., Nikonov A.Yu., Ponomareva A.V., Dmitriev A.I., Barannikova S.A. (2014) Theoretical modeling of thermodynamic and mechanical properties of the pure components of Ti and Zr based alloys using the exact Muffin-Tin Orbitals Method]. *Russian Physics Journal*. 56(9). pp. 1030–1038. DOI: 10.1007/s11182-014-0136-7.
23. Barannikova S.A., Zharmukhambetova A.M., Nikonov A.Yu., Dmitriev A.V., Ponomareva A.V., Abrikosov I.A. (2015) Influence of stresses on structure and properties of Ti and Zr-based alloys from first-principles simulations. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 71. P. 012078. DOI: 10.1088/1757-899X/71/1/012078.
24. Abrikosov I.A., Ponomareva A.V., Nikonov A.Yu., Zharmukhambetova A.M., Mosyagin I.Yu., Lugovskoy A.V., Hellman O., Lind H., Dmitriev A.I., Barannikova S.A. (2015) Theoretical description of pressure-induced phase transitions: a case study of Ti–V alloys. *High Pressure Research*. 35(1). pp. 42–48. DOI: 10.1080/08957959.2014.992896.
25. Al'shits V.I., Indenbom V.L. (1986) *Dislocations in Solids*. Amsterdam: Elsevier.
26. Roytburd A.L. (1972) *Fizika deformatsionnogo uprochneniya monokristallov* [Physics of the strain hardening of single crystals]. Kiev: Naukova dumka.
27. Murdie G. (1976) *Mathematical Modelling. Population Models*. London: Butterworths.
28. Zuev L.B., Semukhin B.S. (2002) Some acoustic properties of a deforming medium. *Phil. Mag. A*. 82(6). pp. 1183–1193. DOI: 10.1080/01418610208240024.
29. Tomas T. (1964) *Plasticheskoe techenie i razrushenie v tverdykh telakh* [Plastic flow and fracture in solids]. Moscow: Mir.

УДК: 536.46+662.61

DOI 10.17223/19988621/53/9

А.Ю. Крайнов, В.А. Порязов, К.М. Монсеева

**СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ В АЭРОВЗВЕСИ
НАНОРАЗМЕРНОГО ПОРОШКА АЛЮМИНИЯ¹**

Представлена математическая модель горения аэровзвеси нанодисперсного порошка алюминия. Особенностью модели является то, что для моделирования горения наночастиц алюминия используется локальная математическая модель диффузии окислителя через слой оксида алюминия на поверхности частицы с учетом его реакции с алюминием. Из решения локальных задач горения наночастиц алюминия для всей совокупности частиц аэровзвеси определяется скорость окисления наночастиц алюминия и связанная с ней скорость тепловыделения. Параметры состояния аэровзвеси наночастиц алюминия в воздухе определяются из решения системы уравнений сохранения энергии газа, частиц и сохранения массы компонентов газодисперсной смеси. Разработанная модель не требует задания температуры зажигания наночастиц алюминия. Определены зависимости скорости распространения фронта горения от массовой концентрации нанодисперсного порошка алюминия в воздухе и от начальной температуры аэровзвеси.

Ключевые слова: *аэровзесь нанодисперсного алюминия, скорость горения, процессы в газовой фазе, математическое моделирование.*

Нанопорошки алюминия, получаемые электровзрывом металлических проволок, являются химически активными, так как на их поверхности нет пленки оксида [1], и требуют специальных условий хранения. При образовании оксидной пленки на поверхности наночастиц нанопорошки алюминия могут храниться на воздухе, но остаются пожароопасными [2]. Аэровзесь таких частиц является горючей, и представляется необходимым исследование режимов распространения пламени по аэровзвеси. В частности, задача распространения пламени по порошку алюминия решалась авторами [3, 4].

В [3] представлены математические модели и экспериментальные данные о скорости распространения пламени в аэровзвеси порошков алюминия микронных размеров. Скорость фронта горения в аэровзвеси порошка алюминия сильно зависит от коэффициента избытка окислителя. По данным [3] чем меньше коэффициент избытка окислителя, тем выше скорость пламени. В [4] представлены экспериментальные результаты и результаты расчетов по математической модели скорости распространения фронта горения для соотношения массы горючего к массе окислителя в интервале значений 0.65–1. В этой области скорость распространения фронта горения в аэровзвеси частиц алюминия размером 5.5–6.5 мкм практически постоянная и имеет величину 0.22–0.25 м/с. Также в [4] приведены данные о скорости распространения фронта горения в аэровзвеси нанопорошков алюминия, полученные на основе расчетов по модели. Показано, что с уменьшением размера частиц скорость распространения фронта горения возрастает и при раз-

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-79-20011).

мерах частиц 100 нм и соотношении массы горючего к массе окислителя 0.85 скорость составляет 2.5–3 м/с.

В настоящей работе проводится математическое моделирование горения аэровзвеси нанопорошка алюминия. Целью работы является определение зависимости скорости распространения фронта горения от массовой концентрации нанодисперсного порошка алюминия в воздухе и от начальной температуры аэровзвеси.

Предполагается, что в трубке большого диаметра и длины с закрытым торцом слева и открытым справа находится аэровзвесь нанодисперсного порошка алюминия. В начальный момент времени порошок по области распределен равномерно, а его массовая концентрация меньше стехиометрической. На левом торце трубки имеется высокотемпературный источник зажигания, который воспламеняет аэровзвесь нанопорошка алюминия. После воспламенения в аэровзвеси начинает распространяться волна горения. Необходимо определить скорость распространения волны горения относительно стенок трубки в зависимости от начальной температуры аэровзвеси и массовой концентрации порошка алюминия.

В математических моделях горения замороженной водяной суспензии нанопорошка алюминия [5] и смеси ультрадисперсного алюминия с водой [6] используется квадратичный закон для времени сгорания частицы алюминия от ее диаметра в парах воды [7]. В этих моделях температура зажигания частиц алюминия является параметром. По данным [8] время сгорания наночастиц алюминия в горячем газе зависит не только от диаметра, но и от давления, температуры и состава окружающего газа. В [8] отмечается, что в силу малости размера частиц характерное время диффузии $r_0^2/D(T_*)$ (r_0 – радиус частицы, $D(T_*)$ – коэффициент диффузии при температуре окружающего газа T_*) для наноразмерных частиц сравнимо с характерным временем химической реакции. В связи с этим при моделировании окисления наноразмерных частиц алюминия необходимо учитывать диффузию через слой оксида алюминия и зависимость скорости реакции от температуры и концентрации реагентов.

Сформулируем предположения математической модели горения одиночной наночастицы алюминия в среде газообразного окислителя. Предполагается, что частица имеет сферическую форму, на ее поверхности имеется тонкий слой оксида. Частица попадает в газообразный окислитель, быстро нагревается до температуры окружающего газа, и после этого температура газа и частицы не меняется. Тепло, выделяющееся в реакции окисления алюминия, передается в окружающий газ, при этом изменением температуры газа пренебрегается из-за малой объемной доли частиц в газе. Через слой оксида алюминия происходит диффузия кислорода (или другого окислителя). Разогретый выше температуры плавления алюминий, находящийся под слоем оксида алюминия, также диффундирует через слой оксида алюминия. В слое оксида и на границе между оксидом и расплавленным алюминием под слоем оксида происходит реакция окисления алюминия до конечного продукта Al_2O_3 . Предполагается, что шаровой слой оксида алюминия не разрушается под действием возникающих напряжений в результате роста слоя оксида алюминия. Для сформулированных предположений математическая модель горения одиночной наночастицы алюминия в газообразном окислителе будет состоять из уравнений диффузии окислителя и алюминия в слое оксида алюминия с учетом их расходования в химической реакции:

$$\frac{\partial \rho_O}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_O}{\partial r} = D_0 \exp\left(-\frac{E_d}{RT}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \rho_2 \frac{\partial a_O}{\partial r} \right) - \frac{3\mu_O}{2\mu_{Al}} \rho_{Al} \frac{\rho_O}{\rho_2} p k_{01} \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_{Al}}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_{Al}}{\partial r} = D_0 \exp\left(-\frac{E_d}{RT}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \rho_2 \frac{\partial a_{Al}}{\partial r} \right) - \rho_{Al} \frac{\rho_O}{\rho_2} p k_{01} \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right), \quad (2)$$

где $a_O = \rho_O / \rho_2$ – массовая концентрация кислорода в газе, $a_{Al} = \rho_{Al} / \rho_2$ – массовая концентрация алюминия в газе, t – время; r – радиальная координата; T – температура; ρ_O – парциальная плотность окислителя; ρ_{Al} – парциальная плотность алюминия в слое оксида; ρ_2 – плотность газа; μ_{Al} – молекулярная масса алюминия; μ_O – молекулярная масса атома кислорода; D_0 – коэффициент зависимости коэффициента диффузии от температуры; E_d – энергия активации диффузии; E_a – энергия активации химической реакции; R – универсальная газовая постоянная; u – скорость перемещения слоя оксида; k_{01} – предэкспоненциальный множитель в законе Аррениуса; p – давление в газе.

Начальные условия для уравнений (1), (2) имеют вид

$$\rho_O(r, 0) = \rho_{O,0}, \quad \rho_{Al}(r, 0) = \rho_{Al,0}. \quad (3)$$

На внешней поверхности слоя оксида поток массы окислителя определяется соотношением

$$D_0 \exp\left(-\frac{E_d}{RT}\right) \rho_2 \frac{\partial a_O(r_0(t), t)}{\partial r} = -\beta(\rho_O(r_0(t), t) - \rho_{O,\infty}), \quad (4)$$

где β – коэффициент массообмена, $\beta = D_g / r_0(t)$; $D_g = k_1 (T/T_*)^{k_2} p_0 / p$ – коэффициент диффузии окислителя, $k_1 = 1.13 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$, $k_2 = 1.724$ [8]; p – давление газа; $p_0 = 1 \text{ атм}$ – атмосферное давление; $T_* = 1 \text{ К}$ – референтная температура; $r_0(t)$ – внешний радиус слоя оксида.

На внутренней поверхности слоя оксида поток массы окислителя определяется соотношением

$$D_0 \exp\left(-\frac{E_d}{RT}\right) \rho_2 \frac{\partial a_O(r_1(t), t)}{\partial r} = \rho_O(r_1(t), t) K(T), \quad K(T) = \frac{\rho_O}{\rho_2} p k_{02} \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right), \quad (5)$$

где $K(T)$ – скорость гетерогенной реакции на границе между слоем оксида и расплавленным алюминием; k_{02} – предэкспоненциальный множитель; $r_1(t)$ – внутренний радиус слоя оксида.

Граничные условия для уравнения парциальной плотности алюминия в слое оксида (2):

$$\frac{\partial a_{Al}(r_0(t), t)}{\partial r} = 0, \quad (6)$$

$$\rho_{Al}(r_1(t), t) = \rho_{Al,1}. \quad (7)$$

Скорость движения внутренней границы слоя оксида $u_1(t) = \frac{dr_1}{dt}$ находится из соотношения, определяющего сохранение потоков массы алюминия и кислорода

на этой границе:

$$-D_0 \exp\left(-\frac{E_d}{RT}\right) \rho_2 \frac{\partial a_O(r_1(t), t)}{\partial r} \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O} + \\ + D_0 \exp\left(-\frac{E_d}{RT}\right) \rho_2 \frac{\partial a_{Al}(r_1(t), t)}{\partial r} = u_1(t) \rho_{liq Al}, \quad (8)$$

где $\rho_{liq Al}$ – плотность расплавленного алюминия.

Скорость движения внешней границы слоя оксида $u_0(t) = \frac{dr_0}{dt}$ определяется из соотношения

$$u_0(t) = u_1(t) \frac{r_0^2}{r_1^2} - u_1(t) \frac{r_0^2}{r_1^2} \frac{2\mu_{Al} + 3\mu_O}{2\mu_{Al}}. \quad (9)$$

Выражение (9) определяет скорость нарастания радиуса частицы в предположении равенства плотностей расплавленного алюминия и слоя оксида. Скорость $u_1(t)$ отрицательная, скорость $u_0(t)$ положительная. Скорость перемещения внутренних точек слоя оксида определяется выражением

$$u(r, t) = u_1(t) \frac{r_0^2}{r^2} - u_1(t) \frac{r_0^2}{r^2} \frac{2\mu_{Al} + 3\mu_O}{2\mu_{Al}}. \quad (10)$$

Решение системы уравнений (1), (2) с условиями (3) – (7) и определением скорости движения слоя оксида по (8) – (10) проводится по неявной разностной схеме методом прогонки. Расчеты проводились при следующих значениях физических величин:

$$R = 8.31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}, \rho_{liq Al} = 2700 \text{ кг/м}^3, D_0 = 1.57 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с},$$

$$E_d = 10 \text{ кДж/моль}, E_a = 71.6 \text{ кДж/моль}, \rho_{Al1} = 0.3456 \text{ кг/м}^3,$$

$$\mu_g = 0.029 \text{ кг/моль}, \mu_{Al} = 0.027 \text{ кг/моль}, \mu_O = 0.016 \text{ кг/моль},$$

$$k_{01} = 43700 \text{ (1/(с} \cdot \text{Па))}, k_{02} = 4.37 \cdot 10^{-8} \text{ м/(с} \cdot \text{Па)}.$$

Окружающий газ представляет собой смесь кислорода с азотом в пропорции 50:50, как в [8]. Расчеты проводились для $r_0 = 40 \text{ нм}$, при температуре газа в интервале $T = 1200 - 2200 \text{ К}$, давлении $p_a = 0.8 \text{ МПа}$ и $p_a = 3.2 \text{ МПа}$ [8]. Плот-

ность газа определялась из уравнения $\rho_2 = \frac{\mu_g p}{RT} \text{ кг/м}^3$.

В расчетах определялось время полного сгорания алюминия в частице для заданных значений температуры и давления газа, которые представлены на рис. 1. При давлении $p_a = 0.8 \text{ МПа}$ и температуре 2000 К частица алюминия радиусом 40 нм сгорает за время 107 мкс , что совпадает с данными измерений, представленных в [8, 9], приведенных на рис. 1. Увеличение давления и температуры приводит к уменьшению времени сгорания.

Результаты расчетов по математической модели (1) – (10) были использованы для моделирования горения аэрозвеси наночастиц алюминия.

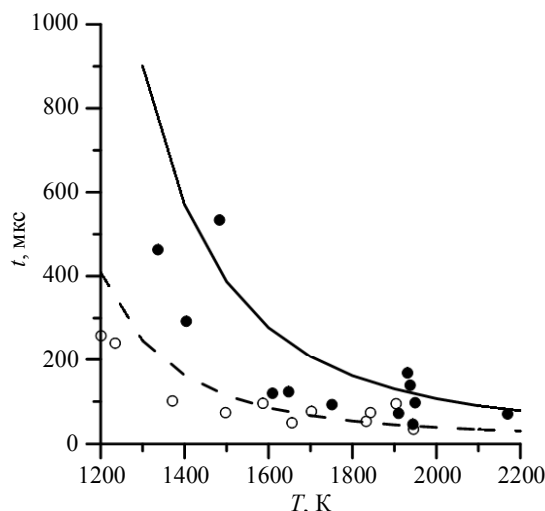


Рис. 1. Время сгорания частицы алюминия радиусом $r_0 = 40$ нм при давлении газа $p_a = 0.8$ МПа (сплошная линия), $p_a = 3.2$ МПа (штриховая линия). Экспериментальные данные из [9]: ● – $p_a = 0.8$ МПа, ○ – $p_a = 3.2$ МПа

Fig. 1. Combustion time of an aluminum particle with the radius of $r_0 = 40$ nm at a gas pressure of $p_a = 0.8$ MPa (solid line) and $p_a = 3.2$ MPa (dashed line). Experimental data from [9]: ● – $p_a = 0.8$ MPa and ○ – $p_a = 3.2$ MPa

При зажигании и распространении фронта горения по аэровзвеси нанопорошка алюминия происходит расширение газа и его движение. Частицы увлекаются потоком воздуха и движутся в нем. Предполагается, что процессы происходят в изобарических условиях и наночастицы алюминия имеют известную начальную толщину слоя оксида. В потоке воздуха перед фронтом горения частицы нагреваются, реагируют с кислородом воздуха через слой оксида. Механизм окисления описывается системой уравнений (1) – (10). Из системы уравнений (1) – (10) в каждой частице, находящейся в данный момент времени на расстоянии x от левого торца трубки, по величине скорости перемещения границы между расплавом алюминия и слоя оксида определяется расход кислорода из газовой фазы выражением

$$g = -4\pi r_1^2 \rho_{\text{liq Al}} u_1(x) \frac{3}{2} \frac{\mu_O}{\mu_{\text{Al}}}. \quad (11)$$

Каждая частица в потоке окислителя участвует в теплообмене, массообмене, обмену импульсом с окружающим газом. Значения $\rho_{O,\infty}$ в (4), температуры частицы T в (1) – (8) и скорости ее движения в каждой точке пространства вдоль трубки определяются из системы уравнений эволюции параметров газовой фазы и совокупности частиц в трубке. При постановке задачи полагается, что массовая концентрация нанопорошка алюминия существенно меньше стехиометриче-

ской, и в уравнении сохранения массы кислорода в воздухе не учитывается его диффузия.

Постановка задачи при сформулированных допущениях имеет вид

- уравнение энергии для газа:

$$c_2 \rho_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} + v \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + 4\pi \alpha r_k^2 n (T_3 - T_2), \quad (12)$$

- уравнение неразрывности для газа:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 v)}{\partial x} = -G, \quad (13)$$

- уравнения баланса массы кислорода:

$$\frac{\partial \rho_{O,\infty}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{O,\infty} v)}{\partial x} = -G, \quad (14)$$

- уравнение энергии для частиц:

$$c_3 \rho_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial t} + w \frac{\partial T_3}{\partial x} \right) = -4\pi \alpha r_k^2 n (T_3 - T_2) + G Q_{Al} \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O}, \quad (15)$$

- уравнения баланса массы частиц:

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_3 w)}{\partial x} = G, \quad (16)$$

- уравнение движения частиц:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} = -\tau_{fr}, \quad (17)$$

- уравнение счетной концентрации частиц:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nw)}{\partial x} = 0, \quad (18)$$

- уравнение состояния газа:

$$p = \frac{1}{\mu_{air}} \rho_2 R T_2 = \text{const}, \quad (19)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} T_2(x, 0) = T_N, \quad T_3(x, 0) = T_N, \quad \rho_2(x, 0) = \frac{\mu_{air} p}{R T_N}, \quad \rho_{O,\infty}(x, 0) = 0.2 \rho_2(x, 0), \\ \rho_3(x, 0) = \rho_{3,0}, \quad v(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad n(x, 0) = n_{3,0}. \end{aligned} \quad (20)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} T_2(0, t) = T_S, \quad \frac{\partial T_2(\infty, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_3(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2(0, t)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho_{O,\infty}(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho_3(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n(0, t)}{\partial x} = 0, \quad w(0, t) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

В уравнениях (10) – (20) приняты следующие обозначения: t – время; x – координата; T_2 – температура газовой смеси; T_3 – температура частиц; T_N – начальная температура аэрозвеси; T_S – температура стенки (левого торца) трубки; ρ_2 –

плотность газа; $\rho_{O,\infty}$ – парциальная плотность кислорода; ρ_3 – приведенная плотность частиц (масса частиц в единице объема); ρ_k – плотность вещества частицы; n – число частиц в единице объема; v – скорость газа; w – скорость движения частиц; p – давление; r_k – радиус частицы; $r_{Al,0}$ – начальный радиус частицы алюминия; μ_{Al} , μ_O , μ_{air} – молярные массы алюминия, атома кислорода, воздуха; c_2 – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении; λ_2 – коэффициент теплопроводности газа; α – коэффициент теплоотдачи; G – скорость изменения массы частиц при их горении; Q_{Al} – теплота сгорания алюминия в кислороде; R – универсальная газовая постоянная; τ_{fr} – сила взаимодействия частиц с газом.

Скорость движения, температура частиц и парциальная плотность кислорода определяется из решения системы уравнений (12) – (19). Эти величины используются в граничных условиях и параметрах для решения системы уравнений (1) – (2). Из системы уравнений (1) – (2) с граничными условиями (4) – (7) в каждой частице, находящейся в данный момент времени на расстоянии x от левого торца трубы, по величине скорости перемещения границы между расплавом алюминия и слоя оксида определяется расход кислорода из газовой фазы выражением:

$$G = gn. \quad (22)$$

В результате из решения совокупности задач окисления частиц из модели на «микроуровне» (1), (2) в каждой точке пространства определяются правые части (22), связанные с массообменом, для модели на «макроуровне» (12) – (21).

Сила взаимодействия частиц алюминия с газом вычисляется по формуле

$$\tau_{fr} = \frac{F_{fr}}{4/3 \pi r_k^3 \rho_k}, \quad F_{fr} = C_R S_m \frac{\rho_2 (w - v) |v - w|}{2}. \quad (23)$$

Здесь коэффициент сопротивления определяется по эмпирической формуле [10]:

$$C_R = \frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,682}), \quad Re = \frac{2r_k \rho_2 |v - w|}{\eta}, \quad r_k = \sqrt[3]{\frac{\rho_3}{(4/3) \pi n \rho_k}}.$$

Коэффициент теплоотдачи определяется как

$$\alpha = \frac{Nu \lambda_2}{2r_k}, \quad Nu = 2 + \sqrt{Nu_l^2 + Nu_t^2}, \quad (24)$$

где $Nu_l = 0,664 Re^{0,5}$, $Nu_t = 0,037 Re^{0,8}$ [10]; C_R – коэффициент сопротивления; F_{fr} – сила сопротивления сферы при обтекании; S_m – площадь миделева сечения; η – коэффициент динамической вязкости; Nu – число Нуссельта; Re – число Рейнольдса.

Представленная модель в отличие от моделей, описанных в [5, 6], не требует задания температуры зажигания наночастиц алюминия. Скорость окисления наночастиц алюминия и связанная с ним скорость тепловыделения определяются из решения системы уравнений (1) – (2).

Система уравнений (1), (2) с граничными условиями (3) – (7) и (12) – (19) с граничными и начальными условиями (20) – (21) и выражениями для правых час-

тей решалась численно. Система уравнений (1), (2) с граничными условиями (3) – (7) решалась численно по неявной разностной схеме методом прогонки. Уравнение (12) решалось по неявной разностной схеме методом прогонки. Уравнения (14) – (18) решаются по явной разностной схеме с использованием аппроксимации конвективных слагаемых разностями против потока. Для обеспечения устойчивости численного решения используется условие устойчивости вида $\Delta t < \Delta x / \max[v_i]$, где Δt – шаг по времени, Δx – шаг по пространству, v_i – скорость в точках разностной сетки. Уравнение (13) аппроксимируется неявной разностной схемой с использованием разностей против потока. Из разностного аналога уравнения (13) при известных значениях плотности на n -ом и $n+1$ -м временных слоях бегущим счетом определяется скорость движения газовой фазы. Системы уравнений (1), (2) и (12) – (19) решаются в соответствии со следующим алгоритмом вычисления значений неизвестных на $n+1$ -м временном слое (счет шага по времени). Из решения системы уравнений (1), (2) в каждой точке по пространству по формуле (22) определяются величины расхода кислорода из газовой фазы. Тем самым определяются правые части уравнений (13) – (16), связанные с массообменом и тепловыделением от химического реагирования. По уравнению (12), записанному в разностной форме, вычисляется температура газа на $n+1$ -ом временном слое. По уравнению (14) вычисляется парциальная плотность кислорода. По уравнению (19) – плотность газа при заданном давлении. По уравнению (13) – скорость газа, по уравнению (15) – температура частиц, по уравнению (17) – скорость движения частиц, по уравнению (18) – количество частиц в единице объема, по уравнению (16) – распределенная плотность частиц. Счет шага по времени повторяется необходимое количество раз. Расчеты проводятся до установления стационарного распространения фронта горения в трубке.

На основе описанного алгоритма составлена компьютерная программа. Проведено исследование численного решения на сходимость при уменьшении величины шага по пространству на основании которого была выбрана величина шага по пространству, обеспечивающая сходимость результатов с погрешностью не более 0.3 %. В процессе расчетов контролировалась выполнимость законов сохранения массы и энергии, которые выполнялись с точностью 99.5 %.

Численное исследование горения аэрозвеси наночастиц алюминия проводилось для начальной массовой концентрации порошка алюминия в интервале значений $\rho_{3,0} = 0.07 - 0.08 \text{ кг/м}^3$, при начальной температуре $T_N = 293, 393, 493 \text{ К}$, атмосферном давлении $p = 0.1 \text{ МПа}$ и размере частиц $r_{Al,0} = 40 \text{ нм}$. Расчеты проводились при следующих значениях теплофизических и формально-кинетических величин:

$$\begin{aligned} c_{Al} &= 903 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad c_2 = 1000 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad \rho_k = 2700 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_{liqAl} &= 2700 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_{Al,1} = 0,346 \text{ кг/м}^3, \quad R = 8.31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}, \quad \eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, \\ \lambda_2 &= 1 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \quad Q_{Al} = 36.0 \text{ МДж/кг}, \quad \mu_{Al} = 0.027 \text{ кг/моль}, \quad \mu_O = 0.016 \text{ кг/моль}, \\ \mu_{air} &= 0.029 \text{ кг/моль}, \quad D_0 = 1.884 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}, \quad E_d = 10 \text{ кДж/моль}, \\ E_a &= 71.6 \text{ кДж/моль}, \quad k_{01} = 4.37 \cdot 10^4 \text{ л/(с} \cdot \text{Па)}, \quad k_{02} = 4.37 \cdot 10^{-8} \text{ м/(с} \cdot \text{Па)}. \end{aligned}$$

На рис. 2 представлены распределения температуры аэровзвеси наночастиц алюминия при распространении фронта горения. Распределения построены в последовательные моменты времени через $\Delta t = 0.4 \cdot 10^{-3}$ с. Видно, что после зажигания и периода существенно нестационарного распространения фронта горения происходит выход распространения фронта горения на стационарный режим.

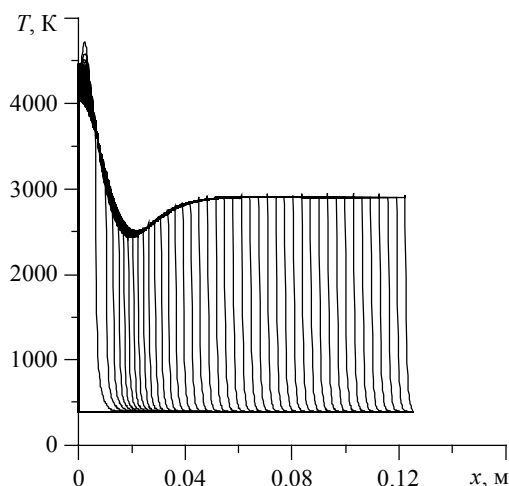


Рис. 2. Распределения температуры газа по длине в последовательные моменты времени через $\Delta t = 0.4 \cdot 10^{-3}$ с. $T_N = 393$ К, $\rho_{3,0} = 0.08$ кг/м³

Fig. 2. Gas temperature distributions along the length at successive time instants at an interval of $\Delta t = 0.4 \cdot 10^{-3}$ s for $T_N = 393$ K and $\rho_{3,0} = 0.08$ kg/m³

На рис. 3 представлены распределения параметров состояния аэровзвеси наночастиц алюминия в окрестности фронта горения при установившемся режиме его распространения. Видно, что в узкой зоне реакции происходит повышение температуры до ее конечной, адиабатической, частицы выгорают. Перед фронтом горения скорость газа и частиц повышается, за фронтом скорость становится равной нулю.

В таблице представлены величины скорости распространения волны горения в аэровзвеси нанодисперсного порошка алюминия относительно лабораторной системы координат, V_f , и относительно исходной газозвеси, V_n . Видно, что с увеличением начальной температуры и массовой концентрации порошка скорость распространения фронта горения увеличивается. Результаты качественно совпадают с данными [4].

$\rho_{3,0}$, кг/м ³	T_N , °C	V_f , м/с	V_n , м/с
0.07	20	2.03	0.11
	120	5.36	0.86
	220	10.71	2.11
0.08	20	3.41	0.61
	120	8.06	1.06
	220	15.0	3.00

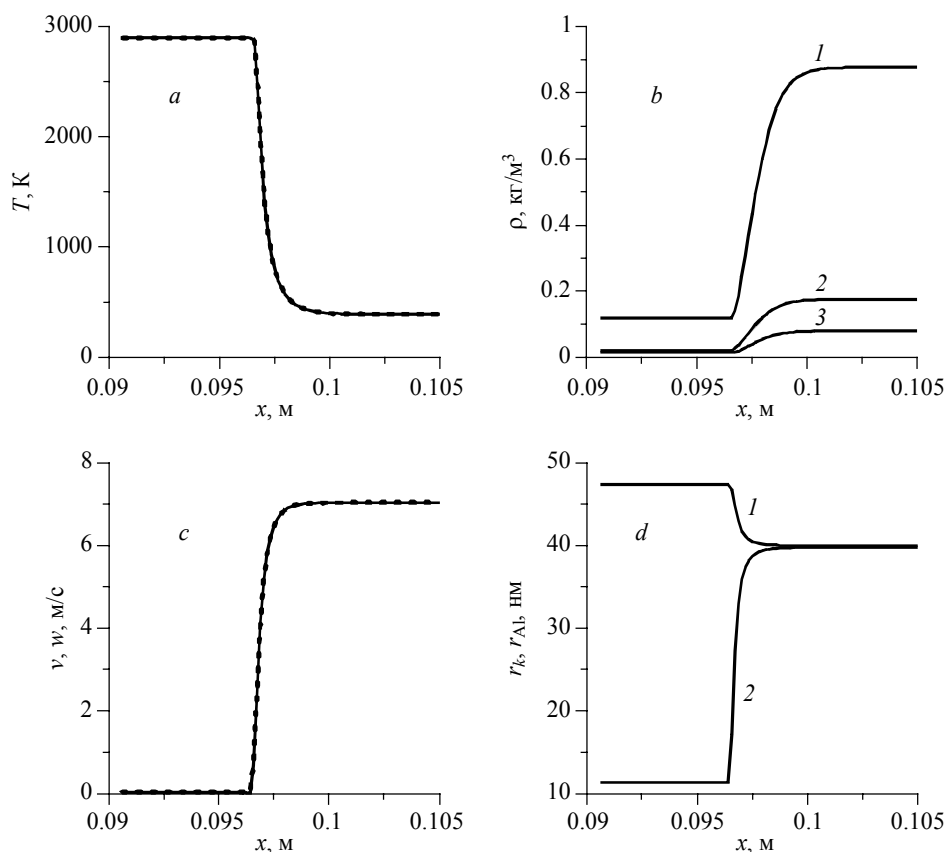


Рис. 3. Распределение температуры газа (сплошные линии) и частиц (пунктирные линии) (a); плотности газа (1), парциальной плотности кислорода (2), распределенной плотности частиц (3) (b); скорости движения газа (сплошные линии) и частиц (пунктирные линии) (c); радиуса частиц (1) и не сгоревшей части алюминия в частице (2) (d). $T_N = 393$ К, $\rho_{3,0} = 0.08$ кг/м³

Fig. 3. Distributions of the (a) temperature of gas (solid lines) and particles (dashed lines), (b) 1, gas density, 2, partial oxygen density, and 3, distributed particle density, (c) velocity of gas (solid lines) and particles (dashed lines), and (d) the radius of 1, particles and 2, unburned part of aluminum in the particle at $T_N = 393$ К, $\rho_{3,0} = 0.08$ kg/m³

Таким образом, разработана математическая модель горения аэрозвеси нанодисперсного порошка алюминия. Для моделирования горения наночастиц алюминия используется локальная математическая модель диффузии окислителя через слой оксида алюминия на поверхности частицы с учетом его реакции с алюминием. Из решения локальных задач горения наночастиц алюминия для всей совокупности частиц в аэрозвеси определяется скорость окисления наночастиц алюминия и связанная с ним скорость тепловыделения. Параметры состояния аэрозвеси наночастиц алюминия определяются из решения системы уравнений сохранения энергии газа, частиц и сохранения массы компонентов газодисперсной смеси. Разработанная модель не требует задания температуры зажигания наноча-

стиц алюминия. Решение системы уравнений математической модели проведено численно. Определены зависимости скорости распространения фронта горения от массовой концентрации нанодисперсного порошка алюминия в воздухе и от начальной температуры аэрозвеси.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ультрадисперсные и наноразмерные порошки: создание, строение, производство и применение* / под ред. акад. В.М. Бузника. Томск: Изд-во НТЛ, 2009. 192 с.
2. *Физика и химия горения нанопорошков металлов в азотсодержащих газовых средах* / под ред. А.А. Громова. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 332 с.
3. Ягодников Д.А. Воспламенение и горение порошкообразных металлов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 432 с.
4. Huang Y., Risha G.A., Yang V., Yetter R.A. Effect of particle size on combustion of aluminum particle dust in air // *Combustion and Flame*. 2009. No. 156. С. 5–13.
5. Крайнов А.Ю., Порязов В.А. Математическое моделирование горения замороженной суспензии нанодисперсного алюминия // *Физика горения и взрыва*. 2016. Т. 52. № 2. С. 60–66.
6. Порязов В.А., Крайнов А.Ю. Математическая модель и расчет нестационарной скорости горения металлизированных твердых ракетных топлив // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2017. № 50. С. 99–111.
7. Бекстед М.В. Анализ данных по времени горения частиц алюминия // *Физика горения и взрыва*. 2005. Т. 41. № 5. С. 55–69.
8. Сандарам Д., Янг В., Зарко В.Е. Горение наночастиц алюминия (обзор) // *Физика горения и взрыва*. 2015. Т. 51. № 2. С. 37–63.
9. Bazyn T., Krier H., Glumac N. Combustion of nanoaluminum at elevated pressure and temperature behind reflected shock waves // *Combustion and Flame*. 2006. V. 145. No. 4. P. 703–713.
10. *Справочник по теплообменникам*: в 2 т. Т. 1. Москва: Энергоатомиздат, 1987.

Статья поступила 20.03.2018 г.

Krainov A.Yu., Poryazov V.A., Moiseeva K.M. FLAME PROPAGATION VELOCITY IN AN AERO-SUSPENSION OF NANOSCALE ALUMINUM POWDER. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 95–106

DOI 10.17223/19988621/53/9

Keywords: aero-suspension of nanodispersed aluminum powder, combustion rate, processes in a gas phase, mathematical modeling.

A mathematical model of the combustion of aero-suspension of nanodispersed aluminum powder is presented. Modeling of the combustion of aluminum nanoparticles is implemented using the local mathematical model of the oxidizer diffusion through aluminum oxide layer on the surface of the particle with account for its reaction with aluminum. The rate of oxidation of aluminum particles and the associated rate of heat release are determined from the solution of local problems on the combustion of aluminum nanoparticles. The state parameters of the aero-suspension of aluminum nanoparticles in the air are determined from the solution of the system of equations of energy conservation for gas and particles, and the equation of mass conservation for components of the gas-dispersed mixture. A developed model does not require specification of the ignition temperature of aluminum nanoparticles.

Numerical solution of the stated problem allowed one to obtain the dependence of the propagation velocity of combustion front on the mass concentration of nanodispersed aluminum powder in the air and on the initial temperature of aluminum powder. Propagation velocity of

combustion front was found to increase with increasing initial temperature and mass concentration of the powder.

KRAINOV Aleksey Yurievich (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

PORYAZOV Vasilii Andreevich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: poryazov@mail.ru

MOISEEVA Kseniya Mikhaylovna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

REFERENCES

1. Biryukov Yu.A., Buznik V.M., Dunaevskiy G.E. (2009) *Ul'tradispersnye i nanorazmernye poroshki: sozдание, stroenie, proizvodstvo i primeneniye* [Ultrafine and nanosized powders: creation, structure, production, and application]. Tomsk: Izd-vo NTL.
2. Gromov A.A., Il'in A.P., Ditts A.A. (2007) *Fizika i khimiya goreniya nanoporoshkov metallov v azotsoderzhashchikh gazovykh sredakh* [Physics and chemistry of combustion of metal nanopowders in nitrogen-containing gases]. Tomsk: Izd-vo Tomskogo Universiteta.
3. Yagodnikov D.A. (2009) *Vosplamnenie i gorenie poroshkoobraznykh metallov* [Ignition and combustion of powdered metals]. Moscow: MGTU im. N.E. Bauman.
4. Huang Y., Risha G.A., Yang V., Yetter R.A. (2009) Effect of particle size on combustion of aluminum particle dust in air. *Combustion and Flame*. 56. pp. 5–13. DOI: 10.1016/j.combustflame.2008.07.018.
5. Krainov A.Yu., Poryazov V.A. (2016) Mathematical modeling of combustion of a frozen suspension of nanosized aluminum. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 52(2). pp. 177–183. DOI: 10.1134/S0010508216020076.
6. Poryazov V.A., Krainov A.Yu. (2017) Matematicheskaya model' i raschet nestatsionarnoy skorosti goreniya metallizirovannykh tverdykh raketnykh topliv [Mathematical model and calculation of the unsteady combustion rate of metallized solid rocket propellants]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 99–111.
7. Beckstead M.W. (2005) Correlating aluminum burning times. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 41(5). pp. 533–546. DOI: 10.1007/s10573-005-0067-2.
8. Sundaram D.S., Yang V., Zarko V.E. (2015) Combustion of nano aluminum particles (Review). *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 51 (2). pp. 173–196. DOI: 10.1134/S0010508215020045.
9. Bazyn T., Krier H., Glumac N. (2006) Combustion of nanoaluminum at elevated pressure and temperature behind reflected shock waves. *Combustion and Flame*. 145(4). pp. 703–713. DOI: 10.1016/j.combustflame.2005.12.017.
10. Schlünder E.U., Spalding D.B., Taborek J. (1987) *Heat Exchanger Design Handbook: HEDH. Heat exchanger theory*. VDI-Verlag.

УДК 519.2, 539.3

DOI 10.17223/19988621/53/10

Э.Ф. Кривулина, И.Ю. Каневская

ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РАМЫ, ВЫПОЛНЕННОЙ ИЗ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА, НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОДХОДА

Представлено решение задачи устойчивости прямоугольной рамы. Стойки и ригель рамы выполнены из пористого материала. Закон распределения пористости по сечению задан близким к рациональному. Нагрузка считается случайной величиной. Решение задачи получено с использованием теории стационарных случайных процессов. Дан сравнительный анализ надежности и массового расхода материала рам со сплошными и пористыми сечениями. Для решения задачи упругого деформирования пористых материалов используется классическая гипотеза сплошности с механическими характеристиками материала, скорректированными на пористость.

Ключевые слова: рама, пористость, устойчивость, вероятность, надежность.

Пористые материалы получают в настоящее время все большее распространение в связи с целым рядом их специфических свойств. Одним из таких свойств является повышенная удельная прочность по сравнению со сплошными материалами. Следует также отметить, что при работе конструкций при видах нагружения, дающих неравномерное распределение напряжений по сечению (например, при изгибе), в зонах с низким уровнем напряжений целесообразно выполнить конструкцию с переменной по сечению пористостью [1, с.122]. Следует заметить, что наличие пористости в материале нарушает основной постулат механики деформируемых твердых тел – гипотезу сплошности. Выходом из сложившейся ситуации является условное принятие пористого материала сплошным, но с скорректированными на пористость свойствами [2, с.165]. Полагая в дальнейшем использование в качестве исполнительного материала пористую сталь, выразим основную механическую характеристику (модуль Юнга) в виде формулы [1, с.122]

$$E = a_1 + a_2 P + a_3 P^2, \quad (1)$$

где P – пористость, а коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 получены следующими:

$$\begin{aligned} a_1 &= 209285.7143 \text{ МПа}, \\ a_2 &= -535000 \text{ МПа}, \\ a_3 &= 321428.5714 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (2)$$

Модуль Юнга для сплошного материала равен $E = 210000$ МПа.

Рассмотрим прямоугольную симметричную раму, нагруженную двумя одинаковыми усилиями G , приложенными в узлах и ориентированными по осям стоек рамы (рис. 1). Материал рамы – пористая сталь; B_1 , B_2 – изгибные жесткости стоек и ригеля соответственно.

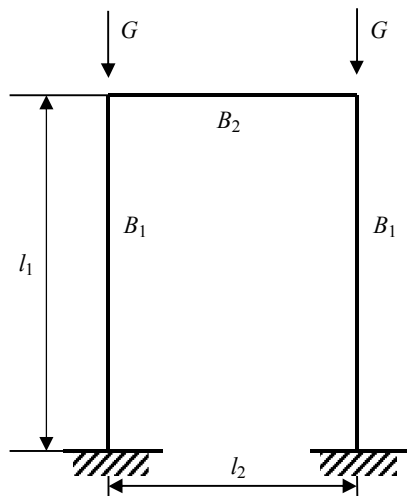


Рис. 1. Схема нагружения portalной рамы

Fig. 1. Loading condition for a portal frame

Полагаем, что нагрузка является собой нормальный стационарный случайный процесс. В этом случае мерой надежности является вероятность того, что за время эксплуатации T действующая нагрузка G ни разу не превысит критической, то есть надежность по устойчивости будет равна [3, с.58]

$$H = \exp \left[- \int_0^T \int_0^\infty \dot{G} f(G_{kr}, \frac{\dot{G}}{t}) dG dt \right]. \quad (3)$$

Для нормального стационарного процесса $G(t)$ выражение (3) примет вид

$$H = \exp \left\{ - \frac{T \sigma_{\dot{G}}}{2 \pi \sigma_G} \exp \left[- \frac{(G_{kr} - m_G)^2}{2 \sigma_G^2} \right] \right\}. \quad (4)$$

При нагрузке $G = G_{kr}$ возможны две формы потери устойчивости – симметричная и асимметричная.

При реальном проектировании рам отмечено, что наиболее вероятной формой потери устойчивости является асимметричная, которая в дальнейшем принята за основную. Следуя [1], зададим корреляционную функцию в виде

$$K_G(\tau) = \sigma_G^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right). \quad (5)$$

На основании (5) выражение (4) примет вид

$$H = \exp \left\{ - \frac{T \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2 \pi} \exp \left[- \frac{(G_{kr} - m_G)^2}{2 \sigma_G^2} \right] \right\}. \quad (6)$$

Решая детерминистическую задачу устойчивости и определяя G_{kr} , подставив последнюю в (6), определим искомую надежность. Условием гарантии устойчивости конструкции за время ее эксплуатации будет $H \geq H_{\text{норм}}$, где $H_{\text{норм}}$ – нормативная надежность.

К решению детерминистической задачи устойчивости и поиска критической силы $G_{кр}$ подходим с энергетических позиций. Аппроксимируем асимметричную форму потери устойчивости рамы ее упругой линией от горизонтальной силы Q , приложенной к ригелю.

Раскрывая статическую неопределимость, построим эпюру изгибающих моментов от действующей силы Q (рис. 2).

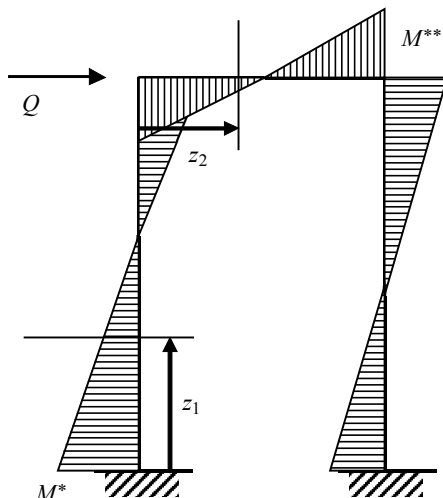


Рис. 2. Эпюра изгибающих моментов от поперечной нагрузки
Fig. 2. Bending-moment diagram due to the shear load

На рис. 2

$$M^* = \frac{Q}{2}[l_1 - kl_2], \quad M^{**} = kQ\frac{l_2}{2}, \quad k = \frac{l_1^2 l_2}{4B_1} \frac{1}{\frac{l_1 l_2^2}{2B_1} + \frac{l_2^3}{12B_2}}. \quad (7)$$

Функция изгибающих моментов на стойках при отсчете снизу имеет вид

$$M_1 = \frac{Q}{2}[l_1 - kl_2 - z_1]. \quad (8)$$

Функция изгибающих моментов на ригеле, отсчитываемых слева, имеет вид

$$M_2 = \frac{kQ}{2}[l_2 - 2z_2]. \quad (9)$$

Потенциальная энергия изгиба рамы равна

$$U = 2 \int_0^{l_1} \frac{M_1^2 dz}{2B_1} + \int_0^{l_2} \frac{M_2^2 dz}{2B_2}. \quad (10)$$

Подставляя (8) и (9) в (10) и выполняя интегрирование, получим

$$U = \frac{Q^2}{4B_1} \left[-l_1(l_1 - kl_2) \cdot kl_2 + \frac{l_1^3}{3} \right] + \frac{k^2 Q^2 l_2^3}{24B_2}. \quad (11)$$

Для определения вертикальных смещений точек приложения сил G предварительно найдем угол поворота стойки θ . Для этого приложим к основной системе единичный момент (рис. 3) в произвольном сечении z и построим эпюру изгибающего момента $\bar{M}$.

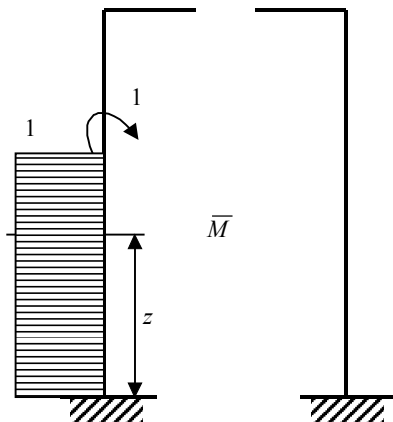


Рис. 3. Нагружение единичным моментом
Fig. 3. Load by a single moment

Для определения угла поворота в сечении z запишем формулу интеграла Мора

$$\theta = \frac{1}{B_1} \int_0^z M_1 \cdot \bar{M} dz. \quad (12)$$

Подставив в (12) функции M_1 , $\bar{M}$, получаем

$$\theta = \frac{1}{B_1} \int_0^z \frac{Q}{2} [l_1 - kl_2 - z_1] \cdot 1 \cdot dz,$$

что после интегрирования дает функцию

$$\theta = \frac{Q}{2B_1} \left\{ (l_1 - kl_2)z - \frac{z^2}{2} \right\}. \quad (13)$$

Соответственно (13) вертикальное перемещение точки приложения силы G равно

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \theta^2 dz = \frac{Q^2}{8B_1^2} \left\{ \frac{(l_1 - kl_2)^2 l_1^3}{3} - \frac{(l_1 - kl_2) l_1^4}{4} + \frac{l_1^5}{20} \right\}. \quad (14)$$

Работа, совершаемая двумя силами G на перемещении δ , равна

$$A = 2G\delta = \frac{Q^2 G}{4B_1^2} \left\{ (l_1 - kl_2) \left[\frac{(l_1 - kl_2) l_1^3}{3} - \frac{l_1^4}{4} \right] + \frac{l_1^5}{20} \right\}. \quad (15)$$

Полагая $G = G_{\text{кр}}$ и приравняв работу сил $G_{\text{кр}}$ потенциальной энергии деформации, получаем

$$G_{kr} = \frac{B_1 \left[-l_1(l_1 - kl_2)kl_2 + \frac{l_1^3}{3} \right] + \frac{k^2 l_2^3 B_1^2}{6B_2}}{(l_1 - kl_2) \left[\frac{l_1^3}{3} - \frac{l_1^4}{4} \right] + \frac{l_1^5}{20}}. \quad (16)$$

Для дальнейшего примем профиль поперечного сечения в виде прямоугольника. Полагая, что нейтральной осью при изгибе будет ось x и учитывая целесообразность увеличения пористости при приближении к оси x , представим закон распределения пористости по высоте сечения в виде квадратной параболы (рис. 4):

$$P = P_0 \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right). \quad (17)$$

Здесь P_0 – пористость в центре тяжести сечения, обусловленная техническими возможностями производства.

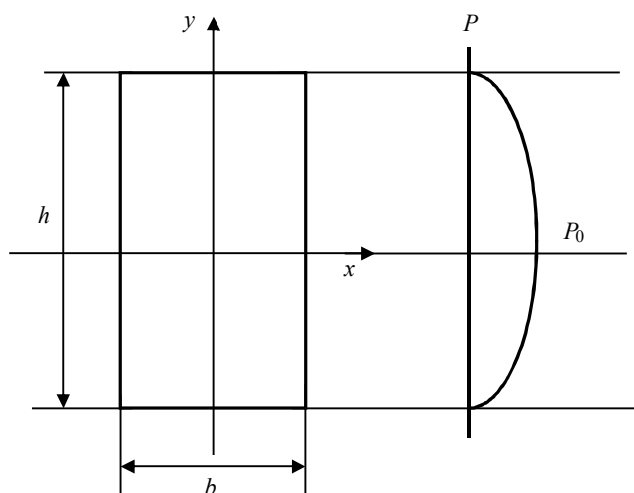


Рис. 4. Распределение пористости по высоте сечения

Fig. 4. Distribution of the porous along the cross-section

На основании (1) и (17) распределение модуля Юнга по высоте поперечного сечения будет следующим:

$$E(y) = a_1 + a_2 P_0 \left[1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right] + a_3 P_0^2 \left[1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right]^2. \quad (18)$$

Параметр B жесткости бруса при изгибе представится формулой

$$B = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} E(y) y^2 dy,$$

что при использовании (18) дает

$$B = \frac{bh^3}{12} (a_1 + a_2 P_0 \cdot 0.2 + a_3 P_0^2 \cdot 0.114285). \quad (19)$$

В качестве примера расчета рассмотрим раму, для которой $l_1 = l_2 = l = 3$ м, сечение – квадрат $b \times h = 10 \times 10$ см.

Рабочая нагрузка G с математическим ожиданием $m_G = 810$ кН. Среднее квадратическое отклонение нагрузки $\sigma_G = 80$ кН.

Материал – сталь пористой структуры с характеристиками (2), $P_0 = 0,4$.

Параметры случайного процесса: $\alpha = 0,3 \frac{1}{с}$, $\beta = 0,4 \frac{1}{с}$. Срок эксплуатации рамы $T = 10$ лет $= 315 \cdot 10^6$ с. Нормативная надежность $H_{\text{норм}} = 0,999$.

Расчет параметра жесткости по формуле (19) дает

$$B_1 = B_2 = B_{\text{пор}} = 1713,2863 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}^2.$$

Расчет критической силы для пористой конструкции дает значение

$$G_{\text{кр.пор}} = 7,446 \frac{B_{\text{пор}}}{l^2} = 1417,46 \cdot 10^{-3} \text{ МН}.$$

Для определения надежности рамы по устойчивости подставим расчетные данные в формулу (6), получим

$$H_{\text{пор}} = \exp \left\{ - \frac{315 \cdot 10^6 \sqrt{0,3^2 + 0,4^2}}{2\pi} \exp \left[- \frac{(1417,46 - 810)^2}{2 \cdot 80^2} \right] \right\} = 0,99992$$

Полученная надежность $H_{\text{пор}} = 0,99992 > H_{\text{норм}} = 0,999$, то есть эксплуатационная надежность рамы обеспечена.

В качестве сравнительного анализа рассмотрим ту же раму, но выполненную из сплошного материала. Решение этой задачи при тех же параметрах было получено в [4]:

$$G_{\text{кр.спл}} = 7,446 \frac{EI}{l^2} = 7,446 \frac{Ebh^3}{12l^2} = 1448 \cdot 10^{-3} \text{ МН}.$$

Надежность для сплошного профиля сечения по формуле (6) будет равна

$$H_{\text{спл}} = 0,9999996 > H_{\text{норм}} = 0,999.$$

Как видим, надежность пористой рамы незначительно ниже сплошной, что не влияет на ее эксплуатацию.

Соотношение критических сил обеих рам следующее:

$$\frac{G_{\text{кр.пор}}}{G_{\text{кр.спл}}} = \frac{1417,46}{1448} = 0,98.$$

Детерминистические коэффициенты запаса рам равны $n_y = \frac{G_{\text{кр}}}{G}$.

$$n_{\text{спл}} = \frac{1448}{810} = 1,78,$$

$$n_y = \frac{1417}{810} = 1,75.$$

Как видим, наличие пористости снижает показатели устойчивости не более 2 %.

Для оценки справедливости используемых расчетных приемов заменим раму условной стойкой и определим ее гибкость.

Запишем формулу Эйлера для условной стойки $EI = B$:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = 7.446 \frac{B}{l^2}$$

откуда получаем коэффициент свободной длины

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi^2}{7.446}} = 1.15.$$

Гибкость условной стойки равна

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I_{pr}}{A}}}.$$

где $I_{pr} = \frac{B}{E}$ – приведенный момент инерции сечения, $A = b \times h$ – площадь сечения.

$$I_{pr} = \frac{1713.2863 \cdot 10^{-3}}{2.1 \cdot 10^5} = 815.85 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

$$A = 100 \text{ см}^2 = 100 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

$$\lambda = \frac{1.15 \cdot 300}{\sqrt{\frac{815.85}{100}}} = 121$$

Найденное значение $\lambda = 121 > \lambda_{pred} = 100$, следовательно, предложенное решение приемлемо.

Как видим из расчетов, наличие пористости при надлежащем ее выборе практически не снижает надежности конструкции. Оценим теперь материалоемкость обеих рам, для чего подсчитаем площадь пор в сечении пористой рамы

$$A_{por} = b \cdot 2 \int_0^{\frac{h}{2}} P(y) dy = 2bP_0 \int_0^{\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2\right) dy = 0.266666 bh.$$

$$A_{spl} = b \cdot h \text{ – площадь сплошного сечения.}$$

Находим процент экономии площадей

$$\Delta \% = \frac{A_{por}}{A_{spl}} \cdot 100\% = \frac{0.26666}{1} \cdot 100\% = 26.7\%.$$

Итак, при снижении несущей способности рамы пористой структуры лишь на 2 % имеем выигрыш в расходе материала 26.7 %, что свидетельствует о целесообразности выполнения конструкций из пористых материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шляхов С.М., Гаврилов Д.Ю. Метод последовательных приближений в задаче рационального распределения пористости при чистом изгибе бруса прямоугольного сечения // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 122–127.
2. Белов С.В. Пористые металлы в машиностроении. М.: Машиностроение, 1981. 247 с.
3. Арасланов А.М. Расчет элементов конструкций заданной надежности при случайных воздействиях. М.: Машиностроение, 1987. 128 с.
4. Кривулина Э.Ф., Круглова А.О. Об оценке надежности по устойчивости прямоугольной рамы по теории стационарных случайных процессов // Техническое регулирование в транспортном строительстве: Электронный журнал. Саратов, СГТУ, 2016. № 5(19).

Статья поступила 27.10.2017 г.

Krivulina E.F., Kanevskaya I.Yu. ESTIMATION OF THE RELIABILITY OF A RECTANGULAR FRAME MADE OF THE POROUS METAL IN TERMS OF ITS RIGIDITY ON THE BASIS OF PROBABILISTIC APPROACH. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 107–115

DOI 10.17223/19988621/53/10

Keywords: frame, porosity, stability, probability, reliability.

This article is aimed to solve one of the problems of mechanics of deformable solids such as the analysis of the influence of material porosity on the structural elements under random loads. The rigidity of the legs and girder of rectangular frame made of the porous material is studied. The porosity distribution law is specified to be rational. In this case, the porosity distribution is opposite to the normal stress distribution law due to the bending-buckling. The elements of rectangular frame are bent during buckling. In the bar cross-section, the stresses are distributed unevenly. Therefore, it is reasonable to distribute porosity in the same manner. The porosity is minimum in the region of maximum stress, and, near the neutral axis of the bend, the maximum porosity is observed. The load is shared symmetrically between the frame legs and is oriented to the axes of the latter. The effect of random load, whose law of variation corresponds to a random stationary process, is considered. It should be noted that the presence of porosity in the material breaks the main postulate of the mechanic of deformable solids that is the hypothesis of continuity. To solve this problem, it is considered that the porous material is continuous, and its mechanical characteristics are consistent with the porosity. In particular, Young's modulus for the porous material is approximated by power polynomial whose factors are defined by experimental data processing using the least squares method.

A correlation function is used for the random stationary process that is represented as a formula for determination of the frame reliability by rigidity of the construction during the specified operating period. The energy approach is applied to solve the deterministic problem of the theory of stability and to determine the critical force. An asymmetric buckling is used as it is the most probable form. The critical load is defined by condition of the equality of deformation potential energy to the external force energy. Estimation of the frame reliability at the assigned loads and porosity distribution law is demonstrated numerically. For comparison, the frame made of a continuous material is considered. Analysis shows that insignificant decrease in the reliability of the frame porous structure as compared to the continuous structure (about 2%) provides saving in the material of about 26.7%.

KANEVSKAYA Irina (Saratov State Agrarian University named after N.I. Vavilov, Saratov, Russian Federation). E-mail ir.kanevskaya@yandex.ru

KRIVULINA Elvira (Candidate of Technical Sciences, Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin, Saratov, Russian Federation). E-mail: orifelwi@mail.ru

REFERENCES

1. Araslanov A.M. (1987) *Raschet elementov konstruksiy zadannoy nadezhnosti pri sluchaynykh vozdeystviyakh* [Calculation of structural elements with a specified reliability under random loads]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Belov S.V. (1981) *Poristye metally v mashinostroenii* [Porous metals in mechanical engineering]. Moscow: Mashinostroenie.
3. Krivulina E.F., Kruglova A.O. (2016) Ob otsenke nadezhnosti po ustoychivosti pryamougol'noy ramy po teorii statsionarnykh sluchaynykh protsessov [About estimation of reliability on stability of the square-wave frame on theories of the stationary casual processes]. *Electronic Journal: Technical Regulation in Transport Building*. 5(19). DOI: 10.17223/19988621/46/8.
4. Shlyakhov S.M., Gavrilov D.Yu. (2016) Metod posledovatel'nykh priblizheniy v zadache ratsional'nogo raspredeleniya poristosti pri chistom izgibe brusa pryamougol'nogo secheniya [The method of successive approximations in the problem management distribution of porosity in pure bending rectangular timber]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya – Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 3(29). pp. 122–127.

УДК 532.5.032;536.22

DOI 10.17223/19988621/53/11

А.В. Шваб, Р.В. Брендаков, А.Ю. Порохнин

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФТОРИРОВАНИЯ
МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ВОЛЬФРАМА**

Представлено математическое моделирование процесса получения газообразного гексафторида вольфрама на основе протекания реакции между порошком вольфрама и фтором в химическом реакторе, рабочей зоной которого является канал прямоугольного сечения. Моделирование этого явления проводится на основе решения трехмерных уравнений переноса импульса, теплоты и вещества в бинарной смеси с учетом гетерогенной реакции, проходящей на дне канала между слоем порошка вольфрама и газовым потоком фтора. В результате численного решения задачи найдены распределения полей вектора скорости, концентрации и температуры, а также интегральная характеристика полноты использования фтора. Достоверность полученных результатов подтверждается тестовыми исследованиями и сравнением результатов расчета с опытными данными.

Ключевые слова: *вольфрам, фтор, гексафторид вольфрама, фторирование, математическая модель, численный метод, граничные условия, полнота использования фтора.*

В настоящее время актуальной проблемой является получение износостойких покрытий, изделий из тугоплавких материалов сложной формы или других сложных частей аппаратов, работающих при больших температурах, давлениях и касательных напряжениях. Как известно, на практике имеются большие проблемы при механической обработке тугоплавких металлов. Однако в последнее время наиболее перспективным способом получения износостойких покрытий или непосредственно изделий из тугоплавких материалов является метод, основанный на осаждении их из парогазовой фазы с помощью восстановления их фторидов или хлоридов [1–5]. Для реализации этого способа необходимо предварительное проведение процесса фторирования металлического вольфрама [6–9]. Поэтому первой фазой данного способа является процесс получения газообразного гексафторида вольфрама, который образуется в результате протекания реакции между газовым фтором и порошком вольфрама. Процесс фторирования вольфрама протекает по реакции



которая начинает идти примерно при температуре порядка 300 °С.

В данной работе проведен численный расчет фторирования порошка вольфрама в химическом реакторе, рабочей зоной которого является достаточно протяженный канал прямоугольного сечения.

Этот процесс фторирования порошка вольфрама осуществляется за счет прохождения газообразного фтора над слоем порошкового вольфрама, расположенного на дне канала. Проходя через активную зону реактора, фтор взаимодействует с вольфрамовым порошком, образуя гексафторид вольфрама. Целью данной работы является исследование влияния гидродинамики и тепломассопереноса на процесс получения газообразного гексафторида металла. Для выяснения этого влия-

ния в данной работе проведено численное решение системы трехмерных уравнений Навье – Стокса, переноса теплоты и вещества при наличии гетерогенной реакции на нижней поверхности рабочей зоны химического реактора. Для более полного использования фтора при химической реакции задается очень малая скорость его перемещения по реактору. Вследствие этого компоненты бинарной смеси можно считать несжимаемой средой. Однако плотность смеси существенно изменяется за счет изменения концентраций компонентов смеси вследствие протекания химической реакции (1). Поэтому будем считать плотность переменной, но зависящей только от концентраций компонентов смеси, и, используя принцип аддитивности для газовых смесей, положим плотность смеси равной

$$\rho_{\text{см}} = \rho_f m_f + \rho_g m_g,$$

где m_f и m_g – объемные концентрации фтора и гексафторида вольфрама соответственно. Если принять за масштаб плотность фтора и учесть для бинарной смеси, что $m_f + m_g = 1$, то в результате получим безразмерную плотность смеси ρ , равную:

$$\rho = k_p + (1 - k_p) m_f. \quad (2)$$

Введем относительные массовые концентрации фтора ε_f и гексафторида вольфрама ε_g . Выражая плотность смеси через относительную массовую концентрацию ε_f [10], получим

$$m_f = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f + \frac{M_f}{M_g}(1 - \varepsilon_f)}, \quad (3)$$

где M_f и M_g – молекулярные массы фтора и гексафторида вольфрама соответственно. Тогда для плотности смеси получим зависимость

$$\rho = k_p + (1 - k_p) \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f + \frac{M_f}{M_g}(1 - \varepsilon_f)}. \quad (4)$$

Аналогично, для теплоемкости смеси будем иметь

$$c_p = k_c + (1 - k_c) m_f = k_c + (1 - k_c) \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f + \frac{M_f}{M_g}(1 - \varepsilon_f)}. \quad (5)$$

Здесь $k_c = (c_p)_g / (c_p)_f$ – есть отношение удельных теплоемкостей гексафторида вольфрама и фтора. Для безразмерного коэффициента динамической вязкости μ смеси используется формула [10]:

$$\mu = \frac{\mu_{\text{см}}}{\mu_f} = \frac{1}{m_f \frac{M_f}{M_{\text{см}}} + \frac{1}{k_\mu} \frac{M_g}{M_{\text{см}}}(1 - m_f)}.$$

Здесь $k_\mu = \mu_g / \mu_f$ и молекулярная масса смеси $M_{\text{см}}$ определяется аддитивной зависимостью:

$$M_{\text{см}} = m_f M_f + m_g M_g.$$

Изменения температуры в рабочей зоне не слишком велики [6], поэтому коэффициенты k в формулах (3) и (5) представляются линейной зависимостью от тем-

пературы, а также пренебрегается изменением коэффициента теплопроводности и диффузии. Учет небольших значений составляющих вектора скорости u_x, u_y, u_z позволяет пренебречь в уравнении энергии влиянием субстанциональной производной от давления и диссипацией энергии. На основании сделанных допущений система безразмерных уравнений сохранения массы, переноса импульса, энергии и массообмена примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = 0; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho u_x}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_x u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_x u_z}{\partial z} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \text{div } \mathbf{V}) \right]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho u_y}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x u_y}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_y u_z}{\partial z} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \text{div } \mathbf{V}) \right]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho u_z}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x u_z}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y u_z}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z^2}{\partial z} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \text{div } \mathbf{V}) \right] - \frac{\rho - \rho_s}{\text{Fr}}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho c_p \vartheta}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho c_p u_x \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \rho c_p u_y \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \rho c_p u_z \vartheta}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1-k_c) \vartheta \rho}{\text{Pr}_d \text{Re}} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(1-k_c) \vartheta \rho}{\text{Pr}_d \text{Re}} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{(1-k_c) \vartheta \rho}{\text{Pr}_d \text{Re}} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \right]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \rho \varepsilon_f}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho u_x \varepsilon_f}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y \varepsilon_f}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z \varepsilon_f}{\partial z} \right) = \\ & = \frac{1}{\text{Pr}_d \text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \right) \right]; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\varepsilon_f + \varepsilon_g = 1. \quad (12)$$

Здесь безразмерная система уравнений (6) – (12) получена с использованием в качестве масштаба скорости U_0 – среднее значение скорости на входе в реактор, в качестве масштаба длины – была выбрана высота камеры H . В безразмерной системе уравнений появились критерии Рейнольдса $Re = U_0 \rho_f H / \mu_f$, Фруда $Fr = U_0^2 / gH$, Прандтля $Pr = c_{p,f} \mu_f / \lambda_f$, диффузионного Прандтля $Pr_d = \mu_f / \rho_f d$, значение вектора скорости V и интегральное безразмерное значение плотности $\rho_s(x)$ – текущее среднее значение плотности смеси по сечениям $x = \text{const}$. Значение безразмерной температуры вводилось по формуле

$$\vartheta = \frac{(T - T_0)}{T_0}, \quad (13)$$

где T_0 – соответствует температуре на входе в реактор.

Для получения единственного решения использовались следующие граничные условия. На входе в реактор задавались безразмерные значения составляющих вектора скорости, температуры и концентрации фтора в смеси:

$$u_x = 1; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0; \quad \vartheta = 0; \quad \varepsilon_f = 1.$$

На выходе из реактора использовались условия установления искомых функций:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial x} = 0.$$

На стенках реактора, за исключением нижней стенки, для скоростей принимались условия прилипания, а для температуры и концентрации условия Неймана:

$$u_x = u_y = u_z = 0; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial n} = 0.$$

На нижней стенке в зоне гетерогенной реакции имеем следующие условия. Для поддержания химической реакции задается необходимый удельный тепловой поток Q_w . Химическая реакция (1) является экзотермической и поэтому имеет место выделение удельного дополнительного теплового потока Q_ε . В результате на стенке получим граничное условие

$$\lambda_f \frac{\partial T}{\partial Z} = Q_w + Q_\varepsilon$$

или в безразмерном виде с использованием формулы (13):

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)_w = q_w + q_\varepsilon, \quad (14)$$

где

$$q_w = \frac{Q_w H}{\lambda_f T_0}; \quad q_\varepsilon = \frac{Q_\varepsilon H}{\lambda_f T_0}.$$

В результате химической реакции (1) в реакционной зоне на нижней стенке возникает направленный диффузионный поток фтора, равный

$$J_f = \rho_f d \left(\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial Z} \right)_w,$$

безразмерная форма которого имеет вид

$$J = \frac{J_f}{\rho_f U_0} = \frac{d}{HU_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \right)_w = \frac{1}{\text{Re Pr}_d} \left(\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \right)_w. \quad (15)$$

Для относительной массовой концентрации ε_f в зоне реакции на нижней стенке будем использовать граничное условие третьего рода [11]:

$$\rho_f d \left(\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \right)_w = k (\varepsilon_f^m)_w. \quad (16)$$

Здесь индекс w – соответствует значениям на нижней стенке, d – коэффициент диффузии, k – константа, зависящая только от температуры, m – показатель степени – есть показатель степени реакции. Он может выражать суммарный результат нескольких элементарных реакций, происходящих на поверхности реакции, или, что в нашем случае, аппроксимирует более сложную функциональную зависимость (16) в виде степенного закона [11]. Величина константы k определяется зависимостью [11, 12]

$$k = k_0 \exp \left(-\frac{U}{RT} \right),$$

где U – энергия активации, R – газовая постоянная. Используя определение безразмерной температуры (13) последнюю формулу можно представить в виде

$$k(\vartheta) = k_0 \exp \left[-\frac{U}{RT_0(1+\vartheta)} \right].$$

В безразмерном виде формула (16) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \right)_w = \beta(\vartheta) (\varepsilon_f^m)_w,$$

где $\beta(\vartheta) = k(\vartheta)H/d\rho_f$ и $z = Z/H$.

Из соотношения стехиометрических коэффициентов в уравнение химической реакции (1) следует, что скорость смеси в реакционной зоне направлена внутрь стенки и величина ее будет пропорциональна диффузионному потоку J_f . Отсюда с точностью до постоянной k_u будем иметь $(U_z)_w = -2/3 k_u J_f$ или в безразмерном виде

$$u_z = -\frac{2}{3} k_u J. \quad (17)$$

Значение постоянной k_u для установившегося процесса по времени можно определить из баланса для объемного расхода компоненты фтора в аппарате. Баланс расхода компоненты фтора можно представить в виде:

$$G_{\text{вх}} = G_{\text{вых}} + G_p. \quad (18)$$

Здесь $G_{\text{вх}}$, $G_{\text{вых}}$ и G_p – безразмерные объемные расходы фтора на входе в аппарат, на выходе из аппарата и в реакционной зоне на нижней стенке соответственно. Расписывая формулу (18) и учитывая, что во входном сечении площадью S безразмерное значение $G_{\text{вх}} = S$ в силу выбора масштаба скорости. В результате получим:

$$k_u = -\frac{S - \iint u_{x,\text{вых}}(m_f)_{\text{вых}} dydz}{\frac{2}{3} \iint J(m_f)_w dydx}.$$

В последней формуле в знаменателе интегрирование проводится по площади реакционной зоны на нижней стенке, а в числителе – в выходном сечении аппарата. Аналогично может быть учтено изменение удельного выделения тепла при прохождении экзотермической реакции (1). В результате получим $q_e = k_q J$, где k_q – постоянная константа.

Одним из эффективных способов решения уравнений движения среды в переменных «скорость – давление» является метод физического расщепления по времени полей скорости и давления [13].

Рассмотрим для сокращения записи систему уравнений неразрывности и переноса импульса (6) – (9) в индексных обозначениях

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} + \frac{(\rho - \rho_s) g_i}{g Fr}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0, \quad (20)$$

где

$$\sigma_{i,j} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{i,j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right).$$

Здесь $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Для численного решения этой системы уравнений воспользуемся методом физического расщепления полей скорости и давления. Пусть решение системы (19), (20) для временного слоя n известно и требуется определить решение на временном слое $n+1$. Применяя метод физического расщепления полей скорости и давления, получим вместо уравнения (19) два соотношения

$$\frac{(\rho u_i)^+ - (\rho u_i)^n}{\Delta \tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i^+ u_j^n) = -\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{i,j}^+}{\partial x_j} + \frac{(\rho - \rho_s) g_i}{g Fr}; \quad (22)$$

$$\frac{(\rho u_i)^{n+1} - (\rho u_i)^+}{\Delta \tau} = -\frac{\partial (\delta p)}{\partial x_i}, \quad (23)$$

где верхним индексом «+» обозначено промежуточное сеточное значение вектора скорости и введена поправка к давлению между временными слоями n и $n+1$, равная величине $\delta p = p^{n+1} - p^n$.

Умножая скалярно соотношение (23) на градиент и учитывая соленоидальность вектора скорости на $n+1$ временном слое, найдём уравнение Пуассона для поправки давления δp :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\delta p) = \frac{1}{\Delta \tau} \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j}. \quad (24)$$

Таким образом, из решения скалярных уравнений переноса импульса, представляющих проекции на оси координат уравнения (22) находится промежуточный вектор скорости u_i^+ . Затем интегрированием уравнения Пуассона (24) определяется поправка к давлению δp и, следовательно, находится величина давления на $n+1$ временном слое $p^{n+1} = p^n + \delta p$. Далее, в соответствии с зависимостью (23), определяется вектор скорости на $(n+1)$ -м временном слое:

$$u_i^{n+1} = u_i^+ - \frac{\Delta\tau}{\rho} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x_i}.$$

Следует отметить, что проекции векторного уравнения (22) являются параболическими скалярными уравнениями переноса, а тип уравнение (24) – эллиптический. При решении стационарной задачи уравнение (24) удобнее представить в виде параболического нестационарного уравнения

$$\frac{\partial(\delta p)}{\partial \tau_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\delta p) = -\frac{1}{\Delta\tau} \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j}, \quad (25)$$

где τ_1 – фиктивное время, выполняющее роль итерационного параметра.

В результате получаем параболическую систему уравнений (9), (10), (22), (25) и стационарное решение этой системы удобно искать эволюционным методом установления по времени, причем, выбор шагов по времени $\Delta\tau$ и $\Delta\tau_1$ позволяет влиять на быстроту сходимости итерационного процесса. Необходимо отметить, что устойчивость и эффективность численного расчёта существенно повышается, если на одном временном шаге $\Delta\tau$ нестационарное уравнение для поправки к давлению δp решается дополнительно. В силу нелинейности системы уравнений выбор временных шагов и количества необходимых итераций устанавливается опытным путём. Причем число временных шагов определяется выполнением неравенства для каждой искомой функции:

$$\delta\Phi = \max \left| \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta\tau} \right| < \varepsilon. \quad (26)$$

При решении нестационарной задачи можно использовать ту же систему уравнений, однако уравнение (25) необходимо интегрировать по фиктивному времени τ_1 до полного его установления на каждом временном шаге $\Delta\tau$ нестационарной задачи. Численное решение задачи проводилось на разнесённой разностной сетке, причем каждое уравнение переноса расписывалось с помощью обобщенной неявной двухслойной схемы переменных направлений, предложенной Дугласом и Ганом [14]. Эта схема, записанная в «дельта»-форме для линейного нестационарного уравнения переноса безусловно устойчива и имеет второй порядок точности по времени. Для представления конвективных и диффузионных слагаемых использовалась экспоненциальная схема, которая снимает ограничение по сеточному числу Рейнольдса. Нелинейность системы уравнений переноса сказывается на устойчивости численного решения и, следовательно, приводит к необходимости опытным путем выбора временного шага в соответствии с зависимостью (26).

Достоверность численного решения динамики жидкости для установившегося течения в канале квадратного сечения определялась сопоставлением с аналитическим решением, которое представлено на рис. 1. Аналитическое решение [15] имеет вид

$$u_x = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi y i}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi z j}{h}\right)}{i j \left(\frac{i^2}{b^2} + \frac{j^2}{h^2}\right)}. \quad (27)$$

Здесь u_x – есть отношение размерной скорости к средне-расходной и безразмерные стороны квадрата равны $b = B/H = 1$ и $h = H/H = 1$.

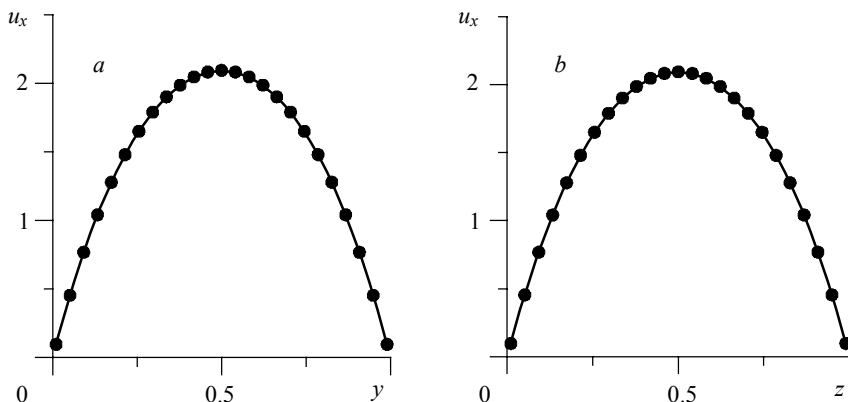


Рис. 1. Сравнение расчета (сплошная линия) с аналитической зависимостью (27), показанной точками, для установившегося течения в канале с квадратным поперечным сечением: *a* – на центральной линии по *z*, *b* – на центральной линии по *y*

Fig. 1. Comparison of the calculated results (solid line) with an analytical dependence (27) (dotted line) for a steady flow in the channel with a square cross-section: on the centerline along (*a*) *z* axis and (*b*) *y* axis

Достоверность предложенной физико-математической модели процесса фторирования вольфрама проверялась сопоставлением с опытными данными [16, 17] по распределению среднего по сечению канала значения массовой концентрации гексафторида вольфрама в зависимости от безразмерной длины канала $x = X/L$. Это сопоставление расчетных и опытных данных показано на рис. 2.

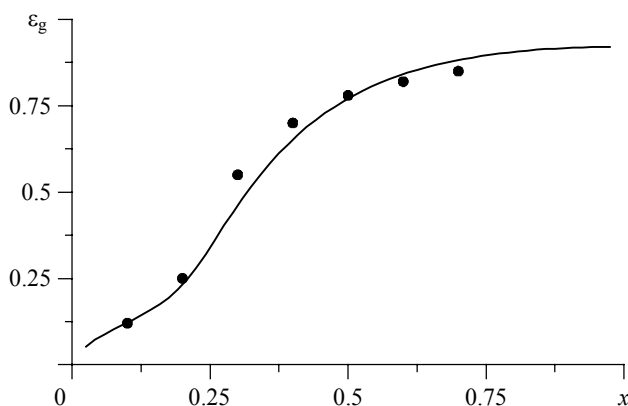


Рис. 2. Распределение средней по сечению канала массовой концентрации ε_g гексафторида вольфрама в зависимости от безразмерной длины реакционной зоны *x* при параметрах: $Re = 11$; $k_p = 7.6$; $m = 2$; $Pr = 1$; $Pr_d = 1$; $k_\mu = 0.75$; $U = 32951$ Дж/моль; $k_0 = 438$; $k_c = 0.45$

Fig. 2. Distribution of the average mass concentration ε_g of tungsten hexafluoride as a function of the dimensionless length of reaction zone *x* at the following parameters: $Re = 11$; $k_p = 7.6$; $m = 2$; $Pr = 1$; $Pr_d = 1$; $k_\mu = 0.75$; $U = 32951$ J/mole; $k_0 = 438$; and $k_c = 0.45$

Распределение изолиний относительной массовой концентрации ε_f , изолиний температуры ϑ и изолиний плотности смеси ρ в плоскости Oxz для середины канала, т.е. $y = 0.5$, показано соответственно на рис. 3 – 5.

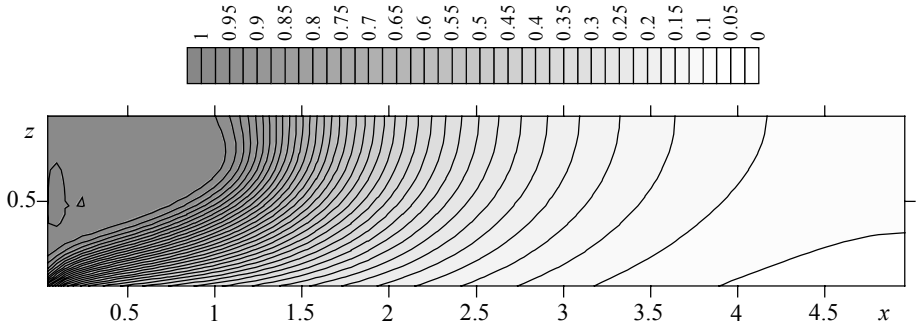


Рис. 3. Распределение изолиний относительной массовой концентрации фтора ε_f в среднем сечении канала ($y = 0.5$)

Fig. 3. Distribution of the isolines of fluorine relative mass concentration ε_f in the middle section of the channel ($y = 0.5$)

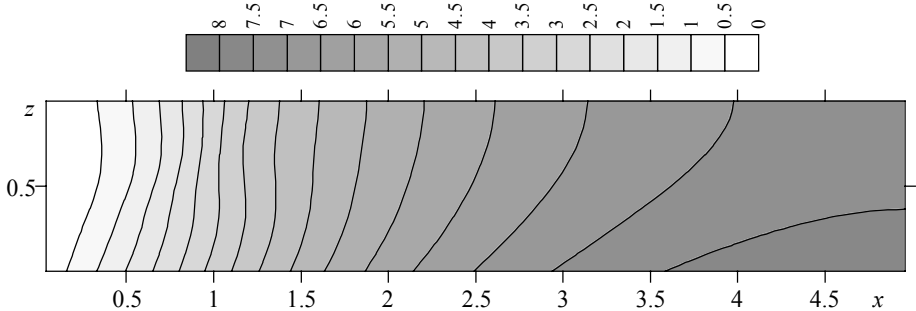


Рис. 4. Распределение изолиний температуры ϑ в среднем сечении канала ($y = 0.5$)

Fig. 4. Distribution of the isolines of temperature ϑ in the middle section of the channel ($y = 0.5$)

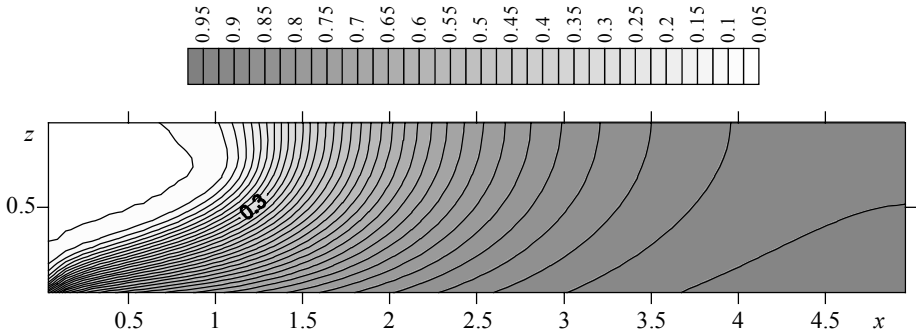


Рис. 5. Распределение безразмерной плотности гексафторида вольфрама $m_g \rho_g / \rho_{cm}$ в среднем сечении канала ($y = 0.5$)

Fig. 5. Distribution of the dimensionless density of tungsten hexafluoride $m_g \rho_g / \rho_{cm}$ in the middle section of the channel ($y = 0.5$)

На рис. 6 показано распределение изолиний относительной массовой концентрации фтора в плоскости OYZ для трех сечений $x = 0.02$; $x = 0.5$; $x = 1$. При движении газовой смеси по химическому реактору содержание в ней F_2 уменьшается, а WF_6 соответственно растет, в результате чего скорость фторирования снижается.

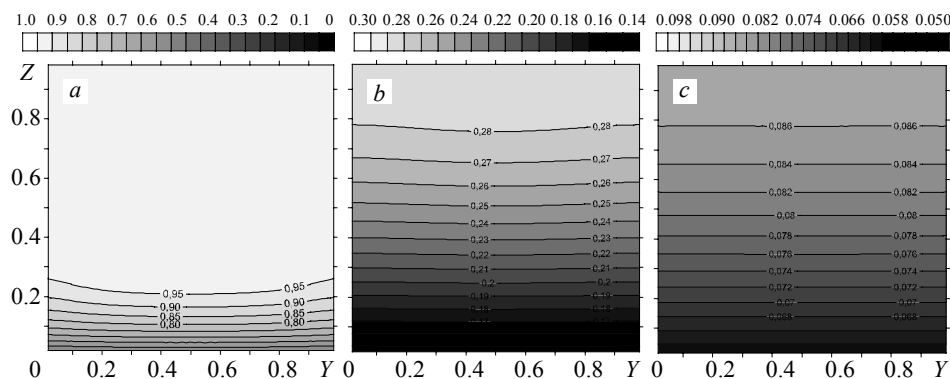


Рис. 6. Распределение изолиний относительной массовой концентрации фтора ε_F в плоскости OYZ для разных сечений по x : $a - x = 0.02$, $b - x = 0.5$, $c - x = 1$

Fig. 6. Distribution of the isolines of fluorine relative mass concentration ε_{Fi} in the OYZ plane in various cross sections along x axis: $x = (a) 0.02$, $(b) 0.5$, and $(c) 1$

Адекватность созданной модели подтверждают результаты, представленные на рис. 1 и 2. На рис. 3 – 6 представлено характерное распределение массовой концентрации фтора и температуры в химическом реакторе. Как видно из этих рисунков, процесс фторирования неподвижного слоя порошка вольфрама путем обдувания его газообразным фтором является весьма неоднородным. Это в первую очередь связано с нелинейным характером поля температуры вдоль рабочей зоны химического реактора за счет выделения дополнительного теплого потока, связанного с прохождением экзотермической реакции, а также с существенным увеличением плотности смеси вследствие этого перекрытием доступа компоненты фтора к реакционной области. Существенным фактором, оказывающим влияние на эффективность процесса фторирования, можно считать образование диффузионного пограничного слоя, который является причиной снижения скорости образования гексафторида вольфрама. Сложный нелинейный характер реализации процесса фторирования не позволяет эффективно применять методы планирования эксперимента для получения регрессионных зависимостей, связывающих основные показатели процесса с регулируемыми факторами (расход фтора, температура процесса и т.д.). Отсюда следует вывод, что математическое моделирование остается единственным способом получения достоверной качественной информации о протекании процесса фторирования порошкообразного вольфрама элементарным фтором [18, 19].

Разработанная математическая модель может быть использована для оптимизации процесса фторирования в существующих химических реакторах, а также может стать источником получения новой детальной информации о процессах переноса массы, импульса и энергии, что открывает перспективы для создания новых оригинальных технологических решений, обеспечивая при этом более высокий уровень защиты окружающей среды [20].

ЛИТЕРАТУРА

1. Королев Ю.М., Столяров В.И. Восстановление фторидов тугоплавких металлов водородом. М.: Металлургия, 1981.
2. Jung-Hwan Park. Mathematical modeling for chemical vapor deposition in a single-wafer reactor: Application to low-pressure deposition of tungsten // Korean J. Chem. Eng. 2002. V. 19. No. 3. P. 391–399.
3. Брендаков В.Н., Демиденко А.А., Шваб А.В., Евсеев Н.С., Брендаков Р.В. Способ получения вольфрамового изделия послойным нанесением вольфрама и устройство для его осуществления // Патент РФ № 2641596. 2016.
4. Шваб А.В., Гичева Н.И. Моделирование свободной и вынужденной конвекции в вихревой камере химического реактора // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 5 (49). С. 114–123. DOI: 10.17223/19988621/49/11.
5. Королев Ю.М. Осаждение вольфрама восстановлением его гексафторида водородом при стехиометрическом соотношении компонентов – экологически чистый процесс // Изв. вузов. Цвет. металлургия. 2015. № 1. С. 22–27.
6. Агноков Т.Ш., Королев Ю.М., Свицерский М.Ф., Соловьев В.Ф., Столяров В.И., Петрашин Н.П., Победаш Н.В. Некоторые принципы моделирования реакторов для фторирования металлического вольфрама // Химия и технология молибдена и вольфрама. Нальчик: КБГУ, 1979. С. 18–24.
7. Brendakov R.V., Shvab A.V., Brendakov V.N. Engineering computational method of process of fluorination metal tungsten // MATEC Web of Conferences. Ser. Thermophysical Basis of Energy Technologies, TBET – 2016. 2016. С. 01066.
8. Brendakov R.V., Shvab A.V., Brendakov V.N. Mathematical modelling of process of fluorination of metal tungsten // MATEC Web of Conferences. Ser. Heat and Mass Transfer in the System of Thermal Modes of Energy – Technical and Technological Equipment, HMTTSC 2016. 2016. С. 01018.
9. Шваб А.В., Брендаков Р.В., Королев Ю.М., Брендаков В.Н. Математическая модель процесса фторирования металлического вольфрама газообразным фтором // Актуальные проблемы инновационного развития ядерных технологий. Проект «Прорыв»: Материалы конференции в рамках научной сессии НИЯУ МИФИ – 2015. Северск: Изд. СТИ МИЯУ МИФИ, 2015. С. 77.
10. Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. Л.: Химия, 1981. 560 с.
11. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматлит, 1959. 699 с.
12. Брендаков В.Н., Шваб А.В., Брендаков Р.В. Инженерный метод расчета процесса фторидного передела тугоплавких металлов // Сб. научных трудов Всероссийской конференции. Заседания тематических секций по направлению «Инновационные ядерные технологии». 12 – 13 декабря 2016 г., Снежинск. М.: НИЯУ МИФИ; Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2016. С. 9–10.
13. Chorin A.J. Numerical solution of Navier – Stokes equations // Math. Comput. 1968. V. 22. P. 745–762.
14. Douglas J., Gunn J.E. A general formulation of alternating direction implicit methods. Part 1: Parabolic and hyperbolic problems // Numerische Math. 1964. B. 6. S. 428–453.
15. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия. 1967. 411 с.
16. Королев Ю.М. Оптимизация фторирования порошка вольфрама фтором в реакторе с неподвижным слоем при обеспечении экологических требований // Изв. вузов. Цвет. металлургия. 2016. № 4. С. 23–33. DOI: dx.doi.org/10.17073/0021-3438-2016-4-23-33.
17. Брендаков В.Н., Шваб А.В., Брендаков Р.В. Математическое моделирование фторидной технологии передела тугоплавких металлов // Материалы V научного семинара «Моделирование технологий ядерного топливного цикла». 25–29 января 2016 г. РФЯЦ-ВНИИТФ, г. Снежинск. С. 7–8.
18. Шваб А.В., Брендаков Р.В., Завьялов Е.Д., Брендаков В.Н. Взаимодействие естественной и вынужденной конвекции в технологиях ядерно-топливного цикла // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. 2016. Т. 5. № 1. С. 53–58

19. Брендаков Р.В., Завьялов Е.Д. Статистическая оценка параметров процесса фторирования металлического вольфрама // VI Школа-конференция молодых атомщиков Сибири: сб. тез. и докл., 14–16 октября 2015 г. Томск: Изд. СТИ НИЯУ МИФИ, 2015. С. 79.
20. Королев Ю.М. Экологически чистый фторидный передел в технологии вольфрама. Обоснование технологического цикла с кругооборотом фтора и водорода // Изв. вузов. Цвет. металлургия. 2016. № 6. С. 29–41. DOI: dx.doi.org/10.17073/0021-3438-2016-6-29-41.

Статья поступила 23.03.2018 г.

Shvab A.V., Brendakov R.V., Porokhnin A.Yu. (2018) MODELING OF THE PROCESS OF METALLIC TUNGSTEN FLUORINATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 116–129

DOI 10.17223/19988621/53/11

The most promising way to obtain wear-resistant coatings or the products made from refractory materials is the method based on the deposition of such materials from the gas-steam phase by reduction of their fluorides or chlorides. The first phase of this method is the obtaining of gaseous tungsten hexafluoride yielded by the reaction between fluorine gas and tungsten powder, which initiates at about 300°C. In this paper, a numerical calculation of the tungsten powder fluorination in a chemical reactor, whose working zone represented as a long channel of rectangular cross-section, is carried out. Passing through the active zone of the reactor, fluorine interacts with tungsten powder, and the process results in a tungsten hexafluoride formation. The aim of this work is to study the influence of the hydrodynamics and heat and mass transfer on the generation of gaseous hexafluoride of the metal. To clarify this effect, a numerical simulation of the system of three-dimensional Navier-Stokes equations and heat and mass transfer equations accounting for the presence of heterogeneous reaction on the lower face of working zone in the chemical reactor is implemented in this paper. In the problem considered, the fluid density is variable and depends only on the concentration of components in the mixture.

Keywords: tungsten, fluorine, tungsten hexafluoride, fluorination, mathematical model, numerical method, boundary conditions, completeness of use of the fluorine.

SHVAB Aleksandr Veniaminovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: avshvab@inbox.ru

BREDAKOV Roman Vladimirovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: brend989@gmail.com

POROKHNIN Aleksandr Yur'evich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

REFERENCES

1. Korolev Yu. M., Stolyarov V.I. (1981) *Vosstanovlenie ftoridov tugoplavkikh metallov vodorodom* [Recovery of the fluorides of refractory metals by hydrogen]. Moscow: Metallurgiya.
2. Jung-Hwan Park (2002) Mathematical modeling for chemical vapor deposition in a single-wafer reactor: application to low-pressure deposition of tungsten. *Korean J. Chem. Eng.* 19(3). pp. 391–399. DOI: 10.1007/BF02697145.
3. Brendakov V.N., Demidenko A.A., Shvab A.V., Evseev N.S., Brendakov R.V. (2016) *Sposob polucheniya vol'framovogo izdeliya posloynnym naneseniem vol'frama i ustroystvo dlya ego osushchestvleniya* [Method of obtaining tungsten product using layer-by-layer deposition of tungsten and device for its implementation]. RF Patent 2641596.
4. Shvab A.V., Gicheva N.I. (2017) Modelirovanie svobodnoy i vynyuzhdennoy konveksii v vikhrevoy kamere khimicheskogo reaktora [Modeling of the natural and forced convection in a vortex chamber of the chemical reactor]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*.

- Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 49(5). pp.114–123. DOI: 10.17223/19988621/49/11.
5. Korolev Yu. M. (2015) Osazhdenie vol'frama vosstanovleniem ego geksaftorida vodorodom pri stekhiometricheskom sootnoshenii komponentov – ekologicheskii chistyy tekhnologicheskii protsess [Deposition of tungsten by reduction of its hexafluoride with hydrogen under the stoichiometric component ratio – environmentally pure production process]. *Izvestiya vuzov Tsvetnaya metallurgiya – Proceedings of Higher Schools Nonferrous Metallurgy.* 1. pp. 22–27. DOI: 10.17073/0021-3438-2015-1-22-27.
 6. Agnokov T.Sh., Korolev Yu. M., Sviderskiy M.F., et al (1979) Nekotorye printsipy modelirovaniya reaktorov dlya ftorirovaniya metallichesкого vol'frama [Some principles of the modeling of reactors for metallic tungsten fluorination]. *Khimiya i tekhnologiya molybdena i vol'frama – Chemistry and technology of molybdenum and tungsten.* 4. pp. 18–24.
 7. Brendakov R.V., Shvab A.V., Brendakov V.N. (2016) Engineering computational method of process of fluorination metal tungsten. *MATEC Web of Conferences: Thermophysical Basis of Energy Technologies.* 92: 01066. DOI: 10.1051/mateconf/20179201066.
 8. Brendakov R.V., Shvab A.V., Brendakov V.N. (2016) Mathematical modelling of process of fluorination of metal tungsten. *MATEC Web of Conferences: Heat and Mass Transfer in the System of Thermal Modes of Energy–Technical and Technological Equipment.* 72: 01018. DOI: 10.1051/mateconf/20167201018.
 9. Shvab A.V., Brendakov R.V., Korolev Yu.M., Brendakov V.N. (2015) Matematicheskaya model' protsessa ftorirovaniya metallichesкого vol'frama gazoobraznym ftorom [Mathematical model of the metallic tungsten fluorination with a gaseous fluorine]. *Aktual'nye problemy innovatsionnogo razvitiya yadernykh tekhnologiy – Advanced problems of innovative development of nuclear technologies.* p. 77.
 10. Pavlov K.F., Romankov P.G., Noskov A.A. (1981) *Primery i zadachi po kursu protsessov i apparatov khimicheskoy tekhnologii* [Examples and problems on the course of processes and devices in the chemical technology]. Leningrad: Khimiya.
 11. Levich V.G. (1959) *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika* [Physicochemical hydrodynamics]. Moscow: Fizmatlit.
 12. Brendakov V.N., Shvab A.V., Brendakov R.V. (2016) Inzhenernyy metod rascheta protsessa ftoridnogo peredela tugoplavkikh metallov [Engineering method for calculating the process of fluoride redistribution of refractory metals]. *Sbornik nauchnykh trudov vs Rossiyskoy konferentsii. Zasedaniya tematicheskikh sekcii po napravleniyu "Innovatsionnye yadernye tekhnologii". Proceedings of the All-Russian Conference. Meetings on the thematic sections of "Innovative nuclear technologies".* pp. 9–10.
 13. Chorin A.J. (1968) Numerical solution of Navier – Stokes equations. *Journal of Math. Comput.* 22. pp. 745–762. DOI: 10.1090/S0025-5718-1968-0242392-2.
 14. Douglas J., Gunn J.E. (1964) A general formulation of alternating direction implicit methods. Part 1: Parabolic and hyperbolic problems. *Journal of Numerische Math.* 6. pp. 428–453. DOI: 10.1007/BF01386093.
 15. Petukhov B.S. (1967) *Teploobmen i soprotivlenie pri laminarnom techenii zhidkosti v trubakh* [Heat transfer and resistance during laminar fluid flow in the pipes]. Moscow: Energiya.
 16. Korolev Yu.M. (2016) Optimizatsiya ftorirovaniya poroshka vol'frama ftorom v reaktore s nepodvizhnym sloem pri obespechenii ekologicheskikh trebovaniy [Optimization of tungsten powder fluorination by fluorine in a fixed-bed reactor while ensuring environmental requirements]. *Izvestiya vuzov Tsvetnaya metallurgiya – Proceedings of Higher Schools Nonferrous Metallurgy.* 4. pp. 23–33. DOI: 10.17073/0021-3438-2016-4-23-33.
 17. Brendakov V.N., Shvab A.V., Brendakov R.V. (2016) Matematicheskoe modelirovanie ftoridnoy tekhnologii peredela tugoplavkikh metallov [Mathematical modeling of the fluoride technology for redistribution of refractory metals]. *Materialy V nauchnogo seminar "Modelirovanie tekhnologiy yadernogo toplivnogo tsikla" – Proceedings of the V scientific seminar "Modeling of nuclear fuel cycle technologies".* pp. 7–8.
 18. Shvab A.V., Brendakov R.V., Zav'yalov E.D., Brendakov V.N. (2016) Vzaimodeystvie estestvennoy i vynyuzhdennoy konveksii v tekhnologiyakh yaderno-toplivnogo tsikla [Interac-

- tion of the natural and forced convection in the nuclear fuel cycle technologies]. *Vestnik Nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta MIFI*. 5(1). pp. 53–58. DOI: 10.1134/S2304487X16010132.
19. Brendakov R.V., Zavyalov E.D. (2015) Statisticheskaya otsenka parametrov protsessa ftorirovaniya metallichesкого vol'frama [Statistical estimation of the parameters of metallic tungsten fluorination]. *VI Shkola-konferentsiya molodykh atomshchikov Sibiri: sbornik tezisov i dokladov – VI School-conference for young nuclear scientists in Siberia: theses and reports*. p. 79.
20. Korolev Yu. M. (2016) Ekologicheskii chistyii ftoridnyi peredel v tekhnologii vol'frama. Obosnovanie tekhnologicheskogo tsikla s krugoborotom ftora i vodoroda [Ecologically innocuous fluoride cycle in tungsten technology. Justification of technological process with the circulation of fluorine and hydrogen]. *Izvestiya vuzov Tsvetnaya metallurgiya – Proceedings of Higher Schools Nonferrous Metallurgy*. 6. pp. 29–41. DOI: 10.17073/0021-3438-2016-6-29-41.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БАРАННИКОВА Светлана Александровна – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения СО РАН; профессор Томского государственного университета. E-mail: bsa@ispms.tsc.ru.

БРЕНДАКОВ Роман Владимирович – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: brend989@gmail.com

БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич – кандидат физико-математических наук, ведущий специалист отдела инновационного развития и интеллектуальной собственности производственно-технического управления ООО «Газпром Трансгаз Томск». E-mail: michael121@mail.ru

ГАЛАНОВА Наталья Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: galanova@math.tsu.ru

ГЛАЗУНОВ Анатолий Алексеевич – профессор, доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики, профессор кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета. E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

ГЛАЗУНОВ Павел Анатольевич – заместитель начальника управления разработки месторождений ОАО «ТомскНИПИнефть», г. Томск. E-mail: glazunovpa@sibmail.com

ЕРЕМИН Иван Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета. E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru.

ЖАРМУХАМБЕТОВА Альбина Муратовна – аспирантка физико-технического факультета, младший научный сотрудник «Междисциплинарной лаборатории компьютерного моделирования и анализа конденсированных сред» Томского государственного университета. E-mail: bsa@ispms.tsc.ru

ЖИЛЬЦОВ Константин Николаевич – инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: konstantin@niipmm.tsu.ru.

ЗУЕВ Лев Борисович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией физики прочности Института физики прочности и материаловедения СО РАН, профессор Томского государственного университета. E-mail: lbz@ispms.tsc.ru

ЗЯТИКОВ Павел Николаевич – доктор технических наук, профессор кафедры разработки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений, Инженерная школа природных ресурсов Томского политехнического университета. E-mail: zpavel@tpu.ru .

КАНЕВСКАЯ Ирина Юрьевна – кандидат сельскохозяйственных наук, Саратовский государственный аграрный университет имени Н.И. Вавилова, г. Саратов. E-mail: ir.kanevskaya@yandex.ru

КОЛЫХАЛОВА Ольга Эдуардовна – аспирантка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ms.friol@mail.ru

КОСТЮШИН Кирилл Владимирович – аспирант физико-технического факультета; младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: kostushin@niipmm.tsu.ru

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

КРИВУЛИНА Эльвира Федоровна – кандидат технических наук, доцент кафедры Теории сооружений и строительных конструкций Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина. E-mail: orifelwi@mail.ru

КРЫЛОВ Петр Андреевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: krylov@math.tsu.ru

ЛИ Юлия Владимировна – аспирантка Института физики прочности и материаловедения СО РАН, г. Томск. E-mail: jul2207@mail.ru

МАНЖАЙ Владимир Николаевич – доктор химических наук, профессор кафедры разработки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений, Инженерная школа природных ресурсов Томского политехнического университета. E-mail: mang@ipc.tsc.ru

МОИСЕЕВА Ксения Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru.

НОРБОСАМБУЕВ Цырендоржи Дашацыренович – аспирант кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: NsTsdDts@yandex.ru

ПОРОХНИН Александр Юрьевич – студент физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: avshvab@inbox.ru

ПОРЯЗОВ Василий Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: poryazov@mail.ru.

РЕШЕТИЛОВСКИЙ Владимир Петрович – доктор химических наук, профессор, директор Института технической химии Технического университета г. Дрездена (Германия). E-mail: wladimir.reschetilowski@tu-dresden.de

СМОЛЕНЦЕВ Николай Константинович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной математики факультета фундаментальных наук Кемеровского государственного университета. E-mail: smolennk@yandex.ru

СОЛОВЬЕВ Василий Васильевич – аспирант кафедры разработки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений, Инженерная школа природных ресурсов Томского политехнического университета. E-mail: solowyev@gmail.com

СУХАЧЕВА Елена Сергеевна – аспирантка кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: sirius9113@mail.ru

ТЫРЫШКИН Илья Михайлович – научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета. E-mail: tyryshkin@niipmm.tsu.ru

УСЕНКО Олеся Вадимовна – кандидат физико-математических наук, Томский государственный университет. E-mail: usenko.olesya@yandex.ru.

ШВАБ Александр Вениаминович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: avshvab@inbox.ru

ШУВАРИКОВ Владимир Андреевич – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: shuvaa@niipmm.tsu.ru.

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 15.06.2018. Выпуск в свет 29.06.2018.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10.64. Уч.-изд. л. 11.92. Тираж 250 экз. Заказ № 15. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 3237.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru